数学的問題解決に関する多様な解や方略を扱う研究の動向と展望

教育内容開発コース　　鈴　木　　豪

Multiple Solutions and Multiple Solution Methods in Studies of Mathematical Problem Solving: A Review

Go Suzuki

There are many studies of “multiple solution methods” or “multiple solutions” on mathematical problem solving. In this article, such studies were sorted out according to the types of problems used. The problems were categorized as follows: (A) problems that have multiple solutions mathematically, (B) problems that have multiple solutions due to their contexts, and (C) problems that can be solved by multiple solution methods. In addition, (D) there are comparison studies on correct and incorrect solution methods. The accomplishments of these previous studies as well as their remaining tasks were discussed.

目　　次

1　はじめに
2　数学的問題解決の過程と方略
3　解や解決方略が多様である（複数ある）課題を扱った研究や実践
　A　解が複数ある課題
　　1．数学的に解が複数ある課題
　　2．解が複数ある課題における方略と解の対応
　　3．解が複数ある課題を扱う研究の意義と課題
　B　課題の文脈設定から解が複数ある課題
　　1．課題の文脈設定から解が複数ある課題を扱う課題と研究例
　　2．課題の文脈設定から解が複数ある課題を扱う意義と課題
　C　解決方略が複数ある課題
　　1．適切な方略が複数ある場合
　　2．適切な解決方略が複数ある課題を扱う意義と課題
　D　誤方略を含めた検討
4　それぞれの課題に対応する研究の展望
　A　心理学的研究の整理
　B　教科教育研究，教育実践との関わり
5　おわりに
引用文献

1　はじめに

心理学においては，人の問題解決過程が古くから主要な研究テーマの一つとなってきた。その中で，算数・数学の学習における問題解決も心理学あるいは教科教育の研究の対象となってきた。

多様な解法が扱われることは，日本の算数・数学授業の特徴の一つとされる（Stigler & Hiebert, 1999）。教育心理学の研究においても，複数の解や問題の解決方略が研究の主題として扱われることがしばしば見られる（e.g., Rittle-Johnson & Star, 2007; Star & Rittle-Johnson, 2009；鈴木，2015）。また，算数・数学の教科教育の研究や実践事例においても，多様な考え方を扱うものが複数見られる（e.g., 福岡県苅田町立苅田小学校・岩田，2011；礒田，1996；斉藤，2010；篠原，2013）。これらの研究や実践を整理することは，日本の授業の特徴を再確認し，よりよい教授方法や学習方法を考える上で意義があると考えらえる。

藤村（2012a）の一部において，多様な考えを比較検討する授業に関する研究のレビューが既に行われているが，このレビューは，より広い視点から数学的思考や授業過程をまとめたレビューの一部であり，多様な解や解決法略を扱う研究には焦点化されていない。そこで，本稿では，近年のものを中心に，算数・数学の学習における数学的問題解決に関して，解や方略の多様性を主眼に置いた研究を整理することを試みる。

2　数学的問題解決の過程と方略

数学的問題解決過程のモデルや，それをもとにした教授方略が考案されてきた。その数モデルでは，数学的問題解決には，いくつかの段階あることが想定されている（e.g., Mayer, 1992, Polya, 1957 柿内訳 1975, Schoenfeld, 1985）。

例えば，Polya（1957 柿内訳 1975）は，⑴問題を理解すること，⑵計画をたてること，⑶計画を実行すること，⑷ふり返ってみること，という４段階を提示した。また，Mayer（1992）文章題の解決過程として，⑴情報の変換，⑵情報の統合という問題を理解するための２段階と，⑶解決方法の計画，⑷計画の実行という２段階の4段階のモデルを提唱した。

いずれも，問題から情報を読み取り，解決方法を考え，それを実行するプロセスを表していると解釈できる。情報を読み取る方略，プランを立てる方略など，それぞれの段階に対応した方略を考えることもできるだろう（e.g., Polya, 1957　柿内訳1975；Schoenfeld, 1985）。課題を解決する際の段階それぞれに対応する方略が存在するとすれば，問題解決のための方略は多様に存在する。ただし，本稿では「多様な（または複数の）方略」を扱った研究として，ある課題について回答するための一連の手続きとしての方略が多様（複数）であるものを取り上げる。ある課題が解決される過程において，同一の課題であるにも関わらず，単一でない回答が導かれることや，複数の解決方略が存在することが，学習者にとってどのような影響を及ぼすのかを中心に検討するためである。

また，算数や数学の問題解決において，それが比較的単純なものであっても，取りうる方略は一つとは限らない場合がある。例えば，一桁の足し算や引き算といった課題であっても，それを習得する前後の時期の子どもが用いる方略は多様であることが示されている（e.g., Fuson, 1982; Siegler, 1996）。例えば，３＋５＝８という一桁の足し算を行う場合において，指を使って１からすべて数え上げるカウント・オール方略（count-all）や大きい方（この場合は５）から数え始めるミン方略（min），解答を記憶から引き出す検索方略（retrieval）などが見られる（e.g., Siegler, 1996）。

一方で，前述のとおり方略には様々なものがあるが，すべての方略が平等に使われるわけではない。例えば，ある方略よりも簡便で正確に解決できる方略があれば，多くの人はそちらを採用するだろう。十分に学習が進んだ子どもや大人においては，一桁の足し算は多くの場合が検索方略によって解決され，その方略に多様性は少ないと考えられる（より広い年齢や領域における方略選択のレビューとしては，Siegler, 1991; Siegler, Adolph, & Lemaire, 1996 などを参照）。

なお，本稿で扱う「多様」「複数」という用語は，その課題が用いられた研究対象者にとって多様性が認められることを前提とする。また，「多様」は主に複数の学習者が様々な方略を用いたり，解を求めたりする場合に用い，「複数」は，主に同一学習者が複数の方略を用いたり，解を求めたりする場合に用いることとする。ただし，明確に区別せずにまとめて述べる場合は，「多様」を用いることとする。

3　解や解決方略が多様である（複数ある）課題を扱った研究や実践

算数・数学の授業や研究では，しばしば解や解決のための方略が複数ある問題が扱われる。藤村（2012b）は，PISA 調査の結果などの分析などから，課題について，解き方がひと通りに定まり，手続き的な知識やスキルの適用で解決できるような「定型的問題」と，解や解法が多様であり，様々な知識を組み合わせることで解決可能な「非定型的問題」に分類し，日本の子どもが，非定型的問題が定型的問題に比べて苦手であることを指摘した。非定型的な課題は，既習内容の当てはめでは正答できないことから，より深い理解を測る課題であると考えられる（藤村，2012b）。

また，多様な解決方略を扱うことは，国際比較からも日本の数学授業の特色の一つとされており（Stigler & Hiebert, 1999），多様な解法を扱う実践法の紹介などもなされている（e.g., 福岡県苅田町立苅田小学校，2011）。

一方，多様な解や解決方略がある課題にも，様々な性質のものが存在すると考えられる。多様な解や方略が研究の主題となるとき，それらの解や方略の多様性の原因が何であるかは，その研究の目的や得られる成果や目的と関連する可能性が高いと考えられる。そのために，「多様な解や解決方略を持つ課題にはどのようなものがあるか」という観点から既存の研究を整理し，それぞれのタイプの課題を扱う研究がもたらす意義や課題を考察する。なお，本稿では，基本的に「解」は，課題の回答となる数値や結論や結論を指し，方略はそれに至るための方法を指すものとする。

A　解が複数ある課題

1．数学的に解が複数ある課題

まず，算数や数学の教育において解が複数ある課題について検討する。解が複数ある問題には，どのようなものが考えられるだろうか。

典型的な例の一つとして考えられるのは，「$x^2 = 4$ を満たすxを求めよ」という課題に対して，- 2と2が解となるように，数学的に条件を満たす解が複数存在する課題である。負の数は，小学校で扱われる概念ではないが，課題の文脈次第では，複数解が存在する課題も設定し得る（具体例は後述）。Verschaffel, De Corte, & Lasure（1994）やYoshida, Verschaffel, & De Corte（1997）は，ベルギーや日本の児童が，現実的な文脈[1)]を考慮して算数課題に回答できるかが調査した。用いられた課題の中に解が一つの数値に定まらない課題が含まれたが，複数の解の存在や数値が一つに定まらないことに言及した児童はほとんど見られなかったという（Verschaffel et al., 1994; Yoshida et al., 1997）。

金田は，小学生の複数解を求める数的思考に着目し，複数解を持つ問題の解決について研究を行った（e.g., 金田，2003，2007；Kinda, 2006）。複数の解が存在する課題は，金田（2003）によれば，日本の小学校の算数教科書ではほとんどみられないという。

金田の研究における「答えが複数ある」問題とは，“情報の不足が原因となって問題状況が曖昧になり多義的解釈ができるようになり，問題文中の数値を使って複数の解を導きだせる内容の問題”であると定義されている（金田，2007）。より具体的には，“Aは長さ12cmの鉛筆を持っています。Bの持っている鉛筆の長さは，Aの持っている鉛筆の長さと5cm ちがいます。では，Bの持っている鉛筆の長さは何cmでしょうか”（金田，2003）のような課題である。この課題では，解は「7cm」と「17cm」の2つが考えられる。この課題では，題材が鉛筆であるので解は2つに限られるが，“Aの家から学校までは，500mはなれています。学校からBの家までは300m離れています。では，Aの家とBの家は何mはなれているでしょうか”（金田，2003）[2)]のような問題では，解は200mから800mの間で無数に想定しうることになる。

金田（2003）では，小学生の複数解を考えることが求められる課題について，⑴普通条件（複数解があることが特に明示されない条件），⑵教示条件（解が複数ある可能性があることを教示される条件），⑶提示条件（複数解が存在することを教示される条件），の順で難度が高いことが明らかにした。金田（2007）は，さらに小学2～5年生を対象として，複数解を考えることができるかどうかの学年差や認知過程を調査した。その結果，5年生が4年生以下の児童に比べて学習により複数解を考える数的思考を行うことでできるようになる可能性が高いこと，複数解のある問題を解決する経験は，一般的な文章題の解決に対して悪影響をもたらさないことが明らかにされた。

金田（2003）は，複数解を求める数的思考の難しさについて，⑴複数解があることに気づく，⑵複数の場合を想定する，⑶それぞれの場合について実際に解を求める，という3つが求められ，⑴や⑵に難しさがあることを指摘した。特に，⑴については，算数の学習において，複数解が存在し，それを求める問題を経験することがないことが一因として指摘した（金田，2003）。

金田の研究は，複数解が扱われることが少ない小学校の算数において，複数解を求める思考過程を検討したものであった。中学生以上の複数解のある課題を既習である者にとっては，難度はそれほど高いものではなかったと考えられる。実際に，金田（2003）の予備調査では，高校生のほとんどが複数解を考慮したことが報告されている。

一方で，解が複数あることや無数にあることに気づくことが，解が複数ある課題について既習であっても，難しい課題も想定される。例えば，橘・藤村（2010）は，高校生を対象として，図形を分割する問題（例えば，正方形を4本以下の線分を用いて合同な4つの図形に分割する課題[3)]）の解決過程を検討した。ここで挙げた例では，様々な分け方が存在するが，“分け方がいくつ存在するか”という問いに対しては，正方形の対角線の交点を通り直交する2直線を用いて分割する方略を用いれば，分け方は無数に存在することとなる（橘・藤村（2010）では「回転無限方略」と呼ばれた）。この課題において，解が無数にあることに気づくには，対角線や辺と直行する線で分割するような，分割後が典型的な図形にならない場合でも，合同な図形に分割することができることに気づく必要があると考えられる。橘・藤村（2010）が用いた課題も，分け方を有限個，または一つに定めるための条件が示されていないため，金田（2007）の定義に従えば，解が複数存在する課題であると解釈できる。

2．解が複数ある課題における方略と解の対応

解が複数ある課題において，その解決方略は必ず多様であるだろうか。金田（2003，2007）などが用い

た課題や，先に例として上げた「$x^2=4$ を満たすxを求めよ」というような課題においては，複数の解それぞれに至るための方法は，符号の違いのみであり，基本的には同じ方略であると考えることもできるだろう。また，橘・藤村（2010）のような課題においては，「回転無限方略」という方略そのものが複数解（無数の解）に対応する方略であると考えられる[4)]。解の数が解決方略よりも多い場合も考えられるだろう。

3．解が複数ある課題を扱う研究の意義と課題

以上のように，解が１つに定まるための条件が示されていないために，解が複数（場合により無数）に存在する問題が考えられる。先に挙げた，金田（2003, 2007），Kinda（2006）では，対象となった小学生においては，算数で扱われる課題の解は一つの数値であることが大半であり，複数解を考慮することは通常は困難であると考えられた。また，橘・藤村（2010）においても，図形の分割方法の数という，（少なくとも研究対象となった高校生の多くには）有限個と判断されやすい解が無数にあることに，どのようにして気づき，説明できるようになるかという問題解決過程が主たる分析対象であった。金田（2003）は，“場合分け能力”とも表現しているが，これらの課題において求められるのは，条件を満たしうる解をすべて網羅的に考慮できることであると考えられる。

当該の学習者にとって気づくことが難しい複数解の可能性について，いかにして気づき，回答できるかが先に挙げた研究の焦点となっている。このような課題を設定することは，学習者が限られた数の解しか発見できない状態から，より多くの解の発見へと変化する認知プロセスを検討することができることに意義があると考えられる。一方，これらの研究の中心は，複数（無数）の解に至るプロセスの検討が中心であった。その課題の特質から複数の解同士の関連づけの検討などはなされていない。

B　課題の文脈設定から解が複数ある課題

1．課題の文脈設定から解が複数ある課題を扱う課題と研究例

前節で検討した解が複数ある課題において，適切な回答として想定されるのは，解となる可能性を網羅的に示すことであった。解は複数存在するものの，「正答が複数の解を網羅するものに定まる」という観点から見れば，算数・数学の文章題としては比較的，典型的なものであると考えられる。一方で，課題の設定によっては，課題の文脈から「正答」を一つの解に定めることが難しい課題も存在すると考えられる。例えば，平成24年度の全国学力・学習状況調査の数学Ｂ問題において，次のような問題が出題された。２人のスキージャンプ選手の飛行記録を表すヒストグラムが示され，どちらの選手が次により遠くへ飛べそうかを選択し，ヒストグラムの特徴と関連づけて理由を説明させる，というものである（国立教育政策研究所，2012）。この課題においては，最大値，中央値，特定の値以上の度数など，ヒストグラムの特徴と適切な関連づけがなされていれば，いずれの選手を選択したとしても正答とされた。「より遠く飛べそうな選手」を解とみなせば，この課題には複数解が存在すると考えることができる。

鈴木（2014, 2015）は，複数の考え方（代表値）の比較方法が課題解決に及ぼす影響を検討するために，小学５年生を対象に，２つのデータを比較させる課題や，外れ値が含まれる表から次に得られる値を予測させる課題を用いた検討を行った。鈴木（2014, 2015）で用いられた課題も，国立教育政策研究所（2012）と同様，複数解を持つ課題と解釈できる。全国学力・学習状況調査の課題（国立教育政策研究所，2012），鈴木（2014, 2015）の課題のいずれも，データを読み取り，どちらの選択肢が妥当かを判断し，その理由を説明することが求められる課題であった。鈴木（2014, 2015）では，事前に複数の代表値を用いた比較方略について，最も良いものを選択させるよりも，共通点・相違点を考えさせる介入を行う方が，事後の課題について，より多くの観点から説明を行い，また，既習の方略が不適切な場合に他の方略が利用できるようになることが示された。

また，データの読み取りでなく，逆にデータをどのように示すことが良いかについて，適切なグラフの選択方法について考える実践も試みられている（古藤・新潟算数教育研究会，1990）。こうしたデータを扱う課題は，さまざまな判断基準が存在するために複数解が存在する，あるいは結論が一意に定まらない課題であると考えられる。

また，データの読み取り課題以外にも，複数解が存在すると考えられる課題が教育心理学の研究で扱われている。Star & Rittle-Johnson（2009）は，５，６年生を対象として，１～３桁の整数のかけ算について，複数の概算方略（e.g., 1の位で四捨五入をしてから計算する，１の位をすべて切り捨ててから計算する）の比較を行うことが，概数を求める方略や知識の獲得に及ぼす影響を検証した。その結果，複数の方略を順番に学

習するよりも，比較しながら学習する方が，解決における柔軟性（複数の方略に気づく，方略の簡便さの評価ができる，方略の正確性の評価ができる）が促進された（Star & Rittle-Johnson, 2009）。

２．課題の文脈設定から解が複数ある課題を扱う意義と課題

以上のような課題では，どのような結論や解を選択するかについて，課題中に示される情報のみからは一つに定まらないため，学習者が選択する必要があると考えられる。例えば，先に挙げたスキージャンプの選手についての課題（国立教育政策研究所，2012）では，「次に〇〇m飛ばないと優勝できない」「一方の選手はその数値を上回ったことがない」といった情報が追加されれば，どちらの選手を選ぶべきかを課題中の情報から選択することができるだろう。Star & Rittle-Johnson（2009）においても，素早く計算する必要があるのか，比較的正確な値を求めるのかが学習者に任される場合，いずれの方略をとっても，それにより得た回答は妥当性を持つ可能性がある。

そのため，課題の文脈設定から解が複数ある課題では，「解」に付随して，なぜその結論や解が妥当であるのかを説明することが求められると考えられる。なぜならば，説明のためには，結論や解と関連する既習内容や，自身が日常的に得た知識との関連づけが必要であると考えられるからである。そうした深い理解を促進する，あるいは測定することへの有効性という観点から，課題の文脈から解が複数ある課題を扱う場合には，その理由を説明することを求めることが，必要であると考えられる。より深い理解ができているかを測定する，あるいは理解を促進することを目的として，複数解がある課題を設定することには意義があると考えられる。

なお，本節で例として挙げたような課題では，複数の解それぞれに至るために異なる方略が考えられる。例えば，概算の課題では，計算の正確さを重視して四捨五入をかける数のみに行ったり，計算の簡便さを重視して，すべて小さい桁を切り捨てて計算したりといった異なる方略が考えられる。そのため，課題の文脈設定から解が多様である課題においては，多くの場合において方略も対応して多様であると考えられる。

本節で検討された課題における複数解の多くは，主に研究者が事前に設定したものであり，学習者自身によって考案されたものではない。文脈設定上で複数解があるような課題において，いかにして学習者が適切な回答を形成するかのプロセスについて，今後さらに検討されるべきであろう。

C　解決方略が複数ある課題

１．適切な方略が複数ある場合

第２章で触れたように，解が一つであってもその解に至ることのできる方略は一つとは限らないと考えられる。特に，Rittle-JohnsonやStarらは，複数の解決方略を比較[5]することの効果を検証した（Rittle-Johnson & Star, 2007，2009；Rittle-Johnson, Star & Durkin, 2012）。Rittle-Johnson & Star（2007）は，７年生を対象として，一次方程式について，複数の方略（括弧でくくられた部分を展開した後に移項などを行う方略，できるだけ括弧でくくられた部分をそのまま計算してから展開する方略）を比較させながら学習する場合と，順に学習する場合で，学習効果に差異が見られるかを検証した。その結果，比較しながら学習する方が，一次方程式の解決における手続きの柔軟性（例えば，一つの課題に対して複数の解法を使うことができる）が高まることが明らかにされた。Rittle-Johnson & Star（2009）では，Rittle-Johnson & Star（2007）と同様に，一次方程式の解決について，（a）同じ方略で解ける複数の同タイプの問題の比較，（b）同じ方略で解ける異なるタイプの問題の比較，（c）同じ問題に対する異なる方略の比較，の３条件の学習の効果について比較を行った。その結果，一次方程式の解法に関する概念的知識（例えば，どの括弧でくくられた項を結合できるかが適切に指摘できる）や手続きの柔軟性が，（c）の解決方略の比較を行った場合に最も促進されることが明らかとなった。同様の結果は，Rittle-Johnson, Star & Durkin（2009）における７，８年生を対象とした研究でも一部再現され，事前に一次方程式の解法についての一定の知識があった生徒にとって，複数の解決法略を比較することが効果的であることが示された。ただし，Rittle-Johnson et al.（2009）では，既有知識が少ない生徒にとっては，上記の効果は見られなかった。

また，藤村・太田（2002）は，小学５年生の単位当たり量の導入授業において，複数の方略を授業中に扱い，児童の解決法略の変化を検討した。混み具合を比較するために，比較する量を整数倍し，他方と数値をそろえて比較する方略（倍数操作方略）と，単位当たりの混み具合を算出して比較する方略（単位あたり方略）が中心として検討された。倍数操作方略は，「200㎡に15人の混み具合と400㎡に45人の混み具合を比べる」ような，一方の量を整数倍することで，数値をそろえることができる課題においては有効である。しか

し，「320㎡に48人の混み具合と，350㎡に56人の混み具合を比べる」ような，整数倍で数値を揃えることが困難な課題に適用することは難しい。倍数操作の理解に依拠した指導法を行った学級では，従来の指導法を行った学級よりも，授業と同一領域の課題において単位あたり方略の利用を促進する効果が見られた（藤村・太田，2002）。倍数操作方略，単位あたり方略のいずれも，それを適用できる課題については，適切な比較を行うことが可能であるが，常に利用可能という点で，単位あたり方略の方がより洗練された方略であると考えられる。

２．適切な解決方略が複数ある課題を扱う意義と課題

Rittle-Johnsonらの一連の研究（Rttle-Johnson & Star, 2007, 2009; Rittle-Johnson et al., 2009）において，一貫して促進効果が見られたのは，同じ課題に対して，さまざまな解決方略を示すことができるという手続きの柔軟性であった。複数の方略を比較することで，それらの方略の特徴がより明確になること，一般に複数の解決方略が存在することの認識，その後のまとめの授業のへの準備となったことが，その効果の要因として挙げられた（Rittle-Johnson & Star, 2007）。また，藤村・太田（2002）では，児童にとって既有知識をもとに利用しやすい倍数操作方略に依拠する指導が，より一般的に利用可能な単位あたり方略の利用へと繋がることが示唆された。

いずれの研究も解決法略のレパートリー増加の点で効果が認められた点では共通し，意義があると考えられる。ただし，Rittle-Johnsonらの研究では，柔軟な解決方略の選択という点で効果が見られたのに対し，藤村・太田（2002）では，既有知識を活かした方略を足がかりとして，より洗練された方略の獲得が見られたという点が異なると考えられる。

これらの研究では，一次方程式の解法，混み具合比較の領域で検討されたが，他領域で同様の効果が得られるのかの検討や，他領域に転移できるようになる条件などの検討が，今後必要であろう。

Ｄ　誤方略を含めた検討

ここまで概観してきた研究で主として扱われた複数の解や解決方略は，それぞれが妥当性を持つものであった。しかし，学習者が問題解決において用いる方略や，それによって得られる解には，当然ながら誤ったものが含まれることがある。よって，誤った解や誤った方略を対象として含めて考える場合，そこには複数の解や方略が存在することとなる。

河﨑（2010），河﨑・白水（2011）は，小学５年生を対象として，混み具合比較課題における正・誤解法の両者を扱うことの効果を検討した（正解法は，単位あたりの混み具合を算出し比較する，誤解法は，２つの量同士の引き算をして比較する）。その結果，誤解法・正解法の両者を扱う方が，正解法のみを扱うよりも正解法の利用が促進されるということが示された（河﨑，2010；河﨑：白水，2011）。また，Durkin & Rittle-Johnson（2012）は，４，５年生を対象として，小数の大小比較について，正しい方略同士の比較を行う条件と正・誤方略の比較を行う条件の比較を行った。その結果，事後遅延テストにおいて，手続き的知識の得点や，誤概念による誤りの少なさにおいて，正・誤方略の比較を行う条件の成績が良かった。正・誤方略を含めて検討することで，誤方略がなぜ誤っているか，正方略がなぜ正しいのかといったことが明確になり，教授効果が得られると推察される。

４　それぞれの課題に対応する研究の展望

Ａ　心理学的研究の整理

本稿では，教育心理学や教科教育教の文献でしばしば見られる「多様な解」「多様な方略」といったものが何をもたらすのかについて，課題から研究を分類整理することを試みた。ここまでの議論を整理するとTable 1 のようになると考えられる。ここでは，それぞれの分類における今後の研究課題や展望を述べる。

Ａの数学的に解が複数（無数）にある課題について検討されてきたのは，ある特定の学習者が複数解（無数の解）に至ることのできる発達段階や，理解が深ま

Table１．本稿で整理した課題

課題の分類	解	方略	研究の主眼および得られている主な成果
Ａ　数学的に解が複数（無数）に存在する	多様	単一	複数解(無数の解)に至る認知過程
Ｂ　課題の文脈設定から解が複数ある	多様	多様	解の選択とその選択に関する説明の構築
Ｃ　適切な方略が複数ある	単一	多様	柔軟な方略選択の促進
Ｄ　正方略・誤方略の検討	多様	多様	適切な方略の利用促進，誤った方略の抑制

るプロセスが検討されてきた。これらを今後さらに検討することは，学習者の算数・数学の概念的な理解の深まりを検討する上で重要であると考えられる。

Ｂの課題の文脈設定から解が複数ある課題については，特定の学習者がすべての解に言及できるか否かよりも，どの解を選択するか，なぜその解に至ったのかの理由の説明が主たる分析対象であったと考えられる。金田（2003）が指摘するように，我々は日常生活においては，解が複数存在する問題に直面することがあるだろう。そして，課題文中でなく，自らの知識とも関連づけたり，判断の妥当性について説明できたりすることが，特に昨今では求められていると考えられる。Ｂに分類されるような課題は，藤村（2012b）が指摘するように，多様な解や解法があり，様々な知識の組み合わせで回答できるような「非定型的」な課題に分類されるものが多いと考えられる。このような課題が，日本の子どもの弱点であるとするならば，Ｂに分類されるような課題に適切に回答できるようになるための更なる検討が必要であろう。

Ｃの解決方略が複数ある場合については，Rittle-Johnsonら（e.g., Rittle-Johnson & Star, 2007）が主として検討した方程式を解く方略は，計算手続きとしては複数あるが，それぞれの手続き自体は複雑なものでなかった。どのような課題であっても，一つの方略だけを使い続けるのでなく，柔軟に方略選択できることは，効率よく問題解決を行う上で重要な要素の一つであろう。ただし，それぞれの方略の習得自体は計算手続きの習得であり，日本の子どもにとっては，さほど困難な課題ではないと考えられる。

一方で，藤村・太田（2002）やＤの誤方略を扱った河﨑（2010），河﨑・白水（2011）では，複数の解決方略の比較を通じて，より洗練された方略の使用や理解の促進が目指された。紙幅の都合上，詳しく検討できなかったが，例えば，小田切（2013）は，高校生の数学授業を対象として，教室全体での討論を通じた多様な考えの統合過程を検討している。他の領域での検討や，どのような発問や比較方法がより効果的かさらなる検証を行うことが今後の課題であろう。

以上のように，多様な解や方略が主眼に置かれた研究であっても，そこで扱われる課題の性質は異なり，そこから目指すところも異なる。特に，日本の子どもの課題を克服するためには，Ｂに分類されるような課題で適切に回答できるようになる教授方略や，ＣやＤにおける複数の方略の検討を通じた理解の深まりについてさらに検討することが必要であると考えられる。

Ｂ　教科教育研究，教育実践との関わり

最後に，教科教育の実践研究との対応を述べる。ここでは，特に「多様な考え」を扱う授業を構成することを意図した福岡県苅田町立苅田小学校・岩田（2011）および，古藤・新潟算数教育研究会（1990）を取り上げる。

福岡県苅田町立苅田小学校・岩田（2011）では，「多様な考え」のまとめ方として，５種類のアプローチを提案した。（ア）共通点抽出型Ⅰ：複数の考えの価値が同等で共通点がある，（イ）共通点抽出型Ⅱ：単一の考えを複数の課題に適用し共通点を抽出する，（ウ）選択型：より価値の高いものを選択する，（エ）共通点を抽出後により価値の高いものを選択する，（オ）双方成立型：双方を同価値と認める，の５種である。（ア）や（オ）は，本稿で整理したＢの課題の文脈から複数解が存在する課題や，Ｃの適切な方略が複数存在する課題と対応付けることができると考えられる。また，（ウ）は，Ｄの誤方略を含めた検討と，（エ）は，Ｃの適切な方略が複数あり，かつそれらの洗練の度合いに差異があるような場合（e.g., 藤村・太田，2002）のような課題と対応づけることができるだろう。（ア）については，Rittle-Johnson & Star（2009）で検討された同型の課題を同一方略で解く条件に近いと考えられる。

また，古藤・新潟算数教育研究会は，多様な考えの構造化について，（ア）序列型：一番良い考え方に絞る，（イ）統合型：それぞれの考え方を一つにまとめる，（ウ）独立型：それぞれの良さを称揚する，（エ）構造型：それぞれの考えの共通性に着目し，一つに絞る，４種を提案した。（ア）（イ）（エ）は，本稿での整理における，Ｄ誤方略も含めた検討や，Ｃの適切な方略が複数あり，かつそれらの洗練の度合いに差異があるような場合と対応づけられるだろう。ただし，方略間や解の関連づけの方法が，優劣をつけるのか，一つに統合するのか，共通点を検討した上で一つに絞るのかが異なる。（ウ）は，Rittle-Johnson & Star（2007）が用いた一次方程式の計算手順のような，方略が複数ある場合と対応づけられるかもしれない。

以上のように，本稿における課題の整理と，教科教育実践から提案された，多様な考えの扱い方とは，ある程度の対応づけることができるだろう。これらの教科教育の実践は，実証的なものでなく，その詳細な認知プロセスや効果検証はできていない点で課題が残ると考えられる。一方，でこうした実践事例は，個別の単元の指導について具体的な提案を行っている点で意義があるだろう。ただし，多様な考えを扱う，まとめ

ることは現場の教員にとって戸惑いをもたらすとされる（福岡県苅田町立苅田小学校・岩田，2011）ため，より具体的な教育実践につなげられるような研究が求められていると考えられる。

5　おわりに

本稿では，「多様な解や解決方略」を主眼においた研究を中心に，その課題の性質から整理し，その意義と課題を述べた。また，簡単ではあるが教科教育の実践事例から提案された多様な考えのまとめ方，扱い方との対応づけも試みた。それぞれの課題タイプにおける更なる精緻な検証と，実際の実践との更なる連携が必要であると考えられる。

注

1）本論文で挙げた例の他に，「コウイチには 5 人の友達が，サトルには 6 人の友達がいます。コウイチとサトルは，一緒にパーティを開くことにしました。彼らの友達を全員招待しました。友達は全員出席しました。パーティに出席した友達は全部で何人でしょう？」という，2 人の友達が重複する可能性について考慮が求められる課題等がある。

2）Verschaffel et al.（1994）を参考にして作成された課題である。

3）Watson & Mason（2005）を参考に課題が作成された。

4）ただし，橘・藤村（2010）の課題においては，対角線の交点を通る 2 直線を用いずに，正方形を短冊形に切るなどの解も存在するため，解決方略がただ一しかないわけではない。

5）なお，「比較」に着目し，例題同士の比較や等号と不等号を比較することの効果（Hattikudur & Alibali, 2010）なども検証されている。比較の効果についてのレビューとしてはRittle-Johnson & Star（2011）を参照。

引用文献

Durkin, K., & Rittle-Johnson, B. (2012). The effectiveness of using incorrect examples to support learning about decimal magnitude. *Learning and Instruction*, **22**, 206–214.

藤村宣之（2012a）数学的思考の発達と授業過程　平木典子・稲垣佳世子・河合優年・斉藤こずゑ・高橋惠子・湯川良三（編）児童心理学の進歩（2012年版）金子書房　pp.137-162.

藤村宣之（2012b）．数学的・科学的リテラシーの心理学―子どもの学力はどう高まるか―　有斐閣

藤村宣之・太田慶司（2002）．算数授業は児童の方略をどのように変化させるか―数学的概念に関する方略変化のプロセス―　教育心理学研究，**50**, 33-42.

福岡県苅田町立苅田小学校・岩田耕司（監修）（2011）．算数指導数理を引き出す授業力「多様な考え」のまとめ方　メディアイランド

Fuson, K. C. (1982). An analysis of the counting-on solution procedure in addition. In T. Romberg, T. Carpenter, & J. Moser (Eds.), *Addition and subtraction: A cognitive perspective*. pp. 67-81. Hillsdale: Erlbaum.

Hattikudur, S., & Alibali, M. W. (2010). Learning about the equal sign: Does comparing with inequality symbols help? *Journal of Experimental Child Psychology*, **107**, 15–30.

礒田正美（編著）(1996)．多様な考えを生み練り合う問題解決授業―意味とやり方のずれによる葛藤と納得の授業づくり―　明治図書

河﨑美保（2010）．誤解法聴取による正解法理解促進効果―小学 5 年生の算数授業場面における検討―　発達心理学研究，**21**, 12-22.

河﨑美保・白水　始（2011）．算数文章題の解法学習に対する複数解法説明活動の効果―混み具合比較課題を用いて―　教育心理学研究，**59**, 13-26.

金田茂裕（2003）．小学生は答えが複数ある文章題をどのように解くか　教育心理学研究，**51**, 187-194.

Kinda, S. (2006). The effects of learning experience on the ability of elementary school students to deal with math problems requiring multiple solutions. *Psychologia*, **49**, 10-22.

金田茂裕（2007）．小学 2 ～ 5 年生の複数解を考える数的思考　教育心理学研究，**55**, 11-20.

国立教育政策研究所（2012）．平成24年度全国学力・学習状況調査【中学校】報告書　国立教育政策研究所　Retrieved from http://www.nier.go.jp/12chousakekkahoukoku/04chuu-gaiyou/24_chuu_houkokusyo_ikkatsu.pdf（2015年 9 月 1 日）

古藤　怜・新潟算数教育研究会（1998）．コミュニケーションで創る―多様な考えの活かし方まとめ方―　東洋館出版

小田切　歩（2013）．高校の数学授業における協同的統合過程を通じた個人の知識統合メカニズム―回転運動と三角関数の関連づけに着目して―　教育心理学研究，**61**, 1 -16.

Polya, G. (1957). *How to solve it: A new aspect of Mathematical method*. 2nd ed. New York: Doubleday Anchor Books.（ポリヤG. 柿内賢信（訳）(1975)．いかにして問題をとくか　第11版　丸善）

Rittle-Johnson, B., & Star, J. R. (2007). Does comparing solution methods facilitate conceptual and procedural knowledge? An experimental study on learning to solve equations. *Journal of Educational Psychology*, **99**, 561-574.

Rittle-Johnson, B., & Star, J. R. (2009). Compared with what? The effects of different comparisons on conceptual knowledge and procedural flexibility for equation solving. *Journal of Educational Psychology*, **101**, 529-544.

Rittle-Johnson, B., & Star, J. R. (2011). The power of comparison in learning and instruction: Learning outcomes supported by different types of comparisons. In J. P. Mestre & B. H. Ross (Eds.), *Psychology of Learning and Motivation*. Vol. 55. *Cognition in Education*. Academic Press.

Rittle-Johnson, B., Star, J. R., & Durkin, K. (2009). The importance of prior knowledge when comparing examples: Influences on conceptual and procedural knowledge of equation solving. *Journal of Educational Psychology*, **101**, 836-852.

斉藤哲哉（2010）．sin15°の値を求める問題に関する生徒の多様な考えについて　日本数学教育学会誌，**92 (9)**, 19-26.

篠原俊彦（2013）．多様な考え方を生かした指導に関する一考察―算数のよさに着目して―　日本数学教育学会誌，**95 (6)**, 12-22.

Siegler, R. S. (1991). Strategy choice and strategy discovery. *Learning and Instruction*, **1**, 89-102.

Siegler, R. S. (1996). *Emerging minds: The process of changing in children's thinking*. New York: Oxford University Press.

Siegler, R. S., Adolph, K. E., & Lemaire, P. (1996). *Strategy choices across the life span*. In Reder, L. R. (Ed.) *Implicit memory and metacognition*. Mahwah, NJ: Erbaum.

Stigler, J. W., & Hiebert, J. (1999). *The teaching gap: Best ideas from the world's teachers for improving education in the classroom*. New York: Free Press.

Star, J. R., & Rittle-Johnson, B. (2009). It pays to compare: An experimental study on computational estimation. *Journal of Experimental Child Psychology*, **102**, 408-426.

Star, J. R., Rittle-Johnson, B., Lynch, K., & Perova, N. (2009). The role of prior knowledge in the development of strategy flexibility: The case of computational estimation. *ZDM*, **41**, 569-579.

鈴木　豪（2014）．多様な考え方の検討方法の違いが小学生の数学的問題解決に及ぼす影響―共通点・相違点を考える場合と最も良い考え方を選ぶ場合の比較―　発達心理学研究，**25**, 268-278.

鈴木　豪（2015）．児童による多様な考え方の比較検討方法の違いが課題解決に及ぼす影響―代表値を用いた判断課題を題材として―　教育心理学研究，**63**, 138-150.

橘　春菜・藤村宣之（2010）．高校生のペアでの協同解決を通じた知識統合過程―知識を相互構築する相手としての他者の役割に着目して―　教育心理学研究，**58**, 1 -11.

Verschaffel, L., De Corte, E., & Lasure, S. (1994). Realistic considerations in mathematical modeling of school arithmetic word problems. *Learning and Instruction*, **4**, 273-294.

Watson, A., & Mason, J. (2005). *Mathematics as a constructive activity: Learners generating examples*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Yoshida, H., Verschaffel, L., & De Corte, E. (1997). Realistic considerations in solving problematic word problems: Do Japanese and Belgian children have the same difficulties? *Learning and Instruction*, **7**, 329-338.

（指導教員　藤村宣之教授）