高次精度線の方法による
非圧縮性粘性流れの数値計算に関する研究

西　田　秀　利

①

高次精度線の方法による
非圧縮性粘性流れの数値計算に関する研究

西　田　秀　利

目　次

主な記号 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ iii

第１章　序　論 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 1

第２章　非圧縮性粘性流れに対する支配方程式 ・・・・・・・・・・・・・・・ 5

第３章　数値計算法 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 9

1.　発展型方程式の数値解法（高次精度線の方法） ・・・・・・・・・・ 9

1.1.　修正微分求積法 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 10

1.2.　時間積分法 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 12

1.3.　精度及び安定性 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 14

1.3.1.　１次元熱伝導方程式 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 16

1.3.2.　１次元バーガース方程式 ・・・・・・・・・・・・・・・・ 19

1.3.3.　２次元非圧縮性粘性ナビェ・ストークス方程式 ・・・・・ 23

1.4.　高次精度線の方法の計算の流れ ・・・・・・・・・・・・・・・ 28

2.　楕円型方程式の数値解法（可変精度多重格子法） ・・・・・・・・・ 29

2.1.　擬似時間依存法 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 29

2.1.1.　有理ルンゲ・クッタ法 ・・・・・・・・・・・・・・・・・ 30

2.1.2.　擬似時間依存法の応用 ・・・・・・・・・・・・・・・・・ 31

2.2.　緩和法 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 48

2.2.1.　群陽的反復法 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 48

2.2.2.　群陽的反復法の応用 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 55

2.3.　多重格子法 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 66

2.4.　可変精度多重格子法 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 69

2.4.1.　精度及び収束性 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 72

2.4.2.　３次元への拡張 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 79

2.5.　可変精度多重格子法の格子形成法への応用 ・・・・・・・・・・ 84

第４章　乱流の高次精度数値シミュレーション ・・・・・・・・・・・・・・・・・ 88

1.　正方形及び立方体キャビティ内流れの高次精度数値シミュレーション 88
1.1.　正方形キャビティ内流れのシミュレーション ・・・・・・・・・ 88
1.2.　立方体キャビティ内流れのシミュレーション ・・・・・・・・・ 102

2.　２次元剪断層の高次精度数値シミュレーション ・・・・・・・・・・ 115
2.1.　渦の巻き上がりのシミュレーション ・・・・・・・・・・・・・ 117
2.2.　渦の合体のシミュレーション ・・・・・・・・・・・・・・・・ 125
2.2.1.　２個の渦の合体のシミュレーション ・・・・・・・・・・・ 125
2.2.2.　４個の渦の合体のシミュレーション ・・・・・・・・・・・ 133
2.2.3.　８個の渦の合体のシミュレーション ・・・・・・・・・・・ 142
2.3.　空間精度の流れ場に及ぼす影響 ・・・・・・・・・・・・・・・ 152

3.　２次元一様等方性乱流の高次精度数値シミュレーション ・・・・・ 155
3.1.　低レイノルズ数シミュレーション ・・・・・・・・・・・・・・ 159
3.2.　高レイノルズ数シミュレーション ・・・・・・・・・・・・・・ 167

4.　３次元一様等方性乱流の高次精度数値シミュレーション ・・・・・ 181
4.1.　低レイノルズ数シミュレーション ・・・・・・・・・・・・・・ 183
4.2.　中間レイノルズ数シミュレーション ・・・・・・・・・・・・・ 197

第５章　結　論 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 212

謝　辞 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 218

参考文献 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 219

主　な　記　号

$A(h\lambda)$	：安定多項式
A_1，A_2，A_3	：座標変換における計量
B_1，B_2，B_3	：座標変換における計量
C_N	：クーラン数
C_k	：攪乱の強さに対するパラメータ
D_M	：１階微分に対する差分近似演算子
D_M^2	：２階微分に対する差分近似演算子
$E(k)$	：エネルギ・スペクトル
E_q	：平均全変動運動エネルギ
E_u，E_v	：平均変動運動エネルギ成分
F	：楕円型方程式における涌出し項
I_k^{k-1}	：多重格子法における制限補間演算子
I_{k-1}^k	：多重格子法における延長補間演算子
J	：座標変換におけるヤコビアン
L	：多重格子法における差分近似演算子
L_0	：代表長さ
$\vec{L}$	：可変精度多重格子法における空間微分項ベクトル
M	：修正微分求積法の次数（$M=2q+1$）
M_{in}	：流入マッハ数
M_∞	：一様流マッハ数
N	：全格子点数
N_x，N_y	：座標軸方向の格子点数
P，Q	：格子形成法における強制項
$\vec{Q}$，$\vec{G}$，$\vec{H}$	：流束ベクトル
R	：残差
R_d	：動的残差
Re	：レイノルズ数
R_g	：気体定数
R_L	：積分スケールレイノルズ数

R_t ：マイクロスケールレイノルズ数

T ：温度

U，V ：反変速度成分

U_0 ：代表速度

W ：基本剪断流速度

$\vec{W}$ ：高次精度線の方法における空間微分項ベクトル

X，Y，Z ：単位質量当たりの流体に作用する外力の座標軸方向成分

$a_{i,m}$，a_m ：修正微分求積法における１階微分に対する重み係数

$b_{i,m}$，b_m ：修正微分求積法における２階微分に対する重み係数

b_1，b_2，c_2 ：有理ルンゲ・クッタ法におけるパラメータ

c ：音速

c_i ：攪乱増幅度

c_r ：位相速度

c_* ：臨界音速

e ：単位質量当たりの全エネルギ

$\vec{g}_1$，$\vec{g}_2$，$\vec{g}_3$ ：有理ルンゲ・クッタ法における中間段階ベクトル

h ：計算格子幅

i ：虚数単位

k，k_1，k_2 ：波数

m ：重ね合わせる攪乱波の個数

p ：圧力

q ：合速度

t ：時間

u，v，w ：座標軸方向速度成分

$\vec{u}$ ：速度ベクトル（$\vec{u}=(u, v, w)$）

$\tilde{u}(x)$ ：関数uと同一の値を持つ（M－1）次多項式

x，y，z ：デカルト座標

Δt ：時間格子幅

Δx，Δy ：デカルト座標軸方向の格子間隔

$\Delta \xi$，$\Delta \eta$ ：計算面座標軸方向の格子間隔

$\Delta \tau$ ：擬似時間格子幅

θ ：流れ角

$\Pi(x)$ ：修正微分求積法における補助関数

$\Sigma(t)$ ：全エネルギ

Φ ：速度ポテンシャル

$\Phi_m(x)$ ：修正微分求積法における補助関数

Ψ ：流れ関数

Ψ_x，Ψ_y，Ψ_z ：座標軸方向ベクトルポテンシャル成分

$\vec{\Psi}$ ：ベクトルポテンシャル（$\vec{\Psi}=(\Psi_x, \Psi_y, \Psi_z)$）

$\Omega(t)$ ：エンストロフィ

α ：攪乱の波数

γ ：比熱比

δ ：渦層厚さ

$\delta\phi$ ：多重格子法における修正量

δ_{mi} ：クロネッカのデルタ

$\varepsilon(t)$ ：エネルギ散逸率

ε_{MG} ：多重格子法における収束判定基準

$\eta(t)$ ：エンストロフィ散逸率

κ ：熱伝導率

λ ：方程式の固有値

λ_w ：攪乱基本波長

μ ：粘性係数

μ_{MG}，η_{MG} ：多重格子法におけるパラメータ

ν ：動粘性係数

ξ，η ：計算面座標

σ ：ポテンシャル流れに対する擬似時間依存法における正の定数

ρ ：密度

ρ_{GEI} ：群陽的反復法におけるパラメータ

ρ_s ：澱み点密度

ρ_* ：臨界密度

σ_x，σ_y，σ_z ：座標軸方向垂直応力成分

τ ：擬似時間

τ_{xy}, τ_{yz}, τ_{zx}：剪断応力成分

τ_{yx}, τ_{zy}, τ_{xz}：剪断応力成分（$\tau_{yx}=\tau_{xy}$, $\tau_{yz}=\tau_{zy}$, $\tau_{xz}=\tau_{zx}$）

ϕ　：任意関数

χ　：安定性判定パラメータ

ψ　：Rayleighの安定方程式に対する固有解

ω　：２次元渦度

ω_{SOR}　：逐次過緩和法における加速パラメータ

ω_x, ω_y, ω_z：座標軸方向渦度成分

$\vec{\omega}$　：渦度ベクトル（$\vec{\omega}=(\omega_x, \omega_y, \omega_z)$）

$\tilde{\omega}$　：波数空間における渦度

添　字

bound　：境界値

crit　：臨界値

err　：誤差のL_2ノルム

i, j, k　：座標軸方向の格子番号

init　：初期値

res　：残差のL_2ノルム

肩文字

k　：多重格子法における層数

n　：時間、及び、擬似時間ステップ数

第１章　序　　論

今日、流体力学現象を解析・予測する手段として、その流体が支配される方程式系を数値的に解いて解を求める、所謂、数値流体力学（Computational Fluid Dynamics: CFD）が、国内外のスーパーコンピュータの出現、及び、エンジニアリング・ワークステーションの驚異的な発達に伴って、隆盛を極めつつある。さらに、近年の機器性能に対する要求の高度化・高性能化に伴う極限状態における現象の高精度な解析の必要性から、従来の模型実験による実験的手法のみでは実験装置の大型化の限界・力学的相似性の欠如・実験に要する時間・費用の増大等の理由によりもはや対応が不可能となり、必然的にコンピュータによる数値シミュレーションが占める割合が増加の一途を辿ると予想されている。

この様な状況の下、現在では航空機まわりの様な複雑な３次元物体まわりの流れの解析も行われる様になってきている。しかしながら、限られた計算格子を用いて流れ場を解析する限り、計算格子の分解能の限界が存在する。現在最も広範に用いられている数値計算法は空間精度が２次精度で乱流の取り扱いは乱流モデルを採用する方法であり、これは乱流モデルの成熟度から考えても正確な解を与えているかどうかの疑問が残る。さらに、乱流モデルを用いずに、直接複雑な物理現象を２次精度で解析しようとすると、空間微分項を離散化する際の打切り誤差の影響で莫大な計算格子を取らない限り不可能である。もしも、分子粘性が支配的な小さなスケールまで計算しようとすると、$Re^{9/4}$（Reはレイノルズ数）程度の格子点数が必要となり[1]、興味の対象がレイノルズ数10^3以上の流れであることを考慮すると、これは近い将来のコンピュータを用いたとしても達成されることは期待できない。従って、乱流の様な複雑な物理現象を解析する際にはスペクトル法[2]に代表される高次精度数値計算法が用いられている。

この方法は、２倍の格子点数の２次精度差分法と同程度の分解能が得られることが知られている[3]。このことは、高次精度数値計算法を用いることにより、計算格子の分解能の限界を緩和することが可能になることを示している。しかしながら、スペクトル法は支配方程式を波数空間に変換して解くために、非線形項の計算が重畳和となり、計算時間が長大となる。この短所を改良した方法も提案されており、擬スペクトル法[4]と呼ばれている。この方法は、空間微分項を局所的に波数空間に展開することにより、重畳和の計算を回避している。いずれの方法も、基本的にフーリエ展開を用いているために境界条件としては周期条件が最も自然な条件となり、粘着条件である壁が存在する様な流れ場に適用する際には、特別な取り扱いが必要になるか、或いは、その方向をチェビシェフ等の多項

式で展開する必要があり，複雑な流れ場への適用は困難となり，現在でも比較的単純な流れ場に応用されているに過ぎない。従って、境界条件の制約を受けない様な高次精度数値計算法が開発できれば、汎用性に富んだ数値計算コードを構築することが可能となる。

一方、数値シミュレーションを実行する際に問題となるのは、どの様な数値計算法を選択すべきかという点である。数値計算法は、陽的方法と陰的方法とに大別される。陽的方法とは，次時刻の値を求める際に現時刻の既知の値のみを用いる方法であり、陰的方法とは，現時刻の既知の値のみならず次時刻の未知の値をも用いるため、一般に、連立方程式を解く必要がある。また，陽的方法は陰的方法に比べて、演算量が少なくて済む代わりに安定条件の厳しい制約を受ける。他方、陰的方法は陽的方法に比べて演算量が多い代わりに安定条件の制約が非常に緩やかである。数値シミュレーションにより、流体力学現象を解析・予測する際にはこれらの数値計算法の特徴を考慮して方法の選択を行う必要があるが、もう１つの重要な選択要素として、コンピュータの性能を充分に発揮できることが挙げられる。すなわち、コンピュータ・アーキテクチャに適合する数値計算法を選択する必要がある。現在の科学技術計算用スーパーコンピュータはパイプライン方式のベクトル型コンピュータが主流となっており、ベクトル型アーキテクチャに対する適合性の面では、再帰性を持たない陽的方法が有利となる。以上の様に、最適な高次精度数値計算法は，境界条件の制約が緩やかで、なおかつ、陽的な方法であることが必要となる。

本論文では，対象流体として物性値を一定とし，剪断応力と速度勾配が比例関係にあるとする（ニュートン流体）非圧縮性粘性流体を取り上げる。周知の様に、非圧縮性粘性流体の運動はナビェ・ストークス方程式により記述される。さらに、非圧縮性粘性流れを実際に解析する際には、時間発展型偏微分方程式（運動方程式）であるナビェ・ストークス方程式だけでなく、それに付随する楕円型偏微分方程式を解く必要がある。特に、楕円型偏微分方程式は運動方程式と連立して、毎時間ステップごとに反復して解く必要があり，解くべき方程式系に占める楕円型偏微分方程式の解法に費やされる計算時間の割合は極めて大きい。従って，楕円型偏微分方程式の解法が全体の計算時間を左右する最も大きい要素となる。楕円型偏微分方程式の解法には，従来、逐次過緩和法（ＳＯＲ法）が採用されることが多かったが、この方法には再帰演算が存在し、前述のベクトル型コンピュータのアーキテクチャに対する適合性が低いことから、現在では、チェッカーボードＳＯＲ法等に改良が施されている。これらの方法は、格子点数が増加するにつれて、収束までの反復回数が増加するために、大規模問題の解法としては効率的であるとは言い難い。これは、緩和法（反復法）が格子間隔と同程度の波長の誤差を効率的に減衰させる性質を持っているのとは逆に、長波長の誤差を減衰させるためには数多くの反復回数を必要とするためである。そこで，大小様々の波長に応じた計算格子を設定することにより、誤差の周波数を効率的に減衰させようとする方法が提案された[5]。これが、多重格子法（Multi-Grid Method）と呼ばれる方法であり、無限個の計算格子を取った場合には、計算量は格子点数に比例するために、最も高速の緩和反復法となる。計算量が格子点数に比例するということは、収束までの反復回数が、格子点数に依存しないことを示しており，これは、大規模問題を解く場合には非常に都合が良い。

そこで、本論文では、時間発展型偏微分方程式であるナビェ・ストークス方程式の解法に高次精度線の方法を，楕円型偏微分方程式の解法には高次精度線の方法と多重格子法とを組み合わせた可変精度多重格子法を用いる新しい高次精度数値計算法を提案する。線の方法は，空間微分項の離散化と時間積分とを別個に取り扱う方法であるために，完全に陽的に数値計算可能となる。高次精度線の方法は，空間微分項の離散化に１つのパラメータを変えることにより任意の空間精度が得られる修正微分求積法（Modified Differential Quadrature Method; MDQ法）[6,7] を用い、その結果得られる時間に関する連立常微分方程式の解法には４次精度のルンゲ・クッタ法を用いるものである。また、可変精度多重格子法は楕円型偏微分方程式に擬似時間項を付加することによって擬似時間依存方程式に変形し、それを高次精度線の方法により擬似時間積分し、収束解を求めるものである。ただし、この場合には、時間精度は必要ではなく、安定性に優れた有理ルンゲ・クッタ法（Rational Runge-Kutta Scheme; RRK法）[8] 又は，収束性に優れた群陽的反復法（Group Explicit Iterative Method; GEI法）[9] を採用し、収束効果を高める。さらに，収束加速法として、多重格子法、及び，局所時間刻み幅法を組み合わせることにより，陽的方法であるにもかかわらず、非常に高速な解法を形成している。この様に、本論文で提案する新しい高次精度数値計算法は，完全に陽的な方法であり，ベクトル型コンピュータのアーキテクチャに対する適合性が高いと考えられ、さらに、１つのパラメータを変化させることにより任意の空間精度を得ることができるために、汎用性に富んだ数値計算法であると考えられる。従って，本研究では，新しく提案する高次精度線の方法を用いて、実際に，幾つかの流れ場を対象として、高次精度数値シミュレーションを行うことにより，その有効性を検証することを目的とする。

本論文は、序論を含め５章から構成される。第２章では，非圧縮性粘性流体の運動を支配する基礎方程式であるナビェ・ストークス方程式について述べる。第３章では，本論文で提案する高次精度数値計算法について詳述する。まず，時間発展型偏微分方程式である

運動方程式（ナビェ・ストークス方程式）の数値解法である高次精度線の方法について、空間微分項の離散化手法（修正微分求積法）、及び、時間積分法（ルンゲ・クッタ・ギル法、縮退ルンゲ・クッタ法[10]）に対する説明を行い、その時間精度・安定性に対する検討を１次元熱伝導方程式、１次元バーガース方程式、及び、２次元非圧縮性粘性ナビェ・ストークス方程式を例に上げて行う。次に、楕円型偏微分方程式の数値解法である可変精度多重格子法に対する説明を行う。可変精度多重格子法は、擬似時間依存法、緩和法、及び、多重格子法により構成され、各々について応用例を交えて詳述する。さらに、可変精度多重格子法の精度・収束性を検討し、数値的格子形成法に応用した例を述べる。第４章では、第３章で述べた高次精度数値計算法を乱流現象の数値シミュレーションに応用した例を述べ、計算結果の妥当性、及び、空間精度が流れ場に及ぼす影響について考察する。まず、前述のスペクトル法では特別な取り扱いが必要となる粘着壁が存在する例として、正方形及び立方体キャビティ内流れのシミュレーションを行い、次に、２次元剪断層における渦の合体のシミュレーションを行った結果について述べる。さらに、２次元一様等方性乱流の大規模数値シミュレーションを行った結果について、エネルギ・スペクトルの冪乗則の検証、乱流理論等との比較検討を行う。最後に、３次元一様等方性乱流の高次精度直接数値シミュレーションを行った結果を、流れ場とエネルギ・スペクトルの冪乗則の関係について明らかにする。第５章は結論であり、本研究の成果をまとめ、今後の問題点等についての展望を述べる。

第２章　非圧縮性粘性流れに対する支配方程式

流体の運動は、速度ベクトル$\vec{u}=(u, v, w)$、圧力p、密度ρ、温度Tの６つの状態量により規定される。ここで、u、v、wは各々x、y、z軸方向の速度成分である。これらの状態量は、質量保存法則、運動量保存法則、エネルギ保存法則、及び、状態方程式に支配される。本論文において対象とする流体は、粘性流体であり、応力と歪速度とは線形関係にある（ニュートン流体）ものとする。さらに、物性値である粘性係数μ、熱伝導率κは一定であるとする。この様な仮定に基づいて、質量、運動量、エネルギ保存法則を記述すると、以下の様になる。

質量保存法則は、単位時間当りの微小空間内流体の質量増加と流入・流出による質量増加が等しいとすることにより導出できる。すなわち、

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0 , \qquad (2\cdot1)$$

と記述することができる。流体力学においては、（２・１）式を連続の式と呼ぶ。

運動量保存法則（ニュートンの運動第２法則）は、単位質量当りの運動量の時間変化がその系に作用する力に等しいとすることにより導出される。さらに、ニュートン流体の関係、及び、体積粘性係数が０であるとするストークスの仮説を用いることにより、

$$\frac{Du}{Dt} = X - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) + \frac{1}{3}\nu\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) ,$$

$$\frac{Dv}{Dt} = Y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right) + \frac{1}{3}\nu\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) ,$$

$$\frac{Dw}{Dt} = Z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + \nu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right) + \frac{1}{3}\nu\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) , \qquad (2\cdot2)$$

と表すことができる。ここで、$\nu=\mu/\rho$は動粘性係数と呼ばれ、$\vec{F}_0=(X, Y, Z)$は単位質量当りの流体に作用する外力である。また、D／Dｔは物質微分（ラグランジェ微分）と称され、

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y} + w\frac{\partial}{\partial z} , \qquad (2\cdot3)$$

で定義される。（２・２）式を運動方程式、または、ナビェ・ストークス方程式と呼ぶ。

エネルギ保存法則は、系に為された仕事と加えられた熱量との和とその系のエネルギ増加を等しいとすることにより導かれる。熱流束に関しては、熱伝導のみを考慮し、それがフーリェの法則に従うものとすると、エネルギ方程式は、

$$\frac{De}{Dt}=\frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(u\sigma_x+v\tau_{xy}+w\tau_{xz}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(u\tau_{yx}+v\sigma_y+w\tau_{yz}\right)\right.$$
$$\left.+\frac{\partial}{\partial z}\left(u\tau_{zx}+v\tau_{zy}+w\sigma_z\right)+\kappa\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right)\right]$$
$$+uX+vY+wZ\ , \qquad (2\cdot4)$$

と表現することができる。ここで、eは単位質量当りの全エネルギであり、σ_x、σ_y、σ_zは垂直応力、τ_{xy}、…、τ_{zy}は剪断応力であり、ニュートンの粘性法則に従う。

また、圧力pを決定するために理想気体に対する状態方程式

$$p = \rho R_g T\ , \qquad (2\cdot5)$$

が用いられる。ここで、R_gは気体定数である。

以上の方程式が流体運動に関する支配方程式である。今、外力は作用しないものとし、非圧縮性流体を仮定すると、密度ρは一定となり、連続の式、ナビェ・ストークス方程式は以下の様に書き改めることができる。

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0\ , \qquad (2\cdot6)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right),$$
$$\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}+\nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right), \qquad (2\cdot7)$$
$$\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}+\nu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right).$$

熱移動を伴わず、外力が作用しない非圧縮性流体を取り扱う場合、エネルギ方程式は必要ではなく、（2・6）、（2・7）式がデカルト座標系における支配方程式となる。さらに、（2・7）式の発散を取り、（2・6）式の非圧縮性の条件を考慮することにより得られる以下の圧力に関する楕円型偏微分方程式（ポアソン方程式）を解くことによって通常圧力pが決定される。

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 p}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 p}{\partial z^2}=-2\left[\frac{\partial v}{\partial x}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial y}\cdot\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial w}{\partial x}\right.$$
$$\left.-\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial y}\cdot\frac{\partial w}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial z}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}\right]\ , \qquad (2\cdot8)$$

なる圧力に関するポアソン方程式が用いられる。

ここで、渦度$\vec{\omega}=(\omega_x,\omega_y,\omega_z)$を導入する。各々の成分は、

$$(\omega_x,\omega_y,\omega_z)=\left[\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z},\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x},\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right]\ , \qquad (2\cdot9)$$

と定義される。この渦度$\vec{\omega}$を用いることにより、ナビェ・ストークス方程式（2・7）式は、

$$\frac{\partial \omega_x}{\partial t}+u\frac{\partial \omega_x}{\partial x}+v\frac{\partial \omega_x}{\partial y}+w\frac{\partial \omega_x}{\partial z}=\nu\left(\frac{\partial^2 \omega_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \omega_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \omega_x}{\partial z^2}\right)$$
$$+\omega_x\frac{\partial u}{\partial x}+\omega_y\frac{\partial u}{\partial y}+\omega_z\frac{\partial u}{\partial z}\ ,$$
$$\frac{\partial \omega_y}{\partial t}+u\frac{\partial \omega_y}{\partial x}+v\frac{\partial \omega_y}{\partial y}+w\frac{\partial \omega_y}{\partial z}=\nu\left(\frac{\partial^2 \omega_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \omega_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \omega_y}{\partial z^2}\right) \qquad (2\cdot10)$$
$$+\omega_x\frac{\partial v}{\partial x}+\omega_y\frac{\partial v}{\partial y}+\omega_z\frac{\partial v}{\partial z}\ ,$$
$$\frac{\partial \omega_z}{\partial t}+u\frac{\partial \omega_z}{\partial x}+v\frac{\partial \omega_z}{\partial y}+w\frac{\partial \omega_z}{\partial z}=\nu\left(\frac{\partial^2 \omega_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \omega_z}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \omega_z}{\partial z^2}\right)$$
$$+\omega_x\frac{\partial w}{\partial x}+\omega_y\frac{\partial w}{\partial y}+\omega_z\frac{\partial w}{\partial z}\ ,$$

なる渦度輸送方程式に変形される。さらに、次式で定義されるベクトルポテンシャル$\vec{\Psi}=(\Psi_x,\Psi_y,\Psi_z)$を導入することにより、連続の式（2・6）式は常に満足される。

$$(u,v,w)=\left[\frac{\partial \Psi_z}{\partial y}-\frac{\partial \Psi_y}{\partial z},\frac{\partial \Psi_x}{\partial z}-\frac{\partial \Psi_z}{\partial x},\frac{\partial \Psi_y}{\partial x}-\frac{\partial \Psi_x}{\partial y}\right]\ . \qquad (2\cdot11)$$

ベクトルポテンシャル$\vec{\Psi}$と渦度$\vec{\omega}$とは、（2・9）式、及び、ベクトルポテンシャルを一意的に決定する条件であるソレノイド条件により、以下の3つのポアソン方程式によって関係付けられる。

$$\frac{\partial^2 \Psi_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi_x}{\partial z^2} = -\omega_x \quad ,$$

$$\frac{\partial^2 \Psi_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi_y}{\partial z^2} = -\omega_y \quad , \qquad (2・12)$$

$$\frac{\partial^2 \Psi_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi_z}{\partial z^2} = -\omega_z \quad .$$

また、２次元問題を取り扱う際には、（２・９）式、及び、（２・１１）式において、$\omega = \omega_z$、$\Psi = \Psi_z$、$w = \omega_x = \omega_y = \Psi_x = \Psi_y = 0$、とすることにより、渦度輸送方程式（２・１０）式、及び、ベクトルポテンシャルに関するポアソン方程式（２・１２）式は各々

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + u\frac{\partial \omega}{\partial x} + v\frac{\partial \omega}{\partial y} = \nu\left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2}\right) \quad , \qquad (2・13)$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = -\omega \quad , \qquad (2・14)$$

の様に、２次元渦度輸送方程式、及び、流れ関数に対するポアソン方程式に書き換えられる。ここで、Ψは流れ関数である。

本論文においては、渦度輸送方程式（２・１０）式、（２・１３）式、及び、ベクトルポテンシャル（流れ関数）に対するポアソン方程式（２・１２）式、（２・１４）式を流体運動の支配方程式とする。また、必要に応じて、代表長さ、代表速度を用いて無次元化を行うものとし、動粘性係数νをレイノルズ数Ｒｅ（＝［代表速度］［代表長さ］／ν）の逆数で置き換えることとする。

第３章　数　値　計　算　法

前章で述べたように、非圧縮性粘性流体の運動を支配する方程式は、時間発展型方程式である非圧縮性粘性ナビェ・ストークス方程式、及び、それから派生する楕円型方程式に帰着する。本章では、これらの方程式に対する高次精度数値計算法について詳述する。

１．　発展型方程式の数値解法（高次精度線の方法）

時間発展型方程式のモデル方程式として、非圧縮性粘性ナビェ・ストークス方程式の特徴である移流・拡散項を含んだデカルト座標系における１次元バーガース方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -c\frac{\partial u}{\partial x} + d\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad , \qquad (3・1)$$

を考える。ここで、u（x，t）、t、xは速度、時間、物理空間座標であり、c及びdは移流及び拡散パラメータである。本節では、１次元でx方向に限定して説明を行うが、多次元問題に適用する場合においても、y及びz方向に関してx方向と同様の議論が成立するためにここでは省略する。

線の方法[11]においては、時間微分項と空間微分項とを別個に取り扱う。１次元バーガース方程式（３・１）式の空間微分項を適当な方法で差分近似すると、時間・空間に関する偏微分方程式は時間に関する連立常微分方程式

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \vec{W}(u_i, D_M(u_i), D_M^2(u_i)) \equiv \vec{W}(\vec{u}) \quad , \qquad (3・2)$$

に帰着し、この時間に関する連立常微分方程式は適当な時間積分法により積分される。ここで、$\vec{u}$（＝（u_1，u_2，・・・，u_N）^{T}）は速度ベクトル、$\vec{W}$は空間微分項ベクトルであり、D_M及びD_M^2は１階及び２階微分に対する差分近似演算子である。また、添字は格子番号を表しており、Ｎは全格子点数である。

線の方法は、時間微分項と空間微分項とを別個に取り扱うために、定常問題の場合、時間精度は無視でき、定常解は空間精度のみに依存する。さらに、線の方法は完全に陽的なスキームであるために、現在科学技術計算の主流となっているベクトル型計算機に対する適合性が極めて高く、ベクトル型計算機の性能を十分発揮できる数値計算法であると考えられる。また、空間微分項の離散化手法と時間積分法を任意に組み合わせることができる

ために、非常に柔軟性の高い数値計算法であり、事実、非圧縮性粘性流れ、圧縮性非粘性流れ、圧縮性粘性流れ、及び希薄気体流れ等に応用され多大な成果を上げている。

本論文では、空間微分項の離散化に修正微分求積法を、時間積分法に古典的なルンゲ・クッタ・ギル法、及び、縮退ルンゲ・クッタ法を用いる新しい数値計算法を提案する。

1．1．　修正微分求積法[8,7]

修正微分求積法（Modified Differential Quadarture Method ；以下ＭＤＱ法と略す）は Bellman等により提案された微分求積法[12]をより一般的及び高能率化可能なように改良した方法である。

ＭＤＱ法の概念は、空間微分項を適当に定めた係数とその関数値との線形結合で近似するものである。すなわち、（３・１）式の関数ｕに対する空間微分項、$\partial u/\partial x$及び$\partial^2 u/\partial x^2$，を各々

$$\frac{\partial u}{\partial x} \fallingdotseq \sum_{m=-q}^{q} a_{i,m}\, u_{i+m} \equiv D_M(u_i) \quad , \tag{3・3}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \fallingdotseq \sum_{m=-q}^{q} b_{i,m}\, u_{i+m} \equiv D_M^2(u_i) \quad , \tag{3・4}$$

と近似する方法である。ここで、ｑは正の整数であり、$M=2q+1$をＭＤＱ法の次数と定義する。また、$a_{i,m}$及び　$b_{i,m}$は１階及び２階微分に対する重み係数である。重み係数$a_{i,m}$、$b_{i,m}$を決定するために、最初に補助関数

$$\Pi(x) = (x-x_{i-q})\cdots(x-x_i)\cdots(x-x_{i+q}) , \tag{3・5}$$

$$\Phi_m(x) = \frac{\Pi(x)}{(x-x_{i+m})\,\Pi'(x_{i+m})} , \tag{3・6}$$

$$\Pi(x_{i+l}) = 0 ,$$
$$\Phi_m(x_{i+l}) = \delta_{ml} , \quad (l=-q,\cdots,0,\cdots,q) \tag{3・7}$$

を導入する。ここで、記号「′」は微分を表すものとし、δ_{ml}はクロネッカのデルタである。これらの補助関数を用いると、各格子点上で関数ｕと同一の値を持つ（Ｍ－１）次の多項式$\tilde{u}(x,t)$はラグランジュ内挿法により

$$\tilde{u}(x,t) = \sum_{m=-q}^{q} \Phi_m(x)\, u_{i+m} \quad . \tag{3・8}$$

と表すことができる。従って、格子点x_iにおける$\tilde{u}$の導関数は

$$\left.\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x}\right|_i = \sum_{m=-q}^{q} \Phi'_m(x)\, u_{i+m} \quad . \tag{3・9}$$

と与えることができる。ここで、補助関数$\Phi_m(x)$の微分は

$$\Phi'_m(x) = \frac{\Pi'(x)}{(x-x_{i+m})\,\Pi'(x_{i+m})} - \frac{\Pi(x)}{(x-x_{i+m})^2\,\Pi'(x_{i+m})} , \tag{3・10}$$

で与えられ、格子点x_i上では

$$\Phi'_m(x_i) = \frac{\Pi'(x_i)}{(x_i-x_{i+m})\,\Pi'(x_{i+m})} , \quad (m\neq 0)$$
$$\Phi'_m(x_i) = \frac{\Pi''(x_i)}{2\Pi'(x_i)} , \quad (m=0) \tag{3・11}$$

と求めることができる。（３・３）式及び（３・９）式を比較することにより、１階微分に関する重み係数$a_{i,m}$は以下のように決定することができる。

$$a_{i,m} = \frac{\Pi'(x_i)}{(x_i-x_{i+m})\,\Pi'(x_{i+m})} , \quad (m\neq 0)$$
$$a_{i,m} = \frac{\Pi''(x_i)}{2\Pi'(x_i)} . \quad (m=0) \tag{3・12}$$

２階微分に関する重み係数$b_{i,m}$は$a_{i,m}$を用いて

$$b_{i,m} = \sum_{l=-q}^{q} a_{i,l}\, a_{l,m} \quad , \tag{3・13}$$

と決定することができる。

計算格子が図３・１に示すように等間隔格子（格子間隔Δx）の場合、重み係数$a_{i,m}$及び$b_{i,m}$は格子番号ｉに依存しなくなる。その結果、数値計算の最初に重み係数a_m及びb_mを計算し記憶させておけば良い。さらに、等間隔格子を用いると重み係数には

$$a_0 = 0 \quad , \quad a_{-1} = -a_1 \quad , \cdots , \quad a_{-q} = -a_q \quad ,$$
$$b_{-1} = b_1 \, , \cdots , \, b_{-q} = b_q \quad , \tag{3・14}$$

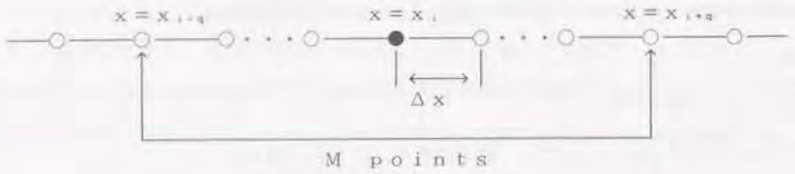


図３・１　等間隔計算格子

なる関係が存在するために、計算能率の向上が図れる。

ＭＤＱ法においては、次数がＭ＝３の場合、重み係数 a_m 、b_m は

$$a_{-1}=-1/(2\Delta x),\quad a_0=0,\quad a_1=1/(2\Delta x)\ ,$$
$$b_{-1}=1/(\Delta x)^2,\quad b_0=-2/(\Delta x)^2,\quad b_1=1/(\Delta x)^2,\qquad (3\cdot15)$$

となり、２次精度の中心差分近似と同一の結果が得られる。また、Ｍを無限大にした極限（Ｍ→∞）においてはフーリエ級数展開法と同一の結果となることが知られている。一般にＭＤＱ法の精度は（Ｍ－１）次精度で与えられる。

以上のようにＭＤＱ法は、

１）多次元問題に対して容易に適用することが可能である。

２）１つのパラメータＭを変化させることにより任意の空間精度を得ることができる。

３）プログラムが非常に簡潔である。

等の特徴を有する汎用性に富んだ空間微分項の離散近似法である。

１．２．　時間積分法

モデル方程式の空間微分項をＭＤＱ法で離散化すると、時間・空間に関する偏微分方程式は（３・２）式の時間に関する連立常微分方程式に帰着する。本論文においては、乱流の高次精度数値シミュレーションを念頭に置いているため時間精度についても考慮する必要がある。そこで、この時間に関する連立常微分方程式の積分に古典的な４段階４次精度のルンゲ・クッタ・ギル法、及び、Williamsonにより提案された３段階４次精度の縮退ルンゲ・クッタ法[10]を採用する。

（１）　ルンゲ・クッタ・ギル法

（３・２）式にルンゲ・クッタ・ギル法を適用すると、以下のような計算手順となる。

$$\vec{u}^{(1)} = \vec{u}^{n} + 1/2\cdot\Delta t\vec{W}(\vec{u}^{n})\ ,$$
$$\vec{Q}^{(1)} = \Delta t\vec{W}(\vec{u}^{(1)})\ ,$$
$$\vec{u}^{(2)} = \vec{u}^{(1)} + (1-\sqrt{2}/2)(\Delta t\vec{W}(\vec{u}^{(1)})+\vec{Q}^{(1)})\ ,$$
$$\vec{Q}^{(2)} = (-2+3/\sqrt{2})\vec{Q}^{(1)} + (2-\sqrt{2})\Delta t\vec{W}(\vec{u}^{(2)})\ ,$$
$$\vec{u}^{(3)} = \vec{u}^{(2)} + (1+1/\sqrt{2})(\Delta t\vec{W}(\vec{u}^{(2)})-\vec{Q}^{(2)})\ ,$$
$$\vec{Q}^{(3)} = -(2+3/\sqrt{2})\vec{Q}^{(2)} + (2+\sqrt{2})\Delta t\vec{W}(\vec{u}^{(3)})\ ,$$
$$\vec{u}^{n+1} = \vec{u}^{(3)} + \Delta t\vec{W}(\vec{u}^{(3)})/6 - \vec{Q}^{(3)}/3\ .\qquad (3\cdot16)$$

ここで、Δｔは時間格子幅、ｎ及びｎ＋１は時間段階ｎΔｔ及び（ｎ＋１）Δｔを示している。

（２）　縮退ルンゲ・クッタ法

縮退ルンゲ・クッタ法は、最も一般に用いられている上述の４段階のルンゲ・クッタ・ギル法に比べて３段階で済むために計算能率が向上する。さらに、安定領域も従来のルンゲ・クッタ・ギル法に比べて広くなり、時間格子幅を大きく取れる可能性がある。縮退ルンゲ・クッタ法の計算手順は（３・２）式に対して、

$$\vec{Q}^{(k)} = c_{1,k}\vec{Q}^{(k-1)} + \Delta t\vec{W}(\vec{u}^{(k-1)})\ ,$$
$$\vec{u}^{(k)} = \vec{u}^{(k-1)} + c_{2,k}\vec{Q}^{(k)}.\quad (k=1,\cdots,\ell)\qquad (3\cdot17)$$

で表すことができる。ここで、ℓ は段階数であり、係数 $c_{1,k}$ 及び $c_{2,k}$ は

$$c_{1,k} = (e_{k-1}-c_{2,k-1})/e_k\ ,\quad (k\neq1,\ e_k\neq0)$$
$$c_{1,k} = (g_{k+1,k-1}-f_k)/c_{2,k}\ ,\quad (k\neq1,\ e_k=0)$$
$$c_{2,k} = g_{k+1,k}\ ,\quad (k\neq\ell)$$
$$c_{2,1} = e_1\ ,\quad (1=\ell)\qquad (3\cdot18)$$

で与えられる。ここで、

$$c_{1,1} = 0,\quad f_k = \sum_{m=1}^{k-1} g_{k,m}\ ,\quad \sum_{k=1}^{\ell} e_k = 1\ ,\qquad (3\cdot19)$$

なる関係が存在する。さらに、４次精度の場合

$$(e_2-c_{2,2})c_{2,3} = (g_{4,2}-c_{2,2})e_3\ ,$$
$$(1-e_4-f_3)c_{2,3} = (1-f_3)e_3\ ,$$
$$(g_{4,1}-f_2)c_{2,3} = (g_{3,1}-f_2)g_{4,3}\ ,\qquad (3\cdot20)$$

という条件が付加される。Williamson によれば、$e_1 = e_2 = 1/6$、$e_3 = 2/3$、$f_2 = 1$、$f_3 = 1/2$、$g_{3,2} = 1/8$、の場合４次精度となる。従って、上の条件を満足する係数 $c_{1,k}$ 及び $c_{2,k}$ は

$$c_{1,1} = 0,\quad c_{1,2} = -5,\quad c_{1,3} = 1/16,\quad c_{1,4} = 0\ ,$$
$$c_{2,1} = 1,\quad c_{2,2} = 1/8,\quad c_{2,3} = 2/3,\quad c_{2,4} = 0\ , \qquad (3\cdot21)$$

と与えられる。これらの係数を（３・１７）式に代入することにより、時間段階ｎからｎ＋１に至る計算手順は

$$\begin{aligned}
\vec{Q}^{(1)} &= \Delta t \vec{W}(\vec{u}^{n})\ ,\\
\vec{u}^{(1)} &= \vec{u}^{n} + \vec{Q}^{(1)}\ ,\\
\vec{Q}^{(2)} &= -5\vec{Q}^{(1)} + \Delta t \vec{W}(\vec{u}^{(1)})\ ,\\
\vec{u}^{(2)} &= \vec{u}^{(1)} + \vec{Q}^{(2)}/8\ ,\\
\vec{Q}^{(3)} &= \vec{Q}^{(2)}/16 + \Delta t \vec{W}(\vec{u}^{(2)})\ ,\\
\vec{u}^{n+1} &= \vec{u}^{(2)} + 2\vec{Q}^{(3)}/3\ , \qquad (3\cdot22)
\end{aligned}$$

と表すことができる。

１．３．　精度及び安定性

本節では、時間に関する常微分方程式に対する積分法の精度及び安定性を検討する。空間精度についての検討は別の節で行う。数値計算における精度は Beam と Warming[13]に従うと次のように求めることができる。

数値解と解析解との誤差のＬ₂ノルムをＬ₂誤差と定義すると、Ｌ₂誤差は

$$u_{err} = \left(\frac{\sum_{i=1}^{N} (u_{e}|_{i}^{n} - u_{a}|_{i}^{n})^{2}}{N} \right)^{1/2}\ , \qquad (3\cdot23)$$

と表すことができる。ここで、$u_{e}|_{i}^{n}$ 及び $u_{a}|_{i}^{n}$ は時間 $t = n\Delta t$、格子番号ｉにおける数値解及び解析解であり、Ｎは全格子点数である。次に、Ｌ₂誤差を縦軸に時間格子幅を横軸に両対数で取り、時間格子幅Δｔを変化させて、その際のＬ₂誤差をプロットする。このときの傾きをＬ₂率と呼び、Ｌ₂率がその時間積分法の精度と一致する。しかしながら、（３・１）式のような空間微分項を含む偏微分方程式においては、時間格子幅を

小さくしていくに従って、時間積分法による誤差よりも空間微分項を離散化する際に生じる誤差の方が支配的になるために、或る一定の誤差に収束するという現象が生じる。そこで、本節における精度の判定は、時間積分法の誤差が支配的となるような時間格子幅の範囲のＬ₂率で行う。

一方、常微分方程式に対する数値計算法の安定性は、その数値計算法の安定領域内に方程式の最大固有値 λ_{max} と計算格子幅ｈの積が存在するかどうかで判定される。数値計算法の安定領域は、個々の数値計算法が有する安定多項式Ａ（ｈλ）を用いて、

$$|A(h\lambda)| \leq 1\ , \qquad (3\cdot24)$$

と表すことができる。

前述のルンゲ・クッタ・ギル法及び縮退ルンゲ・クッタ法の安定多項式は各々

（１）ルンゲ・クッタ・ギル法

$$A(h\lambda) = 1 + h\lambda + (h\lambda)^{2}/2 + (h\lambda)^{3}/6 + (h\lambda)^{4}/24\ , \qquad (3\cdot25)$$

（２）縮退ルンゲ・クッタ法

$$A(h\lambda) = 1 + h\lambda + (h\lambda)^{2}/2 + (h\lambda)^{3}/12\ , \qquad (3\cdot26)$$

と与えられる。（３・２５）式及び（３・２６）式より求められるルンゲ・クッタ・ギル法及び縮退ルンゲ・クッタ法の安定領域を図３・２に示す。ここで、実線は縮退ルンゲ・

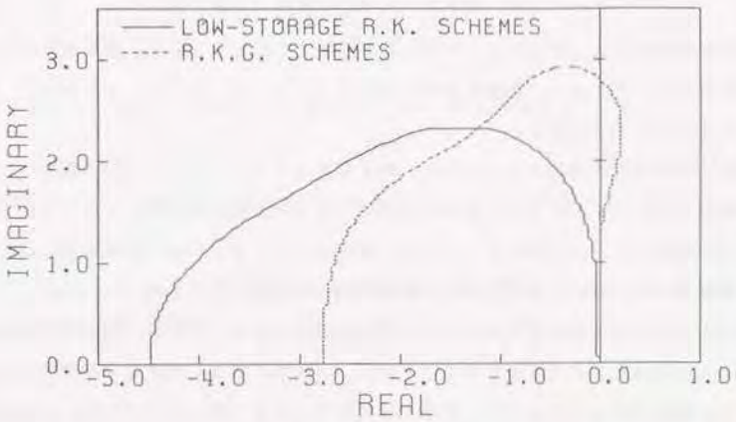


図３・２　安定領域

クッタ法の安定限界を、破線はルンゲ・クッタ・ギル法の安定限界を各々示している。図より、縮退ルンゲ・クッタ法の安定領域はルンゲ・クッタ・ギル法に比べて実軸方向に広くなっていることが確認できる。実軸切片値ではルンゲ・クッタ・ギル法が－２．８７５に対して縮退ルンゲ・クッタ法が－４．５２０と１．６倍以上も広くなっている。このことは、拡散項の影響が強い（粘性が大きい）場合には縮退ルンゲ・クッタ法が安定性において優れており、拡散項の影響が弱い（粘性が小さい）場合にはルンゲ・クッタ・ギル法が有利であることを示している。

以下、２、３の方程式について精度及び安定性の検討を行う。

１．３．１．　１次元熱伝導方程式

１次元熱伝導方程式は、

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \qquad (3\cdot27)$$

と表すことができる。ここで、Ｔ（ｘ，ｔ）はｘ方向の温度、κは熱伝導率である。

（３・２７）式は、

$$T(x,0) = a + b\sin(\pi x), \qquad (3\cdot28)$$

なる初期条件の下で、

$$T(x,t) = a + b\sin(\pi x)\exp(-\kappa\pi^2 t), \qquad (3\cdot29)$$

なる解析解が存在する。本項においては、計算領域を$0 \leq x \leq 2$とし、周期境界条件の下で数値計算を行った。また、定数ａ及びｂは各々ａ＝０．３，ｂ＝０．２と固定し、熱伝導率κ＝０．００１５とした。

最初に、時間精度の検定を行うために、格子点数Ｎ＝３２、ＭＤＱ法の次数Ｍ＝５とした際の時刻ｔ＝１６におけるＬ$_2$誤差と時間格子幅Δｔの関係を図３・３に示す。「○」及び「□」は各々ルンゲ・クッタ・ギル法、縮退ルンゲ・クッタ法の結果を表したものである。時間格子幅が小さい領域においては両者共一定のＬ$_2$誤差となっているが、これは先に述べたように空間精度が支配的である領域と考えられる。時間格子幅が$2 \leq \Delta t \leq 4$におけるＬ$_2$率は両者共ほぼ４であることから、両数値計算法の精度は４次精度となっていることが確認される。Δｔ＝８において両者のＬ$_2$誤差が減少しているが、これはΔｔが大きいために方程式の最大固有値λ_{max}と時間格子幅Δｔとの積が安定領域を越えて不

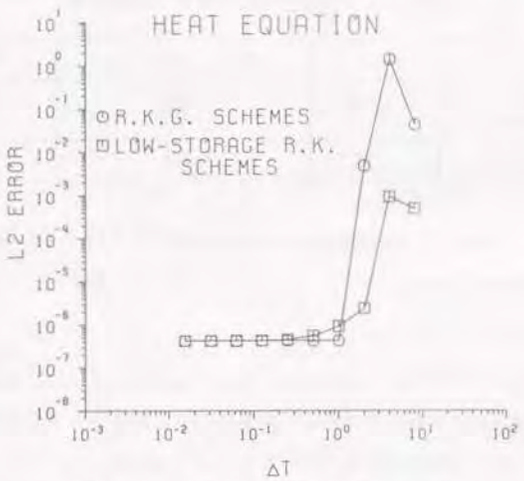


図３・３　１次元熱伝導方程式のＬ$_2$率

安定領域に移行し、数値解が振動しているためである。

数値計算法の安定性を検討するためには、方程式の最大固有値λ_{max}が必要となる。１次元熱伝導方程式は線形であるため、空間精度が２次精度で周期境界条件を課す場合には固有値λは

$$\lambda = -\frac{4\kappa}{(\Delta x)^2}\sin^2(\pi k/N), \quad (k=1,\cdots,N) \qquad (3\cdot30)$$

で与えられる。従って、固有値λは実軸上に現れ、最大固有値λ_{max}は

$$\lambda_{max} = |-4\kappa/(\Delta x)^2|, \qquad (3\cdot31)$$

となる。そこで、安定性を判定するパラメータとして、χを次のように定義する。

$$\chi = \lambda_{max}\Delta t/(\lambda_{max}\Delta t)_{crit}. \qquad (3\cdot32)$$

ここで、$(\lambda_{max}\Delta t)_{crit}$は安定限界値であり、安定領域より求められる。安定限界時間格子幅$(\Delta t)_{crit}$は（３・３２）式より

$$(\Delta t)_{crit} = (\lambda_{max}\Delta t)_{crit}/\lambda_{max}, \qquad (3\cdot33)$$

で与えられる。

表３・１に縮退ルンゲ・クッタ法及びルンゲ・クッタ・ギル法の最大固有値λ_{max}、安

表３・１　安定性判定に対する各種の値

	λ_{max}	$(\lambda_{max}\Delta t)_{crit}$	$(\Delta t)_{crit}$
Low-Storage R.K. Scheme	1.536	4.520	2.943
R.K.G. Scheme	1.536	2.785	1.813

定限界値 $(\lambda_{max}\Delta t)_{crit}$ 及び安定限界時間格子幅 $(\Delta t)_{crit}$ を示す。さらに、計算可能な時間格子幅Δｔに対するパラメータとして、クーラン数を

$$C_N = 2\kappa\Delta t/(\Delta x)^2 \quad , \qquad (3\cdot34)$$

と定義する。このパラメータは（３・３４）式からもわかるように、数値計算法に依存しない。クーラン数は放物型方程式の場合、空間微分項の離散化に中心差分近似を、時間微分項の積分にオイラーの前進差分法を用いるＦＴＣＳ法に対して、$C_N = 1$ が安定限界となることが知られている。数値実験における安定性の判定は、数値解の挙動が振動を起こす時点で不安定であると見なした。

格子点数Ｎ＝３２、ＭＤＱ法の次数Ｍ＝３とし、時刻ｔ＝１２８まで計算した際の方程式の最大固有値と時間格子幅の積 $\lambda_{max}\Delta t$ の位置を図３・４に、それに対応する数値解の挙動を図３・５に示す。両図より、ルンゲ・クッタ・ギル法及び縮退ルンゲ・クッタ法

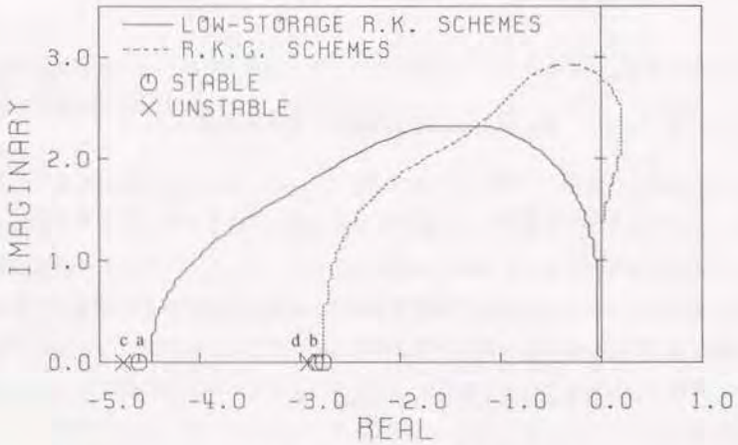
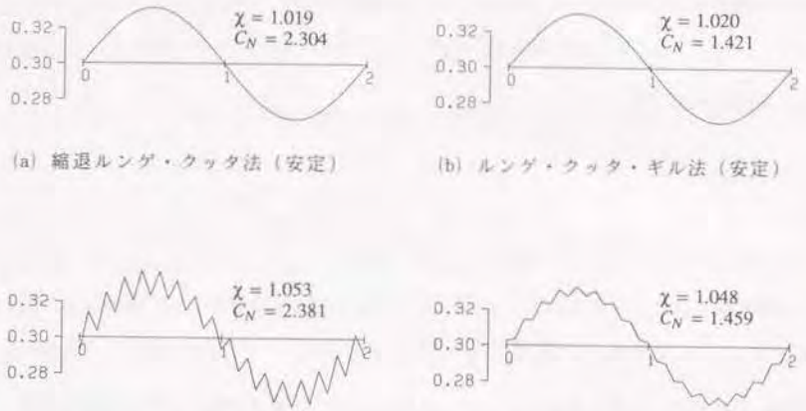


図３・４　$\lambda_{max}\Delta t$ の位置



(a) 縮退ルンゲ・クッタ法（安定）　(b) ルンゲ・クッタ・ギル法（安定）

(c) 縮退ルンゲ・クッタ法（不安定）　(d) ルンゲ・クッタ・ギル法（不安定）

図３・５　数値解の挙動

共に、安定領域内（$\chi \leq 1$）では数値解に振動が見られず安定に計算可能である。また、計算可能なクーラン数はルンゲ・クッタ・ギル法が $C_N = 1.421$ であるのに対し、縮退ルンゲ・クッタ法ではその１．６倍以上の $C_N = 2.304$ であるという結果が得られた。この結果は、両数値計算法の安定領域から予想されたものと一致する。

１．３．２．　１次元バーガース方程式

１次元バーガース方程式（３・１）式において、$c = u(x, t)$、$d = \nu$ と置くことにより（３・１）式は以下のように変形することができる。

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -u\frac{\partial u}{\partial x} + \nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad . \qquad (3\cdot35)$$

ここで、ν は動粘性係数である。（３・３５）式に基準長さ L_0、基準速度 U_0、基準時間 t_0 を用いて、

$$x = x/L_0, \quad t = \nu t_0/L_0^2, \quad u = U_0 L_0/\nu, \qquad (3\cdot36)$$

なる無次元化を施すと、（３・３５）式は

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad (3\cdot37)$$

と書き換えることができる。（３・３７）式は初期条件

$$u(x,0) = -\mathrm{Re}\ \sin(x), \qquad (3\cdot38)$$

及び周期境界条件の下では

$$u(x,t) = \frac{4\sum_{n=1}^{\infty} d_n \exp(-n^2 t)\sin(n\pi)}{d_0 + 2\sum_{n=1}^{\infty} d_n \exp(-n^2 t)\cos(n\pi)}, \qquad (3\cdot39)$$

なる解析解を持つことが知られている[14]。ここで、Ｒｅはレイノルズ数であり，d_n は

$$d_n = (-1)^n K_n(\mathrm{Re}/2), \qquad (3\cdot40)$$

で与えられ，K_n は第１種変形ベッセル関数である。計算領域は $-\pi \leq x \leq \pi$ とした。

最初に、精度の検討を行うために、格子点数Ｎ＝１６、レイノルズ数Ｒｅ＝１、ＭＤＱ法の次数Ｍ＝５とした際の時刻ｔ＝１におけるＬ₂誤差と時間格子幅Δｔとの関係を図３・６に示す。前項と同様、記号「○」及び「□」はルンゲ・クッタ・ギル法及び縮退ルンゲ・クッタ法の結果を各々示したものである。時間格子幅が $1/8 \leq \Delta t \leq 1/4$ におけ

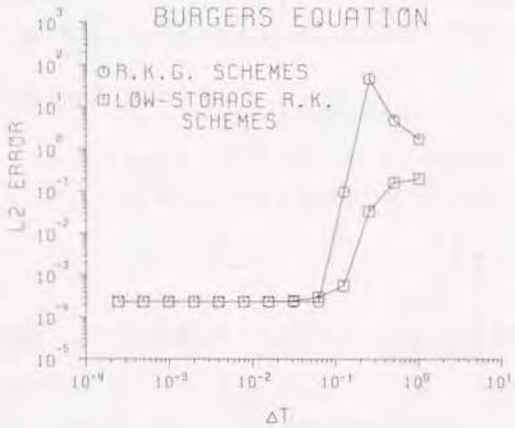


図３・６　１次元バーガース方程式におけるＬ₂率

るＬ₂率が両者共４となっており、１次元バーガース方程式に対してもルンゲ・クッタ・ギル法及び縮退ルンゲ・クッタ法が４次精度となることが確認される。

数値計算法の安定性を検討する際に必要となる１次元バーガース方程式の固有値は方程式が線形で、空間精度が２次精度である場合、周期境界条件の下では、

$$\lambda = -\frac{4\nu}{(\Delta x)^2}\sin^2(\pi i/N) - \bar{i}\frac{c}{\Delta x}\sin(2\pi i/N),$$
$$(i = 1, 2, \cdots, N) \qquad (3\cdot41)$$

と与えられる。ここで，ｃは定数であり，$\bar{i}$ は虚数単位である。（３・３７）式は非線形であるが、各時間段階の $|u|_{max}$ を定数ｃの代わりに用いることにより、各時間段階の固有値λは（３・４１）式により求めることができる。

また，安定性判定のパラメータとしてχを次のように定義する。

$$\chi = \overline{\lambda_{max}\Delta t}/(\overline{\lambda_{max}\Delta t})_{crit}. \qquad (3\cdot42)$$

ただし、記号「$\overline{}$」は時間平均を表し、$\overline{\lambda_{max}}$ は平均最大固有値、$(\overline{\lambda_{max}\Delta t})_{crit}$ は平均安定限界値であり、各々ｔ＝０とｔ＝ｔ'の単純平均として評価する。すなわち，

$$\overline{\lambda_{max}} = \tfrac{1}{2}(\lambda_{max}|_{t=0} + \lambda_{max}|_{t=t'}),$$
$$(\overline{\lambda_{max}\Delta t})_{crit} = \tfrac{1}{2}\{(\lambda_{max}\Delta t)_{crit}|_{t=0} + (\lambda_{max}\Delta t)_{crit}|_{t=t'}\} \qquad (3\cdot43)$$

と定義するものとする。（３・４２）式より、安定限界時間格子幅 $(\overline{\Delta t})_{crit}$ は

$$(\overline{\Delta t})_{crit} = (\overline{\lambda_{max}\Delta t})_{crit}/\overline{\lambda_{max}}, \qquad (3\cdot44)$$

と与えることができる。さらに、計算可能な時間格子幅Δｔに対するパラメータとしてクーラン数を以下のように定義する。

$$C_n = |u|_{max}\Delta t/\Delta x + 2\nu\Delta t/(\Delta x)^2. \qquad (3\cdot45)$$

格子点数Ｎ＝１６、レイノルズ数Ｒｅ＝８、ＭＤＱ法の次数Ｍ＝３、時刻ｔ＝ｔ'＝２とした際の最大固有値 $\lambda_{max}|_{t=0}$、$\lambda_{max}|_{t=t'}$、安定限界 $(\lambda_{max}\Delta t)_{crit}|_{t=0}$、$(\lambda_{max}\Delta t)_{crit}|_{t=t'}$、平均最大固有値 $\overline{\lambda_{max}}$、平均安定限界 $(\overline{\lambda_{max}\Delta t})_{crit}$ 及び安定限界時間格子幅 $(\overline{\Delta t})_{crit}$ の値を表３・２に示す。

また、図３・７に平均最大固有値 $\overline{\lambda_{max}}$ と時間格子幅Δｔの積が安定領域に占める位置を、図３・８にその位置に対応する数値解の挙動を各々示す。数値計算における安定性の

表３・２　安定性評価に対する各種の値

	Low-Storage R.K. Scheme	R.K.G. Scheme
$\lambda_{max}\|_{t=0}$	26.413	26.413
$\lambda_{max}\|_{t=t^*}$	25.940	25.940
$(\lambda_{max}\ \Delta t)_{crit}\|_{t=0}$	3.3557	2.8044
$(\lambda_{max}\ \Delta t)_{crit}\|_{t=t^*}$	4.520	2.785
$\overline{\lambda_{max}}$	26.177	26.177
$\overline{(\lambda_{max}\ \Delta t)_{crit}}$	3.9378	2.7947
$\overline{(\Delta t)_{crit}}$	0.1504	0.1068

評価は前項と同様に数値解が振動を起こした時点で不安定と見なした。図より、ルンゲ・クッタ・ギル法、縮退ルンゲ・クッタ法共に安定領域内（$\chi \leqq 1$）では安定に計算可能である。しかしながら、縮退ルンゲ・クッタ法は$\chi = 1.13$という安定領域外でも安定に計算ができている。これは、$(\lambda_{max}\ \Delta t)_{crit}|_{t=0}$から$(\lambda_{max}\ \Delta t)_{crit}|_{t=t^*}$までの安定限界の軌跡がルンゲ・クッタ・ギル法では原点からほぼ等距離の円弧状をしているのに対し、縮退ルンゲ・クッタ法では原点から等距離的ではないために、平均最大固有値$\overline{\lambda_{max}}$及び平均安定限界$\overline{(\lambda_{max}\ \Delta t)_{crit}}$を$t=0$と$t=t^*=2$の単純平均で評価

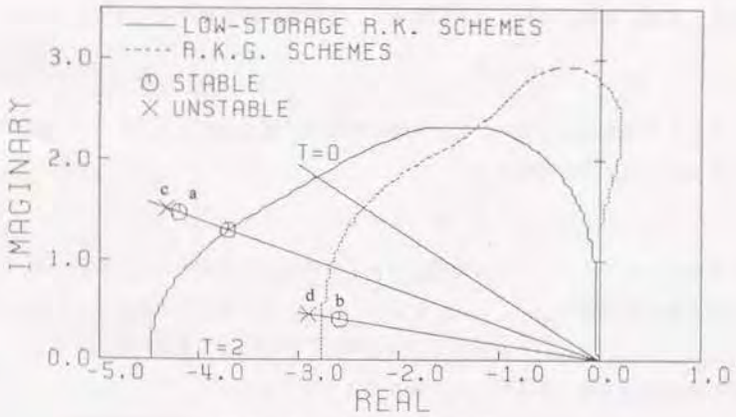
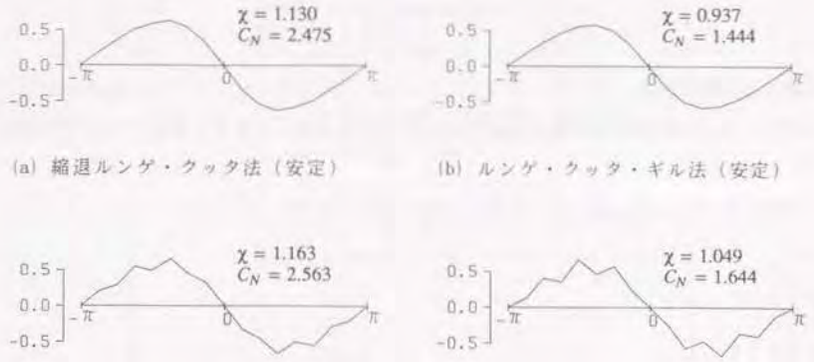


図３・７　$\lambda_{max}\ \Delta t$の位置



(a) 縮退ルンゲ・クッタ法（安定）　(b) ルンゲ・クッタ・ギル法（安定）

(c) 縮退ルンゲ・クッタ法（不安定）　(d) ルンゲ・クッタ・ギル法（不安定）

図３・８　数値解の挙動

することはルンゲ・クッタ・ギル法においては妥当な評価法であるが、縮退ルンゲ・クッタ法においては少し粗い評価になっているためであろうと考えられる。しかし、ここで定義した安定性のパラメータχを安定性の目安と考えるならば、このパラメータχは妥当性を有する。

一方、計算可能なクーラン数はルンゲ・クッタ・ギル法の場合$C_N = 1.576$であるのに対し、縮退ルンゲ・クッタ法では安定性のパラメータχを$\chi = 1$と小さく見積もっても$C_N = 2.166$であり、ルンゲ・クッタ・ギル法の約１．４倍となっている。

以上のことより、１次元バーガース方程式に対しても両方法共時間精度が４次精度であることが確認され、$\nu = 1$のような拡散項の影響が強い（粘性が大きい）場合には縮退ルンゲ・クッタ法はルンゲ・クッタ・ギル法よりも時間格子幅Δtが大きく取れることが示された。

１．３．３．　２次元非圧縮性粘性ナビェ・ストークス方程式

第２章で述べたように、外力を無視し、物性値を一定とすると、２次元非圧縮性粘性ナビェ・ストークス方程式はデカルト座標系における基礎変数表示で

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) ,$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) . \qquad (3\cdot46)$$

と書くことができる。ここで、u（x，y，t）、v（x，y，t）はx及びy方向の速度成分、νは動粘性係数である。p（x，y，t）は圧力であり、密度ρにより正規化されている。

また、圧力p（x，y，t）に関するポアソン方程式は

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = 2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}\right) , \qquad (3\cdot47)$$

と与えられる。

この非圧縮性粘性ナビェ・ストークス方程式は、初期条件

$$u(x, y, 0) = -\cos(x)\sin(y) ,$$
$$v(x, y, 0) = \sin(x)\cos(y) , \qquad (3\cdot48)$$

及び周期境界条件の下で、

$$u(x, y, t) = -\cos(x)\sin(y)\exp(-2\nu t) ,$$
$$v(x, y, t) = \sin(x)\cos(y)\exp(-2\nu t) ,$$
$$p(x, y, t) = -\tfrac{1}{4}\{\cos(2x)+\cos(2y)\}\exp(-4\nu t) , \qquad (3\cdot49)$$

なる解析解が存在することが知られている[15]。計算格子は直交正方格子（図3・9）であり、計算領域は（0，0）≦（x，y）≦（2π，2π）である。

まず、精度の検討を行うために、格子点数N＝16×16、MDQ法の次数M＝9、動粘性係数ν＝0．03とした際の時刻t＝8におけるu（x，y，t）のL_2誤差と時間格子幅Δtとの関係を図3・10に示す。ここで、記号は前項と同様に「○」がルンゲ・クッタ・ギル法の結果を、「□」が縮退ルンゲ・クッタ法の結果を各々示している。図より、時間格子幅が1≦Δt≦1．6の範囲においてルンゲ・クッタ・ギル法、縮退ルンゲ・クッタ法共にL_2率が4となっており、2次元非圧縮性粘性ナビェ・ストークス方程式においても時間精度が4次精度であることが確認できる。

安定性の判定には方程式の固有値が必要となるが、2次元非圧縮性粘性ナビェ・ストークス方程式連立偏微分方程式であり、固有値の算出には非常に困難を伴う。そこで、本項

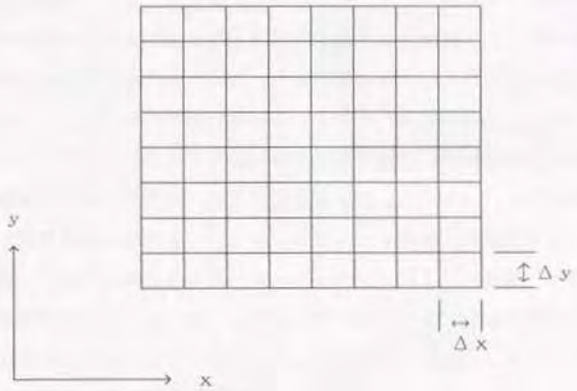


図3・9　計算格子（格子間隔Δx、Δy）

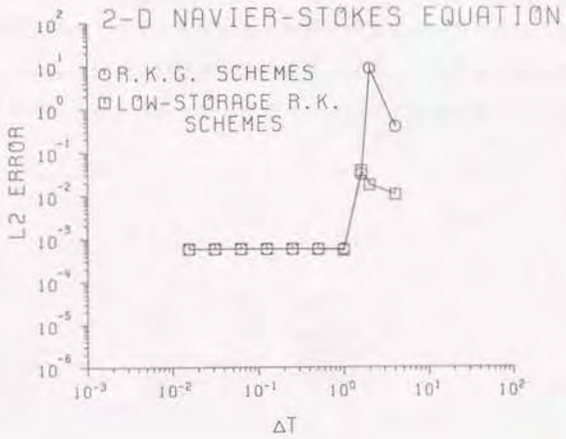
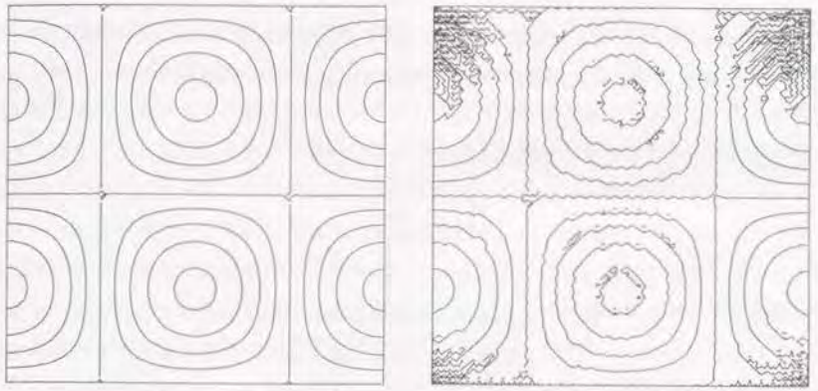


図3・10　2次元非圧縮性粘性ナビェ・ストークス方程式におけるL_2率

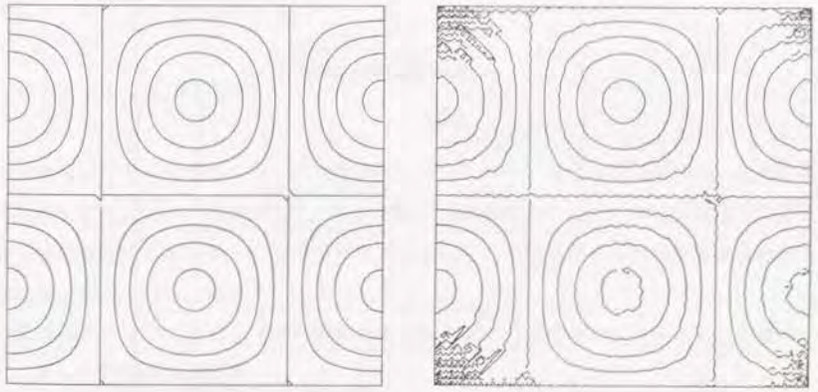
においては、単に数値解の挙動が振動を起こすかどうかで、安定・不安定を判定することとした。格子点数をN＝６４×６４、ＭＤＱ法の次数をＭ＝１１、動粘性係数ν＝０．１として数値計算を行った。数値解の挙動が時間積分法に支配されるためには空間微分項の離散化による誤差を極力小さくする必要があり、そのために格子点数を増加させ、ＭＤＱ法の次数をＭ＝１１（１０次精度）と高くして数値計算を行っている。また、圧力に関するポアソン方程式の数値解法には境界条件が周期条件であることより、フーリエ級数展開法を用いて数値計算を行っている。以上の条件の下で、時間格子幅Δｔを変化させた際のｕ（ｘ，ｙ，ｔ）の数値解の挙動を－１から１まで０．２間隔の等速度線で図３・１１及び３・１２に示す。図３・１１はルンゲ・クッタ・ギル法の結果であり、図３・１２は縮退ルンゲ・クッタ法の結果である。時間積分法にルンゲ・クッタ・ギル法を用いた場合、時間格子幅がΔｔ＝０．０２５（図３・１１（ａ））では数値解に振動が生じておらず滑らかであり、安定に計算ができている。しかし、時間格子幅をΔｔ＝０．０２６とすると（図３・１１（ｂ））、明らかに数値解に振動が生じ、不安定になっていることが確認できる。一方、時間積分法に縮退ルンゲ・クッタ法を用いた場合では、時間格子幅がΔｔ＝０．０４０の時（図３・１２（ａ））には振動の無い滑らかな安定した数値解が得られているのに対し、時間格子幅をΔｔ＝０．０４９とすると（図３・１２（ｂ））、数値解に振動が生じ始めており、不安定に移行していることが確認できる。

従って、２次元非圧縮性粘性ナビェ・ストークス方程式においても、ルンゲ・クッタ・ギル法及び縮退ルンゲ・クッタ法は時間精度が４次精度であり、動粘性係数がν＝０．１と拡散項の影響が強い場合には、安定に計算可能な時間格子幅は縮退ルンゲ・クッタ法の方がルンゲ・クッタ・ギル法に比べて１．６倍も大きく取れることが判明した。



(a) 安定　　(b) 不安定

図３・１１　数値解の挙動（ルンゲ・クッタ・ギル法）



(a) 安定　　(b) 不安定

図３・１２　数値解の挙動（縮退ルンゲ・クッタ法）

1．4．　高次精度線の方法の計算の流れ

本節で説明を行った時間発展型方程式に対する高次精度線の方法の計算の流れをモデル方程式（1次元バーガース方程式）に対して示すと以下のようになる。

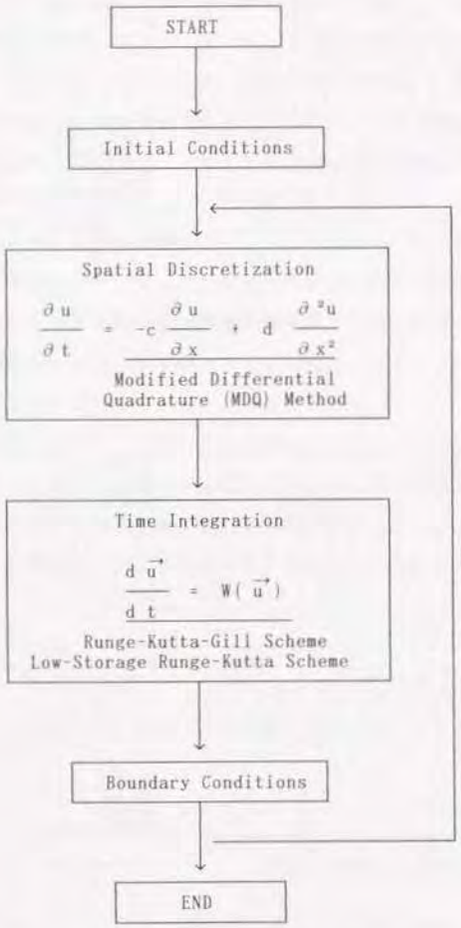


図3・13　高次精度線の方法の計算の流れ

2．　楕円型方程式の数値解法（可変精度多重格子法）

前章で述べたように、非圧縮性粘性ナビエ・ストークス方程式を解く際には、運動方程式に付随する楕円型偏微分方程式と連立して解く必要がある。この場合、時間発展型方程式である運動方程式を1時間ステップ解く毎に楕円型偏微分方程式を反復して解く必要があり、解くべき方程式系に占める楕円型偏微分方程式の解法に費やされる計算時間の割合は極めて大きい。さらに、最近のコンピュータのアーキテクチャの変遷に伴い、コンピュータ・アーキテクチャに適合した楕円型偏微分方程式に対する数値計算法を考案することは工学において非常に意義深いことである。従って、本節では、最近のコンピュータ・アーキテクチャに適合した高効率かつ高次精度が可能となる可変精度多重格子法を提案し、可変精度多重格子法の概念について詳述する。

楕円型偏微分方程式のモデル方程式として、デカルト座標系における単純な2次元ポアソン方程式

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = F \ , \qquad (3・50)$$

を取り上げ説明を行う。ここで、関数φ（x，y）は任意の関数であり、Fは湧き出し項である。一般の楕円型偏微分方程式、及び、3次元への拡張についても同様の議論が成立するために、ここでは省略する。

2．1．　擬似時間依存法

一般には、楕円型偏微分方程式の収束解を求める場合、或る反復法を用いて反復計算を行い収束解を求める方法が用いられる。一方、擬似時間依存法は、楕円型偏微分方程式に擬似時間項を付加して得られる擬似時間発展型方程式の定常解を、楕円型偏微分方程式の収束解と見なす方法である。

2次元ポアソン方程式（（3・50）式）に対して、擬似時間項∂φ／∂τを付加すると、擬似時間発展型方程式

$$\frac{\partial \phi}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} - F \ , \qquad (3・51)$$

を得ることができる。（3・51）式における擬似時間項∂φ／∂τは、定常状態におい

ては$\partial\phi/\partial\tau=0$となり、擬似時間発展型方程式（３・５１）式は楕円型偏微分方程式（３・５０）式と同一の方程式となる。擬似時間依存法においては、収束解のみに意味があり、擬似時間の途中過程は問題にならないために、収束性の高い数値計算法が要求される。

２．１．１．　有理ルンゲ・クッタ法[9]

（３・５１）式は放物型偏微分方程式であり、種々の数値計算法が考えられる。しかしながら、最近の科学技術計算の主流となっているコンピュータ・アーキテクチャであるベクトル型コンピュータを念頭に置く場合、コンピュータの性能を充分発揮させるためには再帰性を持たない数値計算法が望ましく、この点で陽的な数値計算法が陰的な数値計算法に比べて有利となる。一方、通常の陽的方法は陰的方法に比べて安定条件が厳しく、この点での陽的方法の不利は免れない。

例えば、（３・５１）式に対して、空間微分項の離散化に中心差分近似を、時間微分項の積分にオイラーの前進差分近似を用いるＦＴＣＳ法を適用すると、安定限界の擬似時間格子幅は$\Delta\tau=\Delta x^2\Delta y^2/\{2(\Delta x^2+\Delta y^2)\}$となり、差分表示すると反復法である点ヤコビ法と同一の結果

$$\phi^{n+1}=\phi^n+\Delta\tau\left[\frac{1}{\Delta x^2}(\phi^n_{i+1,j}-2\phi^n_{i,j}+\phi^n_{i-1,j})+\frac{1}{\Delta y^2}(\phi^n_{i,j+1}-2\phi^n_{i,j}+\phi^n_{i,j-1})-F_{i,j}\right],\qquad(3\cdot52)$$

が得られる。しかし、この方法は安定条件の制約のために収束性が極めて悪い。ここで、Δx、Δy及び$\Delta\tau$はx方向、y方向の空間格子幅及び擬似時間格子幅であり、肩文字n及び、$n+1$は擬似時間段階$n\Delta\tau$、$(n+1)\Delta\tau$（または、反復段階）を表し、添字i及びjはx方向及びy方向の格子番号である。

従って、陽的な方法でありながら、安定条件の制限の緩やかな数値計算法が考案できれば、陽的方法が持つ欠点を補うことができ、かつ、ベクトル型アーキテクチャに適合する数値計算法を構築することができる。そこで本研究では、擬似時間積分法に Wambecqにより提案された有理ルンゲ・クッタ法（Rational Runge-Kutta Scheme ；以下ＲＲＫ法と略する）を採用した高次精度線の方法を提案する。

（３・５１）式の右辺の空間微分項を前述のＭＤＱ法で離散化することにより、任意の

空間精度が得られる。その結果、擬似時間と空間に関する偏微分方程式は擬似時間に関する連立常微分方程式

$$\frac{d\vec{\phi}}{d\tau}=\vec{W}(\vec{\phi}),\qquad(3\cdot53)$$

に帰着される。ここで、$\vec{W}$は空間微分項ベクトルである。（３・５３）式の擬似時間積分にＲＲＫ法を適用すると、

$$\vec{g}_1=\Delta\tau\vec{W}(\vec{\phi}^n),$$

$$\vec{g}_2=\Delta\tau\vec{W}(\vec{\phi}^n+c_2\vec{g}_1),$$

$$\vec{\phi}^{n+1}=\vec{\phi}^n+\frac{2\vec{g}_1(\vec{g}_1,\vec{g}_2)-\vec{g}_2(\vec{g}_1,\vec{g}_1)}{(\vec{g}_2,\vec{g}_2)},\qquad(3\cdot54)$$

となる。ここで、$\vec{g}_2=b_1\vec{g}_1+b_2\vec{g}_2$であり、係数$b_1$及び$b_2$は$b_1+b_2=1$を満足する。また、$(\vec{g}_1,\vec{g}_2)$等はベクトル$\vec{g}_1$と$\vec{g}_2$の内積を表す演算子である。ＲＲＫ法は通常は１次精度であるが、$b_2c_2=-1/2$の時、２次精度となる。Hairer[16]によると、$b_2c_2=-1$を満足する時、ＲＲＫ法は陽的な方法であるにもかかわらず、$A(72.97°)$－安定となり、スカラー方程式に適用した場合、陰的オイラー法に匹敵する安定性が得られ、$b_2c_2\leqq-1/[2\cos(\alpha)\{2-\cos(\alpha)\}]$の時$A(\alpha)$－安定となることが証明されている。従って、ＲＲＫ法は通常の陽的方法に比べて安定条件による制限の非常に緩やかな方法である。本研究では、最も収束性に優れた２次精度の係数$b_1=2$、$b_2=-1$及び$c_2=-1/2$を採用している。

この空間微分項の離散化にＭＤＱ法を用い、その結果得られる擬似時間に関する連立常微分方程式の積分にＲＲＫ法を用いる高次精度線の方法により、楕円型偏微分方程式に対する数値計算法は時間発展型方程式である運動方程式に対する数値計算法と同様となり、全体のプログラミングも簡潔となる。

２．１．２．　擬似時間依存法の応用[17,18,19]

本項では、擬似時間依存法の応用として遷音速ポテンシャル流れに適用した結果を述べる。遷音速ポテンシャル流れに対する擬似時間依存法は Veuillot と Viviand[20]によって提案されたものであり、圧縮性オイラー方程式において全エンタルピ及びエントロピを一定と仮定することにより導かれたものである。

圧縮性オイラー方程式は保存型表示で

$$\frac{\partial \vec{Q}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{G}}{\partial x} + \frac{\partial \vec{H}}{\partial y} = 0 , \qquad (3\cdot55)$$

と表すことができる。ここで、ベクトル$\vec{Q}$、$\vec{G}$及び$\vec{H}$は

$$\vec{Q} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ e \end{bmatrix}, \quad \vec{G} = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho u v \\ (e+p) u \end{bmatrix}, \quad \vec{H} = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho u v \\ \rho v^2 + p \\ (e+p) v \end{bmatrix} , \qquad (3\cdot56)$$

で与えられ、ρは密度、u及びvは速度成分、pは圧力、eは単位体積当りの全エネルギである。まず、全エンタルピを一定と仮定すると、エネルギ方程式（（3・56）式の最後の成分）が消去される。この場合、圧力pはベルヌーイの関係により計算される。さらに、等エントロピを仮定し、クロッコの定理を適用することにより、運動方程式（（3・56）式の第2、第3成分））は流れ角θと渦度ω（$=\partial v/\partial x - \partial u/\partial y$）に関する以下のような方程式に書き換えることができる。

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \omega = 0 , \qquad (3\cdot57)$$

（3・57）式は定常状態においてポテンシャル流れの仮定を満足する。また、連続の式（（3・56）式の第1成分）は安定性の制限のため、時間微分項を変形して

$$-o\frac{\rho_*}{c_*}\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0 , \qquad (3\cdot58)$$

と書き換えられる。ここで、oは正の定数であり、qは合速度、cは音速である。また、添字「$_*$」は臨界状態を表す。従って、擬似時間依存方程式は（3・55）式と同一の形式で書くことができ、ベクトル$\vec{Q}$、$\vec{G}$及び$\vec{H}$の成分は

$$\vec{Q} = \begin{bmatrix} -oq \\ \theta \end{bmatrix}, \quad \vec{G} = \begin{bmatrix} \rho u \\ v \end{bmatrix}, \quad \vec{H} = \begin{bmatrix} \rho v \\ u \end{bmatrix} , \qquad (3\cdot59)$$

で与えられる。密度ρ及び速度成分u、vは

$$\rho = \left(\frac{\gamma+1}{2} - \frac{\gamma-1}{2} q^2\right)^{1/(\gamma-1)} ,$$

$$u = q\cos\theta, \quad v = q\sin\theta , \qquad (3\cdot60)$$

と合速度q及び流れ角θによって記述される。ここで、γは比熱比である。

（3・59）式を臨界密度ρ_*、臨界音速c_*及び代表長さL_0で無次元化し、物理面から計算面へ

$$\xi = \xi(x, y) , \quad \eta = \eta(x, y) , \qquad (3\cdot61)$$

なる関係を用いて変数変換を行うと以下のようになる。

$$\frac{\partial \vec{Q}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{G}}{\partial \xi} + \frac{\partial \vec{H}}{\partial \eta} = 0 \qquad (3\cdot62)$$

ここで、ベクトル$\vec{Q}$、$\vec{G}$及び$\vec{H}$は

$$\vec{Q} = \begin{bmatrix} -oqJ \\ \theta J \end{bmatrix}, \quad \vec{G} = \begin{bmatrix} \rho(y_\eta u - x_\eta v) \\ y_\eta v + x_\eta u \end{bmatrix}, \quad \vec{H} = \begin{bmatrix} \rho(x_\xi v - y_\xi u) \\ -y_\xi v - x_\xi u \end{bmatrix} \qquad (3\cdot63)$$

で与えられ、添字「ξ」及び「η」はξ、ηに関する偏微分を表すものとする。また、Jは変換のヤコビアンであり、

$$J = x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi , \qquad (3\cdot64)$$

で定義される。なお、本研究では$o=1$として数値計算を行っている。

数値計算法は空間微分項の離散化にMDQ法を用い、時間積分法にRRK法を用いる高次精度線の方法であり、ここでは、MDQ法の次数を$M=3$とする2次精度で計算を行った。（3・62）式の空間微分項を$M=3$のMDQ法で離散化すると

$$\frac{d\vec{Q}_{i,j}}{dt} = -\frac{1}{2\Delta\xi}(\vec{G}_{i+1,j} - \vec{G}_{i-1,j}) - \frac{1}{2\Delta\eta}(\vec{H}_{i,j+1} - \vec{H}_{i,j-1}) , \qquad (3\cdot65)$$

と表すことができる。ただし、$\Delta\xi$及び$\Delta\eta$はξ及びη方向の格子間隔であり、添字i及びjは各々の方向の格子番号である。衝撃波などによる解の不連続性に起因する数値解の振動を抑制するために、（3・65）式の右辺に人工粘性項$D_{i,j}$を付加して数値計算を行う。人工粘性項$D_{i,j}$は Jamesonと Schmidt[21]の人工粘性項

$$D_{i,j} = d_{i+1/2,j} - d_{i-1/2,j} + d_{i,j+1/2} - d_{i,j-1/2} , \qquad (3\cdot66)$$

を採用する。ここで、拡散流束$d_{i+1/2,j}$は

$$d_{i+1/2,j} = J_{i+1/2,j}\{\varepsilon^{(2)}_{i+1/2,j}\Delta_\xi(\vec{Q}/J)_{i,j} - \varepsilon^{(4)}_{i+1/2,j}\Delta^3_\xi(\vec{Q}/J)_{i-1,j}\}/\Delta t, \quad (3\cdot67)$$

で定義され、Δ_ξ及びΔ^3_ξはξ方向に関する1階及び3階の前進差分演算子である。また$\varepsilon^{(2)}$及び$\varepsilon^{(4)}$は

$$\varepsilon^{(2)}_{i+1/2,j} = \min(1/2, \omega^{(2)} s_{i+1/2,j}),$$
$$\varepsilon^{(4)}_{i+1/2,j} = \max(0, \omega^{(4)} - \alpha^{(4)} \bar{s}_{i+1/2,j}), \quad (3\cdot68)$$

で与えられ、$\omega^{(2)}$、$\omega^{(4)}$及び$\alpha^{(4)}$は任意のパラメータである。さらに、$\bar{s}_{i+1/2,j}$は以下のように定義される。

$$\bar{s}_{i+1/2,j} = \max(s_{i+2,j}, s_{i+1,j}, s_{i,j}, s_{i-1,j}),$$

$$s_{i,j} = \frac{|p_{i+1,j} - 2p_{i,j} + p_{i-1,j}|}{|p_{i+1,j} + 2p_{i,j} + p_{i-1,j}|}, \quad (3\cdot69)$$

空間微分項を2次精度のMDQ法で離散化すると（3・65）式のように時間に関する連立常微分方程式に帰着される。この時間に関する連立常微分方程式は前項で述べた安定性の制限の非常に緩やかなRRK法で時間積分される。さらに、定常解への収束を加速するために、収束加速法として Jamesonと Bakerにより提案された陰的残差平均法[22]及び局所時間格子幅法を採用する。陰的残差平均法は残差を隣接点の残差平均に置き換えるものであり、（n＋1）時間段階の物理量ベクトル$\vec{Q}$を残差を$\vec{r}$として

$$\vec{Q}^{n+1} = \vec{Q}^n + \vec{r}, \quad (3\cdot70)$$

と表す時、残差$\vec{r}$を以下に定義される陰的残差$\vec{\bar{r}}$で置き換えて計算する方法である。

$$(1-\varepsilon_r\delta^2_\xi)(1-\varepsilon_r\delta^2_\eta)\vec{\bar{r}} = \vec{r}, \quad (3\cdot71)$$

ここで、δ^2_ξ及びδ^2_ηはξ及びη方向の2階微分を表す演算子であり、ε_rは平滑化のパラメータである。一方、局所時間格子幅法は各格子点ごとに時間格子間隔を変化させ、情報伝達速度を一定にすることにより、収束を加速する方法である。本研究では各格子点において、クーラン数C_Nを一定にすることにより

$$\Delta t_{i,j} = C_N \min(\Delta t_\xi, \Delta t_\eta)_{i,j}, \quad (3\cdot72)$$

と決定する。ここで、Δt_ξ及びΔt_ηはξ及びη方向の時間格子幅であり、以下のように与えられる。

$$(\Delta t_\xi)_{i,j} = \min\left(\left|\frac{-oJ}{(\rho-\rho^{2-\gamma}q^2)R_\xi}\right|, \left|\frac{J}{qR_\xi}\right|\right)_{i,j},$$

$$(\Delta t_\eta)_{i,j} = \min\left(\left|\frac{-oJ}{(\rho-\rho^{2-\gamma}q^2)R_\eta}\right|, \left|\frac{J}{qR_\eta}\right|\right)_{i,j}, \quad (3\cdot73)$$

また、R_ξ及びR_ηは各々

$$R_\xi = y_\eta\cos\theta - x_\eta\sin\theta, \quad R_\eta = x_\xi\sin\theta - y_\xi\cos\theta, \quad (3\cdot79)$$

で与えられる。

初期条件は計算領域全体に一様流を与える衝撃出発とし、境界条件は以下のように与える。

① 流入境界

境界の法線方向に対する1次元リーマン不変量の概念を用いる。これは、境界に対する法線ベクトルを$\vec{n}$とし、リーマン不変量R_∞及びR_{ex}を

$$R_\infty = (\vec{u}_\infty, \vec{n}) - 2c_\infty/(\gamma-1),$$

$$R_{ex} = (\vec{u}_{ex}, \vec{n}) + 2c_{ex}/(\gamma-1), \quad (3\cdot80)$$

と定義する時、境界に垂直な速度成分及び音速は

$$(\vec{u}, \vec{n}) = (R_\infty + R_{ex})/2,$$

$$c = (\gamma-1)(R_\infty - R_{ex})/4, \quad (3\cdot81)$$

なる関係式で与えられる。ここで、添字「∞」及び「ex」は各々一様流における値及び計算領域内から境界点上への外挿値を示す。また、流入角θについては一様流の値に固定する。

②流出境界

速度成分は流入境界と同様に1次元リーマン不変量を用いて決定し、流出角θは計算領

域内から境界点上に外挿する。

③物体面境界

流体が物体に沿って流れる接線条件を課す。速度成分は（３・６３）式の第２成分より $\partial\theta/\partial t=0$ となるため、

$$\frac{\partial}{\partial\xi}(u x_{\eta}+v y_{\eta})-\frac{\partial}{\partial\eta}(u x_{\xi}+v y_{\xi})=0, \qquad (3\cdot 82)$$

により決定し、流れ角θは物体形状に沿うように与える。

④後流境界

速度成分ｕ、ｖ及び流れ角θ共、境界に隣接する内点の値の単純平均として与える。

⑤周期境界

速度成分ｕ、ｖ及び流れ角θ共、周期境界条件を与える。

取り上げた流れ場は、外部流問題ではＮＡＣＡ００１２、ＲＡＥ２８２２及びＫＯＲＮＩ翼型まわりの流れ、内部流問題では４．２％厚さの隆起を有する流路内流れ、ＮＡＣＡ００１２翼列内流れである。

（１）外部流問題への適用

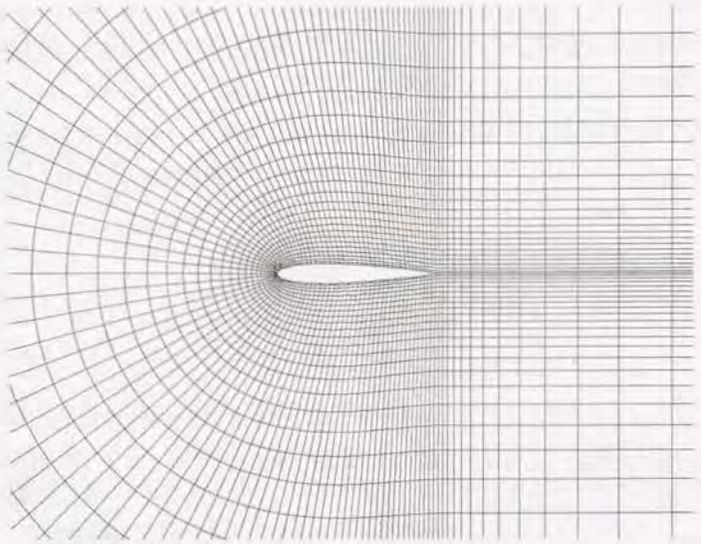


図３・１４　ＮＡＣＡ００１２翼型まわりのＣ－型計算格子

最初に、ＮＡＣＡ００１２翼型まわりの流れを取り上げ、一様流マッハ数$M_{\infty}=0.8$迎角$\theta_{in}=0°$、$M_{\infty}=0.85$・$\theta_{in}=0°$及び$M_{\infty}=0.8$・$\theta_{in}=1.25°$の３ケースについて計算を行った。計算領域は、翼弦長を１としたとき、前縁から前方外部境界まで及び上下方外部境界までを８とし、後縁から後方外部境界までを４としている。数値計算は１２９×３３のＣ－型格子で行っており、翼面上には９７点格子を分布させている。（図３・１４参照）この計算格子は Thompson 等[18]によって提案された楕円型偏微分方程式を数値的に解くことによって形成している。これらの方程式系については後に詳述する。定常状態の判断は状態量の平均自乗残差（L_2残差）を１回目のL_2残差で正規化した残差が３桁落ちた時点とした。

図３・１５及び３・１６に一様流マッハ数$M_{\infty}=0.8$、迎角$\theta_{in}=0°$の弱い衝撃波が発生する際の等マッハ数線図及び圧力係数分布図を示す。図３・１５において破線は音速線を示している。流れ場は上下対称となり、上下面共同一位置に衝撃波が生じている。図３・１６において、実線及び記号「○」は各々擬似時間依存方程式及びオイラー方程式の結果を示しており、オイラー方程式は擬似時間依存方程式と同一の数値計算法を用い、同一の初期・境界条件の下で数値計算されている。衝撃波が弱いために、衝撃波前後のエントロピ変化は非常に小さく等エントロピ変化と見なせるために、ポテンシャル流れの解とオイラー方程式の解の差はほとんど見られず、両者良好な一致を示している。次に、図３・１７、３・１８に迎角$\theta_{in}=0°$、一様流マッハ数$M_{\infty}=0.85$とした際の等マッハ数線図及び圧力係数分布図を示す。最初のケースに比べて、マッハ数が高くなっているために、強い衝撃波が生じており、その位置も翼後縁に移動している。しかしながら、迎角が０°であるために上下面の対称性は保持されている。さらに、オイラー方程式の解と比較すると衝撃波が強いために衝撃波面におけるエントロピ変化が無視できなくなり、両者の間には明確な差が認められる。一般に、等エントロピ衝撃波は通常の衝撃波に比べ、圧力上昇が大きくなり、発生する位置も下流側に移動する。図より分かるように、ポテンシャル流れの解はオイラー方程式の解と比較して、その強さが約１．１倍であり、その位置も翼前縁からオイラー方程式の解が約０．７５であるのに対して、ポテンシャル流れの解は約０．８３と下流側に移動していることが確認できる。ＮＡＣＡ００１２翼まわりの流れの最後のケースとして、一様流マッハ数$M_{\infty}=0.8$、迎角$\theta_{in}=1.25°$とした際の等マッハ数線図及び圧力係数分布図を前述の２つのケースと同様に図３・１９及び３・２０に示す。迎角が存在するために、流れ場の上下の対称性は崩れ、翼上面のみに衝撃波が発生している。オイラー方程式の解と比較すると、翼上面においては第２のケースと

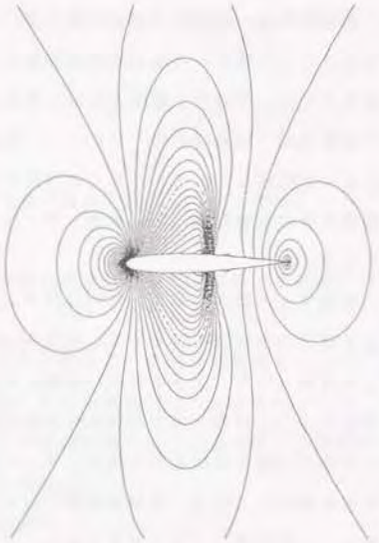


図３・１５　等マッハ数線図（ $M_\infty=0.8$ ，$\theta_{in}=0°$ ，$\Delta M=0.025$ ）

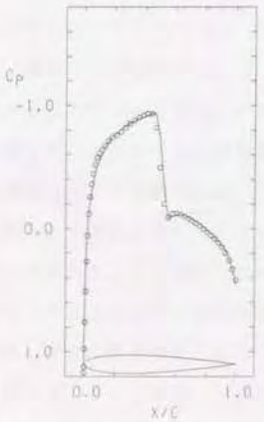


図３・１６　圧力係数分布図（－；擬似時間依存方程式、○；オイラー方程式）

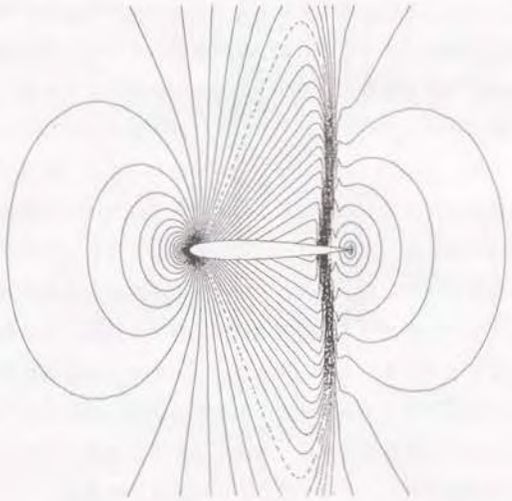


図３・１７　等マッハ数線図（ $M_\infty=0.85$ ，$\theta_{in}=0°$ ，$\Delta M=0.025$ ）

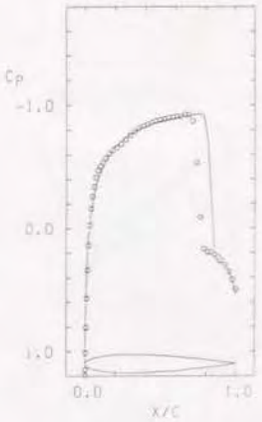


図３・１８　圧力係数分布図（－；擬似時間依存方程式、○；オイラー方程式）

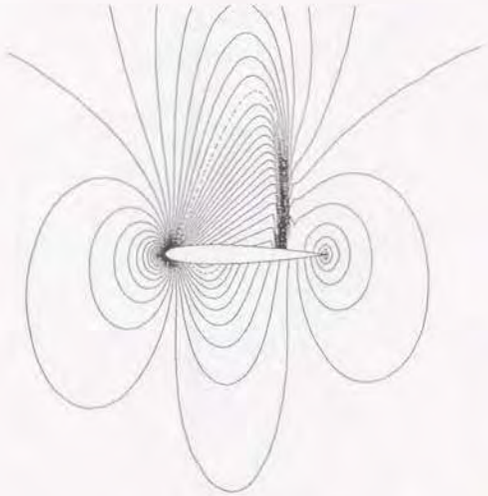


図３・１９　等マッハ数線図（ $M_{\infty}=0.8$ ， $\theta_{in}=1.25^{\circ}$ ， $\Delta M=0.025$ ）

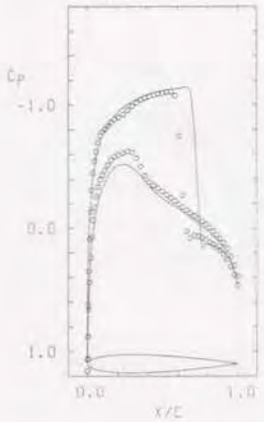


図３・２０　圧力係数分布図（－；擬似時間依存方程式、○；オイラー方程式）

同様に、ポテンシャル流れの解は衝撃波が強く、その位置も下流方向に移動している。さらに、ポテンシャル流れの解においては翼下面で衝撃波の発生が見られないのに対し、オイラー方程式の解には弱い衝撃波の発生が認められる。

次に、より実際的な翼形状であるＲＡＥ２８２２翼及びＫＯＲＮＩ翼に擬似時間依存法を適用した結果について述べる。計算領域はＮＡＣＡ００１２翼の場合と同一であり、格子点数及び翼面上の格子点分布も同一としている。ＲＡＥ２８２２翼の計算条件は、一様流マッハ数M_{∞}＝０．７５、迎角θ_{in}＝３°と与えている。また、ＫＯＲＮＩ翼の場合の計算条件は、M_{∞}＝０．７５，θ_{in}＝０．１１５°としている。図３・２１、図３・２２にＲＡＥ２８２２翼型まわり及びＫＯＲＮＩ翼型まわりのＣ－型計算格子を示す。図３・２３及び図３・２４にＲＡＥ２８２２翼型まわりに対して得られた収束解の等マッハ数線図及び翼面上の圧力係数分布図を示す。図より、翼上面に強い衝撃波の発生が認められ、その位置も翼後縁付近（前縁から約０．９５の位置）である。しかしながら、翼下面においては衝撃波の発生は認められない。一方、ＫＯＲＮＩ翼型まわりの流れ場の等マッハ数線図及び翼面上の圧力係数分布図を図３・２５及び３・２６に示す。この翼型の計算条件は無衝撃波流れの条件（実線で表示）であり、数値計算結果においても翼上下面共に衝撃波の発生は見られず、無衝撃波流れが再現されていることが確認される。

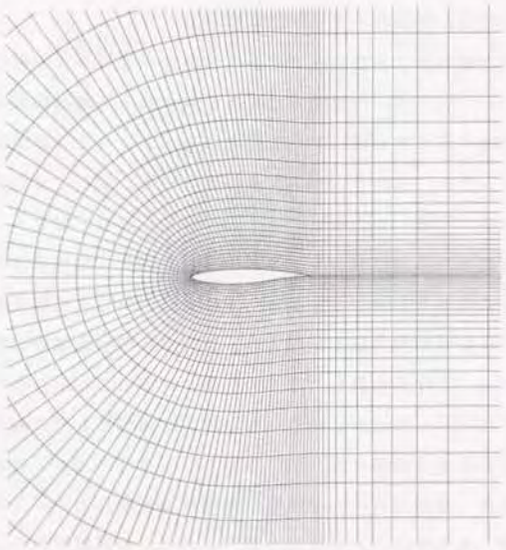


図３・２１　ＲＡＥ２８２２翼型まわりのＣ－型計算格子

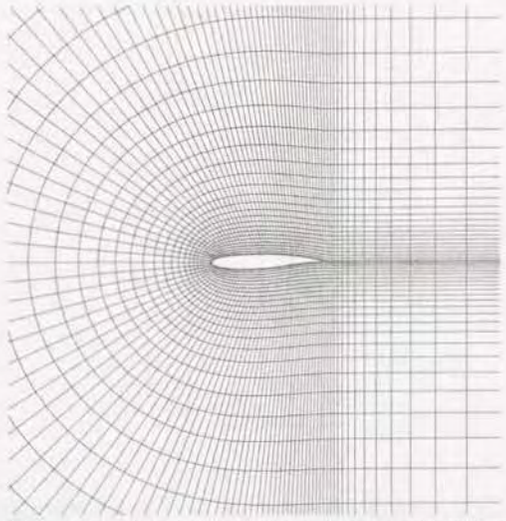


図３・２２　ＫＯＲＮＩ翼型まわりのＣ－型計算格子

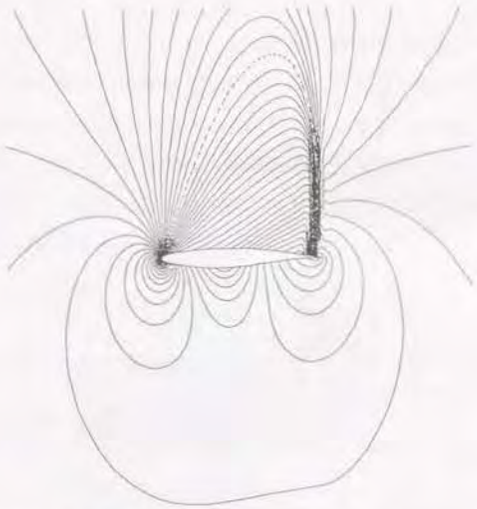


図３・２３　等マッハ数線図（ RAE2822 ，$M_\infty = 0.75$ ，$\theta_{tip} = 3°$ ，$\Delta M = 0.025$ ）

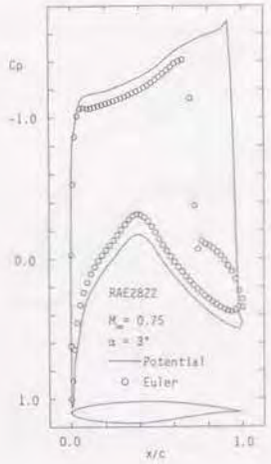


図３・２４　圧力係数分布図（ RAE2822 ）

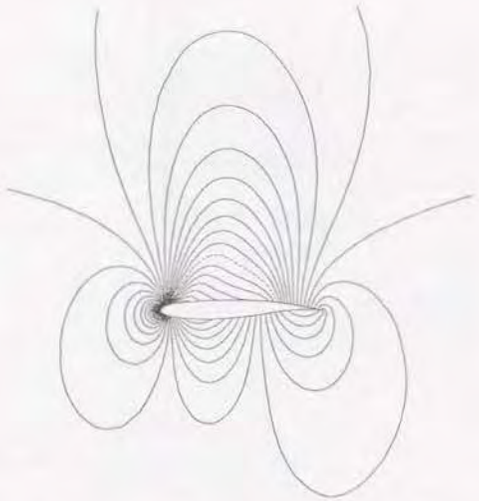


図３・２５　等マッハ数線図（ KORN Ⅰ，$M_{\infty}=0.75$，$\theta_{in}=0.115°$，$\Delta M=0.025$ ）

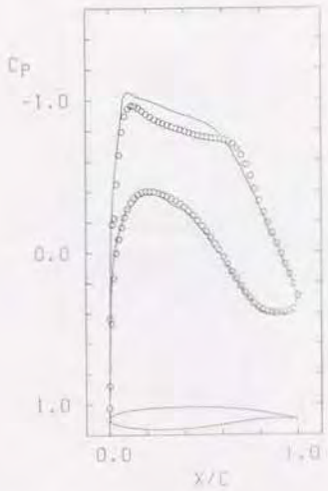


図３・２６　圧力係数分布図（ KORN Ⅰ）

（２）内部流問題への適用

内部流問題の最初の適用例として、４．２％厚さの円弧状隆起を有する流路内流れの計算を行った。数値計算に用いた計算格子は７２×２１点のＨ－型格子系であり、隆起上に４０点格子点を分布させている。（図３・２７参照）一様流速は$M_{\infty}=0.85$で与えている。図３・２８及び３・２９に等マッハ数線図及び壁面上の圧力係数分布図を示す。収束解は隆起前縁から約０．８５の位置に衝撃波が発生している様子が認められる。この結果は他の数値計算法で解析された結果[24]と一致する。

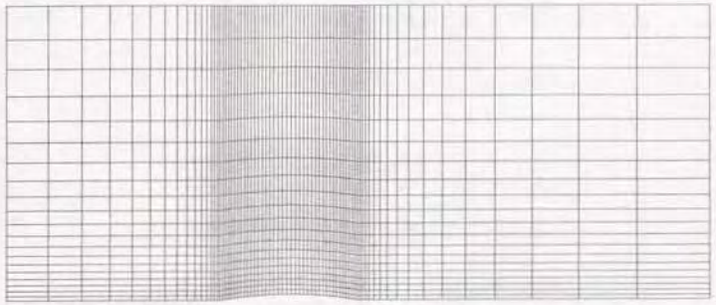


図３・２７　流路内流れにおけるＨ－型計算格子

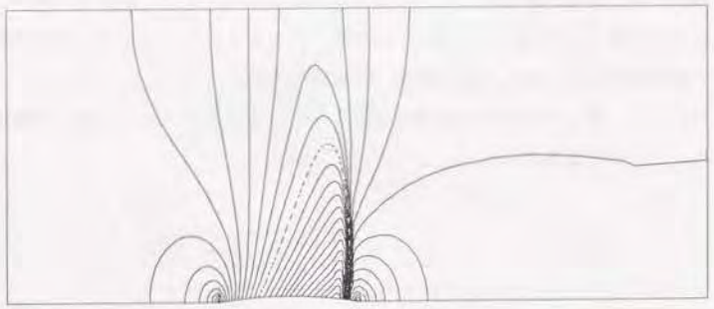


図３・２８　等マッハ数線図（ $M_{\infty}=0.85$ ，$\Delta M=0.025$ ）

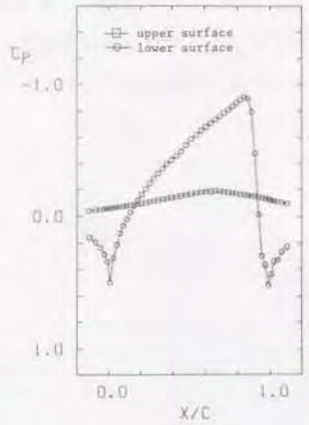


図３・２９　壁面上の圧力係数分布図

最後に、食い違い角が４５°でピッチと翼弦長比が１、一様流マッハ数M_∞＝０．８、流入境界における流れ角θ_{in}＝０°とした際のＮＡＣＡ００１２翼列内流れに擬似時間依存法を適用した結果を図３・３０及び３・３１に示す。図３・３０は数値計算に使用したＣ－型計算格子であり、格子点数は１２９×３３点、翼面上に９７点格子点を分布させている。図３・３１は収束解の等マッハ数線図を示したものであり、比較の対象として有限要素法により計算された Akay と Ecer の結果[25]を図３・３２に示す。両者共翼中央に衝撃波の発生が見られ、定性的に良好な一致が認められる。

以上のように、擬似時間依存法は遷音速ポテンシャル流れにおいても良好な数値計算結果を与えることが確認される。

図３・３０　ＮＡＣＡ００１２翼列内流れに対するＣ－型計算格子

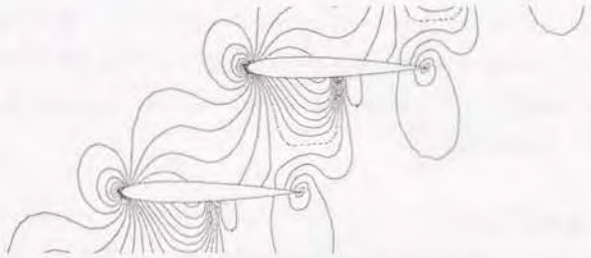


図３・３１　等マッハ数線図（ M_∞＝0.8 ， θ_{in}＝０° ， ΔM ＝0.05 ）

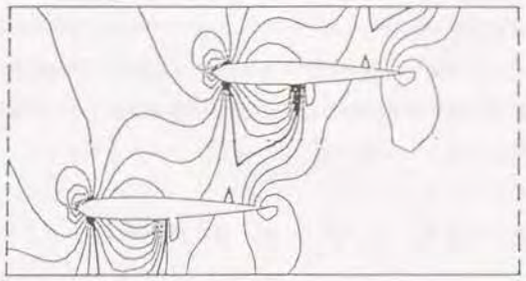


図３・３２　等マッハ数線図（ Akay と Ecer の結果[25]）

2．2．　緩和法

一般に、楕円型偏微分方程式（（３・５０）式）は適当な緩和法によって反復計算することにより収束解を求めることができる。最も一般的に用いられる緩和法は逐次過緩和法（ＳＯＲ法）であり、モデル方程式に点ＳＯＲ法を適用すると、

$$\phi^{n+1} = \phi^{n} + \omega_{SOR}\,\Delta_{i,j}\left[\frac{1}{\Delta x^2}\left(\phi^{n}_{i+1,j} - 2\phi^{n}_{i,j} + \phi^{n+1}_{i-1,j}\right) + \frac{1}{\Delta y^2}\left(\phi^{n}_{i,j+1} - 2\phi^{n}_{i,j} + \phi^{n+1}_{i,j-1}\right) - F_{i,j}\right], \qquad (3\cdot83)$$

が得られる。ここで、$\Delta_{i,j}$ は $\Delta_{i,j} = \Delta x^2\,\Delta y^2 / \{2(\Delta x^2 + \Delta y^2)\}$ で与えられ、ω_{SOR} は加速パラメータである。（３・８３）式には演算中に再帰性が存在するためにベクトル型コンピュータに適用した場合、そのアーキテクチャに対する適合性が悪化する。そのために、再帰性を持たない様にチェッカーボードＳＯＲ法等が考案されているが、本論文では、緩和法として群陽的反復法（Group Explicit Iterative Method：以下ＧＥＩ法と略す）を採用する。

2．2．1．　群陽的反復法[9]

群陽的反復法（ＧＥＩ法）は当初１次元問題に対して Evansによって提案されたものであり、複数の格子点を１つの群として非対称陰的差分表示し、その係数行列を解析的に反転することによって陽的差分表示を得る方法である。この方法により、個々の群は独立に計算され、且つ、陽的方法であるために、ベクトル型アーキテクチャのみならず将来、科学技術計算の主流となるであろう並列型アーキテクチャに対しても適合性の高い数値計算法であると考えられる。群の形成の方法は、１次元の場合２点で１つの群を、２次元の場合は４点で１つの群を形成し、一般には、2^d 点で１つの群を形成する。ここで、肩文字「^{d}」は次元数を示している。

２次元楕円型偏微分方程式（（３・５０）式）は、格子点（ｉ，ｊ）で２次精度の中心差分近似を行うと

$$A^{i}_{i,j}\,\phi_{i-1,j} + B^{i}_{i,j}\,\phi_{i+1,j} + C^{i}_{i,j}\,\phi_{i,j-1} + D^{i}_{i,j}\,\phi_{i,j+1} + E^{i}_{i,j}\,\phi_{i,j} = F^{i}_{i,j}\ , \qquad (3\cdot84)$$

と表現することができる。ただし、Ａ'、Ｂ'、Ｃ'、Ｄ'及びＥ'は係数であり、交差微分項は右辺のＦ'に含めるものとする。さらに、（３・８４）式において、反復段階ｎを考慮することにより、

$$A^{i}_{i,j}\,\phi^{n}_{i-1,j} + B^{i}_{i,j}\,\phi^{n+1}_{i,j} + C^{i}_{i,j}\,\phi^{n}_{i,j-1} + D^{i}_{i,j}\,\phi^{n+1}_{i,j+1} + E^{o}_{i,j}\,\phi^{n}_{i,j} + E^{e}_{i,j}\,\phi^{n+1}_{i,j} = F^{i}_{i,j}\ , \qquad (3\cdot85)$$

と書くことができる。ここで、$E^{i}_{i,j} = E^{o}_{i,j} + E^{e}_{i,j}$ であり、$E^{o}_{i,j}$ 及び $E^{e}_{i,j}$ は

$$E^{o}_{i,j} = \tfrac{1}{2}E^{i}_{i,j}\,(1 - \rho_{GEI})\ ,$$
$$E^{e}_{i,j} = \tfrac{1}{2}E^{i}_{i,j}\,(1 + \rho_{GEI})\ , \qquad (3\cdot86)$$

と表すことができる。ρ_{GEI} はＧＥＩ法のパラメータであり、$0 \leq \rho_{GEI} \leq 1$ の任意の値を取る。同様の離散化を点（ｉ＋１，ｊ）、（ｉ，ｊ＋１）、（ｉ＋１，ｊ＋１）に対して行うことにより、４点を１つの群とした以下の表示を得る。

$$\begin{bmatrix} E^{e}_{i,j} & B^{i}_{i,j} & D^{i}_{i,j} & 0 \\ A^{i}_{i+1,j} & E^{e}_{i+1,j} & 0 & D^{i}_{i+1,j} \\ C^{i}_{i,j+1} & 0 & E^{e}_{i,j+1} & B^{i}_{i,j+1} \\ 0 & C^{i}_{i+1,j+1} & A^{i}_{i+1,j+1} & E^{e}_{i+1,j+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi^{n+1}_{i,j} \\ \phi^{n+1}_{i+1,j} \\ \phi^{n+1}_{i,j+1} \\ \phi^{n+1}_{i+1,j+1} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} F^{i}_{i,j} - A^{i}_{i,j}\,\phi^{n}_{i-1,j} - C^{i}_{i,j}\,\phi^{n}_{i,j-1} - E^{o}_{i,j}\,\phi^{n}_{i,j} \\ F^{i}_{i+1,j} - B^{i}_{i+1,j}\,\phi^{n}_{i+2,j} - C^{i}_{i+1,j}\,\phi^{n}_{i+1,j-1} - E^{o}_{i+1,j}\,\phi^{n}_{i+1,j} \\ F^{i}_{i,j+1} - A^{i}_{i,j+1}\,\phi^{n}_{i-1,j+1} - D^{i}_{i,j+1}\,\phi^{n}_{i,j+2} - E^{o}_{i,j+1}\,\phi^{n}_{i,j+1} \\ F^{i}_{i+1,j+1} - B^{i}_{i+1,j+1}\,\phi^{n}_{i+2,j+1} - D^{i}_{i+1,j+1}\,\phi^{n}_{i+1,j+2} - E^{o}_{i+1,j+1}\,\phi^{n}_{i+1,j+1} \end{bmatrix} \qquad (3\cdot87)$$

（３・８７）式は係数行列を反転することにより、容易に陽的差分表示を得ることができる。格子点数が奇数の場合には、４点を１つの群として取り扱うと４点の群として取り扱えない余剰点が生じる。これらの余剰点については２点の群及び孤立点として以下のように定式化する。

（a）２点群（ｉ方向）

$$\begin{bmatrix} E^{1}_{i,j} & B^{1}_{i,j} \\ A^{1}_{i+1,j} & E^{1}_{i+1,j} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi^{n+1}_{i,j} \\ \phi^{n+1}_{i+1,j} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} F^{1}_{i,j} - A^{1}_{i,j}\,\phi^{n}_{i-1,j} - C^{1}_{i,j}\,\phi^{n}_{i,j-1} - D^{1}_{i,j}\,\phi^{n}_{i,j+1} - E^{0}_{i,j}\,\phi^{n}_{i,j} \\ F^{1}_{i+1,j} - B^{1}_{i+1,j}\,\phi^{n}_{i+2,j} - C^{1}_{i+1,j}\,\phi^{n}_{i+1,j-1} \\ \qquad - D^{1}_{i+1,j}\,\phi^{n}_{i+1,j+1} - E^{0}_{i+1,j}\,\phi^{n}_{i+1,j} \end{bmatrix} ,$$

（３・８８）

（b）２点群（ｊ方向）

$$\begin{bmatrix} E^{1}_{i,j} & D^{1}_{i,j} \\ C^{1}_{i,j+1} & E^{1}_{i,j+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi^{n+1}_{i,j} \\ \phi^{n+1}_{i,j+1} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} F^{1}_{i,j} - A^{1}_{i,j}\,\phi^{n}_{i-1,j} - B^{1}_{i,j}\,\phi^{n}_{i+1,j} - C^{1}_{i,j}\,\phi^{n}_{i,j-1} - E^{0}_{i,j}\,\phi^{n}_{i,j} \\ F^{1}_{i,j+1} - A^{1}_{i,j+1}\,\phi^{n}_{i-1,j+1} - B^{1}_{i,j+1}\,\phi^{n}_{i+1,j+1} \\ \qquad - D^{1}_{i,j+1}\,\phi^{n}_{i,j+2} - E^{0}_{i,j+1}\,\phi^{n}_{i,j+1} \end{bmatrix} ,$$

（３・８９）

（c）孤立点

$$E^{1}_{i,j}\,\phi^{n+1}_{i,j} = F^{1}_{i,j} - A^{1}_{i,j}\,\phi^{n}_{i-1,j} - B^{1}_{i,j}\,\phi^{n}_{i+1,j} - C^{1}_{i,j}\,\phi^{n}_{i,j-1} - D^{1}_{i,j}\,\phi^{n}_{i,j+1} - E^{0}_{i,j}\,\phi^{n}_{i,j} ,$$

（３・９０）

これらの４点群、２点群及び孤立点の評価を図式化すると図３・３３のようになる。

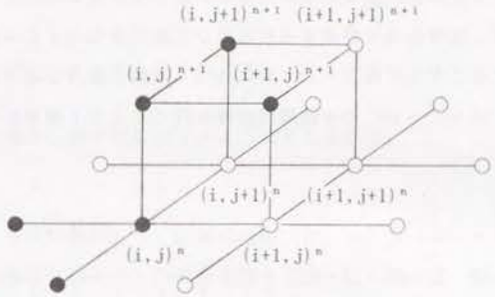


図３・３３(a) ４点群の評価

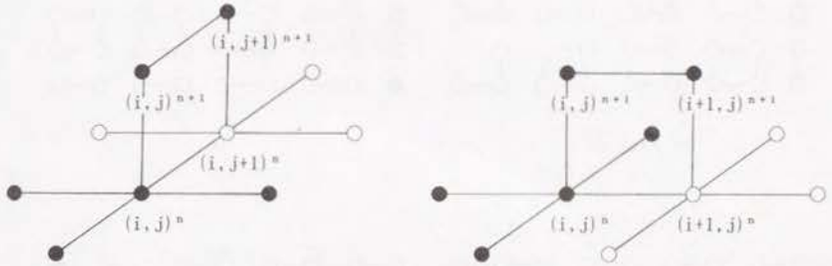


図３・３３(b) ２点群の評価

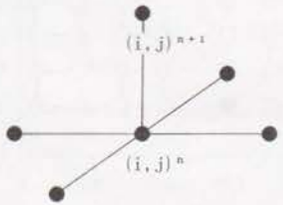


図３・３３(c) 孤立点の評価

このように４点群、２点群及び孤立点を用いることにより、全ての内点を網羅することが可能となる。さらに、情報伝達を促進するため及び方向性をなくすために孤立点を計算領域の各頂点に配置するとすると図３・３４のような４種類の組み合わせが可能となり、本論文では (a)→(b) →(c) →(d) の４段階の計算を行うことで１掃過とする。

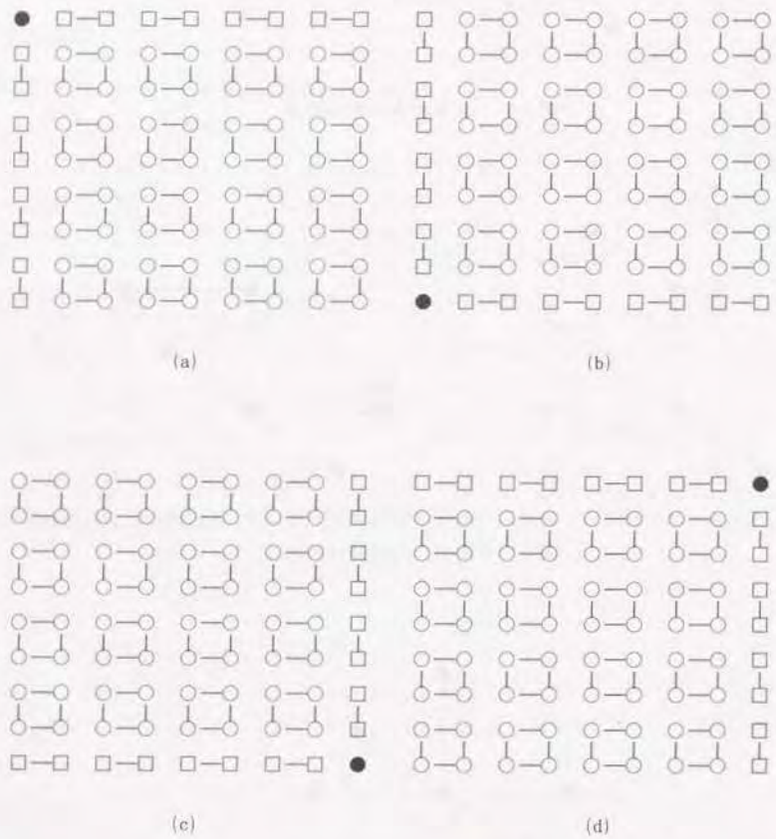


図３・３４　群の配置

群陽的反復法の収束性を検討するために，簡単な２次元ポアソン方程式

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = -\sin(x) - \cos(y) , \qquad (3\cdot 91)$$

を考える。この場合、解析解は以下のように与えられる。

$$\phi = \sin(x) + \cos(y) , \qquad (3\cdot 92)$$

境界条件をディリクレ条件とし、計算領域を $(0, 0) \leq (x, y) \leq (2\pi, 2\pi)$ とした際のＧＥＩ法とＳＯＲ法との収束履歴を図３・３５に示す。ＧＥＩ法のパラメータは $\rho_{GEI} = 0.5$ とし、ＳＯＲ法の加速係数 ω_{SOR} は最適値を採用している。数値計算は格子点数３３×３３、６５×６５及び１２９×１２９の３ケースについて行った。「□」印がＧＥＩ法の結果を「○」印がＳＯＲ法の結果を各々示している。３ケース共ＧＥＩ法はＳＯＲ法の約１／５の反復回数で収束しおりＧＥＩ法の収束性の高さが認められる。

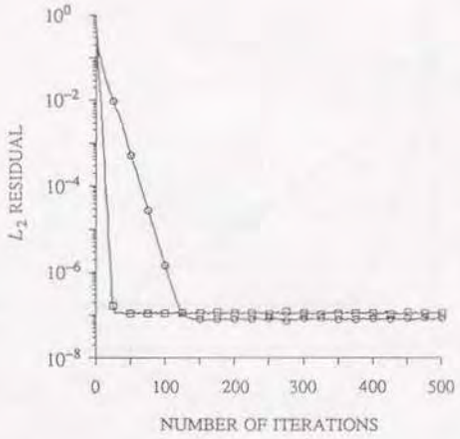


図３・３５(a)　収束履歴（33×33 ，ρ_{GEI} = 0.5 ，ω_{SOR} =1.8）

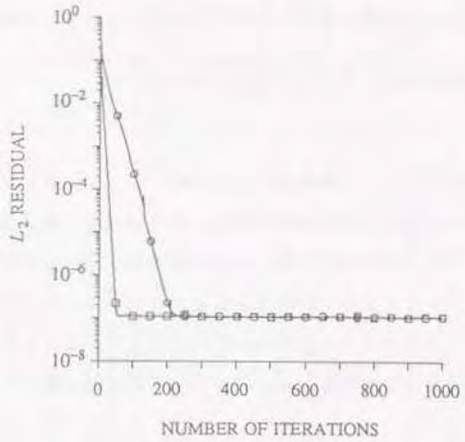


図３・３５(b)　収束履歴（65×65，ρ_{GEI} = 0.5，ω_{SOR} =1.9）

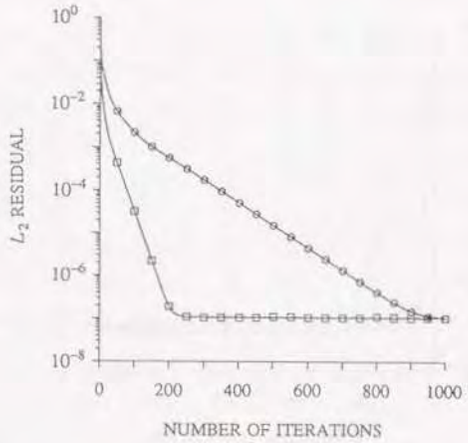


図３・３５(c)　収束履歴（129 ×129，ρ_{GEI} = 0.5，ω_{SOR} = 1.9）

２．２．２．　群陽的反復法の応用[28]

本項では、ＧＥＩ法を遷音速完全ポテンシャル方程式の解法に応用した結果について述べる。２次元定常完全ポテンシャル方程式は保存型表示で

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\rho\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\rho\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)\right] = 0 , \qquad (3\cdot 93)$$

と表すことができる。ここで、Φは速度ポテンシャル、ρは密度であり、

$$\rho = \left[1-\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\left\{\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)^2\right\}\right]^{1/(\gamma-1)} , \qquad (3\cdot 94)$$

と定義することができる。γは比熱比であり，合速度ｑ及び速度成分ｕ、ｖは以下のように与えられる。

$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial x} , \quad v = \frac{\partial \Phi}{\partial y} , \quad q = \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)^2\right]^{1/2} . \qquad (3\cdot 95)$$

なお、無次元化は臨界音速c_*、澱み点密度ρ_0及び代表長さL_0を用いて行っている。

境界条件の設定を容易にするために、物理面（ｘ，ｙ）から計算面（ξ，η）への座標変換を（３・６１）式の関係を用いて行うと、（３・９３）～（３・９５）式は

$$\frac{\partial}{\partial \xi}\left[\frac{\rho U}{J}\right] + \frac{\partial}{\partial \eta}\left[\frac{\rho V}{J}\right] = 0 , \qquad (3\cdot 96)$$

$$\rho = \left[1-\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\left\{U\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \xi}\right)+V\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \eta}\right)\right\}\right]^{1/(\gamma-1)} , \qquad (3\cdot 97)$$

$$u = J\left[\frac{\partial y}{\partial \eta}\frac{\partial \Phi}{\partial \xi} - \frac{\partial y}{\partial \xi}\frac{\partial \Phi}{\partial \eta}\right] ,$$

$$v = J\left[\frac{\partial x}{\partial \xi}\frac{\partial \Phi}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta}\frac{\partial \Phi}{\partial \xi}\right] , \qquad (3\cdot 98)$$

$$q = \left[U\frac{\partial \Phi}{\partial \xi} + V\frac{\partial \Phi}{\partial \eta}\right] ,$$

と書き換えられる。ここで、Ｕ、Ｖは反変速度成分であり、

$$U = \frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \Phi}{\partial y} = A_1\frac{\partial \Phi}{\partial \xi} + A_2\frac{\partial \Phi}{\partial \eta} ,$$

$$V = \frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y}\frac{\partial \Phi}{\partial y} = A_2\frac{\partial \Phi}{\partial \xi} + A_3\frac{\partial \Phi}{\partial \eta}, \qquad (3\cdot 99)$$

で与えられる。また、Jは変換のヤコビアン、A_1、A_2 及びA_3 は変換の計量であり、各々以下のように定義される。

$$A_1 = \left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2 = J^2\left[\left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\right)^2\right],$$

$$A_2 = \frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial y} = -J^2\left[\frac{\partial x}{\partial \xi}\frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial y}{\partial \xi}\frac{\partial y}{\partial \eta}\right], \qquad (3\cdot 100)$$

$$A_3 = \left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2 = J^2\left[\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)^2\right],$$

$$J = \frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial x} = 1\Big/\left[\frac{\partial x}{\partial \xi}\frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta}\frac{\partial y}{\partial \xi}\right].$$

2次精度の中心差分近似を用いて（3・96）式を離散化すると

$$\overleftarrow{\delta}_\xi\left[\tilde{\rho}_i\left(\frac{U}{J}\right)_{i+1/2,j}\right] + \overleftarrow{\delta}_\eta\left[\bar{\rho}_j\left(\frac{V}{J}\right)_{i,j+1/2}\right] = 0, \qquad (3\cdot 101)$$

と表すことができる。ここで、$\overleftarrow{\delta}_\xi$ 及び$\overleftarrow{\delta}_\eta$ はξ及びη方向の1次精度後退差分演算子であり、$\tilde{\rho}_i$ 及び$\bar{\rho}_j$ は Holst[27]によって提案された人工粘性を含む密度であり、

$$\tilde{\rho}_i = \{(1-\nu_c)\rho\}_{i+1/2,j} + (\nu_c)_{i+1/2,j}\,\rho_{i+1/2+k,j},$$
$$\bar{\rho}_j = \{(1-\nu_c)\rho\}_{i,j+1/2} + (\nu_c)_{i,j+1/2}\,\rho_{i,j+1/2+m}, \qquad (3\cdot 102)$$
$$k = -1\ (U_{i+1/2,j} > 0),\quad k = 1\ (U_{i+1/2,j} < 0),$$
$$m = -1\ (V_{i,j+1/2} > 0),\quad m = 1\ (V_{i,j+1/2} < 0),$$

で与えられる。また、ν_c は以下の関係を満足する。

$$\nu_c = \max[(M^2_{i,j} - M_c)c_0, 0],\ (U_{i+1/2,j} > 0)$$
$$\nu_c = \max[(M^2_{i+1,j} - M_c)c_0, 0],\ (U_{i+1/2,j} < 0) \qquad (3\cdot 103)$$

ここで、$M_{i,j}$ は局所マッハ数、M_c は打ち切りマッハ数であり、c_0 は$1 \leq c_0 \leq 2$を満足する定数である。

（3・101）式を差分展開し、Δ形式を用いると以下のように表すことができる。

$$A^n_{i,j}\Delta\Phi^n_{i-1,j} + B^n_{i,j}\Delta\Phi^n_{i+1,j} + C^n_{i,j}\Delta\Phi^n_{i,j-1} + D^n_{i,j}\Delta\Phi^n_{i,j+1}$$
$$+ E^n_{i,j}\Delta\Phi^n_{i,j} + E^n_{i,j}\Delta\Phi^n_{i,j} = F^n_{i,j}, \qquad (3\cdot 104)$$

ここで、$\Delta\Phi^n_{i,j} = \Phi^{n+1}_{i,j} - \Phi^n_{i,j}$ であり、各係数は

$$A^n_{i,j} = \left[\frac{\tilde{\rho}^n A_1}{J}\right]_{i-1/2,j},\quad B^n_{i,j} = \left[\frac{\tilde{\rho}^n A_1}{J}\right]_{i+1/2,j},$$

$$C^n_{i,j} = \left[\frac{\bar{\rho}^n A_3}{J}\right]_{i,j-1/2},\quad D^n_{i,j} = \left[\frac{\bar{\rho}^n A_3}{J}\right]_{i,j+1/2}, \qquad (3\cdot 105)$$

$$E^n_{i,j} = E^0_{i,j} + E^1_{i,j} = -(A^n_{i,j} + B^n_{i,j} + C^n_{i,j} + D^n_{i,j}),$$

$$F^n_{i,j} = -\overleftarrow{\delta}_\xi\left[\frac{\tilde{\rho}U}{J}\right]^n_{i+1/2,j} - \overleftarrow{\delta}_\eta\left[\frac{\bar{\rho}V}{J}\right]^n_{i,j+1/2},$$

と与えられる。（3・104）式は（3・85）式と同形であり、GE1法によって解くことができる。

初期条件は流入マッハ数を固定した一様流とし、境界条件は以下のものを用いる。

① 流入境界

速度ポテンシャルは初期条件に固定する。

② 流出境界

速度ポテンシャルは内点から外挿する。

③ 物体面境界

流れが物体面を横切らない（接線条件）ことより、反変速度成分Vを0とし、以下の関係により速度ポテンシャルを決定する。

$$V_{wall} = \left[A_2\frac{\partial \Phi}{\partial \xi} + A_3\frac{\partial \Phi}{\partial \eta}\right]_{wall} = 0, \qquad (3\cdot 106)$$

④ 後流境界

反変速度成分U、Vを内点の単純平均として求め、速度ポテンシャルは（3・99）式により決定する。

取り上げた流れ場は、内部流問題では4．2％厚さの隆起を有する流路内流れ、外部流問題ではNACA0012翼型まわりの遷音速流れである。比較の対象として、遷音速完全ポテンシャル方程式の解法として最も一般的に用いられている演算子近似分割法の一種

であるＡＦ２法[27]による数値解を採用した。収束判定基準は、ＧＥＩ法、ＡＦ２法共、L_2残差が10^{-5}を下回る時点とした。

（１）流路内流れへの適用

流路内流れへの適用例として、流入マッハ数M_{in}＝０．７２（亜臨界流れ）、０．８５（超臨界流れ）の２ケースについて計算を行った。計算格子は図３・３６に示すようなＨ－型格子系（６５×１９点）であり、隆起上に２５点格子を分布させている。また、計算領域は（－３，０）≦（ｘ，ｙ）≦（３，２．０７３）としている。

最初のケースは、衝撃波が発生しない亜臨界流れ（流入マッハ数M_{in}＝０．７２）であり、図３・３７に収束解の等マッハ数線図を示す。図３・３７(a) はＧＥＩ法による結果であり、図３・３７(b) はＡＦ２法による結果である。両方法によって得られた流れ場は良好に一致しており、衝撃波の発生も見られない。また、収束に要する反復回数はＧＥＩ法が６７回に対しＡＦ２法は２０９回であり、ＧＥＩ法の収束性の高さが認められる。

第２のケースは、衝撃波が発生する超臨界流れ（流入マッハ数M_{in}＝０．８５）を取り上げる。図３・３８に収束解の等マッハ数線図を示す。超臨界流れにおいてもＧＥＩ法及びＡＦ２法の収束解は良好な一致を示している。衝撃波の位置も両者共ｘ／Ｌ＝０．３５と一致している。また、収束に要する反復回数はＧＥＩ法が１７１回、ＡＦ２法は３５３回であり、この場合もＧＥＩ法は収束性に優れている。

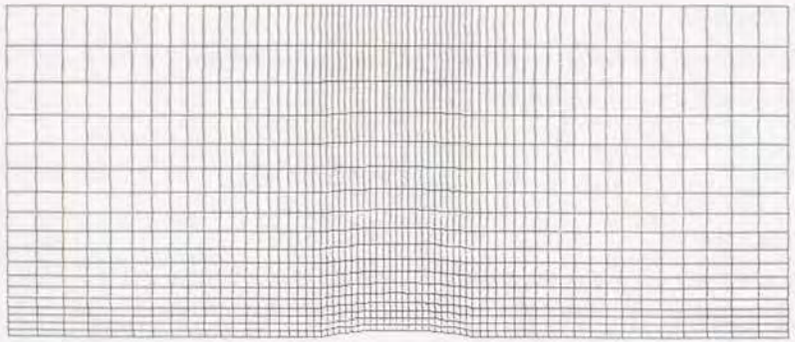


図３・３６　流路内流れにおけるＨ－型計算格子

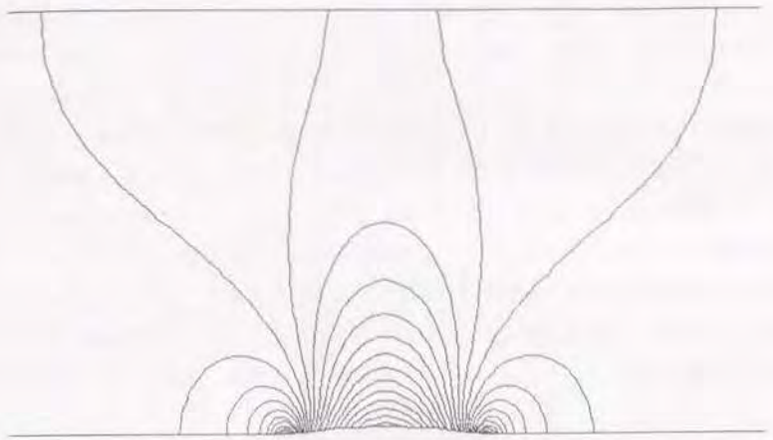


図３・３７(a)　等マッハ数線図（ GEI法，M_{in}=0.72 ）

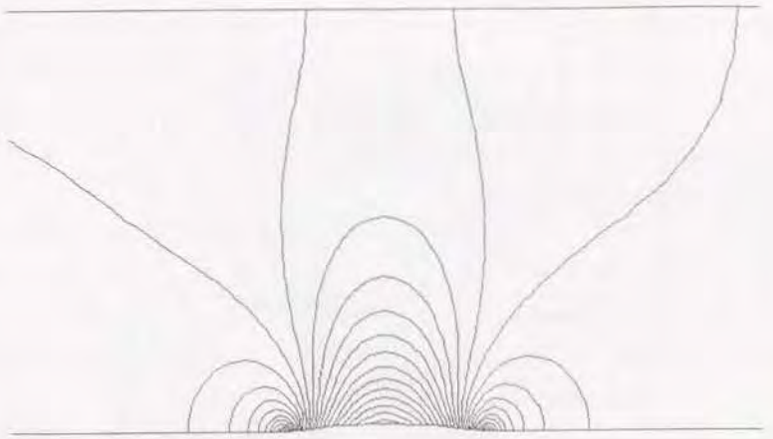


図３・３７(b)　等マッハ数線図（ AF2法，M_{in}=0.72 ）

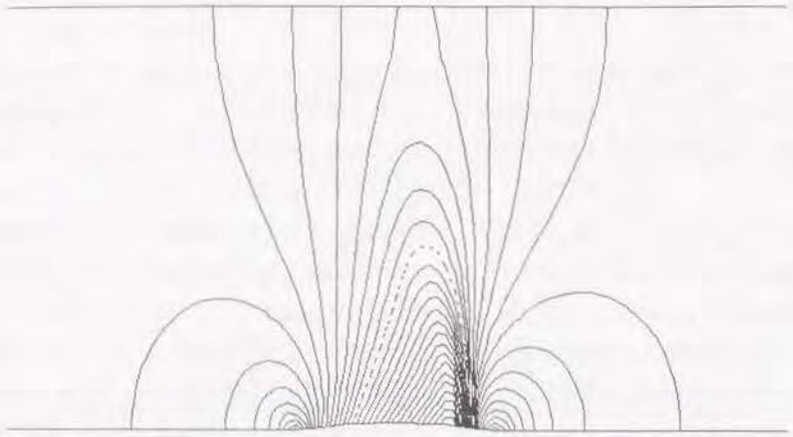


図３・３８(a)　等マッハ数線図（ GEI法，M_{in}=0.85 ）

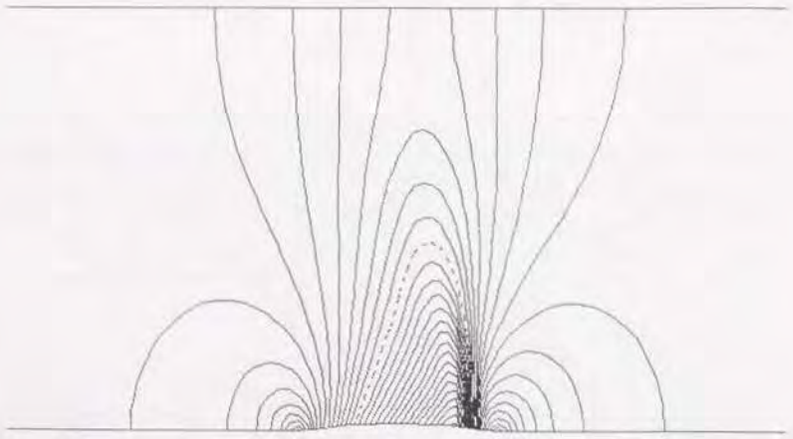


図３・３８(b)　等マッハ数線図（ AF2法，M_{in}=0.85 ）

（２）ＮＡＣＡ００１２翼型まわりの流れへの適用

外部流問題への適用例としてＮＡＣＡ００１２翼型まわりの遷音速流れを取り上げる。計算格子は図３・３９に示すような６５×１９のＣ－型格子であり、翼面上に４５点分布させている。

最初に、一様流マッハ数M_{∞}＝０．８，迎角θ＝０．０°のシミュレーション結果の等マッハ数線図を図３・４０に示す。図３・４０(a) はＧＥＩ法による結果であり、(b) はＡＦ２法による結果である。また、収束解の翼面上の圧力係数分布の比較を図３・４１に示す。ここで、「□」印はＧＥＩ法の圧力係数を、「○」印はＡＦ２法の圧力係数を各々示している。この場合、迎角が無いために流れ場は上下対称となるが、数値計算結果も両方法共対称性は保たれている。さらに、両方法による流れ場は等マッハ数線図及び圧力係数分布図共一致しており、衝撃波の位置も翼弦長の約１／２であり、妥当な収束解が得られている。

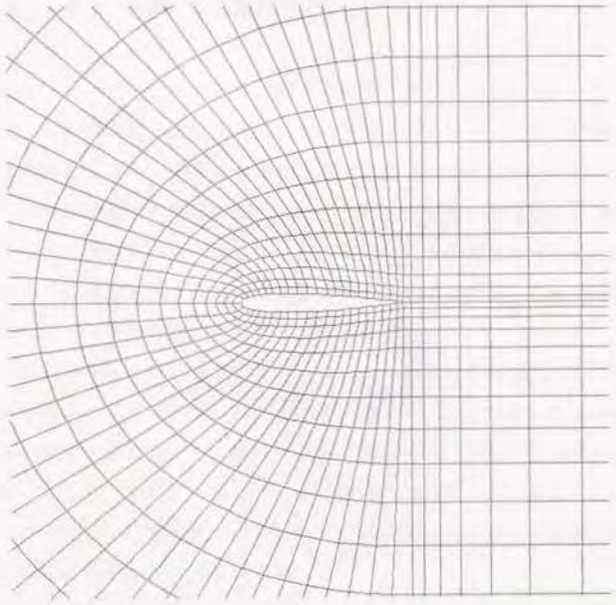


図３・３９　ＮＡＣＡ００１２翼型まわりのＣ－型計算格子（65×19）

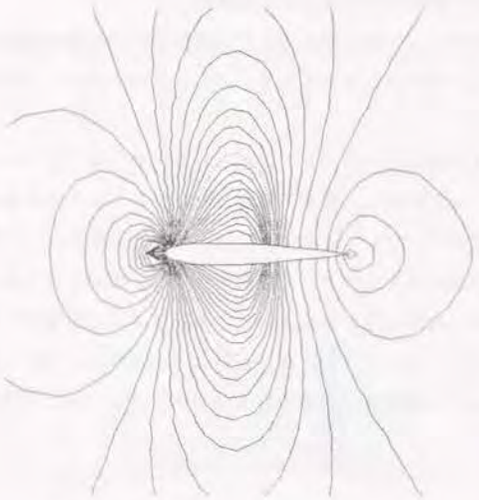


図３・４０(a) 等マッハ数線図（ GEI法 ）

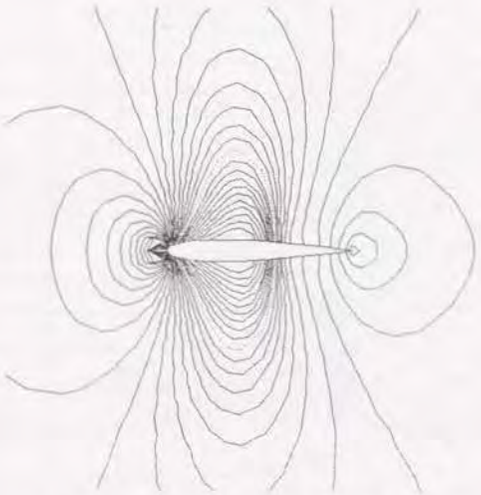


図３・４０(b) 等マッハ数線図（ AF2法 ）

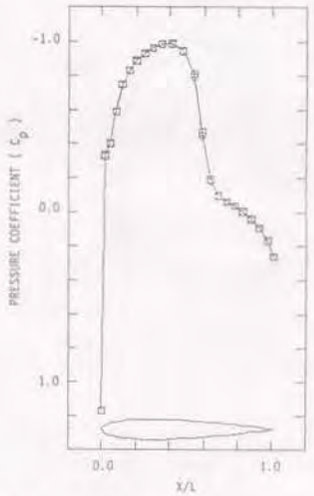


図３・４１　翼面上圧力係数分布図（□ ; GEI法、○ ; AF2法）

次に、一様流マッハ数M_∞＝０．８、迎角θ＝１．２５°のシミュレーションにおける収束解の等マッハ数線図及び翼面上圧力係数分布図を図３・４２、４３に示す。この場合流れ場は上下非対称となり、衝撃波も最初の場合に比べて強く、その位置も翼後縁に近づく。これらの特徴は両方法共良好に捕らえられており、若干の衝撃波の位置の相違を除けば両方法による流れ場は良好に一致している。さらに、収束までの反復回数はＧＥＩ法が１６３回であるのに対しＡＦ２法は２０７回であり、収束性に関しては前述の流路内流れの場合と同様にＧＥＩ法が優れていることが認められる。

最後に、一様流マッハ数M_∞＝０．７２、迎角θ＝０．０°の場合のＧＥＩ法とＡＦ２法の収束履歴を図３・４４に示す。これまでと同様、「□」印がＧＥＩ法の履歴を「○」印がＡＦ２法の履歴を表している。縦軸には第１回目のL_2残差で正規化したL_2残差を表示している。図より、正規化されたL_2残差は両方法共同じ値で横振り状態となり定常状態に達していることが確認される。しかも、定常状態に至るまでの反復回数はＡＦ２法に比べてＧＥＩ法の方が少ないことが判明する。

以上のことから、ＧＥＩ法は２次元定常完全ポテンシャル方程式に対する反復法としても高い収束性を有する方法であることが確認される。

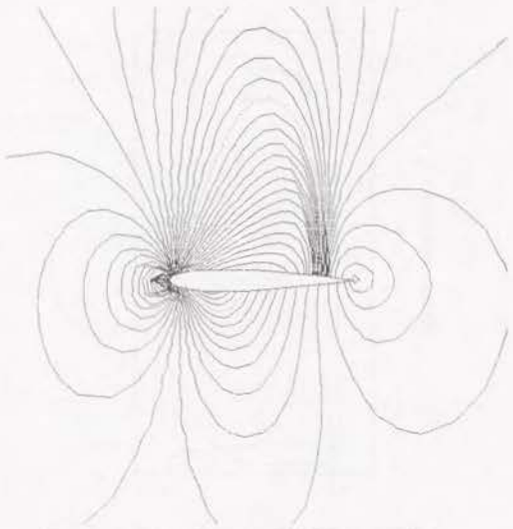


図３・４２(a) 等マッハ数線図（ GEI法 ）

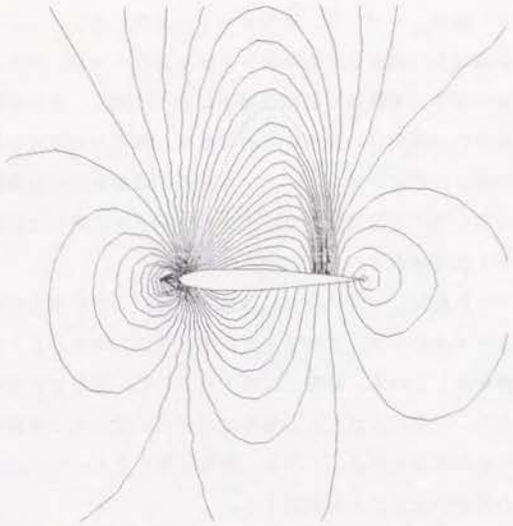


図３・４２(b) 等マッハ数線図（ AF2法 ）

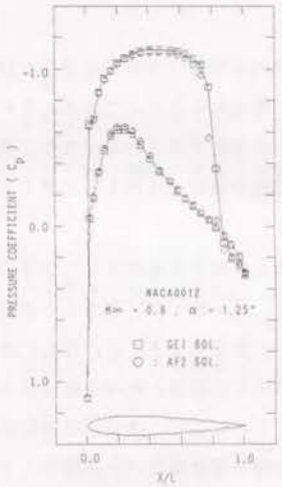


図３・４３　翼面上圧力係数分布図（□ ; GEI法、○ ; AF2法）

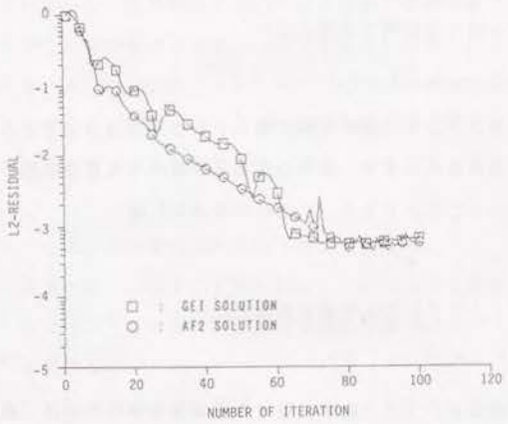


図３・４４　収束履歴（□； GEI法、○； AF2法）

2．3． 多重格子法[5]

2．2．節で述べたように楕円型偏微分方程式は適当な緩和法を用いることによって、効率良くその収束解（近似解）を求めることができる。さらに、緩和法に多重格子法を組み合わせることによって収束を高速化することができる。無限個の格子を取る場合には、収束までに要する計算量は未知数の個数に比例すると考えられるため、この仮想的な場合においては最高速の解法となる。

多重格子法においては、何層もの格子系を設定し、各々の格子系に対応した誤差の周波数成分を減衰させることになり、単一格子で計算を行う場合よりも極めて早く誤差を減衰させることができる。すなわち、最密格子上での方程式に適当な緩和法を用いて近似解を求めると同時にその格子系に対応した誤差の高周波数成分を減衰させ、次に粗格子上での残差に関する修正方程式を解くことにより、誤差の低周波数成分を減衰させる。さらに、粗格子上で得られた近似解を密格子上に移行し、密格子上での方程式を解くことになる。この操作を繰り返すことにより、迅速に誤差の各周波数成分を減衰させることができ、高効率な反復法を構築することができる。本節においては、全近似記憶型（Full Approximation Storage; ＦＡＳと略す）アルゴリズム[5]について詳述する。

楕円型偏微分方程式の離散演算子をL^kとし、格子系をG^k（$k=1,2,\ldots,K$）とする。肩文字「^{k}」は格子レベルを表し、格子間隔をh^k（$h^{k-1}=2h^k$）とする。したがって、最密層における楕円型偏微分方程式は

$$L^k \phi^k = F^k \quad , \quad (k=K) \qquad (3\cdot107)$$

と表すことができる。ここで、ϕ^kは厳密解、F^kは湧き出し項である。（３・１０７）式は適当な初期、境界条件の下で、適当な緩和法を用いて反復計算を行うことによって、近似値$\phi^{k(1)}$を求めることができる。この時の残差R^kは

$$R^k = F^k - L^k \phi^{k(1)} \quad , \qquad (3\cdot108)$$

で与えられ、（３・１０７）式より修正方程式

$$L^k \phi^k - L^k \phi^{k(1)} = R^k \quad , \qquad (3\cdot109)$$

を得る。多重格子法においては、低周波数成分を減衰させるために、修正方程式をG^{k-1}格子上で解く必要がある。G^{k-1}格子上における修正方程式は

$$L^{k-1} \phi^{k-1} = F^{k-1} \quad , \qquad (3\cdot110)$$

と（３・１０７）式と同形に書くことができる。ここで、ϕ^{k-1}及びF^{k-1}は各々

$$\begin{aligned} \phi^{k-1} &= I_k^{k-1} \phi^{k(1)} \quad , \\ F^{k-1} &= R^{k-1} + L^{k-1} \phi^{k-1} \\ &= I_k^{k-1} (F^k - L^k \phi^{k(1)}) + L^{k-1} \phi^{k-1} \quad , \end{aligned} \qquad (3\cdot111)$$

で与えられる。ここで、演算子I_k^{k-1}は上層から下層への制限補間（Restriction）を表し、本研究では以下のように定義する。

$$I_k^{k-1} \phi^k_{i,j} = \frac{1}{8}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \phi_{i-1,j+1} & \phi_{i,j+1} & \phi_{i+1,j+1} \\ \phi_{i-1,j} & \phi_{i,j} & \phi_{i+1,j} \\ \phi_{i-1,j-1} & \phi_{i,j-1} & \phi_{i+1,j-1} \end{vmatrix}^k \quad . \qquad (3\cdot112)$$

（３・１１０）式に緩和法を適用して得られた解を$\phi^{k-1(1)}$とすると修正量$\delta\phi^{k-1}$は

$$\delta\phi^{k-1} = \phi^{k-1(1)} - I_k^{k-1} \phi^{k(1)} \quad , \qquad (3\cdot113)$$

で与えることができる。従って、上層における近似値は

$$\begin{aligned} \phi^{k(2)} &= \phi^{k(1)} + I_{k-1}^k (\delta\phi^{k-1}) \\ &= \phi^{k(1)} + I_{k-1}^k (\phi^{k-1(1)} - I_k^{k-1} \phi^{k(1)}) \quad , \end{aligned} \qquad (3\cdot114)$$

と修正され、上層において（３・１０７）式を緩和掃過することにより近似値$\phi^{k(2)}$を求める。ここで、I_{k-1}^kは下層から上層への延長補間（Prolongation）演算子であり、本研究では線形内挿を用いている。延長補間においては近似解の低周波数成分だけでなく高周波数成分をも補間することが重要となるが、（３・１１４）式の$I_{k-1}^k \phi^{k-1(1)}$の項は低周波数成分のみを含み、$\phi^{k(1)} - I_{k-1}^k I_k^{k-1} \phi^{k(1)}$の項は高周波数成分のみを含むために、上層へ補間される値は低周波数成分、及び、高周波数成分の両者を保持することになる。これらの操作を解が収束するまで繰り返す。図３・４５にＦＡＳアルゴリズムのフローチャートを示す。

実際のＦＡＳアルゴリズムの計算の流れは以下のようになる。

① 最密格子（単一格子と同一の格子、Ｋ層）において初期条件を設定する。

② （３・１０７）及び（３・１１０）式に適当な緩和掃過 Relax（$L^k \phi^k = F^k$）を施し、近似解ϕ^kを求める。

③ 求めた近似解ϕ^kが収束判定基準を満足しているかどうかの判定を行う。ただし、収束判定基準は最密格子及び粗格子系において各々以下のように設定する。

$$R^k < \varepsilon_{MG} \quad (k = K) \quad , \qquad (3\cdot115)$$

$$R^k < \mu_{MG} R^{k+1} \quad (k < K) \quad . \qquad (3\cdot116)$$

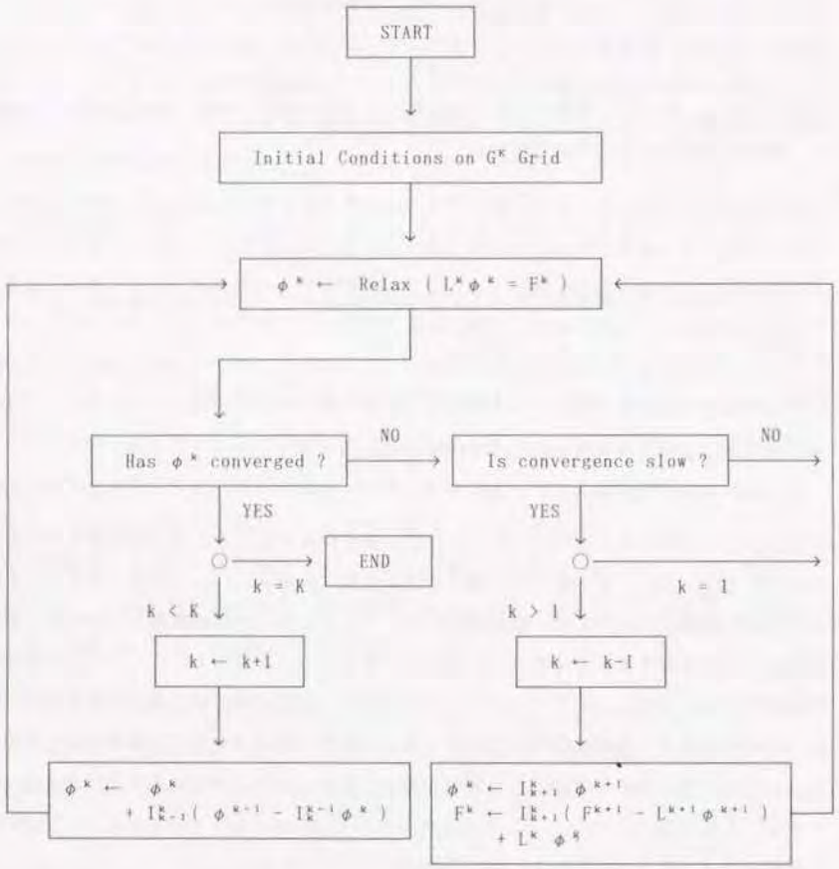


図３・４５　ＦＡＳアルゴリズム

ここで、R^k はｋ層の格子系（G^k）における残差を表し、本研究ではL_2残差を用いている。さらに、ε_{MG}は最密格子における収束判定基準値であり、μ_{MG}は定数である。

④　③において収束基準を満足しない場合には、収束速度の判定を以下に定義する動的残差R_dを用いて行う。

$$R_d = R^{k(n)} / R^{k(n-1)} > \eta_{MG} \quad . \qquad (3・117)$$

ここで、肩文字「^{n}」及び「$^{n-1}$」はｋ層における緩和段階を示しており、η_{MG}は定数である。すなわち、（３・１１６）式を満足するならば収束速度が早いと判断され、同一の格子（ｋ層）で緩和掃過（②）を行う。逆に、（３・１１６）式を満足しないならば収束速度が遅いと判断され、その格子で緩和掃過をする利点が失われるために、１段階粗い格子（ｋ－１層）に（３・１１１）式を用いて残差を移行し、ｋ－１層で緩和掃過（②）を実行する。

一方、③において収束基準を満足する場合には、（３・１１４）式を用いて１段階密な格子（ｋ＋１層）に残差を移行し、ｋ＋１層で緩和掃過（②）を実行する。

⑤　②～④の操作を繰り返し、最密格子（Ｋ層）において収束判定基準（３・１１５）式を満足した時点で計算を打ち切る。

２．４．　可変精度多重格子法

本節では、新しく提案する可変精度多重格子法について詳述する。２．１．節の擬似時間依存法で述べたように、簡単な２次元楕円型偏微分方程式に対して擬似時間項を付加すると

$$\frac{\partial \phi}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} - F \quad , \qquad (3・118)$$

となり、擬似時間τ、空間（ｘ，ｙ）に関する放物型偏微分方程式に帰着される。この方程式は擬似時間に関する発展型方程式であり、１．節の発展型方程式の数値解法で述べた高次精度線の方法を用いて解くことができる。即ち、（３・１１８）式の右辺の空間微分項を修正微分求積法（ＭＤＱ）法で離散化することにより、１つのパラメータＭを変化させるだけで任意の空間精度が得られる。その結果、放物型偏微分方程式は擬似時間に関する連立常微分方程式

$$\frac{d\vec{\phi}}{d\tau} = \vec{L}(\vec{\phi}) \quad . \qquad (3\cdot119)$$

に帰着する。ここで、$\vec{L}$は空間微分項ベクトルである。（３・１１８）式は定常解にのみ意味があるために、（３・１１９）式の擬似時間積分には安定性に優れた時間積分法を選択する必要がある。そこで、擬似時間積分法として２．１．１．項で述べた有理ルンゲ・クッタ法（ＲＲＫ法）を適用する。ＲＲＫ法は$b_2 c_2 \leqq -1/2$の時Ａ（０）－安定となるため、（３・１１８）式に対しては無条件安定であり、安定条件の制約から解放される。

さらに、定常状態への収束を加速するために、高次精度線の方法に前節で述べた多重格子法を組み合わせる。この場合、多重格子法のアルゴリズム（ＦＡＳアルゴリズム）を変更する必要はなく、緩和掃過の代わりに高次精度線の方法による擬似時間進行を用いることにより可変精度多重格子法を構築することができる。

上述のように、可変精度多重格子法は完全に陽的な数値計算法であるために、現在主流となっているベクトル型計算機のアーキテクチャに対する適合性が非常に高いと考えられる。また、時間発展型方程式の数値解法と同一の方法を用いているためにプログラミングも簡略化することが可能である。図３・４６に可変精度多重格子法のフローチャートを示す。ただし、図中の肩文字「^{k}」は多重格子法の格子レベルを表している。

実際の数値計算に際しては、局所時間刻み幅法を導入し、さらに収束の加速を行っている。局所時間刻み幅法を（３・１１８）式に適用すると、擬似時間格子幅$\Delta\tau$はクーラン数をC_Nとすると、空間精度が２次精度の場合、

$$\Delta\tau = \frac{C_N \Delta x^2 \Delta y^2}{2(\Delta x^2 + \Delta y^2)} \qquad (3\cdot120)$$

と与えることができる。本研究では各格子レベル毎にクーラン数を一定にすることにより各格子レベルの擬似時間格子幅$\Delta\tau$を決定することとする。また、多重格子法においては粗格子系の緩和掃過は誤差の低周波数成分を減衰させることに意味があるために、高次精度にする必要はない。従って、可変精度多重格子法においては、最密格子にのみ高次精度差分を施し、粗格子系では通常の２次精度差分（ＭＤＱ法においてＭ＝３）で計算を行うこととする。このために、粗格子系での計算量を減少させることができ効率化が図れる。さらに、粗格子系においては擬似時間依存方程式（３・１１８）式にＭＤＱ法とＲＲＫ法を用いる線の方法に代わり、楕円型偏微分方程式（３・１０７）式に対する緩和法として２．２．１．項で述べた群陽的反復法（ＧＥ１法）を用いることが可能となる。この場合

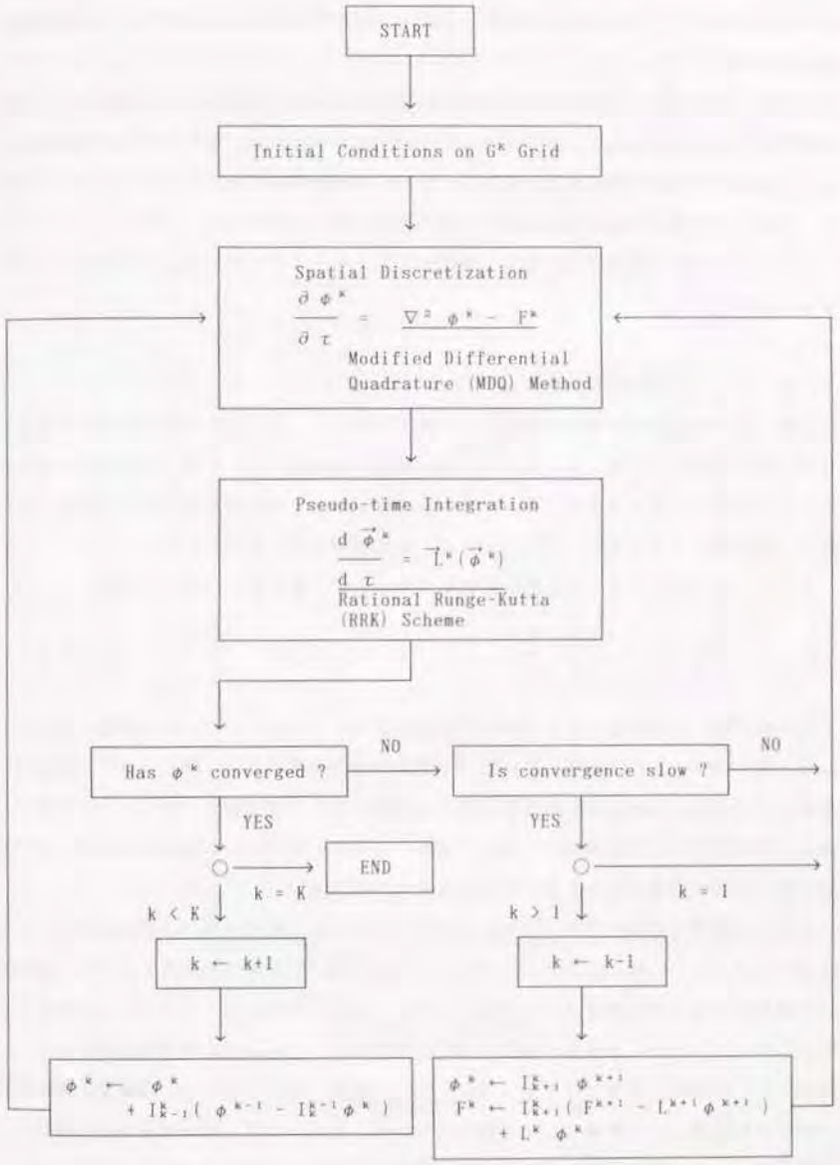


図３・４６　可変精度多重格子法のアルゴリズム

も、全体のアルゴリズムは完全に陽的となりベクトル型計算機のアーキテクチャに対する適合性を損なうことはない。

本研究では、プログラミングの容易さと汎用性の面から、最密格子及び粗格子系の全格子系に対して擬似時間依存方程式（３・１１８）式をＭＤＱ法とＲＲＫ法とを組み合わせた高次精度線の方法で解く方法を採用し、以下、数値計算を行うこととする。しかしながら、将来の計算機の主流となるであろう並列型計算機への適用を考える際には、そのアーキテクチャに対して粗格子系における緩和法としてＧＥＩ法を用いる方法を検討する必要があると思われる。

２．４．１．　精度及び収束性

本項では、前述の可変精度多重格子法の精度を検証し、収束性を従来の多重格子法及びＳＯＲ法と比較検討する。検定問題として、群陽的反復法（ＧＥＩ法）の収束性の検定に用いた２次元ポアソン方程式（３・９１）式のディリクレ境界値問題を取り上げる。この場合、解析解は（３・９２）式で与えられ、計算領域も同一としている。

Ｉ．３．節で述べたように、数値計算法の精度はL_2率と呼ばれるL_2誤差

$$\phi_{err} = \left[\frac{1}{N_x N_y} \sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_y} \left(\phi_{i,j} - \phi_a|_{i,j} \right)^2 \right]^{1/2} \quad . \quad (3 \cdot 121)$$

と空間格子幅との両対数における傾きで検証できる。ここで、$\phi_{i,j}$は収束解、$\phi_a|_{i,j}$は解析解であり、N_x及びN_yはｘ及びｙ方向の格子点数である。図３・４７に可変精度多重格子法のL_2率を示す。空間精度は２次精度から１０次精度まで行っている。図より各L_2率は指定した空間精度に一致しており、本研究で提案した可変精度多重格子法が精度に関して高い信頼性を有する方法であることが確認される。

次に、可変精度多重格子法の収束性を検証するために、図３・４８に収束履歴を示す。比較の対象として、緩和法にガウス・ザイデル法を用いた従来の多重格子法及び一般に楕円型偏微分方程式の反復解法として用いられているＳＯＲ法を取り上げる。(a) は格子点数を３３×３３、(b) は６５×６５、(c) は１２９×１２９とした時の収束履歴を各々、縦軸にL_2残差を、横軸に仕事量（ Work Unit ）を取って示している。仕事量は最密格子における計算量を１仕事量として定義されている。図中、「□」印が可変精度多重格子法の結果を、「○」印が従来の多重格子法、「△」印がＳＯＲ法の結果を各々示している。ただし、可変精度多重格子法は空間精度を２次精度クーラン数はC_N＝２．５とし、他の

結果は最も収束性の良いパラメータを用いている。図より、格子点数に関わらず可変精度多重格子法は従来の多重格子法とほぼ同様の収束過程を示しており、ＳＯＲ法と比較した場合、L_2残差が10^{-8}を下回る時点の仕事量は格子点数３３×３３において約５倍、格子点数６５×６５では約９倍の高い収束性を有することが分かる。さらに、格子点数を増加させると、多重格子法の収束加速率はさらに大きくなることが確認される。

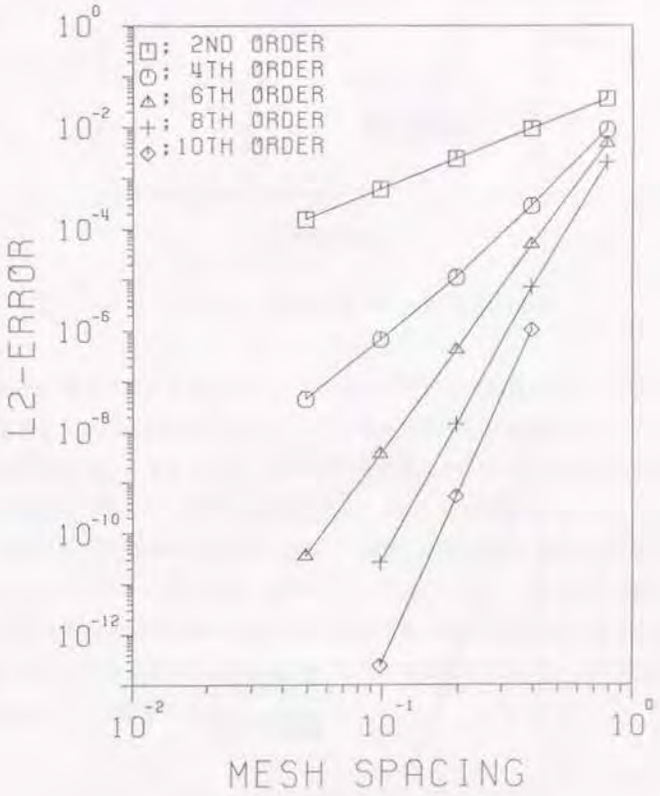


図３・４７　可変精度多重格子法のL_2率

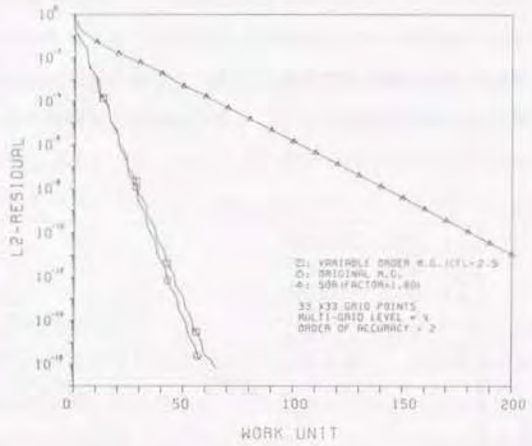


図３・４８(a)　収束履歴の比較（33×33）

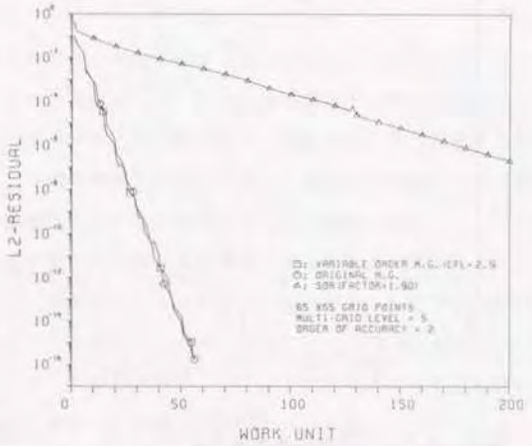


図３・４８(b)　収束履歴の比較（65×65）

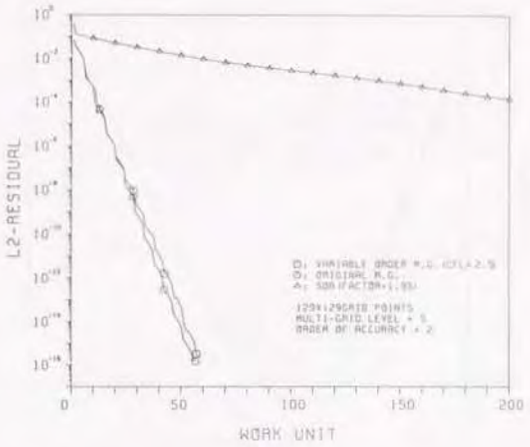


図３・４８(c)　収束履歴の比較（129 ×129 ）

多重格子法の特徴は格子点数が増加しても収束に要する仕事量がほぼ一定となることであり、可変精度多重格子法の収束性の格子点数依存性を示したものが図３・４９である。図は各空間精度について示しており、各々の空間精度に対して格子点数依存性は確認されず、ほぼ一定の仕事量で収束解が得られている。また、空間精度を高次にすることによる仕事量の増加は、８次精度で２次精度の約１．５倍、１０次精度で約２倍であり、空間精度を高次にすることによる収束性能の悪化はさほど見られない。従って、可変精度多重格子法は大規模問題に対しても従来の多重格子法と同様の高い収束性を有する方法であり、空間精度を高次にすることによる収束性能の悪化は２倍程度であり、十分実用に耐える数値計算法であることが結論される。

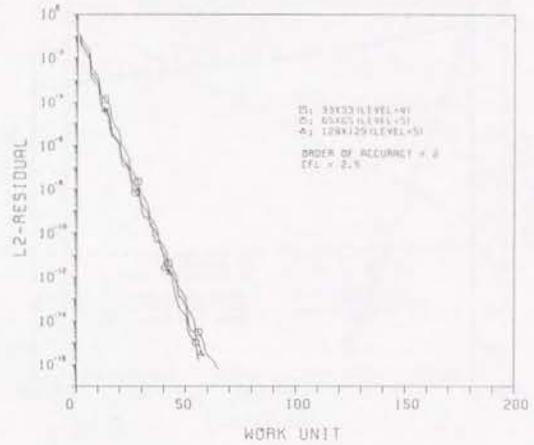


図３・４９(a)　収束性の格子点数依存性（２次精度）

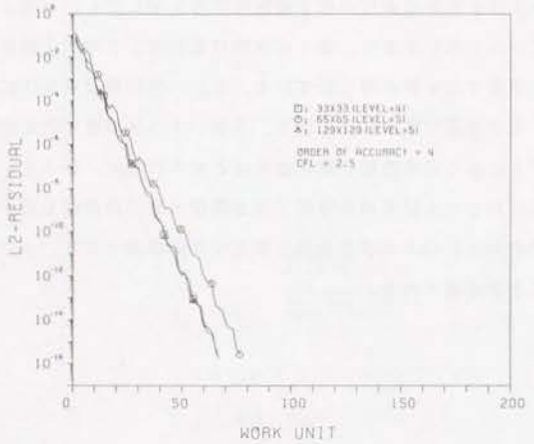


図３・４９(b)　収束性の格子点数依存性（４次精度）

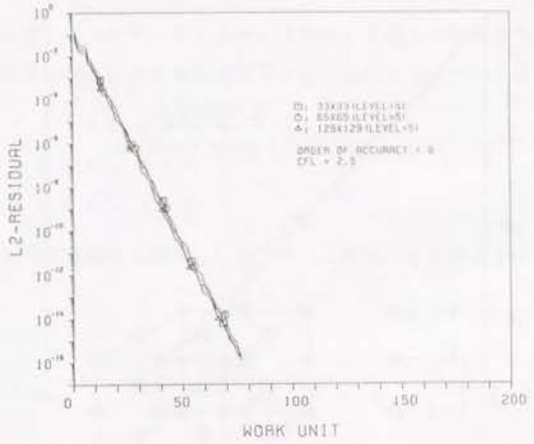


図３・４９(c)　収束性の格子点数依存性（６次精度）

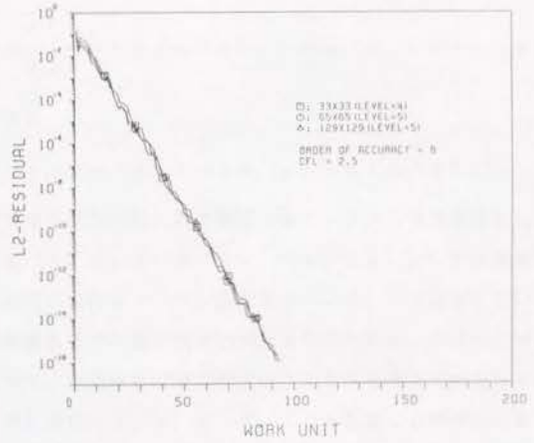


図３・４９(d)　収束性の格子点数依存性（８次精度）

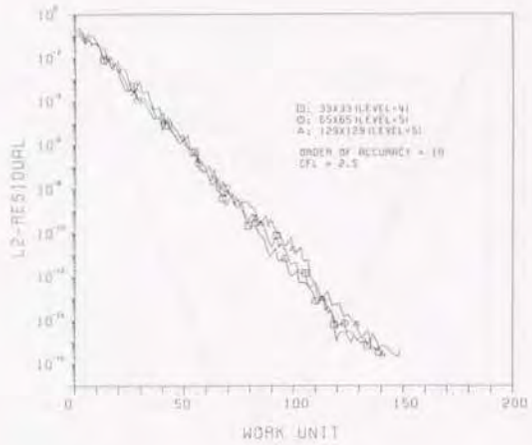


図３・４９(e)　収束性の格子点数依存性（１０次精度）

２．４．２．　３次元への拡張

本項においては、可変精度多重格子法を３次元に拡張した結果について述べる。基本的には２次元のアルゴリズムと同一であるが、上層から下層への制限補間演算が２次元の演算と異なる。３次元の場合、制限補間演算子 I_k^{k-1} を以下のように定義する。

$$I_k^{k-1} = \frac{1}{64}\begin{pmatrix} (1\ 2\ 1)(2\ 4\ 2)(1\ 2\ 1) \\ (2\ 4\ 2)(4\ 8\ 4)(2\ 4\ 2) \\ (1\ 2\ 1)(2\ 4\ 2)(1\ 2\ 1) \end{pmatrix} . \qquad (3・122)$$

（３・１２２）式は重み係数に相当し、図示すると図３・５０のように表される。

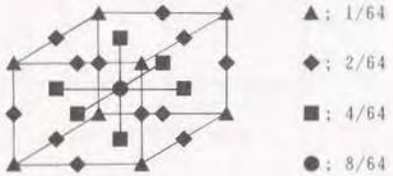


図３・５０　制限補間演算子の重み係数

３次元問題に対する精度及び収束性を検討するために、単純な３次元ポアソン方程式

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}=-\sin(x)-\cos(y)-\sin(z), \qquad (3・123)$$

を考える。解析解は

$$\phi(x, y, z)=\sin(x)+\cos(y)+\sin(z), \qquad (3・124)$$

で与えられ、境界条件はこの解析解で固定するディリクレ境界条件とし、計算領域は $(0, 0, 0) \leq (x, y, z) \leq (2\pi, 2\pi, 2\pi)$ として計算を行った。また、局所擬似時間格子幅法におけるクーラン数は全ケース２．５で固定している。

最初に、可変精度多重格子法の精度の検討を行うために、２次元の場合と同様に L_2 率を図３・５１に示す。空間精度は２次精度から１０次精度まで指定しており、各精度における傾き（L_2 率）は各々２、４、６、８、１０と指定した精度に一致していることが判明する。従って、本研究で提案した可変精度多重格子法は３次元問題に対しても、信頼性の高い数値計算結果を与える数値計算法であることが確認できる。

次に、３次元問題における収束性を検討するために、図３・５２に２次精度及び４次精

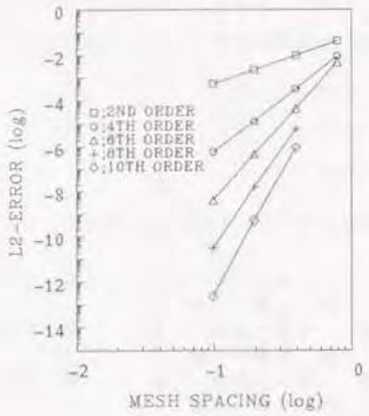


図３・５１　可変精度多重格子法のＬ₂率（３次元）

度における収束履歴を示す。図中の記号「□」、「○」、「△」は格子点数を17×17×17 33×33×33及び65×65×65とした際の可変精度多重格子法の収束履歴を示しており、各々の格子点数における層数は３層、３層及び４層としている。比較の対象として取り上げた一般的に用いられるＳＯＲ法の収束履歴を記号「▽」、「◇」、「×」で示す。それぞれの記号は各格子点数に対応している。２次精度の場合、可変精度多重格子法の収束加速比は、収束判定基準を10^{-8}とするとＳＯＲ法と比較して、格子点数17×17×17では３倍、33×33×33では４．５倍、65×65×65では８．５倍と２次元の場合とほぼ同様の結果を示していることが分かる。４次精度の場合のＳＯＲ法に対する収束加速比は、各々の格子点数において３倍、４．５倍及び１１倍となる。従って、高次精度で大規模格子点数を用いて数値計算する場合、対ＳＯＲ法比が大きくなることが判明し、このような数値計算では可変精度多重格子法が非常に有利になることが確認される。さらに、２次精度及び４次精度共に収束に要する仕事量の格子点数依存性が無いことが確認される。このことは他の空間精度に対しても確認され、一例として８次精度における収束履歴を図３・５３に示す。

最後に、格子点数を同一にした場合の各空間精度における収束に要する仕事量の比較を図３・５４に示す。図は格子点数33×33×33及び65×65×65の場合について示している。

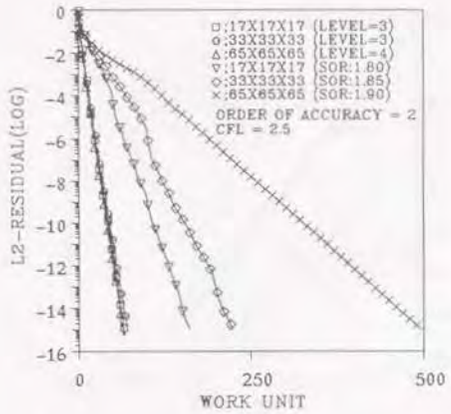


図３・５２(a)　収束履歴の比較（２次精度）

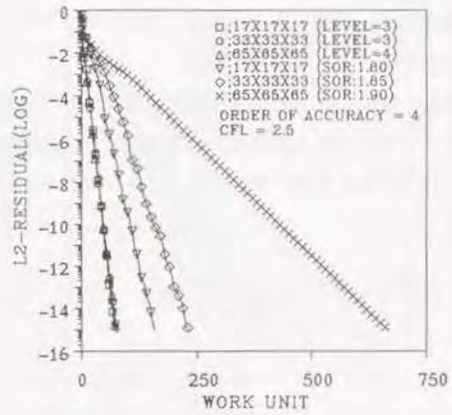


図３・５２(b)　収束履歴の比較（４次精度）

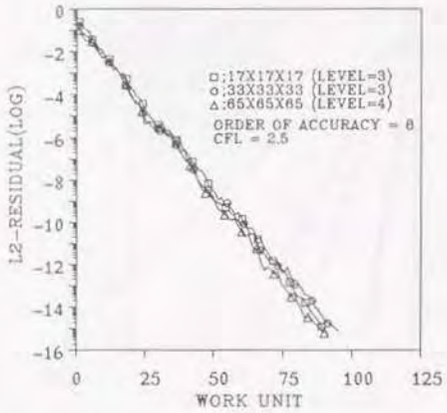


図３・５３　収束性の格子点数依存性（８次精度）

空間精度を高次にすることにより収束に要する仕事量は低次精度に比べて増加することが分かる。しかしながら、その２次精度に対する比率は４次精度では約１．１倍、６次精度で約１．２倍、８次精度で約１．４倍、１０次精度では約２倍であり、２次元問題の場合とほぼ同様の結果が得られていることが判明する。

以上のことより、本研究で提案した可変精度多重格子法は３次元問題においても、指定精度が得られる方法であり、空間精度を高次にした場合の収束性能の悪化は２次精度の２倍以下であり、十分実用に耐え得る数値計算法であることが確認される。

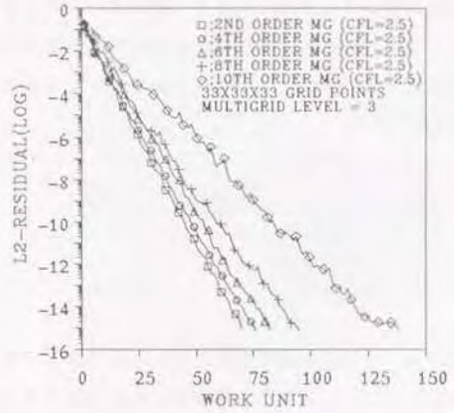


図３・５４(a)　空間精度に対する収束履歴の比較（33×33×33）

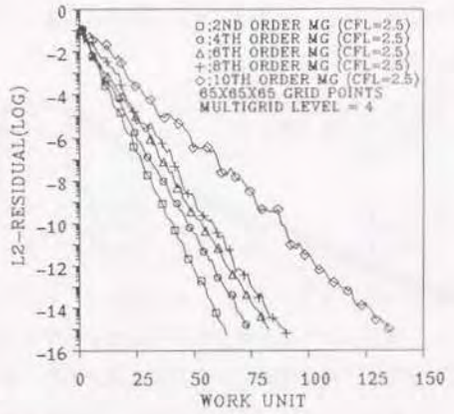


図３・５４(b)　空間精度に対する収束履歴の比較（65×65×65）

２．５．　可変精度多重格子法の格子形成法への応用[28]

本節では、可変精度多重格子法をＮＡＣＡ００１２翼型まわり及びＨＯＢＳＯＮ翼列内の格子形成に応用し、その収束性を従来の多重格子法及びＳＯＲ法と比較検討する。

物理面（ｘ，ｙ）と計算面（ξ，η）とは、Thompson等[23]に従うと以下の楕円型方程式により関係付けられる。

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} = P(\xi, \eta) \ ,$$

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} = Q(\xi, \eta) \ , \qquad (3\cdot125)$$

ここで、Ｐ（ξ，η）及びＱ（ξ，η）は強制項であり、格子幅及び格子角度を制御する関数である。（３・１２５）式の独立変数と従属変数とを入れ換えることにより

$$B_1 \frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} - 2B_2 \frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \eta} + B_3 \frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2} + J^2 \left(P \frac{\partial x}{\partial \xi} + Q \frac{\partial x}{\partial \eta} \right) = 0 \ ,$$

$$B_1 \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} - 2B_2 \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} + B_3 \frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2} + J^2 \left(P \frac{\partial y}{\partial \xi} + Q \frac{\partial y}{\partial \eta} \right) = 0 \ , \qquad (3\cdot126)$$

と書き換えられる。ここで、B_1、B_2、及び、B_3は変換の計量、Ｊは変換のヤコビアンであり、以下の様に与えられる。

$$B_1 = \left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\right)^2 , \quad B_2 = \frac{\partial x}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial y}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial y}{\partial \eta} \ ,$$

$$B_3 = \left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)^2 , \quad J = \frac{\partial x}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial y}{\partial \xi} \ , \qquad (3\cdot127)$$

本研究においては、簡単化のためにＰ（ξ，η）＝Ｑ（ξ，η）＝０としている。

最初に、ＮＡＣＡ００１２翼型まわりに形成したＯ－型格子を図３・５５に、その時の収束履歴を図３・５６に各々示す。格子点数は６５×３３点であり、可変精度多重格子法の精度は２次精度でクーラン数は１．０としている。また、多重格子法の層数は４層であり、ＳＯＲ法の加速パラメータはω_{SOR}＝１．８としている。各々の方法により得られた収束解は全て同一であり、可変精度多重格子法と従来の多重格子法とはほぼ同一の収束履歴を示し、ＳＯＲ法と比較すると約６倍の収束加速効果が得られている。

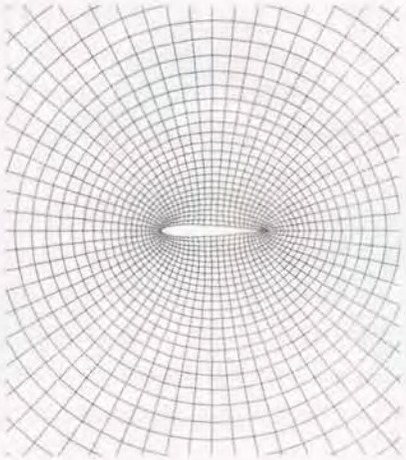


図３・５５　ＮＡＣＡ００１２翼型まわりのＯ－型格子（65×33）

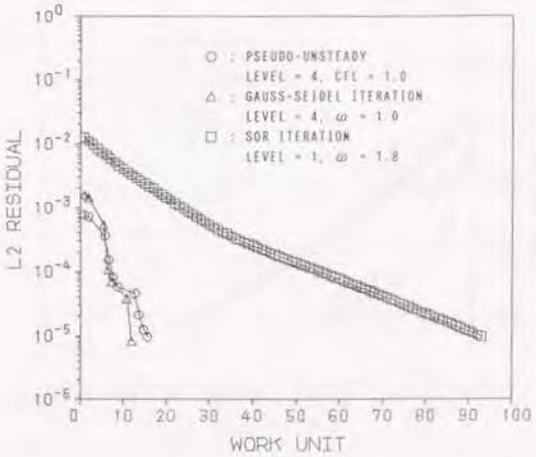


図３・５６　収束履歴（ＮＡＣＡ００１２翼型まわりのＯ－型格子）

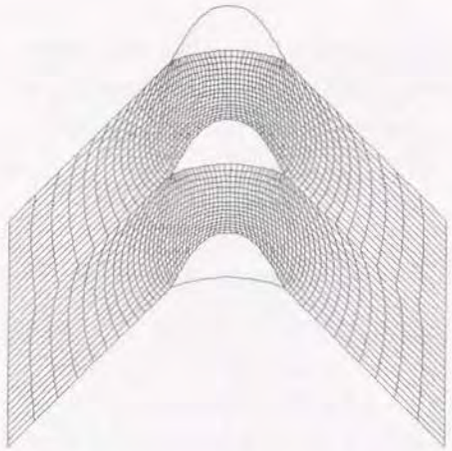


図３・５７　ＨＯＢＳＯＮ翼列内のＨ－型格子（65×17）

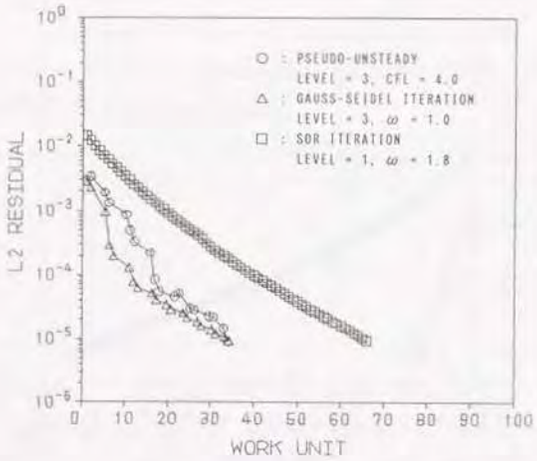


図３・５８　収束履歴（ＨＯＢＳＯＮ翼列内のＨ－型格子）

次に、ＨＯＢＳＯＮ翼列内に形成したＨ－型格子を図３・５７に、その際の収束履歴を図３・５８に示す。格子点数は65×17点であり、図３・５７は２ピッチ分表示している。可変精度多重格子法の精度は２次精度、クーラン数は４．０とし、多重格子法の層数は３層である。また、ＳＯＲ法の加速パラメータは最初のケースと同様にω_{SOR}＝１．８としている。この場合も、方法の差による収束解の差異は認められず、可変精度多重格子法と従来の多重格子法とはほぼ同一の収束履歴を示し、ＳＯＲ法と比較すると約２倍の収束加速効果が得られている。最初のケースと比較して収束加速効果が鈍いのは格子点数が少ないことによるものであると考えられる。

いずれの場合においても、本研究で提案した可変精度多重格子法は従来の多重格子法と同一の収束加速効果を有することが認められ、一般の楕円型偏微分方程式においても、可変精度多重格子法の有効性が確認される。さらに、可変精度多重格子法が完全に陽的な方法であることを考慮すると、ベクトル型計算機に対する適合性は従来の多重格子法よりも高くなることが予想され、計算時間の大幅な減少が期待できる。

第４章　乱流の高次精度数値シミュレーション

１．　正方形及び立方体キャビティ内流れの高次精度数値シミュレーション

乱流の高次精度数値シミュレーションを行うに先立ち、粘着壁が存在する場合として、正方形、及び、立方体キャビティ内流れの高次精度数値シミュレーションを行う。無次元化は、代表速度に動壁の移動速度U_0を、代表長さに正方形（立方体）の一辺の長さL_0を、各々用いて行うものとする。

１．１．　正方形キャビティ内流れのシミュレーション[129,130]

正方形キャビティ内流れの概略図を図４・１に示す。

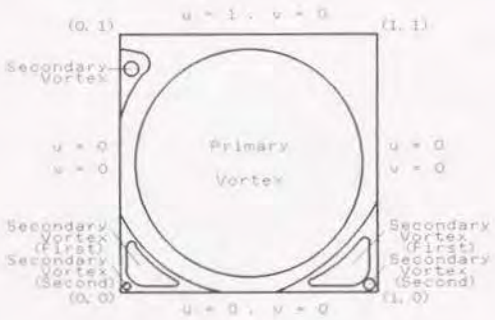


図４・１　正方形キャビティ内流れの概略図

初期条件は、渦度、速度成分共に０とし、計算開始時に上面が無次元速度１で運動する衝撃出発とする。また，境界条件としては、以下の条件を用いる。

$$\omega|_{wall} = \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)_{wall}, \quad \Psi|_{wall} = 0 , \qquad (4・1)$$

本研究においては、レイノルズ数Ｒｅ＝１００，１０００，３２００の３ケースについて数値計算を行った。コンピュータの丸め誤差の影響を極力排除するために、収束判定基準を渦度輸送方程式、及び、流れ関数方程式に対して、各々

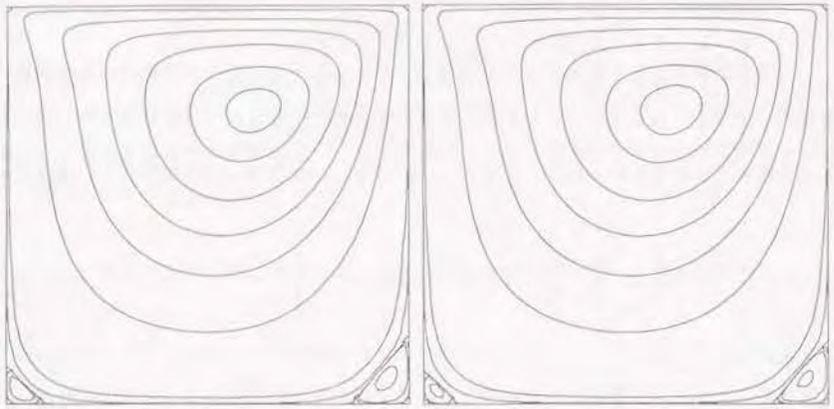
$$\omega_{res} < 1.0\times10^{-10} , \quad (Re=100)$$
$$\omega_{res} < 1.0\times10^{-8} , \quad (Re=1000, 3200) \qquad (4・2)$$
$$\Psi_{res} < 1.0\times10^{-10} , \quad (Re=100, 1000, 3200)$$

として倍精度で計算を行った。ここで、ω_{res}、Ψ_{res}は渦度、流れ関数のL_2残差であり、

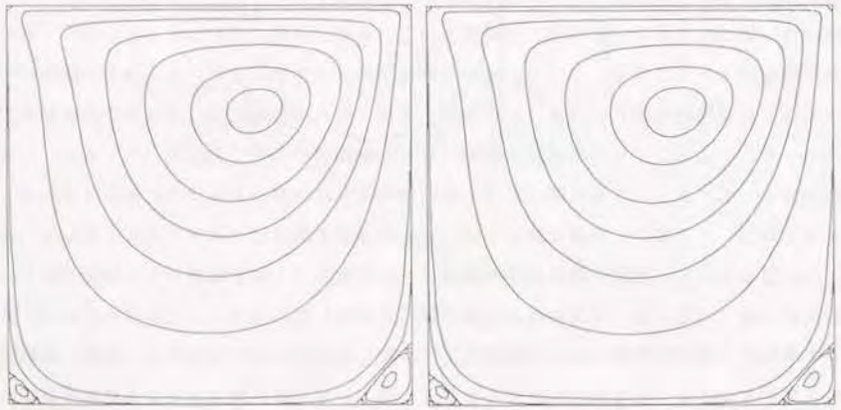
$$\phi_{res} = \left[\frac{1}{N_x N_y}\sum_{i=1}^{N_x}\sum_{j=1}^{N_y}\left(\phi^{n+1}_{i,j} - \phi^{n}_{i,j}\right)^2\right]^{1/2} , \qquad (4・3)$$

で定義される。

最初に、レイノルズ数Ｒｅ＝１００とし、格子点数を６５×６５とした際の流線図、及び、等渦度線図を図４・２、及び、４・３に示す。両図において(a)、(b)、(c)、(d)は各々空間精度が２次、４次、６次、及び、１０次精度とした際の結果である。空間精度が４次精度以上では、収束解は良好な一致を示す。しかしながら、２次精度解は高次精度解（４次精度以上）と比較して、２次渦の大きさ、及び、強さに差異が認められる。中心線上速度分布の空間精度に対する比較を図４・４に示すが、この分布は各空間精度解共に良好な一致が見られる。さらに、特徴量として、渦中心座標、渦中心における渦度・流れ関数値を表４・１に示す。ここで、渦中心座標は格子点座標としている。渦中心座標については、各空間精度解共に一致しているが、渦度・流れ関数値に関しては多少の変動が生じている。そこで、１０次精度解を基準として、渦度値についての偏差（％）を表したものが表４・２である。主渦に関しては、各空間精度共に偏差は１％以内に納まっている。それに対し、左下隅の２次渦に関しては、２次精度解の偏差は９３％と大きくなっていることが認められる。また，空間精度が高次になるに従って、偏差は減少する傾向にあり、収束解が或る一定の解（空間精度依存性の無い定常解）に収束することが認められる。表４・１には、定常解を得るまでの時間ステップ数も合わせて示している。一般に、空間精度を高次にすると、定常解を得るのに必要な時間ステップ数が増加することが知られている。しかしながら、本高次精度線の方法では、空間精度を高次にした場合においても、時間ステップ数はほぼ一定となっており、収束性能の劣化は認められない。

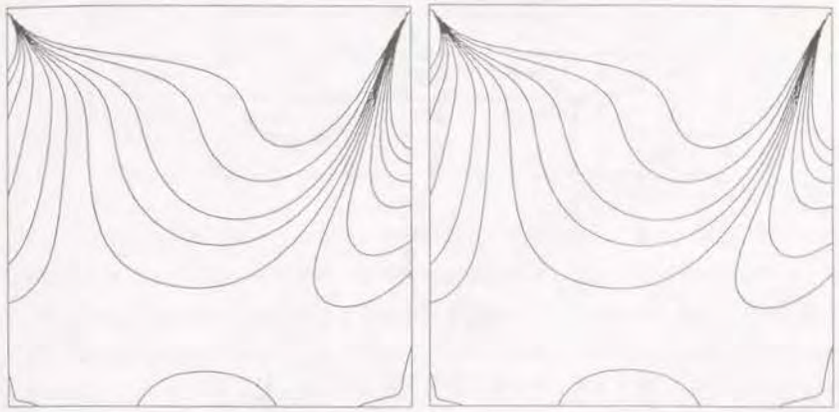


(a) 2次精度解　　(b) 4次精度解

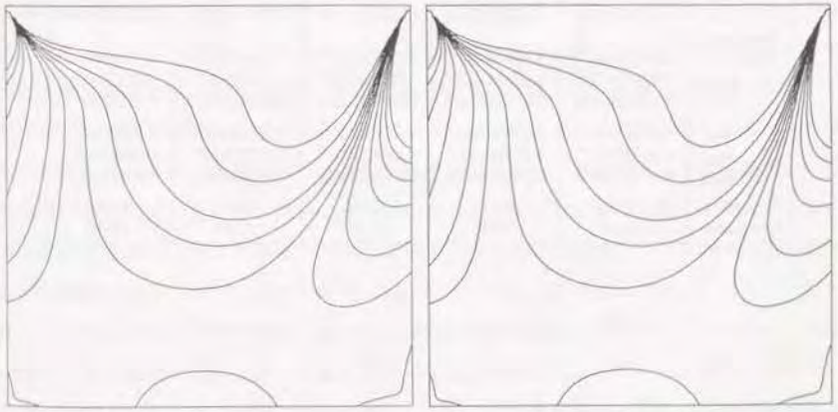


(c) 6次精度解　　(d) 10次精度解

図4・2　流線図（Re=100, 65×65）



(a) 2次精度解　　(b) 4次精度解



(c) 6次精度解　　(d) 10次精度解

図4・3　等渦度線図（Re=100, 65×65）

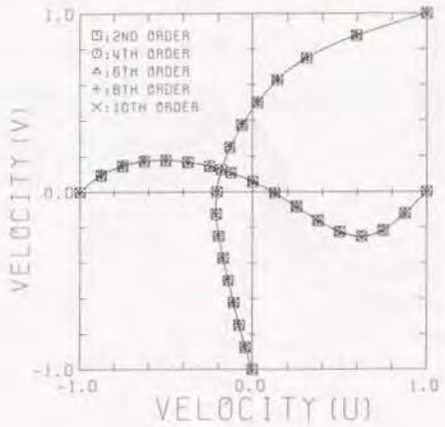


図４・４　中心線上速度分布（Re=100，65×65）

表４・１　各空間精度に対する特徴量（Re=100）

	Order of Accuracy				
	2	4	6	8	10
Primary					
ψ_{VC}	-0.102809	-0.103538	-0.103511	-0.103504	-0.103506
ω_{VC}	-3.093299	-3.109639	-3.108617	-3.108523	-3.108492
(x,y)	0.6094,0.7344	0.6094,0.7344	0.6094,0.7344	0.6094,0.7344	0.6094,0.7344
Secondary					
First ψ_{VC}	2.84934×10^{-6}	1.78578×10^{-6}	1.70014×10^{-6}	1.69696×10^{-6}	1.70015×10^{-6}
ω_{VC}	2.10342×10^{-2}	1.09246×10^{-2}	1.08641×10^{-2}	1.08632×10^{-2}	1.08724×10^{-2}
(x,y)	0.0313,0.0469	0.0313,0.0313	0.0313,0.0313	0.0313,0.0313	0.0313,0.0313
ψ_{VC}	1.51851×10^{-5}	1.24672×10^{-5}	1.24324×10^{-5}	1.24338×10^{-5}	1.24315×10^{-5}
ω_{VC}	4.06595×10^{-2}	4.08940×10^{-2}	4.08025×10^{-2}	4.07922×10^{-2}	4.08020×10^{-2}
(x,y)	0.9375,0.0625	0.9375,0.0625	0.9375,0.0625	0.9375,0.0625	0.9375,0.0625
Time steps	12203	12232	12168	12156	16101
Grid points	65×65	65×65	65×65	65×65	65×65

表４・２　渦中心における１０次精度解に対する偏差（渦度値，Re=100）

	Order of Accuracy			
	2nd	4th	6th	8th
Primary	0.489%	0.037%	0.004%	0.001%
Secondary (First)	93.46 %	0.480%	0.076%	0.085%
	0.349%	0.225%	0.001%	0.024%

次に、レイノルズ数Ｒｅ＝１０００、格子点数６５×６５とした際の流線図、及び、等渦度線図を図４・５，４・６に示す。空間精度が異なると、主渦中心部の流線の分布、及び、等渦度線の巻き込みの違いが生じており、主渦の強さが空間精度を高次にするに従って増加する傾向が認められる。このことは、レイノルズ数Ｒｅ＝１００の場合とは異なり空間精度依存性の無い定常解が得られていないことを示している。そこで、格子点数を４倍の１２９×１２９とした際の定常解の流線図、及び、等渦度線図を図４・７，４・８に各々示す。格子点数を増加させることにより、空間精度が４次精度以上の定常解は主渦・２次渦共に非常に良好な一致が見られ、空間精度依存性の無い数値解が得られていることが確認される。また、両格子点数における中心線上速度分布の空間精度に対する比較を図４・９(a)，(b) に各々示す。空間精度が低次精度の速度分布は高次精度の分布に比べて発達が阻害されていることが分かる。これは、空間微分項の離散化の際に生じる打切り誤差が数値粘性として作用しているためであると考えられる。従って、空間精度が高次になるにつれて数値粘性は小さくなり、一定の速度分布に収束している様子が確認できる。このことは、空間精度依存性の無い数値解がその格子点数における最良の解となることを示している。表４・３に各空間精度に対する特徴量の比較を、表４・４に８次精度解からの渦度値の偏差（％）を、各々示す。ただし、表４・３における格子点数１２９×１２９の場合は、初期値として２次精度では格子点数６５×６５の補間値を、４次精度以上では低次精度解を採用しており、表中の記号「*」、「**」は各々に対応している。両格子点数共に、２次精度解は高次精度解と比較して主渦中心座標が異なっていることが分かる。８次精度解からの偏差においても、主渦に関して４次精度解以上は１％以内であるのに対し、２次精度解は２％以上の偏差となっており、レイノルズ数の増加に伴い２次精度解の信頼性が低下していることが認められる。また、４次精度以上の数値解は２次渦に関しても数パーセントの偏差であり、空間精度依存性の無い定常解が得られていると考えられる。さ

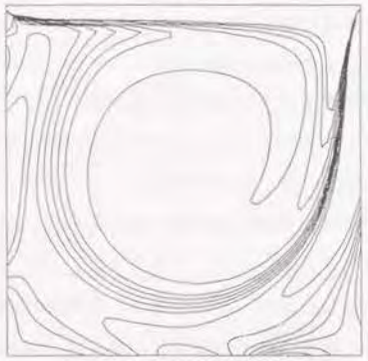
(a) 2次精度解

(b) 4次精度解

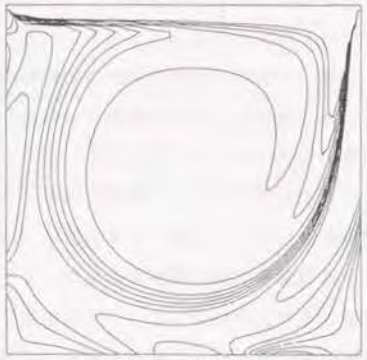
(c) 6次精度解

図4・5　流線図（Re=1000,65×65）

(a) 2次精度解



(b) 4次精度解



(c) 6次精度解

図4・6　等渦度線図（Re=1000,65×65）

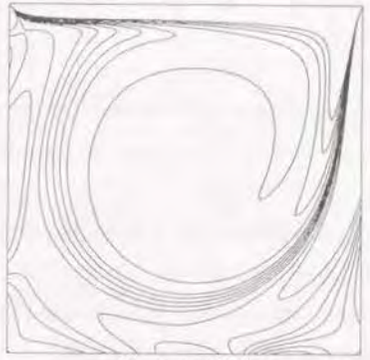
(a) 2次精度解

(b) 4次精度解

(c) 8次精度解

図4・7　流線図（Re=1000, 129×129）

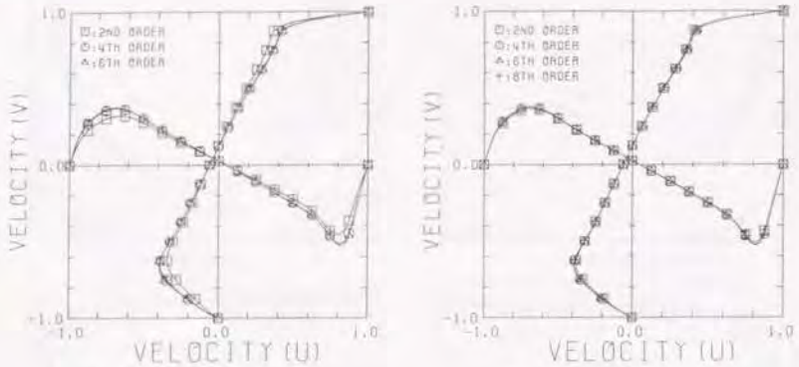
(a) 2次精度解



(b) 4次精度解

(c) 8次精度解

図4・8　等渦度線図（Re=1000, 129×129）



(a) 格子点数　65×65　　(b) 格子点数　129×129

図４・９　中心線上速度分布（Re=1000）

らに、格子点数６５×６５の６次精度解の偏差は主渦に関して０．５％であり、２次渦を含めても良好な一致が認められる。このことは空間精度を高次精度にすることにより、少ない格子点数でも十分信頼性のある解が得られる．すなわち、計算格子の分解能の限界が緩和されることを示している。表４・３において、低次精度解の左下隅に３次渦が現れているのに対し、高次精度解には現れていない。これは低次精度解の振動によるものではないかと考えられるが、正確には、より大規模の数値計算を行う必要があり今後の課題である。定常解を得るのに必要な時間ステップ数は、格子点数６５×６５において空間精度に関わり無く一定であることより、空間精度を高次にすることによる収束性能の劣化は認められない。

最後のシミュレーション例として、レイノルズ数Ｒｅ＝３２００の流れ場を取り上げ、格子点数を１２９×１２９とした際の流線図、等渦度線図、及び、中心線上速度分布図を図４・１０～４・１２に各々示す。さらに、各空間精度に対する特徴量、及び、６次精度解に対する渦度値の偏差（％）を表４・５、４・６に示す。レイノルズ数Ｒｅ＝１０００の場合と比較して、流れは壁に接近し、左上方の２次渦、両下隅の３次渦の存在が確認される。図より、４次精度解と６次精度解は良好に一致していることが認められる。また、表より６次精度解に対する４次精度解の渦度値の偏差は、主渦に関しては１％以内、２次

表４・３　各空間精度に対する特徴量（Re=1000）

	Order of Accuracy			
	2	4	6	-
Primary				
ψ_{VC}	-0.105045	-0.117949	-0.119654	-
ω_{VC}	-1.876931	-2.056915	-2.079092	-
(x,y)	0.5313,0.5781	0.5313,0.5625	0.5313,0.5625	-
Secondary				
First ψ_{VC}	1.64479×10^{-4}	2.23553×10^{-4}	2.37024×10^{-4}	-
ω_{VC}	0.25543	0.31336	0.32377	-
(x,y)	0.0781,0.0781	0.0781,0.0781	0.0781,0.0781	-
ψ_{VC}	1.58129×10^{-3}	1.67416×10^{-3}	1.74963×10^{-3}	-
ω_{VC}	0.87857	1.12535	1.16659	-
(x,y)	0.8594,0.1094	0.8594,0.1094	0.8594,0.1094	-
Second ψ_{VC}	-1.43255×10^{-7}	-	-	-
ω_{VC}	-3.16983×10^{-2}	-	-	-
(x,y)	0.9844,0.0160	-	-	-
Time steps	77897	76777	76889	-
Grid points	65×65	65×65	65×65	-

	Order of Accuracy			
	2	4	6	8
Primary				
ψ_{VC}	-0.115582	-0.118815	-0.118234	-0.119004
ω_{VC}	-2.021328	-2.066161	-2.057150	-2.068546
(x,y)	0.5313,0.5703	0.5313,0.5625	0.5313,0.5625	0.5313,0.5625
Secondary				
First ψ_{VC}	2.15201×10^{-4}	2.31532×10^{-4}	2.28432×10^{-4}	2.33520×10^{-4}
ω_{VC}	0.35005	0.36708	0.36501	0.36859
(x,y)	0.0859,0.0781	0.0859,0.0781	0.0859,0.0781	0.0859,0.0781
ψ_{VC}	1.69525×10^{-3}	1.72377×10^{-3}	1.71012×10^{-3}	1.72787×10^{-3}
ω_{VC}	1.06783	1.14393	1.13784	1.15045
(x,y)	0.8672,0.1172	0.8594,0.1094	0.8594,0.1094	0.8594,0.1094
Second ψ_{VC}	-2.38037×10^{-7}	-1.09633×10^{-7}	-6.69087×10^{-8}	-5.48624×10^{-8}
ω_{VC}	-1.02355×10^{-2}	-9.33946×10^{-3}	-9.11423×10^{-3}	-9.06400×10^{-3}
(x,y)	0.9922,0.0078	0.9922,0.0078	0.9922,0.0078	0.9922,0.0078
ψ_{VC}	-6.03211×10^{-8}	-1.60036×10^{-8}	-	-
ω_{VC}	-1.04669×10^{-2}	-9.65912×10^{-3}	-	-
(x,y)	0.0078,0.0078	0.0078,0.0078	-	-
Time steps	78407*	83837**	60765**	63990**
Grid points	129×129	129×129	129×129	129×129

(*) The initial values are obtained by the liniear interpolation of the solution with 65×65 grid points.
(**) The initial values are obtained by the lower order solution with 129×129 grid points.

表４・４　渦中心における８次精度解に対する偏差（渦度値，Re=1000 ）

	Order of Accuracy			
	2nd	4th	6th	6th
Grid points	129×129	129×129	129×129	65×65
Primary	2.283%	0.115%	0.551%	0.510%
Secondary (First)	5.030%	0.410%	0.971%	12.150%
	7.182%	0.567%	1.096%	1.403%
(Second)	12.925%	3.039%	0.554%	−

渦に関しては１％程度であり、３次渦に関しても数パーセントである。このことより、空間精度依存性の無い定常解が得られていることが確認できる。一方、２次精度解は主渦で１６％，２次渦・３次渦に関しても１０％程度の差を生じており、レイノルズ数が増加するに従って空間精度依存性の無い定常解からの差が増加している。このことは、空間微分項を離散化する際の打切り誤差が数値粘性として作用し、その影響はレイノルズ数が増加するに従って顕著に現れることを示している。従って、高レイノルズ数流れのシミュレーションにおいては，空間精度が高次精度の数値計算法が必要になることが確認される。

最後に、本論文で提案した高次精度線の方法により得られた高次精度解を現在最も良く比較の対象として用いられている Ghia 等の結果[13]と比較したものを表４・７に示す。ここで，格子点数は同一であり、渦度の符号が逆転しているのは渦度の定義の相違によるものである。いずれの場合においても、高次精度解の主渦中心における流れ関数値はGhia等の結果に比べて増加していることが認められる。また、渦中心座標に関してもレイノルズ数Ｒｅ＝３２００では、主渦・両下隅の２次渦に対して差異が認められる。さらに、レイノルズ数が増加するに従って、両者の渦度・流れ関数値の差は拡大する傾向にあることが伺える。 Ghia 等の数値計算法が２次精度であることを考慮すると、高次精度線の方法により得られた高次精度解は、より高い信頼性を有することが確認され，高レイノルズ数流れに対する高次精度数値計算法の必要性が結論される。一方、計算効率の面では、高次精度線の方法はコードのチューニング無しで９７％以上のベクトル化率を有するため、ベクトル型コンピュータに対する適合性が非常に高い。さらに、高次精度にすることによる収束性能の劣化も無く、効率の面でも優れた数値計算法であることが結論される。

(a) ２次精度解

(b) ４次精度解

(c) ６次精度解

図４・１０　流線図 (Re=3200, 129×129)

(a) ２次精度解

(b) ４次精度解

(c) ６次精度解

図４・１１　等渦度線図 (Re=3200, 129×129)

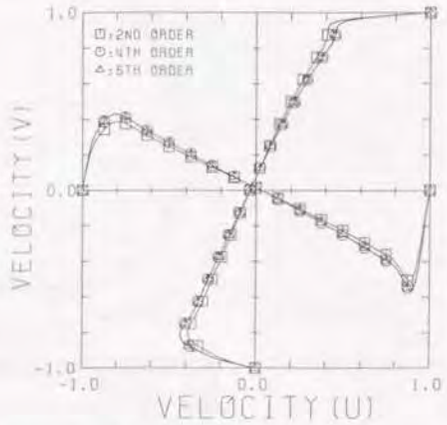


図４・１２　中心線上速度分布（Re=3200, 129×129）

表４・５　各空間精度に対する特徴量（Re=3200 ）

	Order of Accuracy		
	2	4	6
Primary			
ψ_{VC}	-0.110175	-0.120722	-0.121154
ω_{VC}	-1.790259	-1.945950	-1.950781
(x,y)	0.5156,0.5391	0.5156,0.5391	0.5156,0.5391
Secondary			
First ψ_{VC}	6.68366×10^{-4}	7.28872×10^{-4}	7.45436×10^{-4}
ω_{VC}	1.48320	1.60249	1.58028
(x,y)	0.0547,0.9063	0.0547,0.8984	0.0547,0.8984
ψ_{VC}	9.51751×10^{-4}	1.08594×10^{-3}	1.10595×10^{-3}
ω_{VC}	1.03898	1.20892	1.22436
(x,y)	0.0859,0.1172	0.0781,0.1250	0.0781,0.1250
ψ_{VC}	2.65013×10^{-3}	2.78968×10^{-3}	2.81924×10^{-3}
ω_{VC}	1.89830	2.06619	2.10559
(x,y)	0.8281,0.0859	0.8281,0.0859	0.8281,0.0859
Second ψ_{VC}	-2.26421×10^{-7}	-1.05198×10^{-8}	-5.12622×10^{-8}
ω_{VC}	-1.55154×10^{-2}	-1.44569×10^{-2}	-1.42793×10^{-2}
(x,y)	0.0078,0.0078	0.0078,0.0078	0.0078,0.0078
ψ_{VC}	-4.50712×10^{-7}	-2.03229×10^{-7}	-1.59854×10^{-7}
ω_{VC}	-1.76930×10^{-2}	-1.63591×10^{-2}	-1.53772×10^{-2}
(x,y)	0.9844,0.0078	0.9922,0.0156	0.9922,0.0078
Time steps	311539*	298662**	130556**
Grid points	129×129	129×129	129×129

(*) The initial values are obtained by the liniear interpolation of the solution with 65×65 grid points.
(**) The initial values are obtained by the lower order solution with 129×129 grid points.

表４・６　渦中心における６次精度解に対する偏差（渦度値，Re=3200 ）

	Order of Accuracy	
	2nd	4th
Primary	16.052%	0.248%
Secondary (First)	6.143%	1.405%
	15.141%	1.261%
	9.845%	1.871%
(Second)	8.657%	1.244%
	15.060%	6.385%

表４・７　高次精度解と Ghia 等の結果との比較

	$R_e = 100$		$R_e = 1000$		$R_e = 3200$	
	Present(10th)	Ghia et al.	Present(8th)	Ghia et al.	Present(6th)	Ghia et al.
Primary						
ψ_{VC}	-0.103512	-0.103423	-0.119004	-0.117929	-0.121154	-0.120377
ω_{VC}	-3.168725	3.16646	-2.068546	2.04968	-1.950781	1.98860
(x,y)	0.6172,0.7344	0.6172,0.7344	0.5313,0.5625	0.5313,0.5625	0.5156,0.5391	0.5165,0.5469
Secondary						
First ψ_{VC}	-	-	-	-	7.45436×10^{-4}	7.27682×10^{-4}
ω_{VC}	-	-	-	-	1.58028	-1.71161
(x,y)	-	-	-	-	0.0547,0.8984	0.0547,0.8984
ψ_{VC}	1.74587×10^{-6}	1.74877×10^{-6}	2.33520×10^{-4}	2.31129×10^{-4}	1.10595×10^{-3}	9.7823×10^{-4}
ω_{VC}	1.56779×10^{-2}	-1.55509×10^{-2}	0.36859	-0.36175	1.22436	-1.06301
(x,y)	0.0313,0.0391	0.0313,0.0391	0.0859,0.0781	0.0859,0.0781	0.0781,0.1250	0.0859,0.1904
ψ_{VC}	1.26674×10^{-5}	1.25374×10^{-5}	1.72787×10^{-3}	1.75102×10^{-3}	2.81924×10^{-3}	3.13955×10^{-3}
ω_{VC}	3.30513×10^{-2}	-3.30749×10^{-2}	1.15045	-1.15465	2.10559	-2.27365
(x,y)	0.9453,0.0625	0.9453,0.0625	0.8594,0.1094	0.8594,0.1094	0.8281,0.0859	0.8125,0.0859
Second ψ_{VC}	-	-	-	-	-5.12622×10^{-8}	-6.3301×10^{-8}
ω_{VC}	-	-	-	-	-1.42793×10^{-2}	1.44550×10^{-2}
(x,y)	-	-	-	-	0.0078,0.0078	0.0078,0.0078
ψ_{VC}	-	-	-5.48624×10^{-8}	-9.31929×10^{-8}	-1.59854×10^{-7}	-2.51648×10^{-7}
ω_{VC}	-	-	-9.06400×10^{-3}	8.52782×10^{-3}	-1.53772×10^{-2}	9.74230×10^{-3}
(x,y)	-	-	0.9922,0.0078	0.9922,0.0078	0.9844,0.0078	0.9844,0.0078
Grid points	129×129	129×129	129×129	129×129	129×129	129×129

1．2．　立方体キャビティ内流れのシミュレーション[42]

本節においては、３次元流れへの適用例として，立方体キャビティ内流れの数値シミュレーションを行った結果について述べる。図４・１３に立方体キャビティのモデル図を示す。

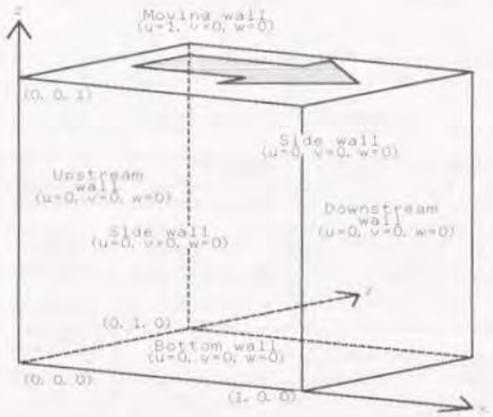


図４・１３　立方体キャビティのモデル図

初期条件は，速度成分（ｕ，ｖ，ｗ），渦度成分（ω_x，ω_y，ω_z），及び，ベクトルポテンシャル成分（Ψ_x，Ψ_y，Ψ_z）を共に０とし、計算開始時に上壁が無次元速度１で運動する衝撃出発とする。境界条件として、ベクトルポテンシャルに関しては、各面における法線方向成分の法線方向微係数を０とし、それ以外の２成分を０とする。渦度に関しては、粘着壁の条件を用いるものとする。即ち、以下の様に表すことができる。

（ｘ－ｙ平面；ｚ＝０，ｚ＝１）

$$\Psi_x=\Psi_y=0\ ,\quad \frac{\partial\Psi_z}{\partial z}=0\ ,\quad \omega_x=-\frac{\partial v}{\partial z}\ ,\quad \omega_y=\frac{\partial u}{\partial z}\ ,\quad \omega_z=0\ .\qquad (4\cdot4)$$

（ｙ－ｚ平面；ｘ＝０，ｘ＝１）

$$\Psi_y=\Psi_z=0\ ,\quad \frac{\partial\Psi_x}{\partial x}=0\ ,\quad \omega_y=-\frac{\partial w}{\partial x}\ ,\quad \omega_z=\frac{\partial v}{\partial x}\ ,\quad \omega_x=0\ .\qquad (4\cdot5)$$

（ｚ－ｘ平面；ｙ＝０，ｙ＝１）

$$\Psi_z=\Psi_x=0\ ,\quad \frac{\partial\Psi_y}{\partial y}=0\ ,\quad \omega_z=-\frac{\partial u}{\partial y}\ ,\quad \omega_x=\frac{\partial w}{\partial y}\ ,\quad \omega_y=0\ .\qquad (4\cdot6)$$

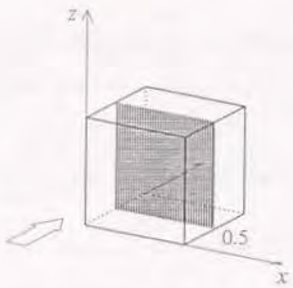
収束判定基準としては、渦度・ベクトルポテンシャル共にL_2残差（ω_{res}、Ψ_{res}）が

$$\omega_{res}=\Psi_{res}<1.0\times10^{-6}\ ,\qquad (4\cdot7)$$

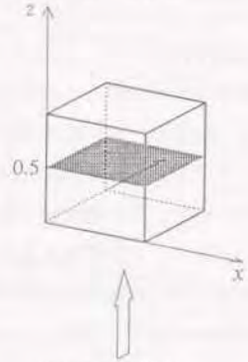
を採用する。

最初に，空間精度依存性を検証するために、レイノルズ数をＲｅ＝１００とし、格子点数を２１×２１×２１の等間隔格子とした際の立方体の中心を通りｘ，ｙ，ｚ軸に垂直な断面におけるベクトルポテンシャル成分（断面の法線方向成分）の等高線図（表記法は図４・１４）を図４・１５～４・１７に示す。空間精度を，２次、４次　６次　，及び，８次精度の４ケースとして計算を行った。２次精度解と６次精度解との比較においては，大きな差異が認められる。しかしながら、空間精度を高次にするに従い、定常解の差異は減少し、６次精度以上では空間精度依存性の無い定常解が得られていることが確認される。この空間精度の違いによる流れ場の相違は、前節で述べた様に、空間微分項を離散化する際に生じる打切り誤差が数値粘性として作用するためであると考えられる。従って、２次精度解には主渦の発達が阻害されている様子が認められる。さらに，図４・１５(d) に６次精度解と格子点数を８倍（４１×４１×４１）とした際の２次精度解との比較を示す。両者は良好な一致を示しており、高次精度数値計算法を用いることにより，少ない格子点数でも２次精度解と同等の定常解が得られていることが確認できる。このことは、莫大な格子点数が必要とされる３次元流れの解析に対して，格子点数の軽減が可能となる高次精度数値計算法が非常に有効であることを示している。

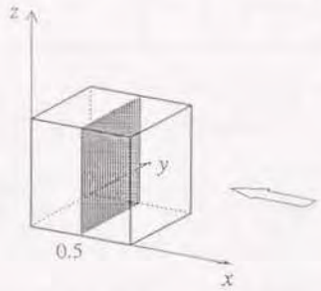
次に、第３回日本機械学会ＣＦＤワークショップ課題１「３次元立方体キャビティ内の流れ」の計算条件であるレイノルズ数Ｒｅ＝４００、及び，１０００の場合についての計算結果を示す。空間精度は全て６次精度であり，収束判定基準としては、（４・７）式を採用している。



(a) z－x断面

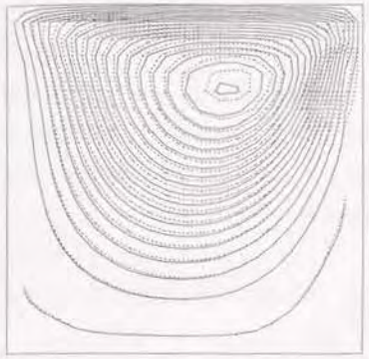


(b) x－y断面

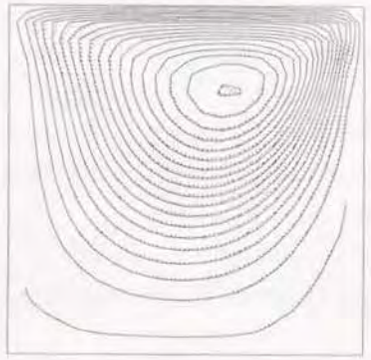


(c) y－z断面

図４・１４　各断面等高線図の表記法

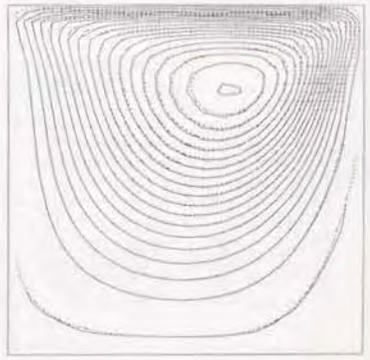


(a) ６次及び２次精度解の比較
（６次；実線、２次；破線）



(b) ６次及び４次精度解の比較
（６次；実線、４次；破線）

(c) ６次及び８次精度解の比較
（６次；実線、８次；破線）



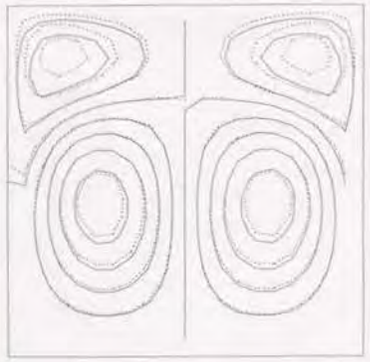
(d) ６次（実線、21×21×21格子）及び２次
（破線、41×41×41格子）精度解の比較

図４・１５　z－x断面における等Ψ_y線図

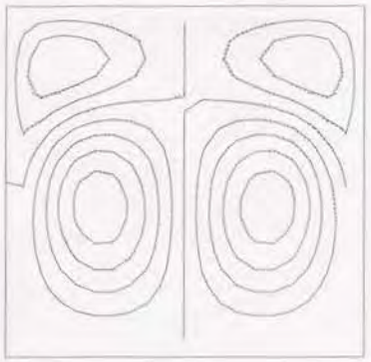
(a) ６次及び２次精度解の比較
（６次；実線，２次；破線）

(b) ６次及び８次精度解の比較
（６次；実線，８次；破線）

図４・１６　ｘ－ｙ断面における等Ψ，線図



(a) ６次及び２次精度解の比較
（６次；実線，２次；破線）



(b) ６次及び８次精度解の比較
（６次；実線，８次；破線）

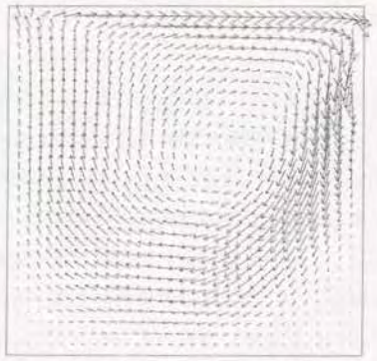
図４・１７　ｙ－ｚ断面における等Ψ，線図

レイノルズ数Ｒｅ＝４００の場合に対する速度ベクトル投影図、及び、中心線（垂直・水平中心線）上速度分布図を図４・１８、４・１９に各々示す。使用した計算格子は等間隔格子であり、格子点数は３３×３３×３３としている。ｙ－ｚ断面の速度ベクトル投影図には、側壁下方付近のコーナー渦が明確に観察され、流れが３次元性を有していることが確認される。本数値計算結果の妥当性を検討するために、対称面上の主渦・２次渦中心座標をワークショップの解答と比較したものを表４・８に示す。ただし、本数値計算結果以外は不等間隔格子を使用している。主渦・２次渦共に、格子点数の違いにもかかわらず良好な一致が見られる。しかし、中心差分系の数値解が上流下方の２次渦を明確に捕らえていないのに対し、風上差分系の数値解には現れている。また、実験結果[26]においてはこの上流下方の２次渦は捕らえられていない。従って、この現象は風上差分系特有のものであろうと考えられるが、正確には、中心差分系の数値計算法を用いた大規模数値シミュレーションが必要であろうと思われる。

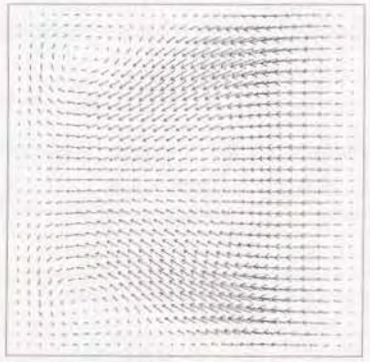
表４・８　対称面上の主渦・２次渦中心座標（Re=400）

	Present	Matsumoto et al.[33]	Iwatsu[34]
Primary	(0.6250,0.5625)	(0.623,0.576)	(0.623,0.576)
Secondary	(0.9688,0.1875) —	(0.934,0.156) —	(0.929,0.196) (0.102,0.034)
Grid Points	33×33×33 Uniform	41×41×41 Non-uniform	81×81×81 Non-uniform
Method	6th Order Method of Lines (ω－Ψ)	HSMAC (u,v-p) Forward Euler 2nd Centered	HSMAC (u,v-p) Forward Euler 3rd Upwinding

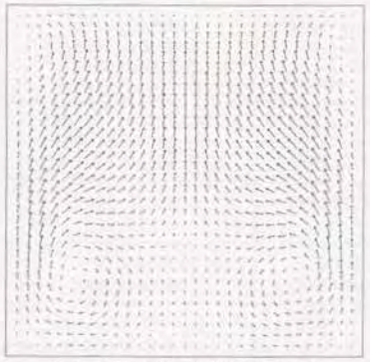
	Kato et al.[35]	Mochizuki et al.[36]	Experiment[26]
Primary	(0.638,0.601)	(0.636,0.598)	(0.62,0.58)
Secondary	(0.944,0.159) —	(0.898,0.120) (0.070,0.037)	(0.94,0.15) —
Grid Points	20×20×20 Non-uniform	35×35×35 Non-uniform	— —
Method	GSMAC (u,v-p) Forward Euler F.E.M.	QUICK (u,v-p) 3rd Upwinding F.V.M.	— — —



(a) z − x 断面 (y = 0.5)

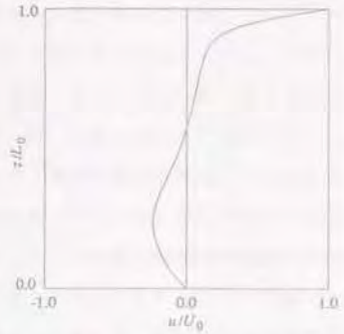


(b) x − y 断面 (z = 0.5)

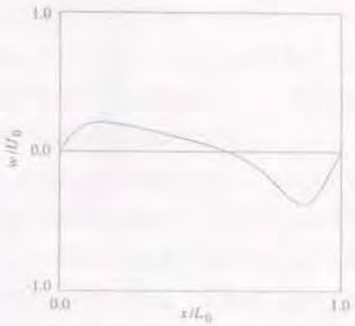


(c) y − z 断面 (x = 0.5)

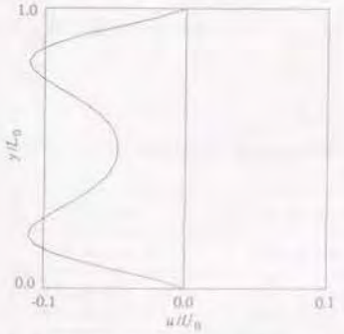
図４・１８　速度ベクトル投影図 (Re=400 , 33×33×33)



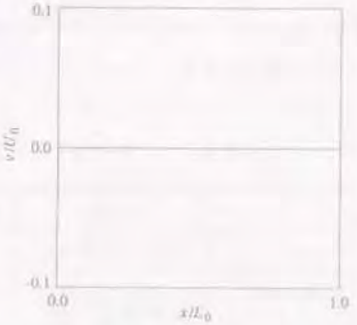
(a) z − x 断面垂直中心線上速度分布



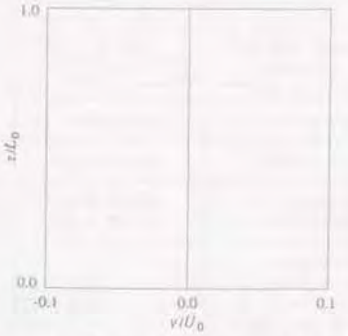
(b) z − x 断面水平中心線上速度分布



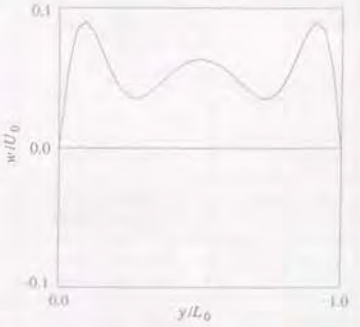
(c) x − y 断面垂直中心線上速度分布



(d) x − y 断面水平中心線上速度分布



(e) y − z 断面垂直中心線上速度分布



(f) y − z 断面水平中心線上速度分布

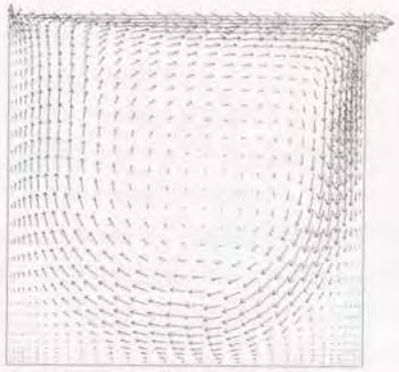
図４・１９　速度分布図 (Re=400 , 33×33×33)

レイノルズ数Ｒｅ＝１０００の場合の対称面上の主渦・２次渦中心座標を表４・９に、他者の結果（Ｒｅ＝４００のケースと同様）と共に示す。また、本数値計算で得られた定常解の速度ベクトル投影図、及び、中心線上速度分布図を各々図４・２０、４・２１に示す。ただし、本数値計算においては等間隔格子では計算不可能であったために、最小格子幅を 1/100とした不等間隔格子を使用した。主渦・２次渦中心座標は他者の結果と良好な一致を示していることが確認できる。図４・２０において側壁上下方のコーナー渦が明確に現れており、特に、側面上方のコーナー渦が他者の結果よりも明確に現れている点が特徴的である。これは、連続の条件を自動的に満足する渦度－ベクトルポテンシャル表示方程式を支配方程式として用いていること、及び、空間精度を高次精度（６次精度）で離散化していることによると考えられる。すなわち、高次精度で離散化しているために、打切り誤差（数値粘性）が他者のものよりも小さくなり、コーナー渦がより明確に捕えられていることが確認できる。

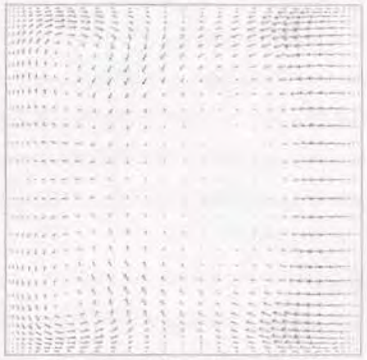
表４・９　対称面上の主渦・２次渦中心座標（Re=1000）

	Present	Matsumoto et al.[33]	Iwatsu[34]
Primary	(0.6042,0.5000)	(0.590,0.465)	(0.608,0.485)
Secondary	(0.8881,0.1119) (0.0332,0.1119)	(0.892,0.113) (0.103,0.063)	(0.898,0.171) (0.102,0.113)
Grid Points	33×33×33 Non-uniform	41×41×41 Non-uniform	81×81×81 Non-uniform
Method	6th Order Method of Lines ($\omega-\Psi$)	HSMAC (u,v-p) Forward Euler 2nd Centered	HSMAC (u,v-p) Forward Euler 3rd Upwinding

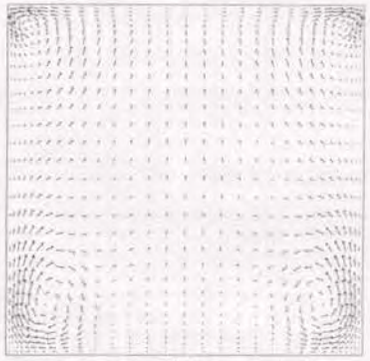
	Kato et al.[35]	Mochizuki et al.[36]	Experiment[36]
Primary	(0.592,0.463)	(0.602,0.456)	(0.59,0.47)
Secondary	(0.898,0.126) (0.069,0.086)	(0.880,0.117) (0.082,0.090)	(0.90,0.17) (0.09,0.08)
Grid Points	30×30×30 Non-uniform	35×35×35 Non-uniform	– –
Method	GSMAC (u,v-p) Forward Euler F.E.M.	QUICK (u,v-p) 3rd Upwinding F.V.M.	– – –



(a) ｚ－ｘ断面（ $y=0.5$ ）

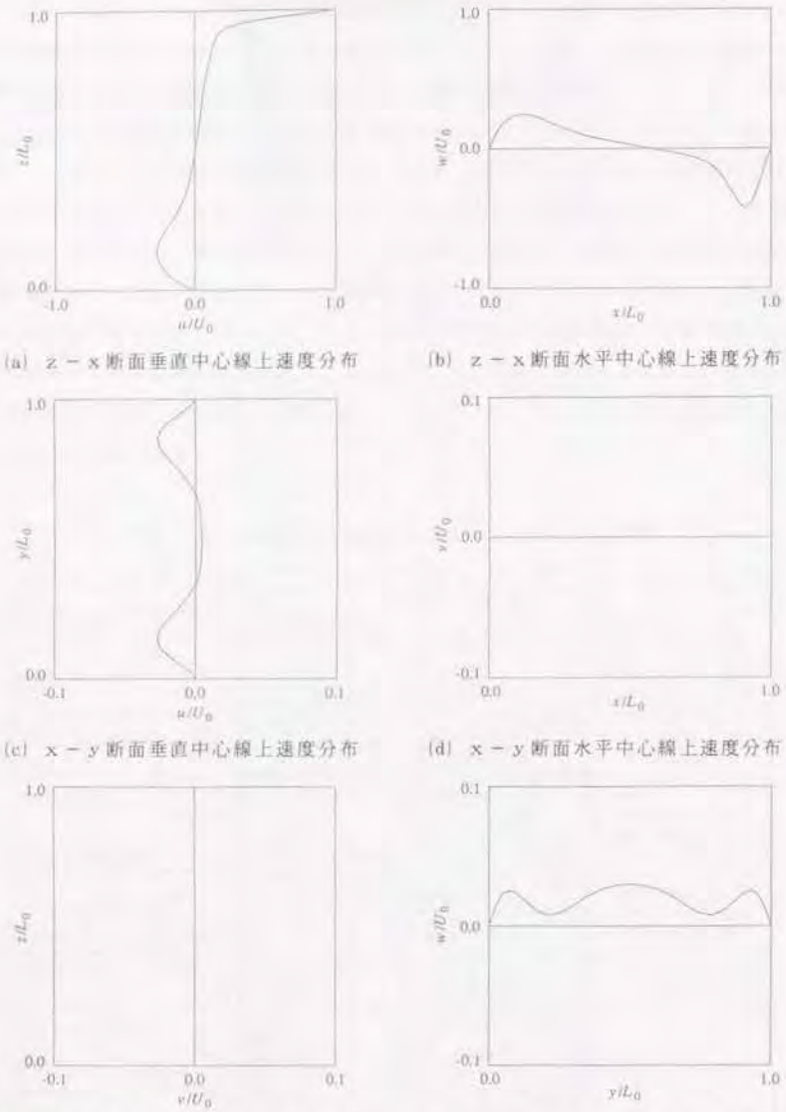


(b) ｘ－ｙ断面（ $z=0.5$ ）



(c) ｙ－ｚ断面（ $x=0.5$ ）

図４・２０　速度ベクトル投影図（ Re=1000, 33×33×33 ）



(a) z－x断面垂直中心線上速度分布　(b) z－x断面水平中心線上速度分布

(c) x－y断面垂直中心線上速度分布　(d) x－y断面水平中心線上速度分布

(e) y－z断面垂直中心線上速度分布　(f) y－z断面水平中心線上速度分布

図４・２１　速度分布図（ Re=1000, 33×33×33 ）

低レイノルズ数（Ｒｅ≦１０００）の実験は数が多くないが、実験においては、下流側２次渦の大きさが測定されており、実験との比較として、この２次渦の大きさを取り上げ検討を行うことにする。ただし、比較する流れ場はレイノルズ数Ｒｅ＝１０００の場合である。Pan とAcrivos[27] によると立方体の一辺で正規化された２次渦の大きさD_0は、D_0≒０．２９であり、KoseffとStreet[28]によるとD_0≒０．３と報告されている。本高次精度数値シミュレーション結果はD_0≒０．２９５となり、実験結果とも非常に良く一致していることが確認される。この結果は本数値計算法の信頼性を裏付けるものであると考えられる。

レイノルズ数Ｒｅ＝４００、及び、１０００の定常解を比較すると、主渦はレイノルズ数が増加するに従って、下壁方向に移動していることがｚ－ｘ断面の速度ベクトル投影図及び、中心線上速度分布図より確認される。従って、ｘ－ｙ断面における垂直中心線上速度分布は、レイノルズ数Ｒｅ＝４００では大きな速度を有するのに対し、Ｒｅ＝１０００では速度が小さくなり逆流領域が存在していることが確認される。高レイノルズ数流れにおいては、Taylor-Gortler状の縦渦構造を含む複雑な３次元流れが形成されるが、本研究で採用したレイノルズ数は低レイノルズ数の範疇に入るために、Taylor-Gortler状渦の発生は再現されていない。

最後に、本論文で提案した高次精度線の方法に対する計算効率を検討するために、空間精度の違いによる収束までの時間ステップ数を表４・１０に示す。ただし、対象としたレイノルズ数はＲｅ＝１００、及び、４００の２ケースである。表より、両ケース共に空間精度を高次精度にすることによる収束性能の劣化は全く見られない。さらに、ほぼ同一の定常解が得られる８倍の格子点数（４１×４１×４１）を用いた２次精度の場合と比較すると、高次精度（６次精度）の収束に要する時間ステップ数は、２次精度の４０％で済む

表４・１０　収束に要する時間ステップ数の比較

		Order of Accuracy			
		2nd	4th	6th	2nd
Reynolds Number Re=100	Grid Points	21×21×21	21×21×21	21×21×21	41×41×41
	Time Steps	1237	1242	1333	3279
Reynolds Number Re=400	Grid Points	33×33×33	33×33×33	33×33×33	－
	Time Steps	3450	3170	3241	－

ことが確認される。一般に、空間精度を高次精度にすることによって、収束に至るまでの時間ステップ数が増加することが知られているが、本数値計算においては２次元問題の場合と同様に、時間ステップ数の増加は認められず、高次精度線の方法が数値解の信頼性のみならず計算効率の面でも優れた特性を有していることが確認される。

本節で取り上げた立方体キャビティ内流れは、第３回機械学会ＣＦＤワークショップの課題として採用されることからも分かる様に、３次元の基本的なベンチマーク問題であると考えられるが、単純な形状であるにもかかわらず流れの構造は複雑であり、その多くの現象が未だに解決されていない。立方体キャビティ内流れに対して、幾つかの問題点を列挙すると、①解の対称性が崩壊するレイノルズ数と非定常性、②Taylor-Gortler状渦構造の発生と消滅に関するメカニズム、③カオス現象の発生とその構造、④乱流へ遷移する臨界レイノルズ数、及び、キャビティ内乱流の構造、等である。これらの問題点を数値シミュレーションにより解析する際には、必然的に、高レイノルズ数流れを取り扱う必要がある。従って、数値粘性を極力排除したシミュレーションを実行することが重要となり、風上差分系の数値計算法では過度の数値粘性を含むために、中心差分系の高次精度数値計算法を採用することが必要になると考えられる。さらに、非定常性を考慮すると、時間精度も重要な問題となる。現在最も一般に使用されている時間積分法は、１次精度の前進、及び、後退差分法であり、この方法では数値的な分散・散逸が大きいために、時間ステップ幅を小さくしても正確な解を与えるとは言えない。また、アダムス・バシュフォース法等の２次精度法も用いられることがあるが、４次精度法と比較すると２次精度法においても時間の経過と共に数値的な分散・散逸が増加する。従って、乱流の様な複雑な非定常現象を解析するためには、４次精度以上の時間精度が必要になると考えられる。一方、計算効率の面からは、時間積分法の段階数（例えば、ルンゲ・クッタ・ギル法では４段階）は少ないことが望ましい。以上のことを考慮すると、本論文で提案した高次精度線の方法は、空間微分項を任意精度の中心差分法で離散化することが可能であり、時間精度も４次精度であることから、乱流の様な空間的・時間的に複雑な現象を解析するためには最適な数値計算法であると結論される。

２．　２次元剪断層の高次精度数値シミュレーション[39]

２次元剪断層中に或る程度秩序を持った組織的構造が存在することが BrownとRoshkoの実験[40]により明らかにされて以来、剪断層の研究は実験・数値計算を問わず広範に行われている[41-45]。この混合層、及び、ジェットに代表される流れは、壁面流（例えば前節のキャビティ内流れ）が壁面効果によって層流状態が崩壊し、乱流に遷移するのとは異なり、渦運動が乱流への遷移の中心的役割を果たすと考えられている。従って、剪断層の数値シミュレーションを行うことにより、自由流れの乱流への遷移のプロセスを明らかにすることが可能となると考えられる。

そこで、本節においては、自由流れに対して乱流への遷移の本質的な機構を担う２次元剪断層の時間成長問題を取り上げ、渦の巻き上がり、及び、渦の合体の高次精度数値シミュレーションを行った結果について述べる。図４・２２に、その概略図を示す。

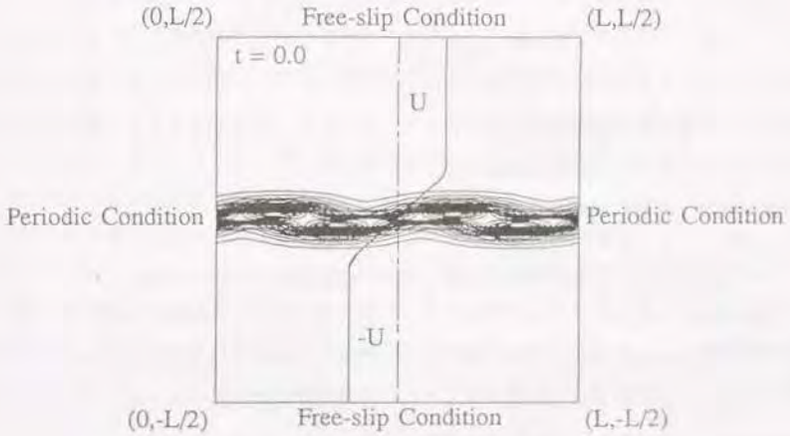


図４・２２　２次元剪断層の概略図

無次元化は、対向流の速度差の1/2 を代表速度U_0として、初期平均渦層厚さδ_0

$$\delta_0 = \frac{U_0}{[du(x,y)/dy]_{max}} \quad , \qquad (4\cdot 8)$$

を代表長さとして行っている。基本剪断流として、y方向にのみ変化する双曲線正接関数型速度分布

$$W(x, y) = \tanh(y) \quad , \qquad (4\cdot 9)$$

を与え、攪乱流としては、Michalke[47]による Rayleigh の安定方程式

$$(W-c)\left(\frac{d^2\psi}{dy^2}-\alpha^2\psi\right) - \frac{d^2W}{dy^2}\cdot\psi = 0 \quad , \qquad (4\cdot 10)$$

の固有解を採用し、それらの重ね合わせにより、初期流れを形成する。ここで、$\psi(y)$は Rayleigh の安定方程式の固有解、αは攪乱の波数であり、$c\ (=c_r+\bar{i}c_i)$は複素量であり、c_rは位相速度を、c_iは攪乱増幅度を各々表している。従って、初期の渦度ω、及び、流れ関数Ψは各々以下の様に与えることができる。

$$\omega_{init}=-\mathrm{sech}^2(y)+\sum_{k=1}^{m} C_k R\left[-\frac{d^2W/dy^2}{W-c}\psi(y)\exp(\bar{i}\alpha x)\right]$$

$$\Psi_{init}=\ln[\cosh(y)]+\sum_{k=1}^{m} C_k R[\psi(y)\exp(\bar{i}\alpha x)] \, , \qquad (4\cdot 11)$$

ここで、C_kは攪乱の強さを決定するパラメータであり、mは重ね合わせる攪乱波の個数を表し、R[ ]は複素数の実数部を表すものとする。

計算領域は、初期渦群を含む長さLの正方領域

$$(0, -\tfrac{1}{2}L) \leq (x, y) \leq (L, \tfrac{1}{2}L) \, , \qquad (4\cdot 12)$$

とする。ただし、正方形の1辺の長さLは、初期に重ね合わせる攪乱波の個数m、及び、攪乱基本波長λ_w $(=2\pi/\alpha)$を用いて、$L=2^{m-1}\lambda_w$で与えられる。また、境界条件としては、x方向に周期境界条件を、y方向に自由滑りの条件

$$\omega_{bound}=0 \quad , \quad \Psi_{bound}=\Psi_{init} \quad , \qquad (4\cdot 13)$$

を、各々与えるものとする。さらに、流れ関数Ψに関するポアソン方程式に対する収束判定基準は、コンピュータの丸め誤差の影響を極力排除するために、以下の基準を採用している。

$$\Psi_{res} < 1.0\times 10^{-8} \quad . \qquad (4\cdot 14)$$

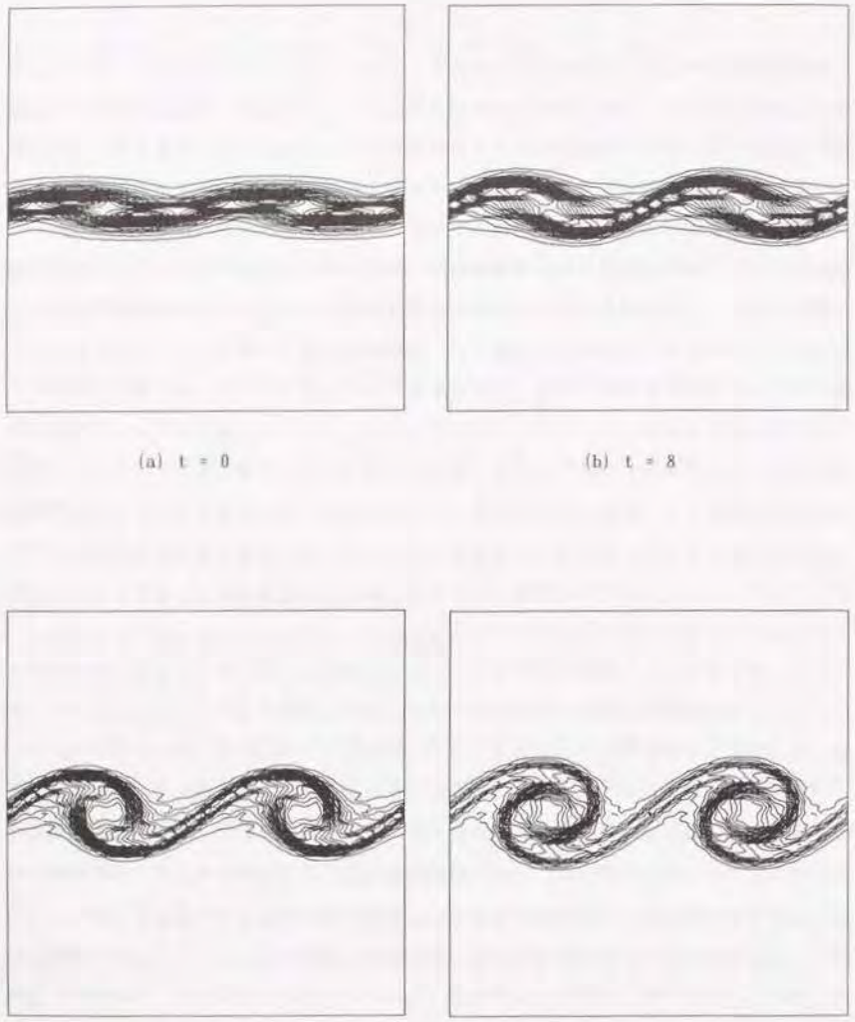
ここで、Ψ_{res}は流れ関数のL_2残差である。また、数値計算は空間精度を8次精度として行っている。

2.1. 渦の巻き上がりのシミュレーション

基本剪断流に攪乱流の基本波のみを与える、即ち、(4・11)式において$m=1$とする、と渦は合体することなく巻き上がりのみを起こす。ここでは、攪乱の基本波数として線形安定性理論において成長率が最大となる波数$\alpha=0.4446$[47]を採用し、その強さを$C_1=0.2$と与えている。また、レイノルズ数はRe=200であり、格子点数は65×65の等間隔格子を用いている。

図4・23に渦度の時間推移を等高線図で2周期分示す。初期(t=0)における一対の渦は、時刻t=8で巻き上がりを始め、渦層の厚さも増加していることが認められる。時刻がt=16、24と経過するに従って、渦は次第に激しい巻き上がり傾向を示し、時刻t=24において最高潮に達し、渦層の厚さもピークを示す。その後、渦は対向流によって引き伸ばされ始め(t=32)、時刻t=40においては、渦間のブレイド構造が明確ではなくなり、渦層の中に一対の渦が存在するような構造を呈する(t=64)。さらに時刻が経過すると、渦層の中に渦が整然と配列される一定の渦構造を有する準平衡状態に達する(t=120)。このような状態においては、渦の位置、及び、渦層の厚さに変化は生じない。また、この様に攪乱流の基本波のみを与えた場合には、数値シミュレーションにおいても渦の合体は起こらない。

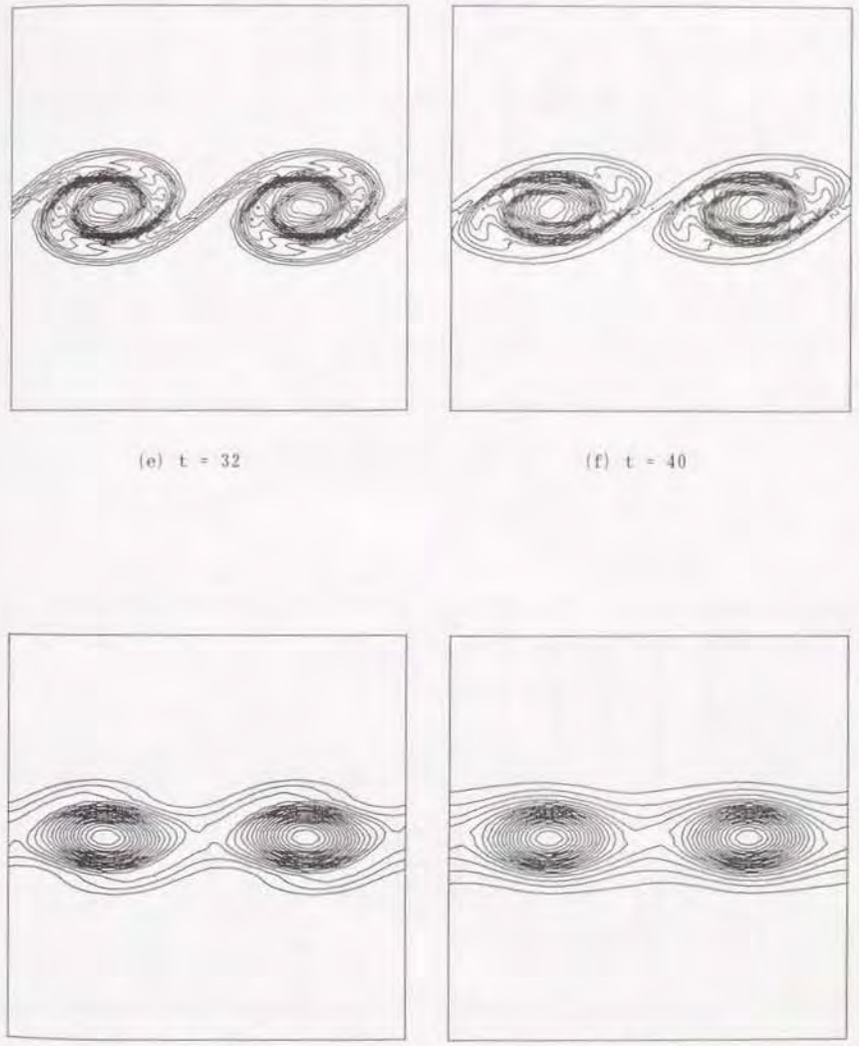
次に、渦の巻き上がり現象をエネルギ・バランスの観点で捕らえるために、図4・24にレイノルズ応力の時間推移を等高線図で示す。図中の実線は正のレイノルズ応力を、破線は負のレイノルズ応力を示している。さらに、図4・25にはx方向に平均化されたレイノルズ応力分布を示す。レイノルズ応力は、正の場合平均流から攪乱流へのエネルギ供給を示し、負の場合逆に攪乱流から平均流へのエネルギ供給を示すと考えられる。初期におけるレイノルズ応力の分布は、$y=0$付近の攪乱流によるものの他はほとんど認められない。時刻t=8において、x方向平均レイノルズ応力は最も大きな正の値を取り、平均流から攪乱流へのエネルギ供給が行われ、巻き上がり現象が起こっていることが理解される。時刻t=16では、平均流から攪乱流へのエネルギ供給が為されている領域がy方向に広がっていることが分かる。さらに、巻き上がりが最高潮に達する時刻t=24におけるレイノルズ応力は、等高線図からも分かる様に、正負の分布がほぼ釣り合っており、x方向平均レイノルズ応力もほとんど0に近い分布となっていることが分かる。従って、こ



(a) t = 0　　(b) t = 8

(c) t = 16　　(d) t = 24

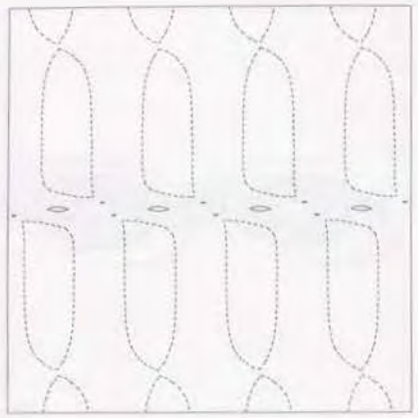
図４・２３　渦度の時間推移（ Re=200 ,　65 ×65 ，その１ ）



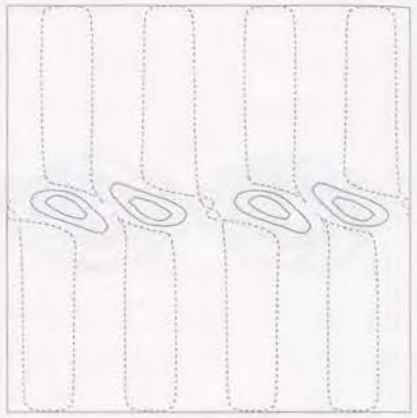
(e) t = 32　　(f) t = 40

(g) t = 64　　(h) t = 120

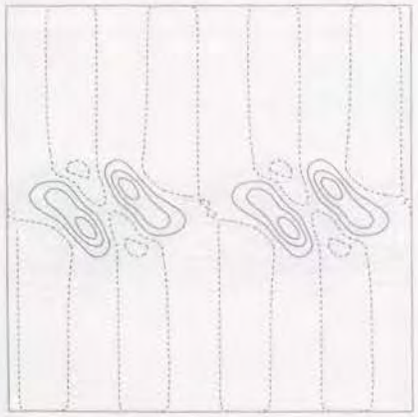
図４・２３　渦度の時間推移（ Re=200 ,　65 ×65 ，その２ ）



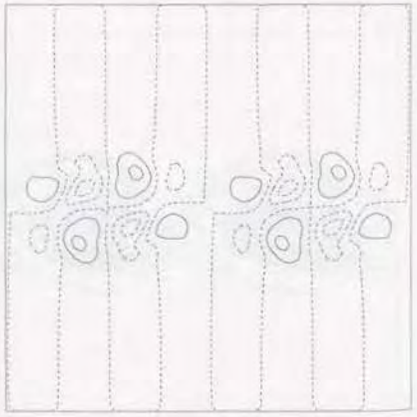
(a) t = 0



(b) t = 8

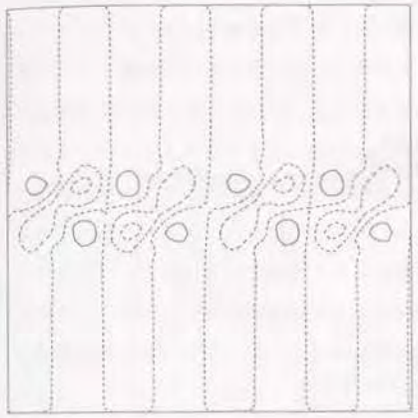


(c) t = 16

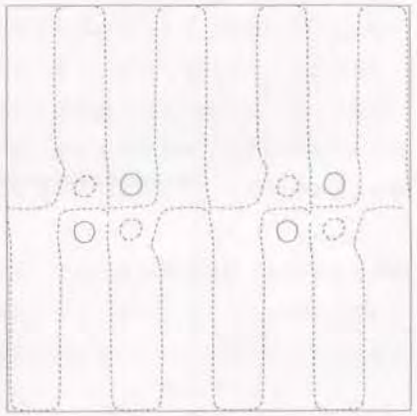


(d) t = 24

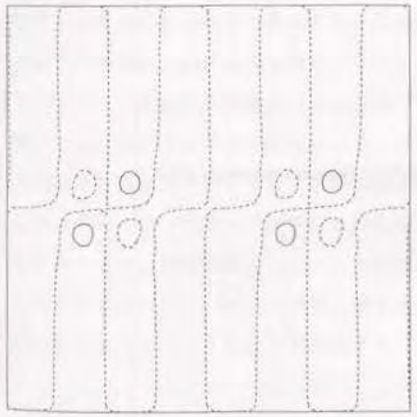
図４・２４　レイノルズ応力の時間推移（ Re=200 ， 65 ×65 ，その１ ）



(e) t = 32



(f) t = 56



(g) t = 80

(h) t = 120

図４・２４　レイノルズ応力の時間推移（ Re=200 ， 65 ×65 ，その２ ）

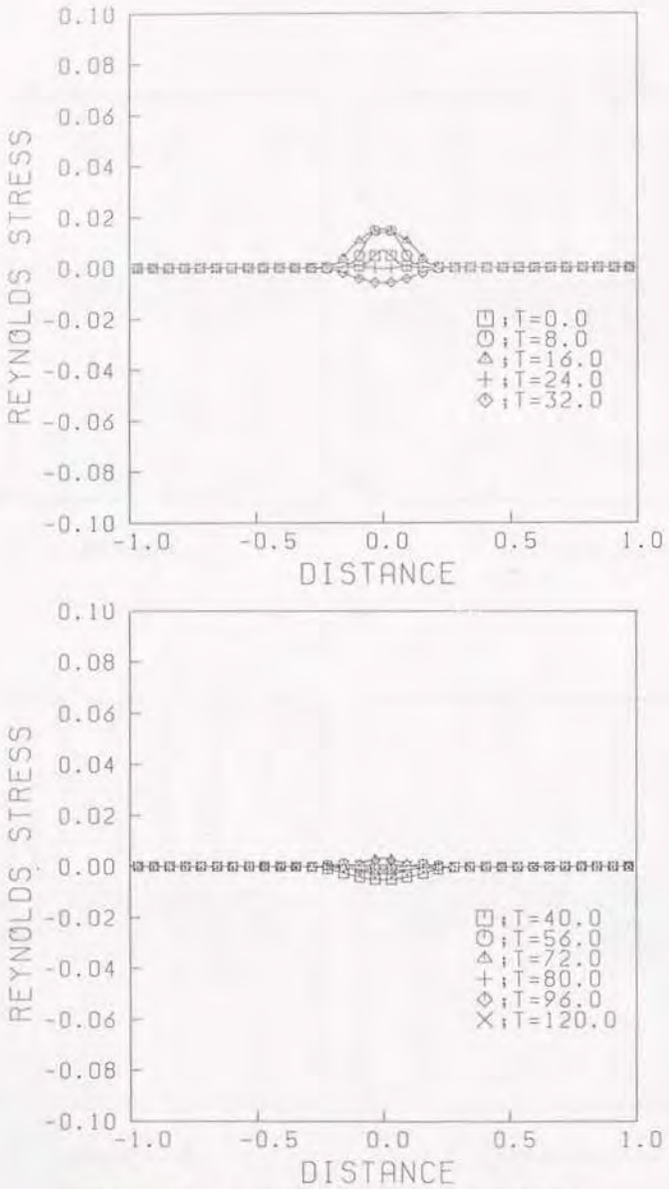


図４・２５　ｘ方向平均レイノルズ応力の時間推移

の時刻において平均流からのエネルギ供給と攪乱流からのエネルギ供給が釣り合っている一種の平衡状態が達成されていることが確認でき，巻き上がり現象が終了しているものと考えられる。この時刻以降，レイノルズ応力は正負の分布が釣り合うように拡散効果によって小さくなって行く様子が認められ，時刻ｔ＝１２０においては，分布はほとんど無くなり，準平衡状態に達していることが確認される。また，ｘ方向平均レイノルズ応力も，正負の状態を繰り返しながら，エネルギが完全に平衡状態（レイノルズ応力が０になる）に達していることが判明する。Metcalfe等[41]は，巻き上がりの際には平均レイノルズ応力の符号が変化すると報告しているが本数値シミュレーションにおいてもその現象は確認される。

さらに，（４・８）式で定義される渦層厚さδ，及び，全空間で平均された全変動運動エネルギ，各方向の変動運動エネルギの時間推移を図４・２６，４・２７に各々示す。全変動運動エネルギE_q，ｘ，ｙ方向の変動運動エネルギE_u，E_vは以下のように定義される。

$$E_q = \frac{1}{2}\{(u-\bar{u})^2 + v^2\} \quad , \qquad (4\cdot15)$$

$$E_u = \frac{1}{2}(u-\bar{u})^2 \quad , \quad E_v = \frac{1}{2}v^2 \quad , \qquad (4\cdot16)$$

ただし，$\bar{u}$（ｙ）はｘ方向速度成分のｘ方向平均を表しており，渦層厚さδは初期の渦層厚さによる正規化を行っている。渦層厚さδに関しては，初期状態から線形的に増加し，時刻ｔ＝２４において最大値を取り，その後，一定値に至っている様子が認められる。この場合の渦層厚さの成長率は約０．０７５であり，渦層厚さが２倍になるまでの時間は約１５であり，これらの結果は Lesieur等[44]の報告とほぼ一致する。変動運動エネルギに関しても，時刻ｔ＝２４で最大となり，以後，減衰していることが確認できる。さらに，平均流から攪乱流へエネルギが供給される場合には変動運動エネルギは増加し，逆に，攪乱流から平均流へエネルギが供給される場合には変動運動エネルギは減少することも確認できる。また，変動運動エネルギの大部分は，基本剪断流には存在しないｙ方向成分によって占められており，これらが最大値を取る時刻は，渦の巻き上がりが完了した時刻と一致している（ｔ＝２４）ことも判明する。

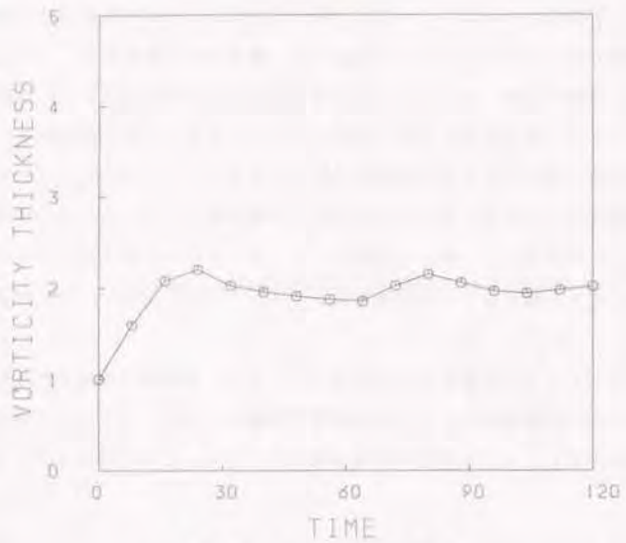


図４・２６　渦層厚さの時間推移

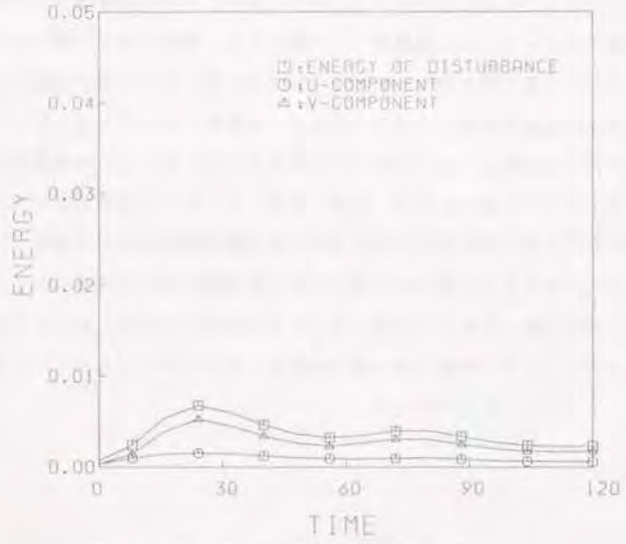


図４・２７　平均変動運動エネルギの時間推移

２．２．　渦の合体のシミュレーション

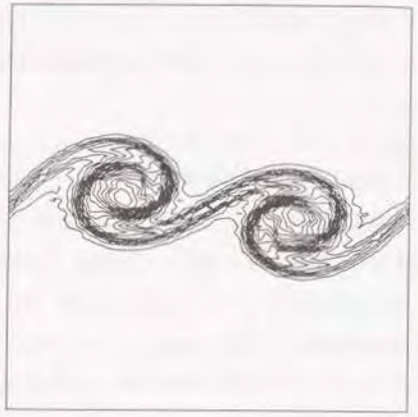
前節で述べた様に、基本剪断流に攪乱の基本波のみを与えると渦対は巻き上がりを起こすだけで、渦の合体には至らない。そこで本節では、攪乱の低調波成分を初期条件において与えることにより、渦対の合体現象の高次精度数値シミュレーションを行う。

２．２．１．　２個の渦の合体のシミュレーション

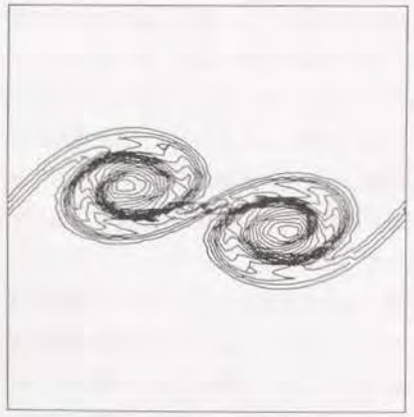
最初に、攪乱の基本波（α＝０．４４４６）、及び、1/2低調波（α＝０．２２２３）を基本剪断流に重ね合わせた場合、計算領域内に一対の渦が存在する（ｍ＝２）場合の数値シミュレーションを行った結果について述べる。1/2低調波の強さをＣ$_2$＝０．１４、格子点数は６５×６５、レイノルズ数はＲｅ＝２００である。図４・２８に渦度の時間推移を等高線図で示す。初期（ｔ＝０）に存在する一個の渦対は、対向流の影響で巻き上がる（ｔ＝２４）。この巻き上がりの過程は、前節で述べた巻き上がりのみの場合と比較してほとんど相違は認められず、渦層の厚さに関しても同一の挙動を示す。ただし、この間のブレイド構造に関しては、巻き上がりと比較して若干厚くなっている。この時刻以降、２つの渦は徐々に接近し（ｔ＝３２）、時刻ｔ＝４０において合体を起こす。そして、２つの渦があたかも１個の渦の如く回転する様子（ｔ＝５６）が観察され、この時刻において渦層の厚さはピークを示す。従って、ブレイドは存在せず、以後、巻き上がりの場合と同様に対向流の影響で、合体した渦対は流れ方向に引き伸ばされ、渦の先端が境界に接近する（ｔ＝７２）。時刻ｔ＝１０４においては、渦の先端が境界を越えて長く伸び、ついにはその先端が渦本体に吸収され、新たなブレイドを形成する（ｔ＝１３６）。さらに、渦の内部構造も完全に１つの渦の構造となっている。時刻ｔ＝１４４では、ほぼ円形に近い渦形状を呈していることが確認される。これ以降、対向流の影響により渦はその方向に引き伸ばされ、境界を越えて合体した渦を取り巻く層を形成し、時刻ｔ＝２４０においては、巻き上がりの場合と同様の形状をした渦となり、定在する。

図４・２９、及び、３０にレイノルズ応力分布、ｘ方向平均レイノルズ応力の時間推移を各々示す。渦の合体が起こる時刻ｔ＝４０までは、レイノルズ応力の分布は正の値が支配的であり、ｘ方向平均レイノルズ応力分布も正となっており、巻き上がりの際に見られたレイノルズ応力分布の符号の逆転は生じない。しかしながら、巻き上がりが終了する時刻ｔ＝２４においてｘ方向平均レイノルズ応力は極小値となり、それ以降増加を続け、渦の合体が起こる時刻ｔ＝４０で最大値を取る。渦層厚さがピークに達する時刻ｔ＝５６に

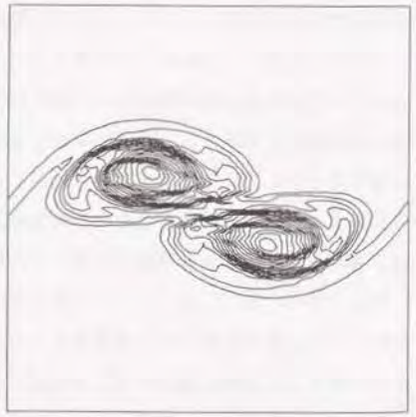
(a) t = 0



(b) t = 24



(c) t = 32



(d) t = 40

図４・２８　渦度の時間推移（ 2-Eddy , Re=200 , 65 ×65 , その１ ）

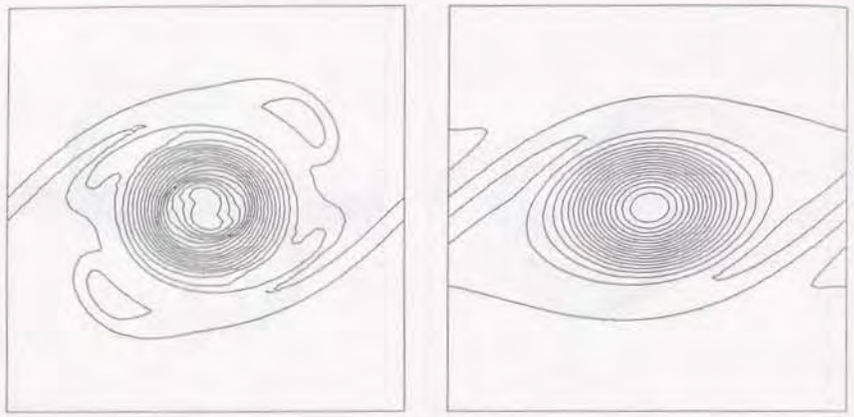
(e) t = 56

(f) t = 72

(g) t = 104

(h) t = 136

図４・２８　渦度の時間推移（ 2-Eddy , Re=200 , 65 ×65 , その２ ）



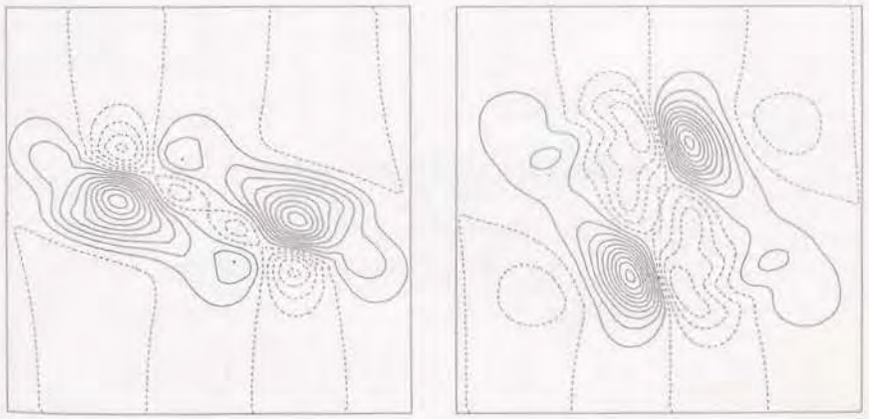
(i) t = 144　　(j) t = 240

図４・２８　渦度の時間推移（ 2-Eddy , Re=200 , 65 ×65 , その３ ）

おいては、負のレイノルズ応力の影響が増加し、それに伴って、ｘ方向平均レイノルズ応力の値も減少し、一時的なエネルギ平衡状態が達成されている。時刻ｔ＝７２では、逆に負のレイノルズ応力が支配的になり、平均レイノルズ応力は負となっている。これ以降、正負のレイノルズ応力がバランスするように流れ場が変化し、時刻ｔ＝１４４では、ほぼ正負のレイノルズ応力が平衡しており、その後は、レイノルズ応力の急激な変化は認められず、粘性拡散によって次第にエネルギが失われる様子が確認できる（ｔ＝２４０）。従って、渦の巻き上がり、及び、合体が起こるまでは、平均流から攪乱流へのエネルギ供給が行われ、その後逆に、攪乱流から平均流へのエネルギ供給が行われることが判明する。

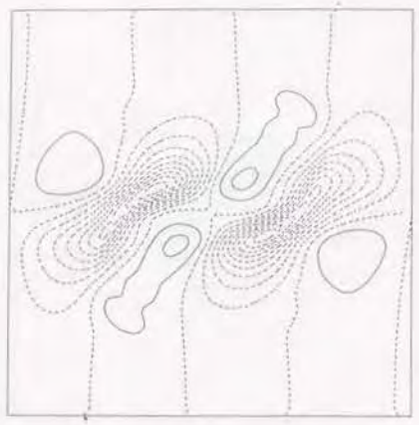
さらに、図４・３１、３２に渦層厚さδと平均変動運動エネルギの時間推移を示す。渦層厚さは初期からほぼ線形的に増加し時刻ｔ＝５６において最大値を取る。その後、減少し、時刻ｔ＝７２以降ほぼ一定値となる。この場合の渦層厚さの成長率は、巻き上がりの場合と同様に約０．０７５である。平均変動運動エネルギは、ｘ方向変動エネルギを除いてほぼ渦層厚さδと同様の挙動を示す。しかしながら、明らかに２つのピークを有する点が特徴的である。最初のピーク（ｔ＝５６）は渦対が合体するために生ずるものであり、

(a) t = 0　　(b) t = 24

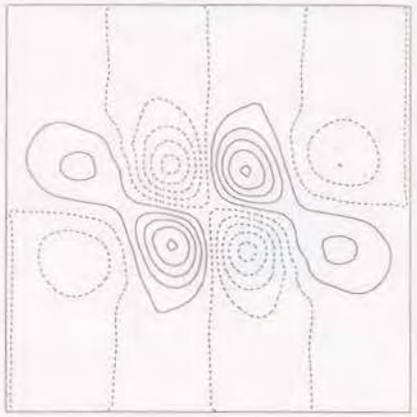


(c) t = 40　　(d) t = 56

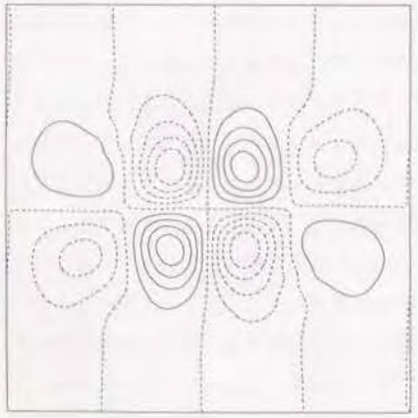
図４・２９　レイノルズ応力の時間推移（ 2-Eddy , Re=200 , 65 ×65 , その１ ）



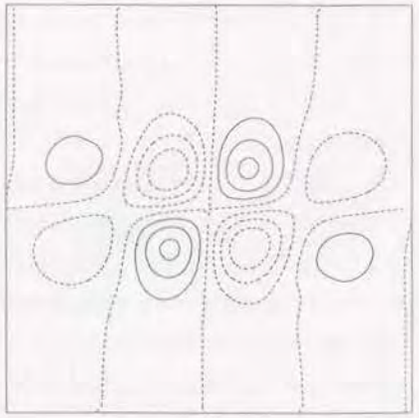
(e) t = 72



(f) t = 136

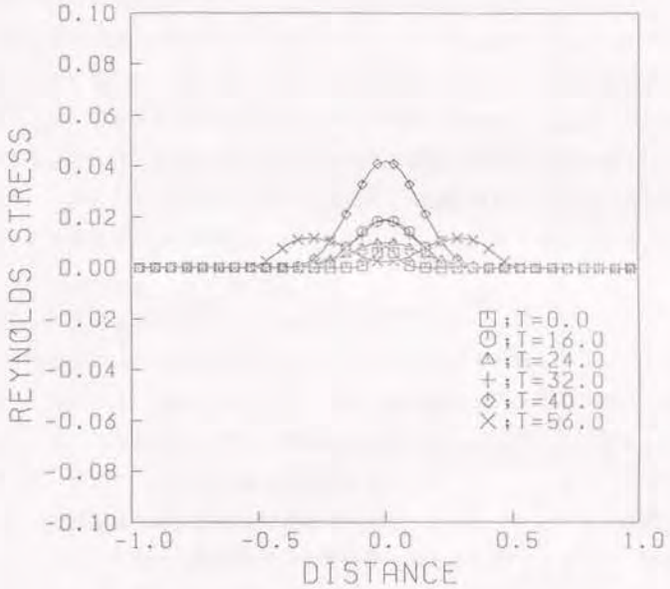


(g) t = 144



(h) t = 240

図４・２９　レイノルズ応力の時間推移（ 2-Eddy , Re=200 , 65 ×65 , その２ ）



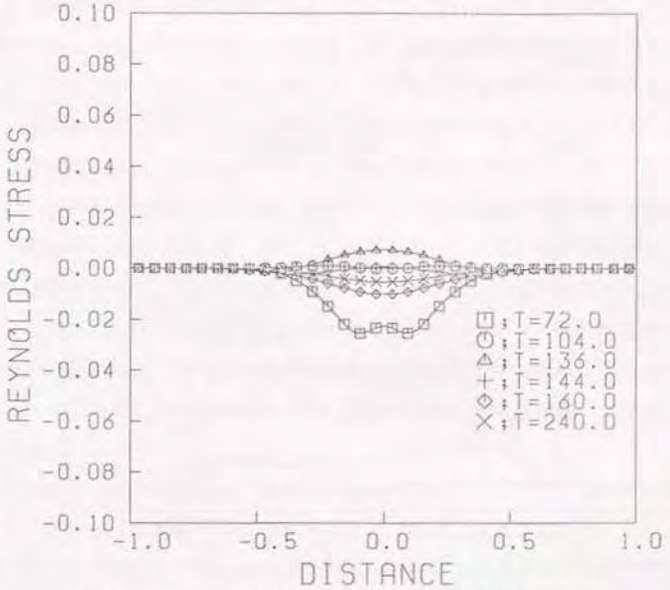


図４・３０　ｘ方向平均レイノルズ応力の時間推移

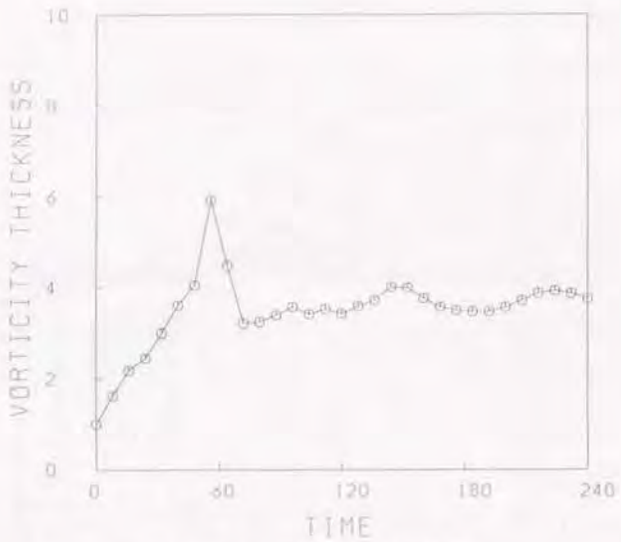


図４・３１　渦層厚さの時間推移

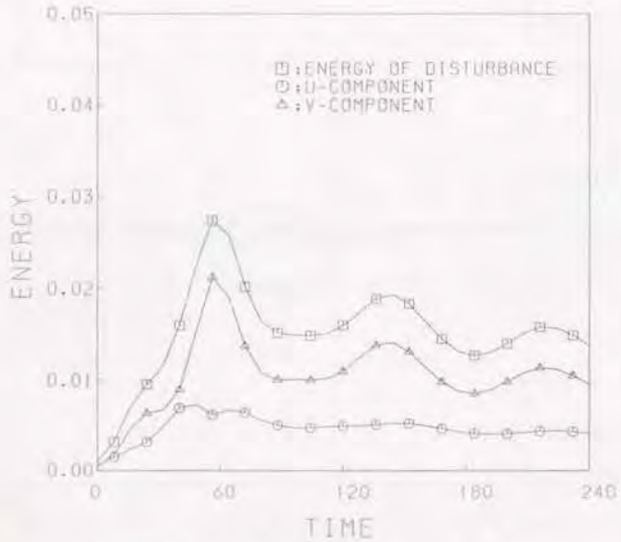


図４・３２　平均変動運動エネルギの時間推移

この時刻まで平均流から攪乱流へのエネルギ供給が為され続け，ｔ＝５６において一種のエネルギ平衡状態が達成されているもと考えられ、この時刻において１つのエネルギピークが形成される。従って、ｔ＝５６において合体現象が完了しているものと考えられる。これ以降、逆に、攪乱流から平均流へのエネルギ供給が為されるために、変動運動エネルギは減少する。さらに，時刻ｔ＝１１２においては再び平均流から攪乱流へのエネルギ供給が為され、２番目のピークはこのエネルギ供給に対応している。このエネルギ供給は、新たなブレイド構造を形成するために用いられるのではないかと考えられる。

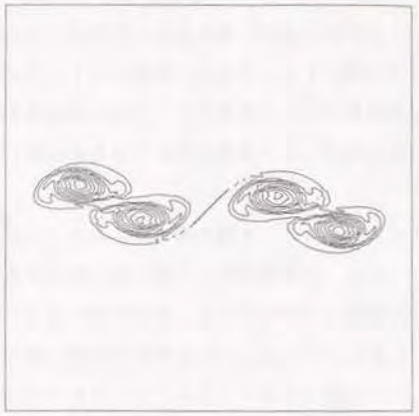
２．２．２．　４個の渦の合体のシミュレーション

次に、計算領域内に４個の渦が存在する（ｍ＝３）場合の数値シミュレーションを行った結果について述べる。初期の流れ場は、前項の初期値に 1/4低調波の攪乱を重ね合わせて形成している。 1/4低調波の攪乱の強さはＣ$_0$＝０．１、レイノルズ数Ｒｅ＝２００、格子点数１２９×１２９として計算を行っている。

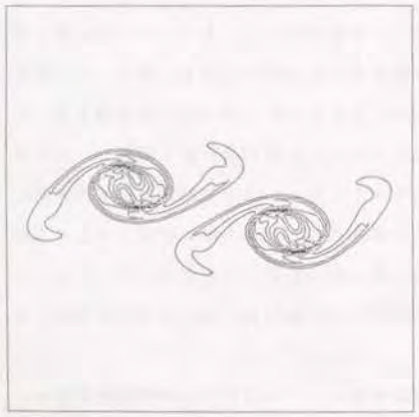
図４・３３に渦度場の時間推移を等高線図で示す。ただし、その間隔は前の２ケースよりも広くしている。初期の４個の渦は、巻き上がりを起こし（ｔ＝２４），時刻ｔ＝４０において２個の渦が合体（一次合体）を起こす。この過程は、巻き上がり、及び、２個の渦の合体の場合と比較してほぼ同一の挙動を示す。以後、渦の先端が伸び（ｔ＝９６）、時刻ｔ＝１２０において第２次合体が起こる。この第２次合体は、対向流の方向に伸びた渦先端の一方の髭状部分同士によって為されることが確認される。もう一方の渦先端の髭状部分は境界方向に伸び、新たなブレイドを形成することが認められる。また、この段階ではまだ４つの渦構造を保っているが、時刻ｔ＝１４４においては２個の渦構造を呈していることが確認できる。これ以降、合体した渦はあたかも１個の渦の如く回転し、対向流の影響で引き伸ばされていく様子が観察され（ｔ＝１７６）、渦の先端が対向流の方向に伸び（ｔ＝２００）、ブレイド構造を形成すると考えられる。さらに、時刻ｔ＝２６４においては渦の内部構造が１個の渦の構造となり、その渦の形状も円形に近いものとなっているが（ｔ＝４７２）、対向流の存在により最終的には２個の渦の場合と同様な形状となり、定在する（ｔ＝５７６）。

レイノルズ応力分布の時間推移、及び、ｘ方向平均レイノルズ応力の時間推移を図４・３４，３５に各々示す。時刻ｔ＝２４においては、巻き上がりが起こり，ｔ＝４０では第１次合体が起こっている。この間は常に平均流から攪乱流へのエネルギ供給が行われているために、正のレイノルズ応力が支配的である。さらに、第１次合体が起こる際のレイノ

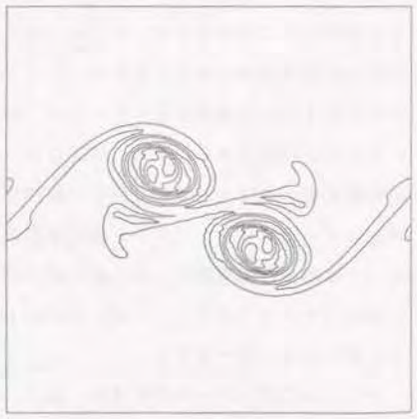
(a) t = 24



(b) t = 40

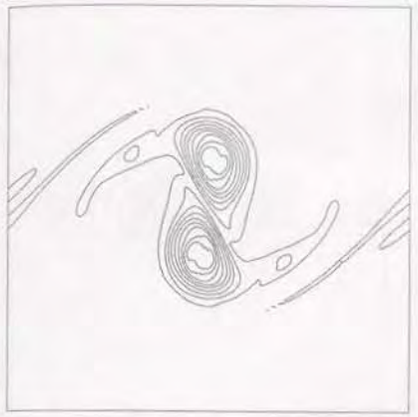


(c) t = 96



(d) t = 120

図４・３３　渦度の時間推移（ 4-Eddy , Re=200 , 129×129 , その１ ）



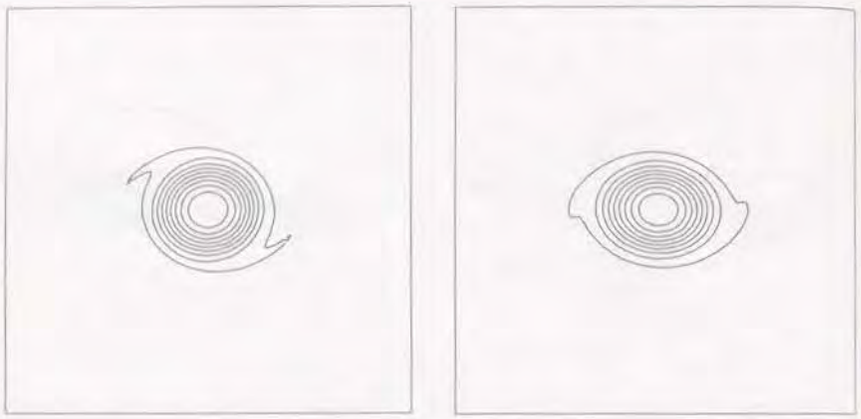
(e) t = 144

(f) t = 176

(g) t = 200

(h) t = 264

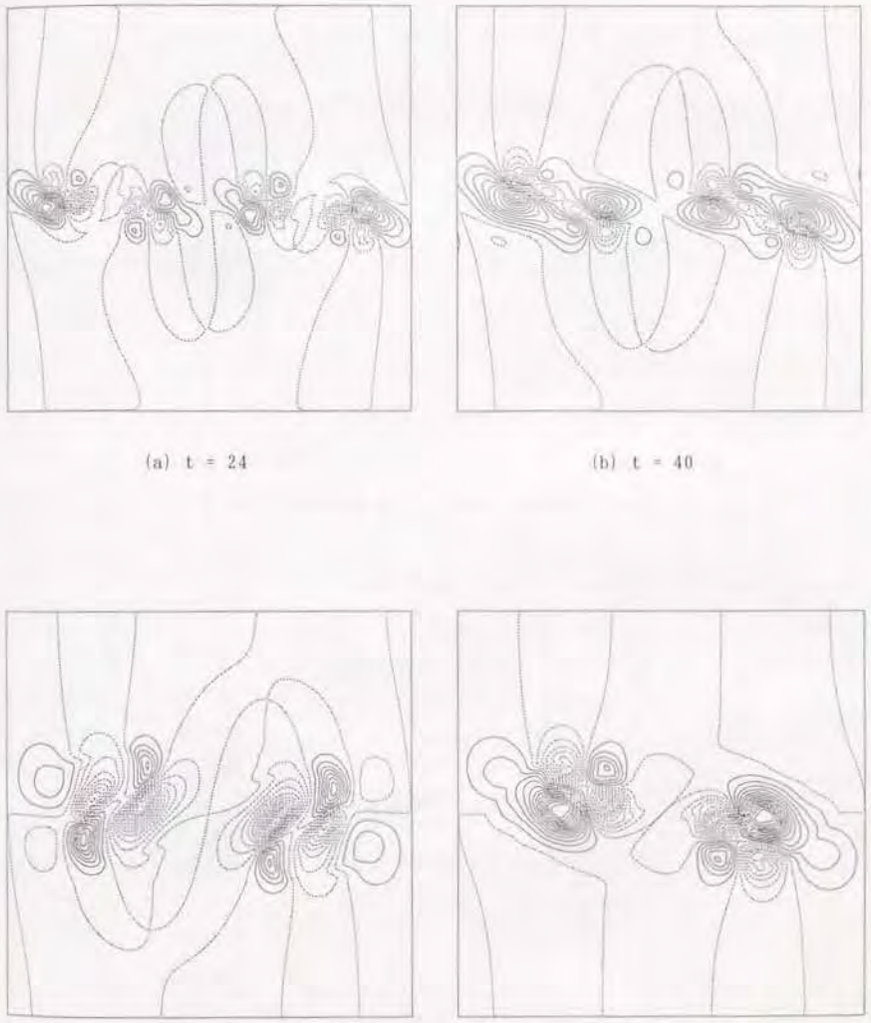
図４・３３　渦度の時間推移（ 4-Eddy , Re=200 , 129×129 , その２ ）



(i) t = 472　　(j) t = 576

図４・３３　渦度の時間推移（ 4-Eddy ， Re=200 ， 129×129 ， その３ ）

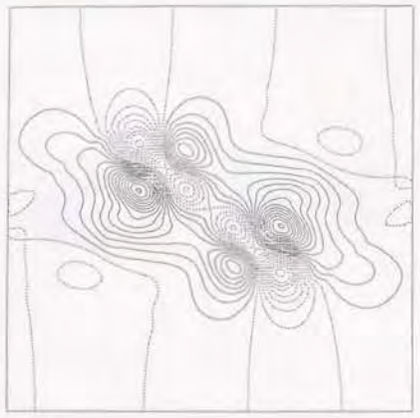
ルズ応力は、負の分布が正の分布に挟まれている形をしており、２個の渦が合体する際に見られた分布と非常に似通っている。そして、一種のエネルギ平衡状態（ｔ＝５６）を経た後、攪乱流から平均流へエネルギ供給が行われる（ｔ＝６４）。しかしながら、再び平均流から攪乱流へのエネルギ供給が行われ（ｔ＝９６）、その結果、時刻ｔ＝１２０において第２次合体が起こる。その際のレイノルズ応力分布もまた、正負が交互に現れる第１次合体と同様の分布を呈している。従って、この様なレイノルズ応力分布は合体現象を特徴付けるものであると考えられる。その後、次第に負のレイノルズ応力（攪乱流から平均流へのエネルギ供給）が増加し、一時的なエネルギ平衡状態が現れ（ｔ＝１４４）、その分布は正負がほぼバランスした様な形となっていることが認められる。攪乱流から平均流へのエネルギ供給はその後も続き、負の分布が支配的となり、時刻ｔ＝１６８で負の極大値を取る。この時刻以降、逆に、正のレイノルズ応力が増加し、ｔ＝２００で正の極大値を取る。この第２次合体以降の攪乱エネルギは、時刻ｔ＝２１６において再び、一時的な平衡状態を経た後、ついにはほぼ完全にエネルギがバランスした形で減衰して行くことが確認される（ｔ＝５７６）。



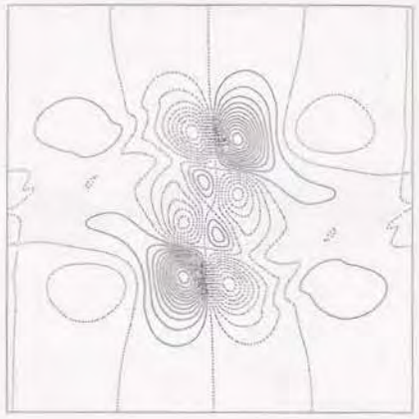
(a) t = 24　　(b) t = 40

(c) t = 64　　(d) t = 96

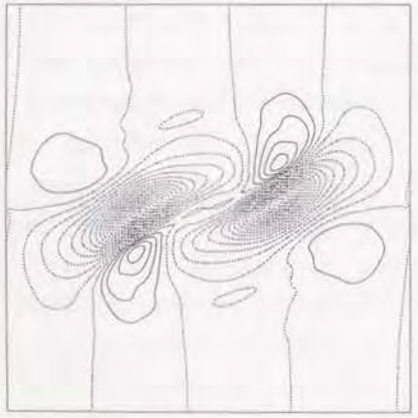
図４・３４　レイノルズ応力の時間推移（ 4-Eddy ， Re=200 ， 129×129 ， その１ ）



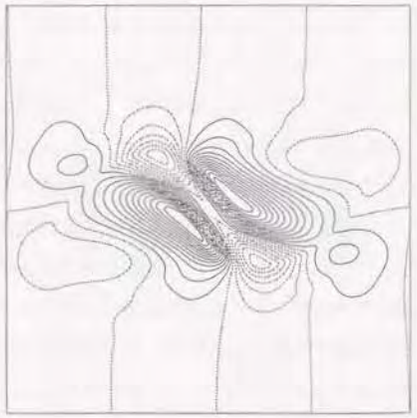
(e) t = 120



(f) t = 144

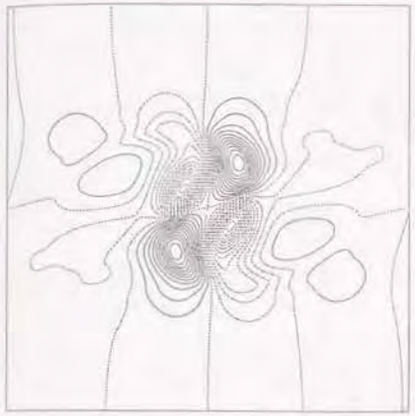


(g) t = 168

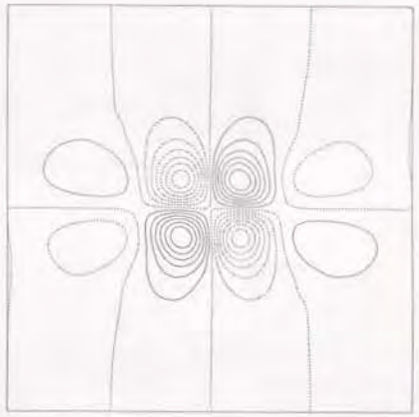


(h) t = 200

図４・３４　レイノルズ応力の時間推移（ 4-Eddy ， Re=200 ， 129×129 ， その２ ）



(i) t = 216



(j) t = 576

図４・３４　レイノルズ応力の時間推移（ 4-Eddy ， Re=200 ， 129×129 ， その３ ）

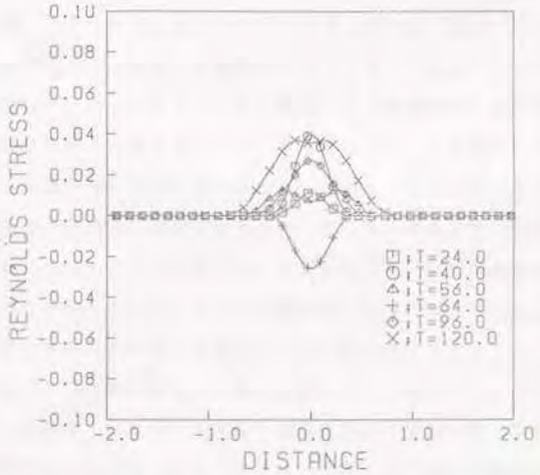


図４・３５　ｘ方向平均レイノルズ応力の時間推移（その１）

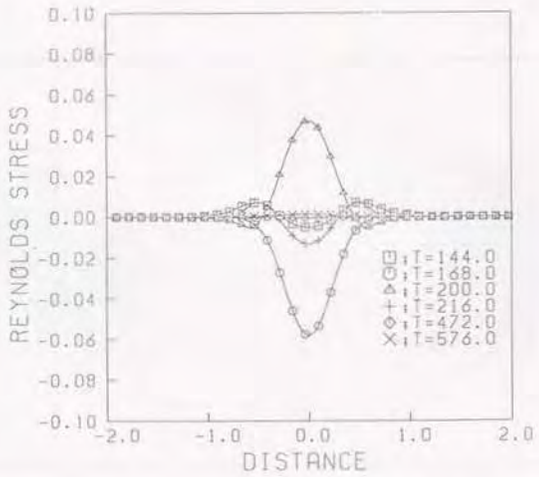


図４・３５　ｘ方向平均レイノルズ応力の時間推移（その２）

図４・３６、３７に渦層厚さδ、及び、平均変動運動エネルギの時間推移を各々示す。渦層厚さ、平均変動運動エネルギ（ｘ方向成分を除いて）共に、３つの明らかなピークが存在する。最初のピークは第一次合体に関するものであり（ｔ＝５６）、第２のピークは第二次合体に関するものである（ｔ＝１５２；渦層厚さ、ｔ＝１４４；平均変動運動エネルギ）。これらは流れ場の時間推移からも確認できる。もう１つのピークは第二次合体以降の時刻ｔ＝２０８（渦層厚さ）、ｔ＝２１８（平均変動運動エネルギ）に現れている。これは、一時的なエネルギバランスが成立している時刻（平均変動運動エネルギのピーク時刻と一致する）以降、攪乱流から平均流へのエネルギ供給が増加し、その結果、対向流方向に渦が引き伸ばされる。従って、渦層厚さ、変動運動エネルギ共に、減少する。そして逆に、時刻ｔ＝１８０において再び一時的なエネルギバランスが達成される。その後、平均流から攪乱流へのエネルギ供給が増加し、この変動エネルギの増加は境界に向かって伸びる渦先端の成長に充当されると考えられる。成長した渦先端の髭状部分は新たなブレイド構造を形成するが、遂には粘性拡散の影響で消失する。また、渦層厚さの成長率は２個の渦のケースとほぼ同一の成長率（約０．０６５）を示していることが確認できる。

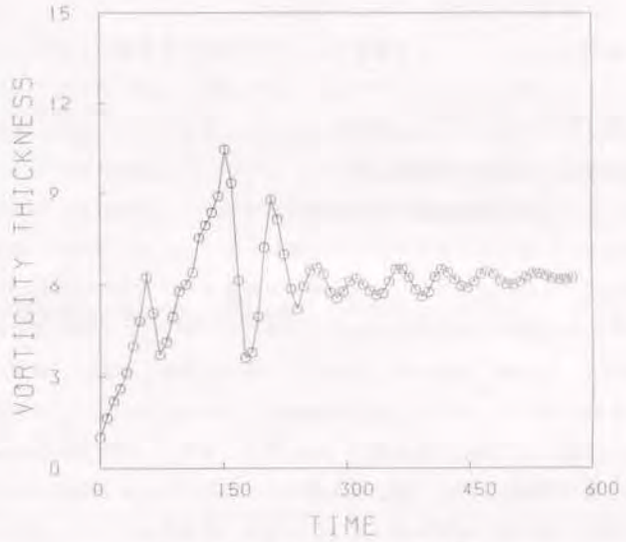


図４・３６　渦層厚さの時間推移

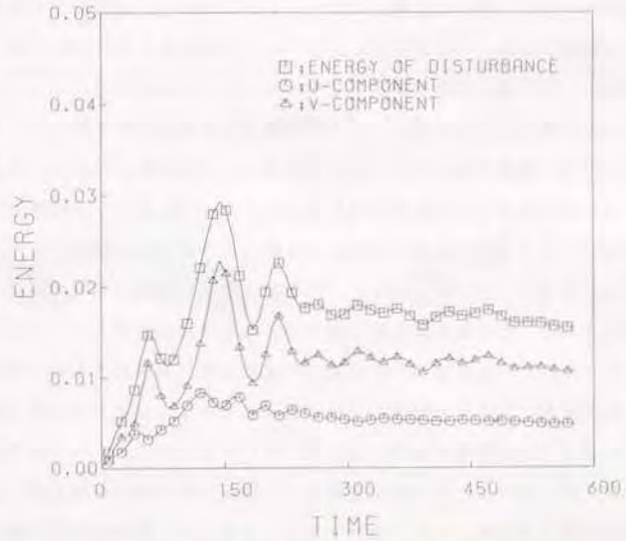


図４・３７　平均変動運動エネルギの時間推移

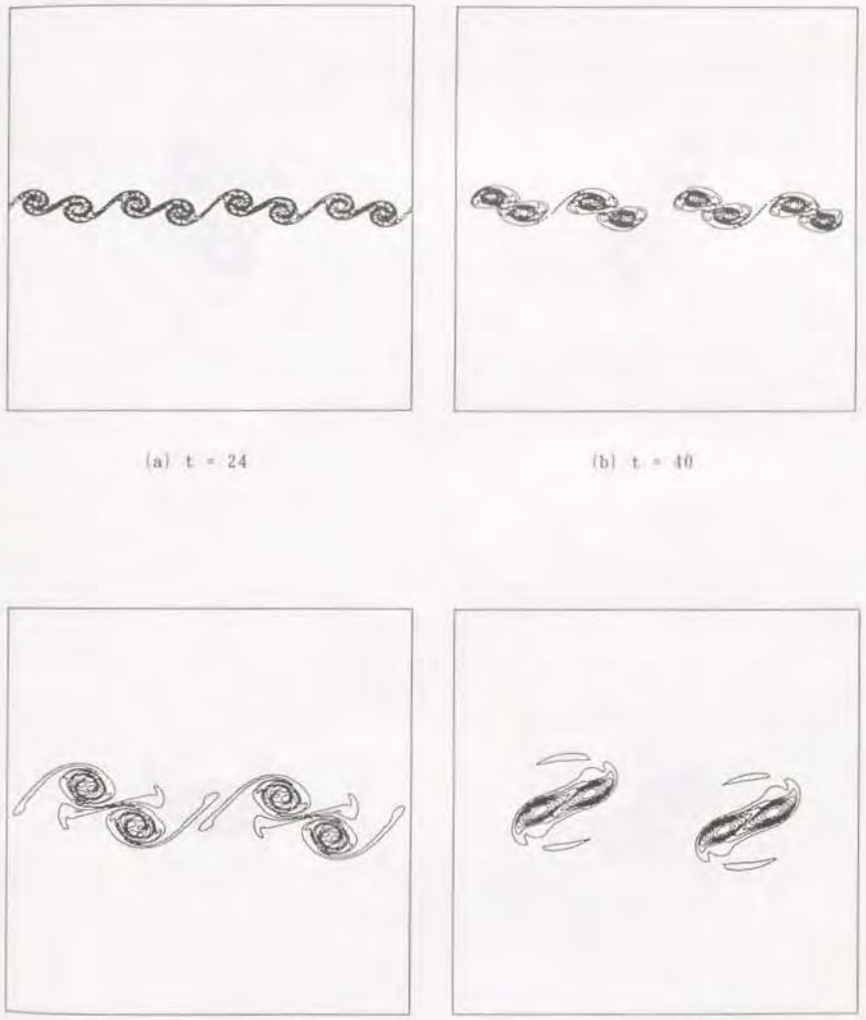
２．２．３．　８個の渦の合体のシミュレーション

渦の合体の数値シミュレーションの最後に，８個の渦が計算領域内に存在する場合を取り上げる。レイノルズ数はＲｅ＝２００であり，格子点数は１個の渦に対する分解能を同一にするために２５７×２５７として数値計算を行っている。また，初期の流れ場は４個の渦の初期流れ場に 1/8低調波の攪乱（強さC_4＝０．１）を重ね合わせて与えている。

まず，図４・３８に渦度場の時間推移を等高線図で示す。初期流れ場に存在する８個の渦は，各々巻き上がりを起こし（ｔ＝２４），時刻ｔ＝４０において４対の渦は第一次合体を行う。続いて，回転運動を行いつつ，対向流の影響でその方向に引き伸ばされ，渦の先端が成長すると共に徐々に２対の渦が接近し，時刻ｔ＝１２０において渦の髭状部分で第二次合体を行う。その後，４個の渦はあたかも２個の渦の如く回転し，再び，対向流により引き伸ばされる（ｔ＝１６８）。以上の履歴は，４個の渦のシミュレーションとほとんど大差がなく，従って，攪乱の基本波，1/2低調波，及び，1/4低調波成分は各々，渦の巻き上がり，第一次合体，及び，第二次合体のみに関与することが判明する。

４個の渦の場合，その後，楕円形渦に近づいて行き，定在する。しかしながら，８個の場合には，回転運動を行いながら，渦の先端がその渦を取り巻く様に伸び，新たなブレイド構造を形成するものと考えられる。時刻ｔ＝２８０では４個の渦の場合と同様に，各々の渦の内部構造も完全に１個の渦の構造となり，計算領域の中心を軸として大きな回転運動を行う様子が観察される（ｔ＝２９６）。さらに，渦形状も次第に円形に近いものとなり（ｔ＝３２８），その後，卵形に変形しながら２つの渦は接近を始める。そして，時刻ｔ＝４０８において第三次合体を起こし，１個の渦として回転運動を行うが，次第に対向流の影響によって引き伸ばされて行く（ｔ＝４６４）。この引き伸ばされた渦は，時間の経過と共に，渦先端が渦を包み込む様に成長する様子（ｔ＝５６０）が観察される。この成長した髭状渦は，やがて渦本体から分離し，本体を包み込む様な構造を呈する様子が観察される（ｔ＝６８０）。この頃になると，渦本体の構造は完全に１つの渦構造となっていることが確認される。この渦本体を取り巻いている髭状渦は時刻ｔ＝７６８には渦本体に吸収され，ｔ＝８００にはほぼ楕円形に近い形状となり，定在するものと思われる。

次に，流れ場の変遷とエネルギ授受の関係を調べるために，レイノルズ応力分布，ｘ方向平均レイノルズ応力の時間推移を図４・３９，４０に各々示す。レイノルズ応力は，巻き上がり，及び，第一次合体と流れ場が変遷するに従って平均流から攪乱流へのエネルギ供給を表す正の分布が支配的となり，時刻ｔ＝５６において一時的な平衡状態に至る。この後，攪乱流から平均流へのエネルギ供給（負のレイノルズ応力）が増加し，合体した渦



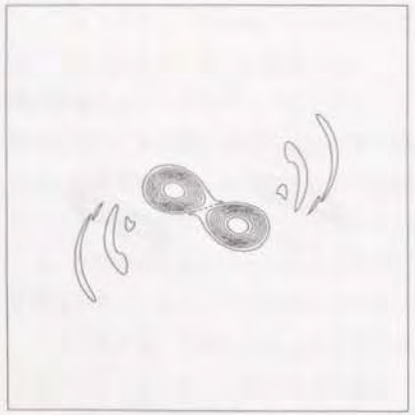
(a) t = 24　　(b) t = 40

(c) t = 120　　(d) t = 168

図４・３８　渦度の時間推移（ 8-Eddy ， Re=200 ， 257×257 ，その１ ）

(e) t = 296

(f) t = 328



(g) t = 408

(h) t = 464

図４・３８　渦度の時間推移（ 8-Eddy ， Re=200 ， 257×257 ， その２ ）

(i) t = 560

(j) t = 680

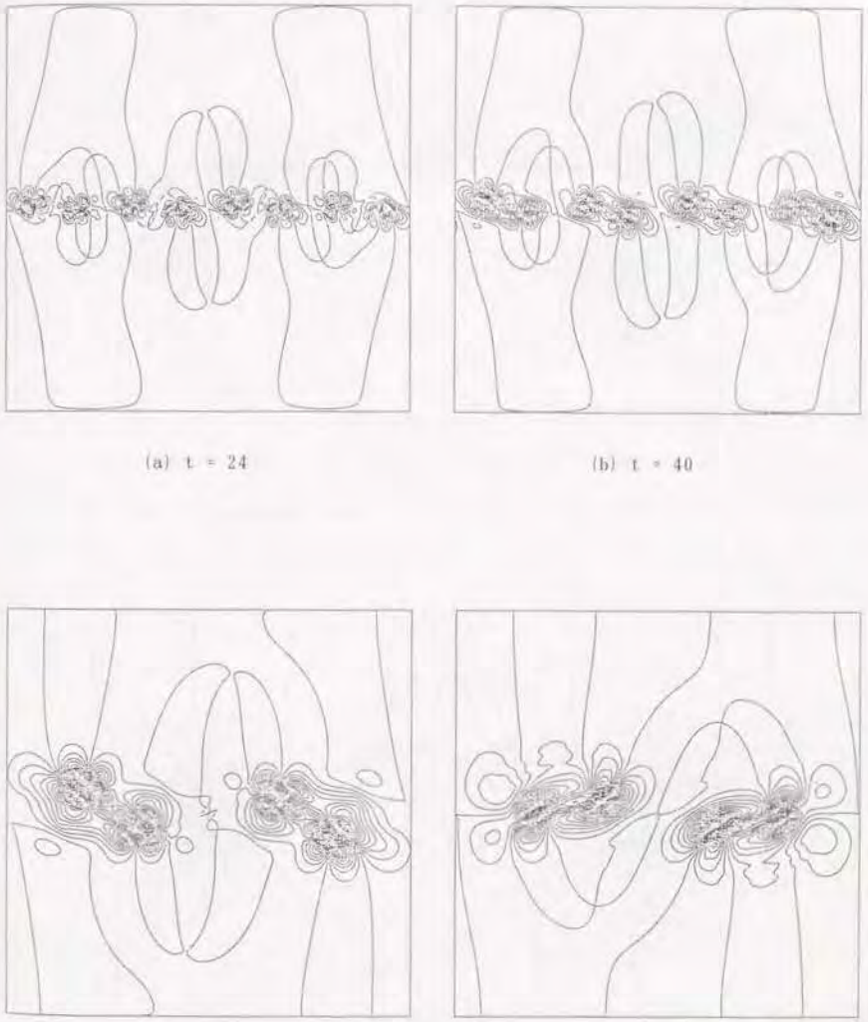
(k) t = 768

(l) t = 800

図４・３８　渦度の時間推移（ 8-Eddy ， Re=200 ， 257×257 ， その３ ）

は対向流の方向に引き伸ばされる。従って、一時的なエネルギ平衡が成立する時点で渦の合体は完了しているものと考えられる。そして、時刻ｔ＝８０においてほぼ正負のレイノルズ応力が釣り合った状態となり、これより正のレイノルズ応力が増加に転じる。この平均流から攪乱流へのエネルギ供給は、渦先端の成長に充当されると考えられ、その結果、時刻ｔ＝１２０において渦の髭状部分で第二次合体が起こる。この第二次合体は３番目のエネルギ平衡状態（ｔ＝１４４）において完了するものと考えられる。さらに、エネルギ平衡状態が次に現れる時刻ｔ＝１８０までの間は、負のレイノルズ応力の影響が大きいために、渦は対向流の方向に引き伸ばされる。以上の経過は、渦度場と同様に４個の渦の場合とほぼ同一である。

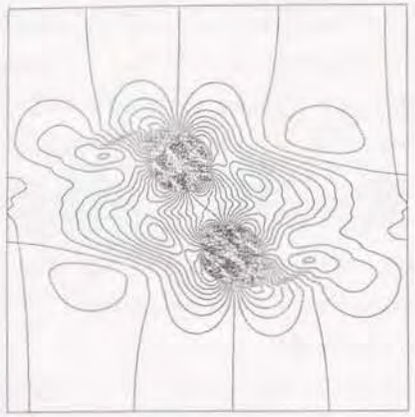
４個の渦の場合には、それ以降、新たなブレイド構造を形成する渦先端の成長を助長する様に平均流から攪乱流へのエネルギ供給が為され、その後、エネルギが平衡した形で減衰して行く。しかしながら、８個の渦の場合は、渦先端の成長のために攪乱流にエネルギが供給され続け、時刻ｔ＝３２８に達成される次のエネルギ平衡状態に至っても第三次合体は起こらず、続いて起こる渦本体の引き伸ばし、及び、渦本体先端の成長の過程を経た後にｔ＝４０８で第三次合体を起こすことが確認できる。これは、４個の渦の場合の様に渦本体から伸びる髭状部分で合体を起こすには渦間距離が長過ぎるために、その発達途中で髭状部分が渦本体から切り離される。その結果、合体は渦本体同士で為されなければならないことになり、渦本体の引き伸ばし、本体先端の成長の後に、第三次合体が起こるものと考えられる。従って、髭状部分が渦本体から離脱する時刻ｔ＝３２８に、一時的なエネルギ平衡状態が現れている。第三次合体は次のエネルギ平衡状態（ｔ＝４３２）において完了する。なお、合体の際のレイノルズ応力分布は、第一次～第三次を通じて、正の分布の間に負の分布が挟まれるサンドイッチ構造となっており、この分布が合体の際の特徴であることが確認される。第三次合体以降は、再び攪乱流から平均流へのエネルギ供給が為されるために、渦は対向流方向に引き伸ばされ、時刻ｔ＝４７２（エネルギ平衡が達成されている）を境にして、逆に、攪乱流へのエネルギ供給が為され、渦先端が成長を開始する。この渦先端の成長により新たなブレイド構造を形成するはずであるが、境界までの距離が長いために、境界まで到達せず、渦本体を巻き込む様に発達し、やがて渦本体から離脱する。しかし、その後も攪乱流へのエネルギ供給は為され続け、本体から離脱した髭状渦は渦本体を包み込む様に発達し、次に出現するエネルギ平衡状態（ｔ＝６７６）以降平均流へのエネルギ供給が増加するために、この髭状渦のエネルギが失われ、分離する。



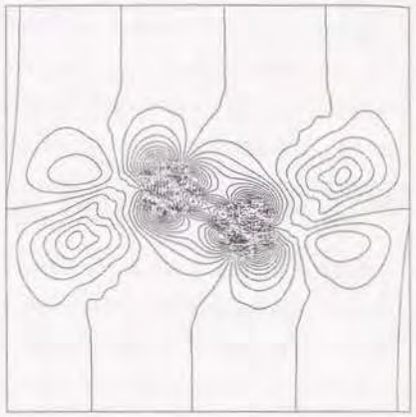
(a) t = 24　(b) t = 40

(c) t = 120　(d) t = 168

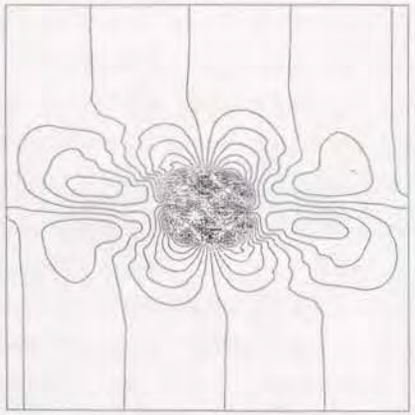
図４・３９　レイノルズ応力の時間推移（ 8-Eddy , Re=200 , 257×257 , その１ ）



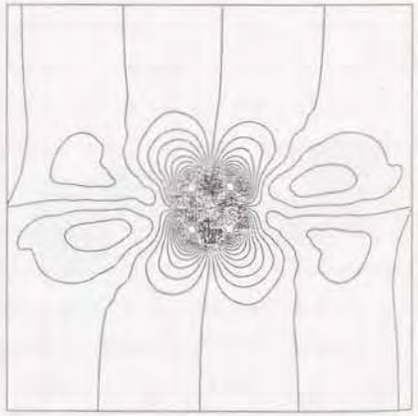
(e) t = 296



(f) t = 408

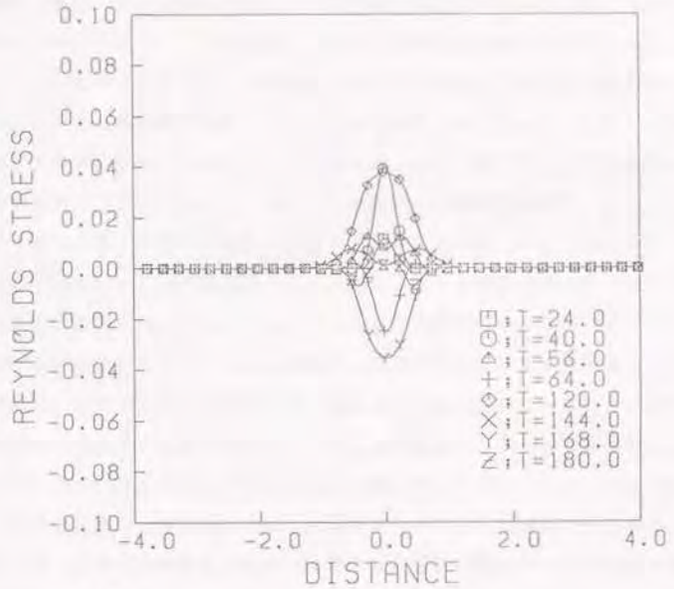


(g) t = 592



(h) t = 800

図４・３９　レイノルズ応力の時間推移（ 8-Eddy ， Re=200 ， 257×257 ， その２ ）



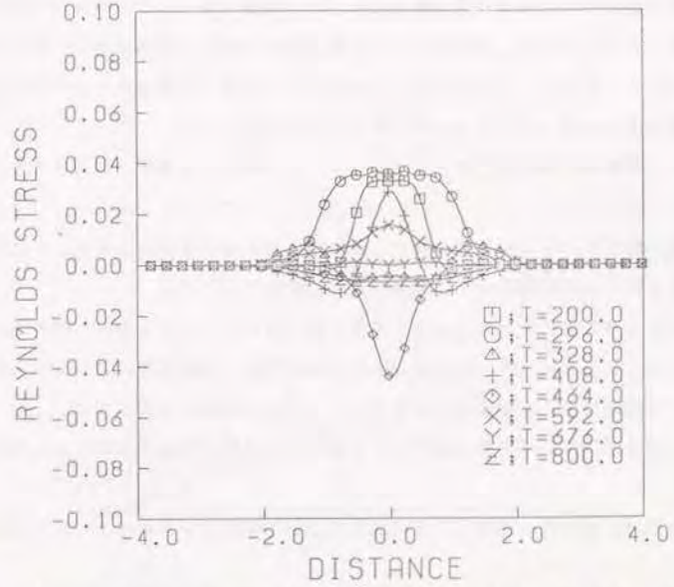


図４・４０　ｘ方向平均レイノルズ応力の時間推移（ 8-Eddy ， Re=200 ， 257×257 ）

一方、渦本体は平均流へのエネルギ供給が為されているにもかかわらず、分離した髭状渦を吸収することにより新たな渦先端を形成しながら、正負のレイノルズ応力が釣り合う様な形、即ち、楕円形に近い形へと変形して行き、定在するものと考えられる。

さらに、図４・４１、及び、４２に渦層厚さδ、及び、平均変動運動エネルギの時間推移を示す。変動運動エネルギに関しては、前述のシミュレーション結果と同様に、平均全変動運動エネルギとｙ方向成分の挙動はほぼ相似形となっている。さらに、平均全変動運動エネルギの時間推移は上述の平均流と攪乱流のエネルギ授受の関係、即ち、エネルギ増加は平均流から攪乱流への、エネルギ減少は攪乱流から平均流への各々エネルギ供給を表している、と一致していることが確認される。また、主に対向流方向への運動を司どるｘ方向成分と主に回転運動を司どるｙ方向成分との関係においては、ほぼ逆の関係が成立していることが認められる。このことは、回転運動によって渦が成長する際には並進運動による引き伸ばしは抑制され、逆に、並進運動によって渦が引き伸ばされる際には回転運動が抑制されていることを示しており、流れ場の変遷と対応付けることができる。一方、渦層厚さに関しては、その挙動はほぼ平均全変動運動エネルギの挙動と似通っており、エネルギ平衡状態が達成されている時刻にピークを有していることが確認できる。さらに、最終的な渦の合体が完了した時点で最大値を取ることも確認できる。この場合の渦層厚さの成長率は約０．０６５であり、渦層厚さの成長率は巻き上がり、合体を通じて変化しないことが確認される。これは、Lesieur等[44]が述べている様に渦層厚さはほぼ線形的に増加し、その成長率はほぼ一定になるという報告と一致する。

以上の様に、剪断層の高次精度数値シミュレーションを行った結果、以下のことが判明する。

① 攪乱の基本波のみを与えれば渦の巻き上がりが、低調波を重ね合わせることにより渦の合体が起こり、各々の現象はその攪乱の波長に対応している。

② 流れ場は平均流と攪乱流とのエネルギ授受の繰り返しによって変遷し、最終的にエネルギがバランスした形状（楕円形に近い形状）で定在し、粘性散逸によってエネルギを失う。各々の現象はエネルギ授受が一時的にバランスした時点で完了する。

③ 渦の合体現象は、ブレイド構造を形成する渦本体から伸びた髭状部分で基本的には為される。

④ 渦層厚さはほぼ線形的に増加し、その成長率は渦の個数にかかわらず一定となる。

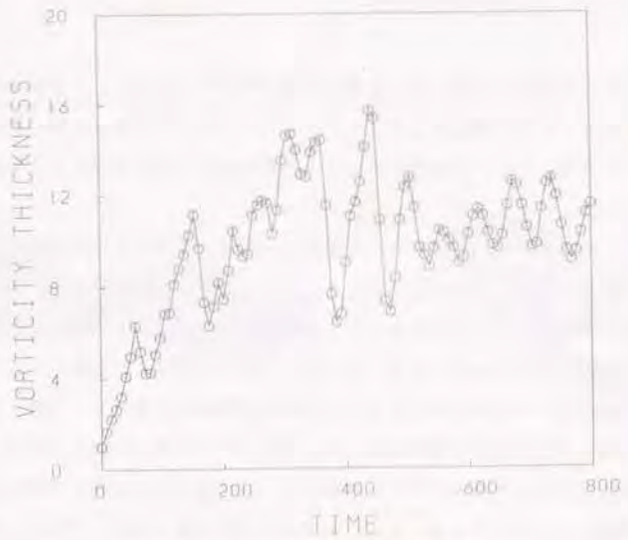


図４・４１　渦層厚さの時間推移

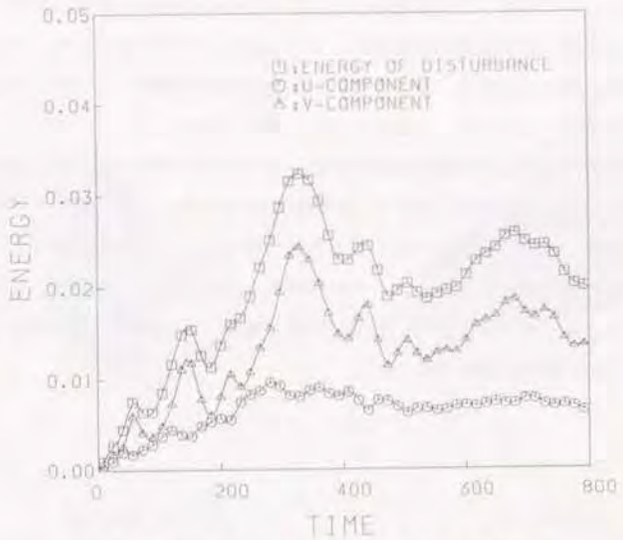


図４・４２　平均変動運動エネルギの時間推移

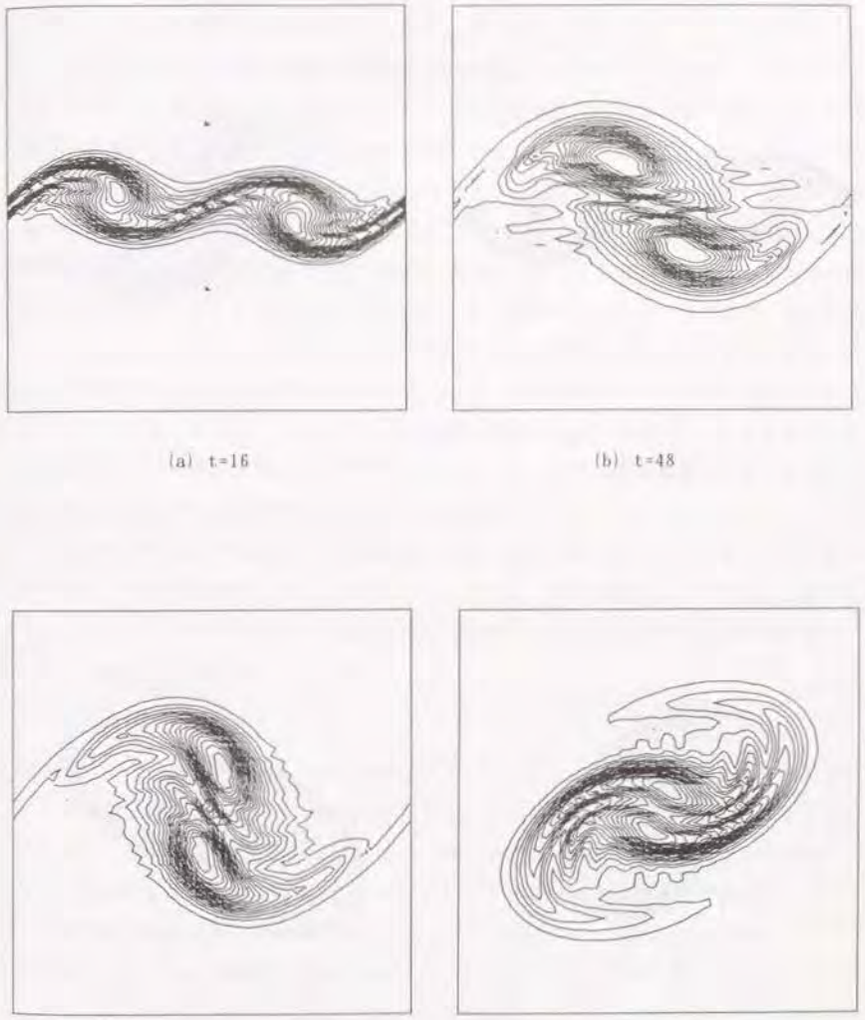
２．３．　空間精度の流れ場に及ぼす影響

本節においては、空間精度が流れ場に及ぼす影響を検討するために、２個の渦の合体現象を取り上げ、異なった空間精度によるシミュレーションを行った結果について述べる。格子点数は６５×６５、レイノルズ数はＲｅ＝１６６であり、空間精度は２次精度及び８次精度としている。

図４・４３に２次精度解法により得られた渦度場を図４・４４には８次精度解法により得られた渦度場を各々示す。採用した時刻はｔ＝１６、４８、５６、及び８０の４通りである。２次精度解は時刻ｔ＝１６の巻き上がり過程においても既に８次精度解と比較して時間遅れが生じていることが確認される。渦の合体過程（ｔ＝４８）においては、２次精度解には時間遅れの他に８次精度解には見られない解の振動が発生している様子が認められる。また、時刻ｔ＝５６では８次精度解にはもはやブレイド構造は認められないのに対し、２次精度解にはブレイド構造の存在が確認され、渦の構造自体に相違が認められる。さらに時間が経過したｔ＝８０においては、両者の渦の内部構造の違いが顕著に現れている。全体的には、２次精度解は渦境界を鋭く捕らえていないことが認められる。

２次精度解における時間遅れは空間微分項を離散化する際に生じる打切り誤差が数値分散として作用し、その結果、位相誤差が生じたことに因ると考えられる。また、渦境界の拡散傾向は、上述の打切り誤差が数値粘性として作用したためであると考えられる。さらに、２次精度解に現れる振動は、渦の合体という複雑な物理現象をこの格子点数で分解するには分解能が不足していることに因っていると考えられる。

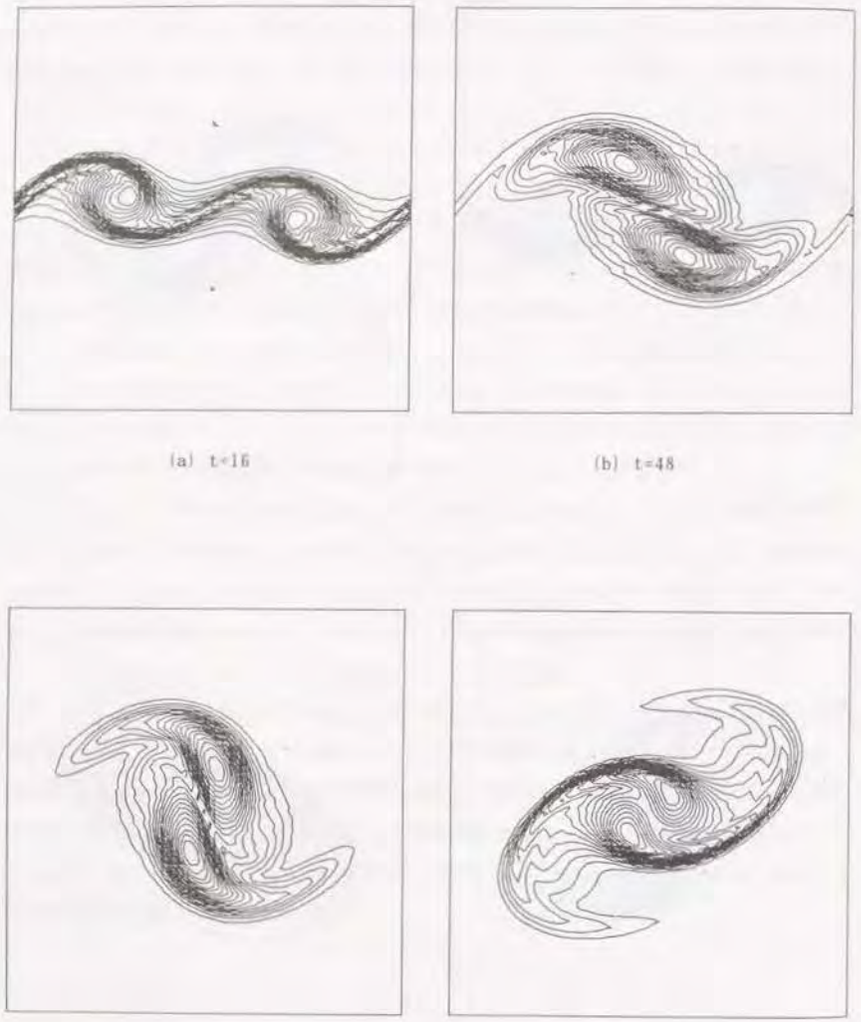
従って、渦の合体現象の様な複雑な物理現象を低次の空間精度で行うと、空間微分項の離散化過程で生じる打切り誤差が原因となる過度の数値分散・数値粘性による時間遅れや渦境界の拡散傾向、及び、分解能不足による解の振動が生じ、高次精度解とは異なった結果が得られることが確認され、このような物理現象の数値シミュレーションを実用的な格子点数で行うためには高次精度数値計算法が必要であることが判明し、本研究で提案した高次精度線の方法の有効性が確認される。



(a) t=16　　(b) t=48

(c) t=56　　(d) t=80

図４・４３　２次精度解の時間推移（ 2-Eddy, Re = 166 , 65×65 ）



(a) t=16　　(b) t=48

(c) t=56　　(d) t=80

図4・44　8次精度解の時間推移（ 2-Eddy, Re = 166 , 65×65 ）

3.　2次元一様等方性乱流の高次精度数値シミュレーション[48]

本節では、乱流の高次精度数値シミュレーションの例として、2次元一様等方性乱流のシミュレーションを行った結果について述べる。

一様等方性乱流は、流れの統計的特性が場所によって変化せず（一様性）、特別な方向性も持たない（等方性）様な理想化された乱流であるといえる。この様な単純な流れが実験的・理論的に研究されている理由は、①その単純性のために理論的な取扱いが最も容易であること、②この種の乱流が実験において風洞中に格子を設置することにより比較的簡単に実現されること、の2点である。さらに、空間的に一様的・等方的でない様な現実の乱流においても、異なった波長を持つ無数の波が合成されたものと考えることができ、乱れの空間変化のスケールの逆数よりも充分に大きい波数成分のみに着目すると、統計的に一様かつ等方的であると見なせるために、局所等方性を仮定することができる。また、エネルギ伝達に関しても、低波数から高波数へエネルギが伝達され、最も高い波数において消失する、所謂、エネルギ・カスケードは現実の乱流においても起こっていると考えられる。従って、一様等方性乱流を解析することによって、実際の乱流運動の性質を解明する際においても重要な情報を与えることが期待される。

上述の局所等方性が仮定できる様な高波数領域においては、慣性力と粘性力とは平衡状態にあり、一種の相似性が成立していると考えられる（局所相似性）。この様な仮定の下では、レイノルズ数が非常に高い場合、粘性の影響を受けない波数領域（慣性小領域）が存在し、慣性小領域においては

$$E(k) = C_0 \varepsilon^{2/3} k^{-5/3} , \qquad (4・17)$$

なるエネルギ・スペクトルE（k）が導かれる[48]。ここで、C_0は普遍的な無次元定数であり、kは波数、εはエネルギ散逸率である。このエネルギ・スペクトルはコルモゴロフの慣性小領域スペクトルと呼ばれており、局所等方性と局所相似性が満足される限りにおいて全ての乱流に対して適用することができるために普遍平衡理論と呼ばれている。

普遍平衡理論は全エネルギが保存される3次元乱流について導かれたものであるが、2次元乱流の場合は、非粘性の極限において全エネルギと共に渦度の2乗平均であるエンストロフィが保存される。その結果、非粘性の極限においてエネルギ散逸率εは0に漸近するために、コルモゴロフの理論は成立しない。しかしながら、エネルギ散逸率εの代わりにエンストロフィ散逸率ηを考えることにより、

$$E(k) = C_0 \eta^{2/3} k^{-3} \quad , \qquad (4 \cdot 18)$$

なる２次元の慣性小領域スペクトルが導かれる[50, 51, 52]。また、２次元慣性小領域スペクトルは波数ｋの－４乗に比例するという説も存在する[53]。数値シミュレーションによる報告においても、２次元慣性小領域スペクトルの冪乗則に関しては、k^{-3}に比例するとする結果[54, 55, 56]、k^{-4}に比例するとする結果[13, 57]と様々である。さらに、低レイノルズ数流れにおいてはk^{-4}に比例し、高レイノルズ数流れにおいてはk^{-3}に比例するとする結果[31]、時間の経過と共にk^{-3}からk^{-4}に変化するとする結果[58]、及び、逆に時間の経過と共にk^{-4}からk^{-3}に変化するとする結果[59, 60]等の報告が為されており、未だに数値シミュレーションにおける定説が存在しない状況である。一方、２次元乱流においては、非粘性の極限で全エネルギとエンストロフィが保存される結果、エンストロフィが３次元乱流における全エネルギと同様に低波数領域から高波数領域へのカスケードを起こす（エンストロフィ・カスケード）。それと共に、全エネルギは逆に、高波数領域から低波数領域に流れる，所謂、逆カスケードが発生する。この様な２次元乱流の性質は、数値シミュレーションによっても報告されている[13, 58, 61]。

本研究においては、計算領域を$(0, 0) \leq (x, y) \leq (2\pi, 2\pi)$の正方形領域とし、一様等方性を仮定するためにｘ、ｙ方向共に周期境界条件を課する。また、初期条件は Fornberg[62] に従い、波数空間における渦度$\tilde{\omega}(k_1, k_2)$を

$$\omega(x, y) = \sum_{k_1} \sum_{k_2} \tilde{\omega}(k_1, k_2) \exp[2\pi i (k_1 x + k_2 y)], \qquad (4 \cdot 19)$$

と定義し、波数空間における渦度$\tilde{\omega}$が以下の関係を満足する様に、擬似乱数を用いて与えられる。

$$E(k) = \frac{1}{2} \sum_{|k'-k| \leq 1/2} \frac{|\tilde{\omega}(k_1, k_2)|^2}{k'^2} \quad . \qquad (4 \cdot 20)$$

ただし、$k'^2 = k_1^2 + k_2^2$で与えられる。また、Ｅ（ｋ）は初期のエネルギ・スペクトルであり、

$$E(k) = \tfrac{2}{3} k \cdot \exp(-\tfrac{2}{3} k) \quad , \qquad (4 \cdot 21)$$

と定義される。さらに、（４・２０）式で定義されるエネルギ・スペクトルＥ（ｋ）を用いることにより、全エネルギΣ（ｔ）、エンストロフィΩ（ｔ）、及び、エンストロフィ散逸率η（ｔ）は各々

$$\Sigma(t) = \int_0^\infty E(k)\, dk \quad , \qquad (4 \cdot 22)$$

$$\Omega(t) = \int_0^\infty k^2 E(k)\, dk \quad , \qquad (4 \cdot 23)$$

$$\eta(t) = 2\nu \int_0^\infty k^4 E(k)\, dk \quad , \qquad (4 \cdot 24)$$

により定義される。ここで，νは動粘性係数である。

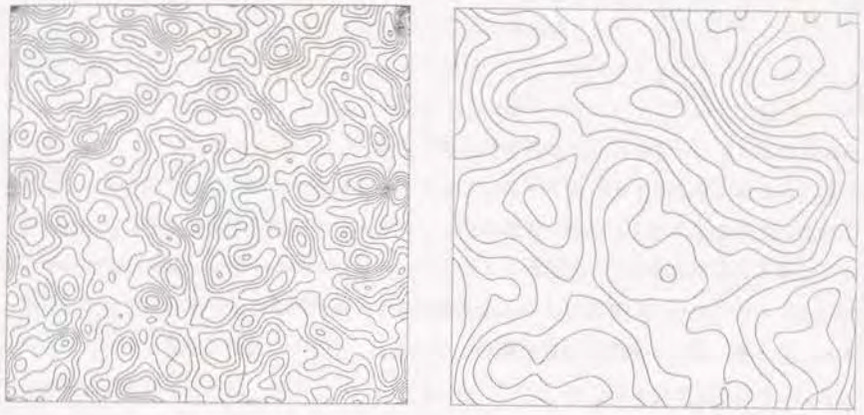
粘性の影響を表すパラメータであるレイノルズ数を定義する際には、代表長さL_0と代表速度U_0が必要となり、通常、２種類のレイノルズ数が定義される。最初は、Lilly によって導入された積分スケールに対応するレイノルズ数 (Large-Scale Reynolds Number) R_Lで、エンストロフィに寄与する渦の積分スケールを代表長さ$L_0 (= \Sigma^{1/2} / \eta^{1/3})$とし、全エネルギの平方根を代表速度$U_0$（$= \Sigma^{1/2}$）としたものであり、

$$R_L = \Sigma / (\eta^{1/3} \nu) \quad , \qquad (4 \cdot 25)$$

で与えられる[55]。他方は、Herring 等によって導入されたマイクロスケールに対応するレイノルズ数(Microscale Reynolds Number) R_lである[31]。R_lは、マイクロスケールℓ（$= (\nu\Omega/\eta)^{1/2}$）を代表長さとし、マイクロスケールとエンストロフィの平方根との積を代表速度U_0（$= \ell\Omega^{1/2}$）とすることにより、以下の様に与えられる。

$$R_l = \Omega^{3/2} / \eta \quad . \qquad (4 \cdot 26)$$

初期に与えた渦度分布、及び、流れ関数分布を図４・４５に等高線図で示す。さらに、初期のエネルギ・スペクトル分布を図４・４６に示す。



(a) 等渦度線図　　(b) 流線図

図４・４５　初期流れ場

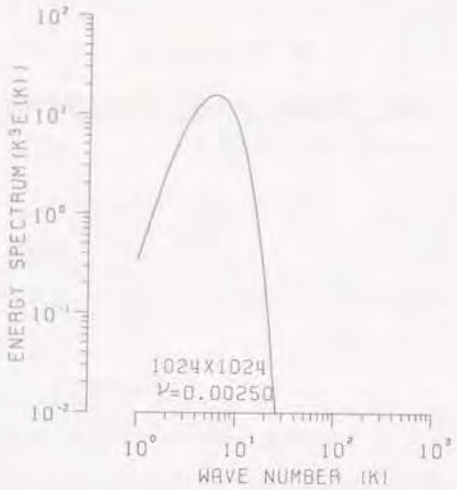


図４・４６　初期エネルギ・スペクトル分布

３．１．　低レイノルズ数シミュレーション

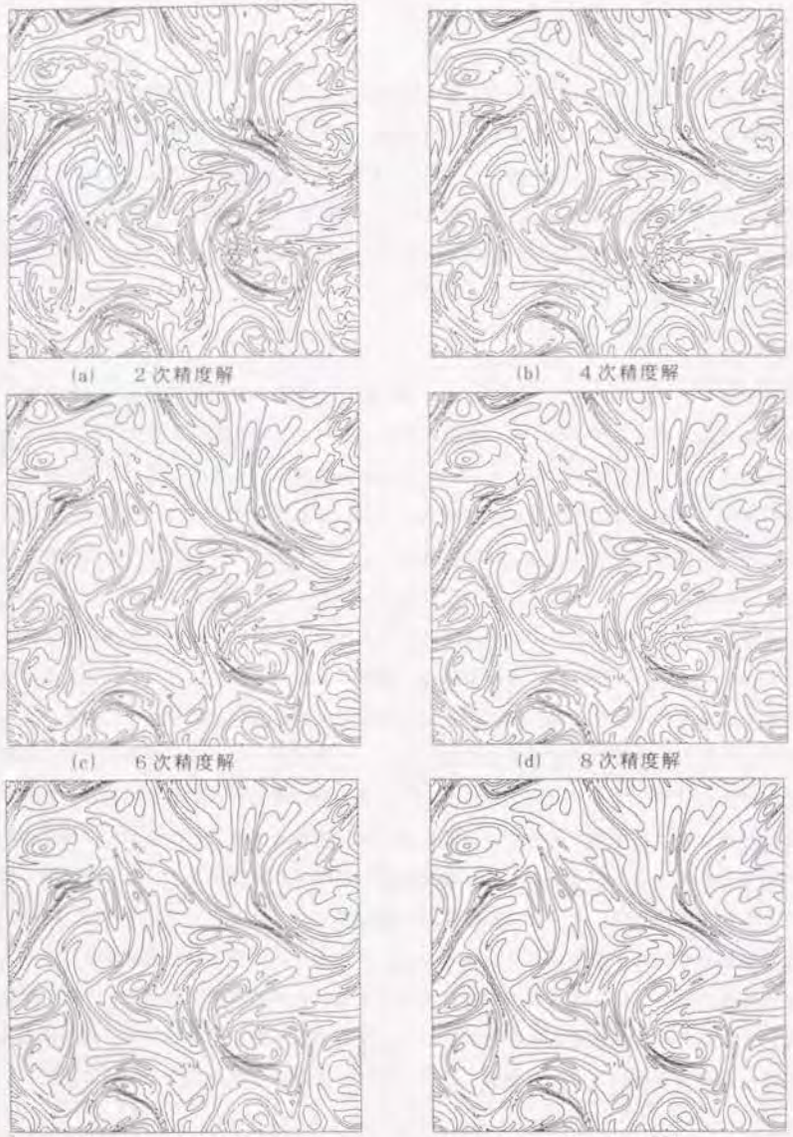
本節では、低レイノルズ数流れのシミュレーションを行い、主に空間精度が流れ場に及ぼす影響について検討する。対象とする流れは、動粘性係数が$\nu=0.0025$とした際のものであり、積分スケールレイノルズ数R_Lに換算すると初期において、$R_L=350$となる。また、格子点数は１２８×１２８とし、等間隔格子を用いて計算を行っている。さらに、可変精度多重格子法の収束判定基準は、流れ関数ΨのL_2残差Ψ_{res}を用いて

$$\Psi_{res} < 10^{-8} \quad , \qquad (4\cdot27)$$

としている。

里深等は、ナビェ・ストークス方程式（渦度輸送方程式）に空間精度を１０次精度とした高次精度線の方法を採用し、流れ関数方程式にフーリェ級数展開法を採用した高次精度数値計算法による数値解が、擬スペクトル法による数値解と一致することを既に報告している[62,63]。そこで、ここでは空間精度を２次、４次、６次、８次、及び、１０次精度とした際の流れ場の比較を行う。比較の対象としては、上述の里深等の方法を用いた。図４・４７に時刻$t=1.0$における渦度分布を、図４・４８に時刻$t=3.0$における渦度分布を各々示す。時刻$t=1.0$における流れ場は、渦層の伸張による渦の発達過程を示しており、$t=3.0$における流れ場は、動粘性係数が$\nu=0.0025$と大きいために拡散の影響を強く受け、大規模渦が支配的となる単純化過程と見なすことができる。両時刻共に、１０次精度の可変精度多重格子法による数値解とフーリェ級数展開法による数値解は完全に一致しており、可変精度多重格子法の信頼性の高さが認められる。また、空間精度の違いによる比較においては、流れ場の大規模構造に対しては全ての空間精度で一致が認められる。しかしながら、２次精度解は、両時刻共に振動が見られ、微小渦の構造が１０次精度解、及び、フーリェ級数解と大幅に異なっている。４次精度解は、両時刻共に微小渦構造に差異が認められ、時刻$t=1.0$においては流れ場に振動が生じている。６次精度解においては、流れ場の振動は認められないものの、微小渦構造に差異が認められる。ところが、空間精度を８次精度とすると数値解の振動も認められず、微小渦構造も良好な一致を示すが、１０次精度解、及び、フーリェ級数解との完全な一致には至っていない。

そこで、各々の空間精度により得られた両時刻におけるエネルギ・スペクトルを図４・４９に示す。縦軸にはエネルギ・スペクトル（$k^4E(k)$）を、横軸には波数kを両対



(a)　２次精度解　(b)　４次精度解

(c)　６次精度解　(d)　８次精度解

(e)　１０次精度解　(f)　フーリェ解法

図４・４７　渦度分布の比較（ t＝1.0,　ν＝0.0025 ）

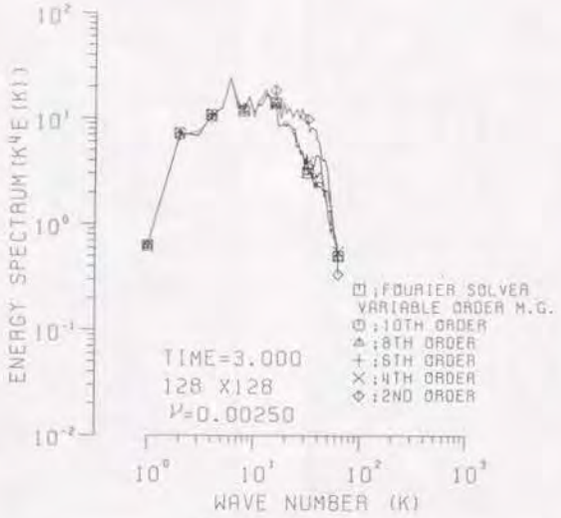
(a)　２次精度解　(b)　４次精度解

(c)　６次精度解　(d)　８次精度解

(e)　１０次精度解　(f)　フーリェ解法

図４・４８　渦度分布の比較（ t＝3.0,　ν＝0.0025 ）

(a)　t = 1.0



(b)　t = 3.0

図４・４９　空間精度によるエネルギ・スペクトルの比較（ν=0.0025）

数で描いている。記号「□」、「○」、「△」、「＋」、「×」、及び、「◇」はフーリェ級数展開法、１０次精度、８次精度、６次精度、４次精度、及び、２次精度解法による結果を各々示している。一般に、大規模渦は低い波数領域に対応するエネルギを有しており、渦の規模が小さくなるに従ってその渦が有するエネルギの最小波数が大きくなる。そのために、微小渦が有するエネルギは高波数領域により規定される。両図より、低波数領域（ｋ＜１０）においては、全ての空間精度解、及び、フーリェ級数展開法による解共にほぼ同一のエネルギ・スペクトルが得られている。しかし、高波数領域（ｋ＞１０）においては、１０次精度解とフーリェ級数展開法による解は完全に一致しているものの、８次精度以下の数値解には顕著な差異が認められる。即ち、１０次精度から低次精度になるに従って、高波数領域から低波数領域へのエネルギの逆カスケードが促進されており、この領域（ｋ≒４０）でエネルギ・スペクトルが高い値を示している。さらに、エネルギ・スペクトルが高い値を示す波数領域も低次精度になるにつれて低波数へ拡大していることが認められる。これらの結果は、低波数領域のエネルギが支配する流れ場の大規模構造は空間精度に関わらず良好に一致するが、微小構造を支配する高波数領域のエネルギは８次精度以下の空間精度では分解されず、微少渦が粘性により散逸し、そのエネルギがより規模の大きい渦に供給されていることを示していると考えられる。

また、低レイノルズ数において慣性小領域のエネルギ・スペクトルが満足すべき冪乗則を検証するために、高次精度解におけるエネルギ・スペクトルに注目すると、１０次精度解、及び、フーリェ級数展開法による解のエネルギ・スペクトルは、時刻に関わらず傾きがほぼ０であり、k^{-4}に比例していることが認められる。この結果は、Orszag[8] による低レイノルズ数においてはk^{-4}に比例するという報告と一致する。

次に、（４・２２）～（４・２４）式で定義した全エネルギΣ（ｔ）、エンストロフィΩ（ｔ）、及び、エンストロフィ散逸率η（ｔ）の空間精度による比較を図４・５０に示す。全エネルギに関しては、全ての空間精度解で良好な一致が認められるが、エンストロフィに関しては、時刻の経過と共に低次精度解の高次精度解に対する差異が認められる。さらに、エンストロフィ散逸率に関しては、その差異がより顕著に現れている。全エネルギは、大規模渦にほとんど支配されるために、流れ場の大規模構造が一致している全ての空間精度解で良好な一致が見られていると考えられる。エンストロフィは、エンストロフィ・カスケードにより、時刻の経過と共に低波数から高波数へ伝達される。そのために、時刻の経過と共に微小渦の影響を受け易くなると考えられ、微小渦の発生が顕著となる時刻ｔ＝０．２以降、高次精度解と低次精度解（２次精度）との差異が生じているものと思

われる。エンストロフィ散逸率もエンストロフィと同様に、微小渦の影響に敏感となり、時刻t＝0．2以降10次精度解、及び、フーリェ級数展開法による解とそれ以下の空間精度解との差異がより顕著に現れている。さらに、エンストロフィ散逸率は、エンストロフィ・カスケードによって高波数に伝達されたエンストロフィが粘性によって拡散する割合を示すものであり、低次精度解による結果は高次精度解の結果と比較して大きな値を与えており、その差は空間微分項を離散化する際に生じる打切り誤差が数値粘性として作用することに起因するものと考えられる。従って、空間精度を高次にするにつれて、打切り誤差が減少し、一定の散逸率に収束していることが認められる。

以上のことより、乱流の数値シミュレーションにおいては微小渦を分解することがその構造を解明するために重要となり、そのためには、数値振動を発生させない、及び、高波数のエネルギを正確に捕らえることが必要となる。数値振動は分解能の不足、及び、過度の数値分散に起因する大きな位相誤差によって発生すると考えられ、高波数のエネルギが正確に捕らえられないのは微少渦の過散逸が過度の数値粘性のために生じているためであると考えられる。従って、数値シミュレーションを行う際には、空間微分項を離散化する際に生じる打切り誤差に起因する数値分散・数値粘性を極力排除する、即ち、空間精度を高次にすることが必要となることが結論される。 Browning 等[64]は、乱流構造の解明には4次精度の差分法で十分であると報告しているが、本数値シミュレーション結果においては、4次精度では流れ場にまだ振動が生じており、過度の数値分散が導入されていることが確認される。このことより、少なくとも6次精度以上（コンピュータの桁落ち、計算効率を考慮すると10次精度程度が最適であろうと思われる）の高次精度数値計算法の必要性を示唆している。

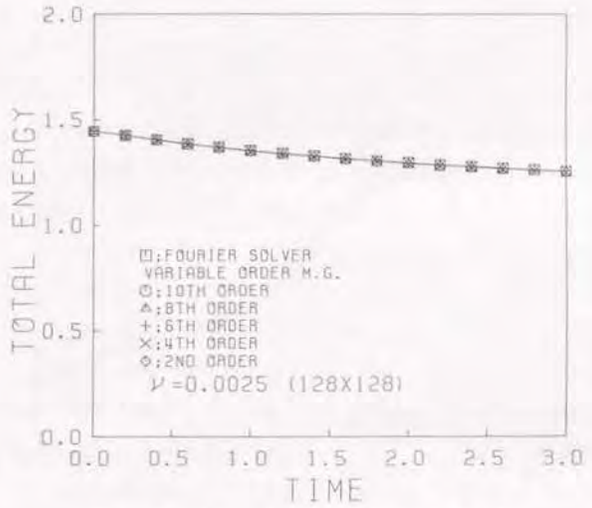


図4・50(a)　全エネルギΣ（t）の比較

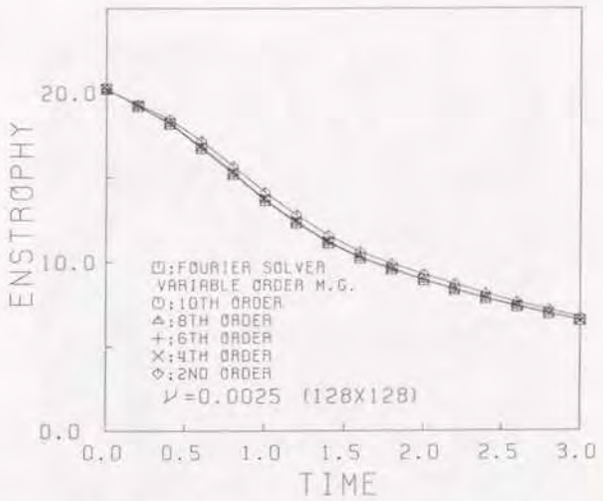


図4・50(b)　エンストロフィΩ（t）の比較

図４・５０(c)　エンストロフィ散逸率η（ｔ）の比較

３．２．　高レイノルズ数シミュレーション

本節では，高レイノルズ数流れの大規模シミュレーションを取り上げる。流れ場としては、動粘性係数をν＝０．０００１、及び、０．００００５の２ケースを考える。初期の積分スケールレイノルズ数に換算すると各々、R_L＝２５５００、及び、６４２５０に相当する。前節の結果を考慮し、数値計算は全て空間精度を１０次精度として行っている。

まず，動粘性係数ν＝０．０００１，格子点数を５１２×５１２とした際の流れ場を時刻ｔ＝１．０、２．０、及び，３．０について等渦度線図で図４・５１に示す。この数値シミュレーションにおいては、時間刻み幅をΔｔ＝１／４００として行っている。渦度分布は、低レイノルズ数の場合（ν＝０．００２５）と比べて、粘性拡散よりも対流の影響が支配的となるために、渦層の伸張が顕著となり、それに伴い渦境界の渦度勾配の急激な変化による微小渦の発生が認められる。従って、流れ場はより複雑な様相を呈している。一方、大規模構造は低レイノルズ数流れと同一であり，Herring 等[8] の流れ場の大規模構造はレイノルズ数に依存しないという報告に一致する。しかしながら，渦度分布には各時刻共に振動が見られ、５１２×５１２の格子点数では微小渦を的確に捕らえるための分解能が不足していることが考えられる。

図４・５１(a)　等渦度線図（ t=1.0 ，　ν=0.0001 ，　512×512 ）

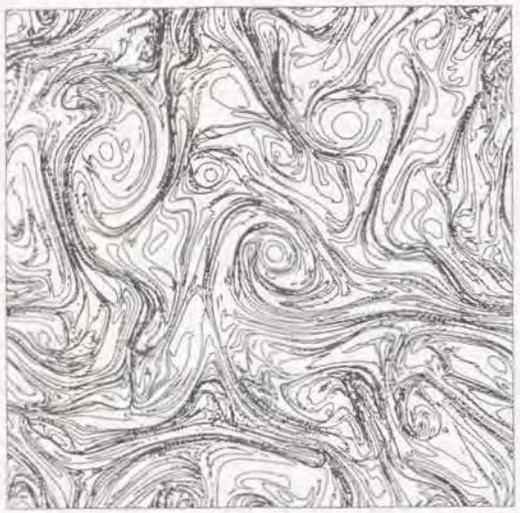


図４・５１(b)　等渦度線図（ t=2.0 , ν=0.0001 ,　512×512 ）

図４・５１(c)　等渦度線図（ t=3.0 , ν=0.0001 ,　512×512 ）

そこで，格子点数をｘ，ｙ方向共に２倍に増加させた１０２４×１０２４の格子点数で同様の数値シミュレーションを時間刻み幅Δｔ＝１／１０００として行った。その際の同一時刻における渦度分布を図４・５２に示す。格子点数１０２４×１０２４とした場合の渦度分布には振動も生じておらず，微小渦を捕獲するに足りる分解能を有していることが確認される。さらに，格子点数の違いによるエネルギ・スペクトルの比較を図４・５３に示す。縦軸にはエネルギ・スペクトル（k^2 Ｅ（ｋ））を取って示している。また，図は原点をずらせた表示を行っており，Ａが格子点数１０２４×１０２４の結果，Ｂが格子点数５１２×５１２の結果である。各時刻共に，両者のエネルギ・スペクトルは低波数領域（ｋ＜２００）では完全に一致しているにも関わらず，高波数領域（ｋ＞２００）において差異が生じている。格子点数を５１２×５１２とした場合は，高波数（ｋ＞２００）領域におけるエネルギ・スペクトルは増加傾向を示し，時間の経過と共にその傾向は顕著となっている。従って，５１２×５１２の格子点数では，高波数のエネルギを的確に捕獲できていない（微小渦を分解できていない）ことが，この図からも理解される。

図４・５２(a)　等渦度線図（ t=1.0 , ν=0.0001 , 1024×1024 ）

図４・５２(b)　等渦度線図（ t=2.0 , ν=0.0001 , 1024×1024 ）

図４・５２(c)　等渦度線図（ t=3.0 , ν=0.0001 , 1024×1024 ）

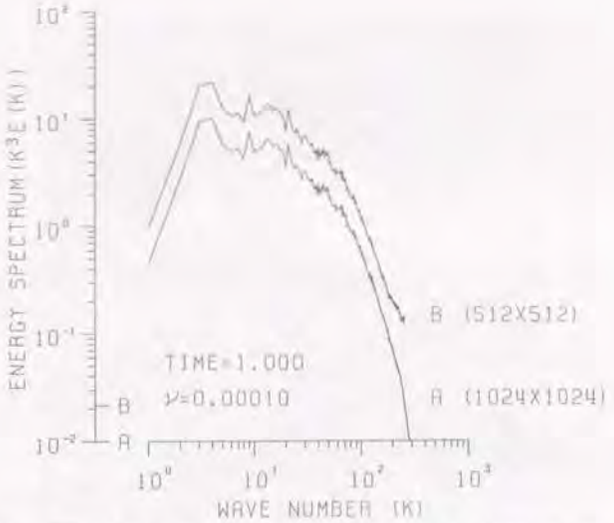


図４・５３(a)　格子点数によるエネルギ・スペクトルの比較（ t=1.0 , ν=0.0001 ）

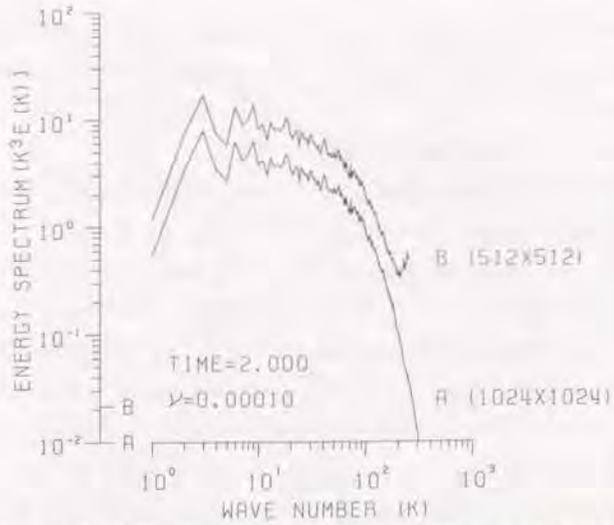


図４・５３(b)　格子点数によるエネルギ・スペクトルの比較（ t=2.0 , ν=0.0001 ）

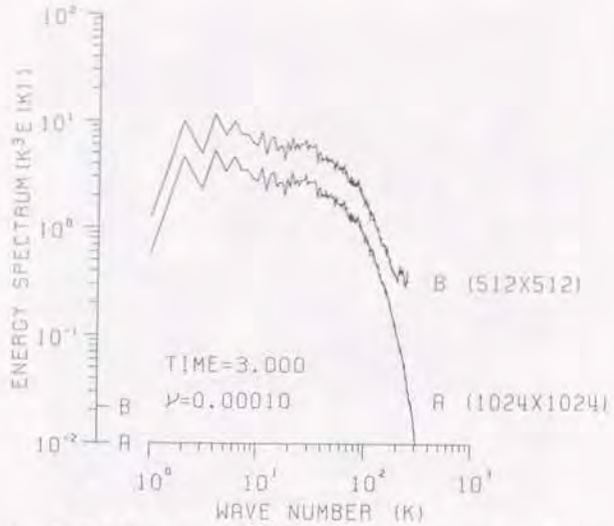


図４・５３(c)　格子点数によるエネルギ・スペクトルの比較（ t=3.0 , ν=0.0001 ）

格子点数を１０２４×１０２４とした場合の，時刻ｔ＝３．０以降の渦度分布を図４・５４に示す。渦度分布の時間変化より、流れ場の履歴は，以下の３つの段階に分類することが可能である。

①渦層の伸張による渦の発達過程（図４・５２(a)）

②渦境界における渦度勾配の急激な変化による微小渦の発生、及び、微小渦の発生に伴う流れ場の複雑化過程（図４・５２(b)，(c)，図４・５４(a)）

③大規模渦へのエネルギ集中に伴う流れ場の単純化過程（図４・５４(b)，(c)）

さらに、慣性小領域のエネルギ・スペクトルの冪乗則を検証するために，初期から時刻ｔ＝１２．０までの適当な時刻におけるエネルギ・スペクトルを図４・５５に示す。図４・５５(a) は時刻ｔ＝０、０、１．０、３．０における分布を、(b) は時刻ｔ＝６．０，９．０，及び，１２．０における分布を、縦軸にエネルギ・スペクトル（ｋ^3 Ｅ（ｋ））横軸に波数ｋを両対数で各々示している。図より、慣性小領域のエネルギ・スペクトルが満足すべき冪乗則は，流れ場の変遷に伴って以下のように与えられると考えられる。

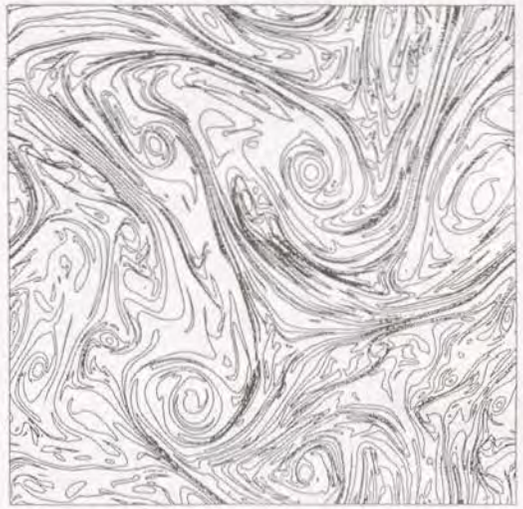


図４・５４(a)　等渦度線図（ t=6.0 , ν=0.0001 , 1024×1024 ）

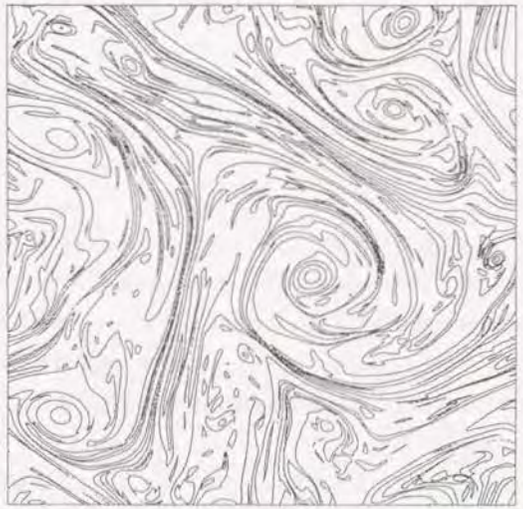


図４・５４(b)　等渦度線図（ t=9.0 , ν=0.0001 , 1024×1024 ）

図４・５４(c)　等渦度線図（ t=12.0 ， ν=0.0001 ， 1024×1024 ）

①渦の発達過程（ t≦１．０）：k^3 E（k）の傾きがほぼ１であることより、エネルギ・スペクトルはk^{-4}に比例する。

②複雑化過程（ t＜６．０）：k^3 E（k）の傾きがほぼ０であることより、エネルギ・スペクトルはk^{-3}に比例する。しかし，時間の経過と共にk^{-3}則から逸脱する。

③単純化過程（ t＞６．０）：エネルギ・スペクトルE（k）は徐々にk^{-4}則に漸近する。

Brachet 等[59, 60] は、初期の段階ではエネルギ・スペクトルはk^{-4}則に従うが、時間の経過と共に渦度勾配層（Vorticity Gradient Sheet）が発達し、k^{-3}則に従うようになると報告しているが、流れ場の単純化過程におけるエネルギ・スペクトルの満足すべき冪乗則については言及していない。しかしながら、高次精度大規模数値シミュレーションによって，大規模渦が支配的となる流れ場の単純化過程におけるエネルギ・スペクトルは，k^{-4}則に漸近することが示された。

一方、エンストロフィ・カスケード理論によると、エンストロフィΩ（t）は慣性小領域の中でスケールの小さな運動（高波数）に流れ、最終的には粘性散逸により消失する。逆に、エネルギはスケールの大きな運動（低波数）に流れる逆カスケードを示す。また，

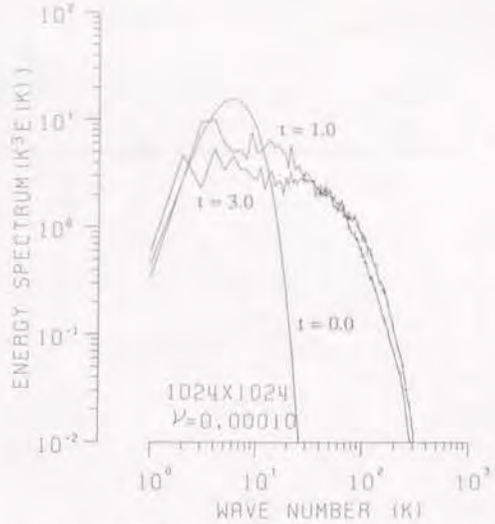


図４・５５(a)　エネルギ・スペクトルの時間推移（ t≦3.0 ，ν=0.0001 ， 1024×1024 ）

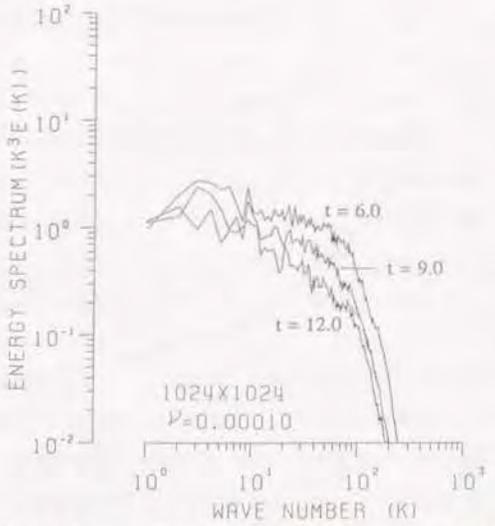


図４・５５(b)　エネルギ・スペクトルの時間推移（ t>3.0 ，ν=0.0001 ， 1024×1024 ）

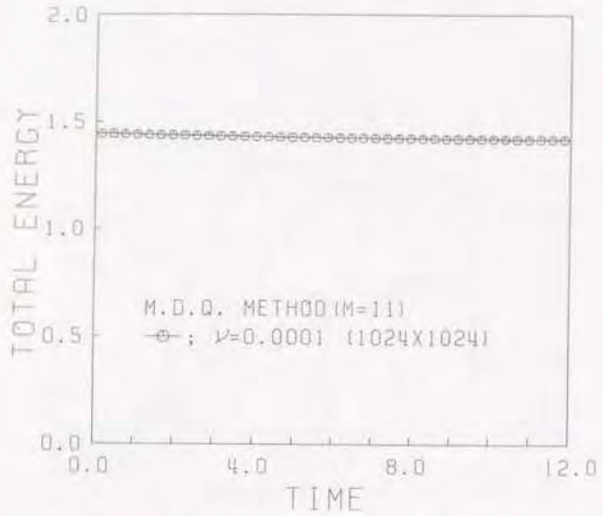


図４・５６(a)　全エネルギの時間推移（　ν=0.0001，1024×1024　）

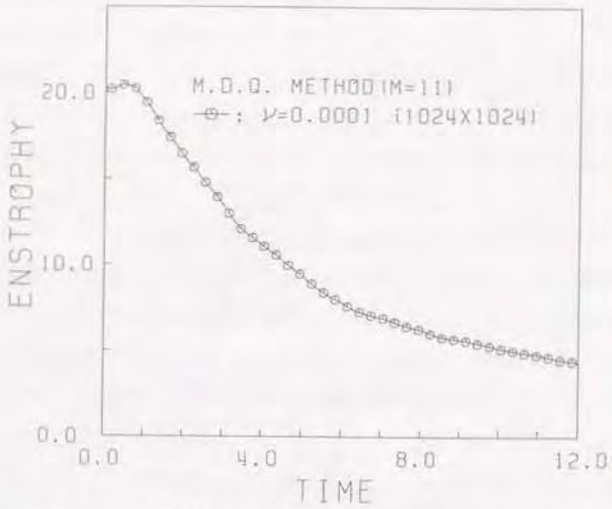


図４・５６(b)　エンストロフィの時間推移（　ν=0.0001，1024×1024　）

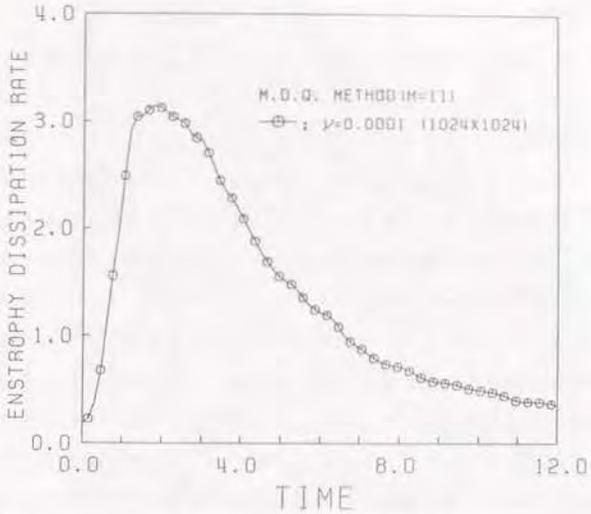


図４・５６(c)　エンストロフィ散逸率の時間推移（　ν=0.0001，1024×1024　）

エンストロフィは時間に関して単調減少関数となり、エンストロフィ散逸率η（ｔ）は非粘性の極限において０でない有限の値を取ることが知られている。そこで、図４・５６に全エネルギΣ（ｔ）、エンストロフィΩ（ｔ）、及び、エンストロフィ散逸率η（ｔ）の時間推移を示す。全エネルギは損失２％以下であり、ほぼ保存されている。エネルギの逆カスケード現象は、図４・５５のエネルギ・スペクトル分布を考慮しても明確に現れていないが、全エネルギが保存されており、エンストロフィが時間に関して単調減少関数となることから、エンストロフィのカスケード現象、及び、エネルギの逆カスケード現象が現れていると考えられる。さらに、エンストロフィ散逸率に関しても、０でない有限の値に収束することを示唆している。

次に、動粘性係数をν＝０．００００５（R_L＝６４２５０）とした際の流れ場を、時刻ｔ＝１．０、及び、３．０について図４・５７に等渦度線図で示す。空間精度は１０次精度であり、格子点数は前回と同様１０２４×１０２４としている。前回の動粘性係数がν＝０．０００１の場合と比較して、積分スケールレイノルズ数R_Lが約２．５倍になっているにも関わらず、時刻ｔ＝１．０の流れ場はほとんど変化していないことが確認される。しかしながら、時刻ｔ＝３．０においては、微小渦の発生が前回の結果より顕著とな

り、流れ場はさらに複雑性を増していることが認められ、乱流の微小構造が異なっていることが判かる。

さらに、レイノルズ数変化に伴うエネルギ・スペクトルを比較するために、図４・５８に動粘性係数ν＝０．０００１、及び、０．００００５に対するエネルギ・スペクトルを原点をずらせた形で示す。Ａがν＝０．０００１の結果であり、Ｂがν＝０．００００５の結果である。時刻ｔ＝１．０においては、高波数（ｋ＞２００）領域で若干の相違が認められるものの、両者のエネルギ・スペクトルは、ほぼ同一であると判断される。このことは、時刻ｔ＝１．０における両者の流れ場が変化していないことと合致する。しかしながら、時刻ｔ＝３．０における両者のエネルギ・スペクトルは、ｋ＜２０程度の低波数領域でのみ一致が認められ、ｋ＞２０の波数領域では明らかな差異が確認される。従って、流れ場における両者の微小渦構造に変化が生じていることがこのことからも理解される。また、高波数領域のエネルギ・スペクトルの上昇傾向は認められず、使用した格子点数で微小渦を十分に分解できていることが判明する。さらに、ν＝０．００００５の場合においても、エネルギ・スペクトルの満足すべき冪乗則は、時刻ｔ＝１．０ではk^{-4}則、時刻ｔ＝３．０ではk^{-5}則であることが確認される。

以上のことより、高レイノルズ数流れにおける流れ場の履歴は、渦層の伸長に伴う発達過程・微小渦の発生に伴う複雑化過程・大規模渦へのエネルギ集中に伴う単純化過程、の３つの過程に分類され、各々の流れ過程において満足されるエネルギ・スペクトルの冪乗則は、k^{-4}則・k^{-5}則・k^{-4}則となることが確認され、本研究で提案した高次精度数値計算法は乱流の直接シミュレーションに対して非常に有効であることが結論される。

図４・５７(a)　等渦度線図（ t=1.0 ， ν=0.00005 ， 1024×1024 ）

図４・５７(b)　等渦度線図（ t=3.0 ， ν=0.00005 ， 1024×1024 ）

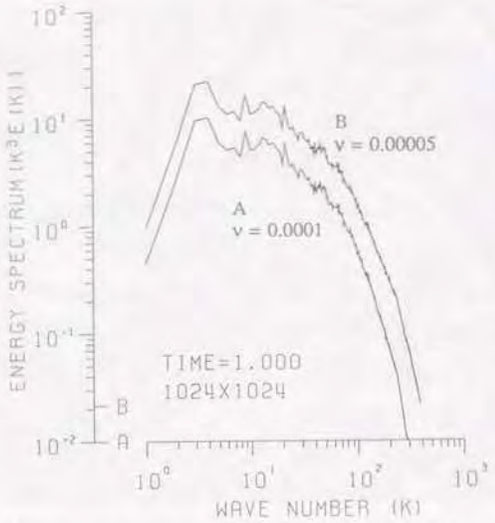


図４・５８(a)　エネルギ・スペクトル分布の比較（ t=1.0 ， 1024×1024 ）

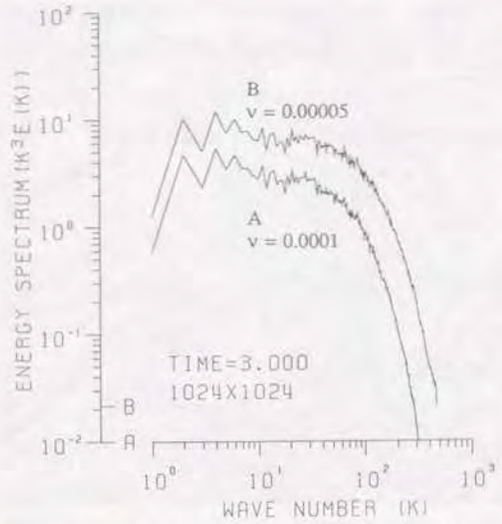


図４・５８(b)　エネルギ・スペクトル分布の比較（ t=3.0 ， 1024×1024 ）

４．　３次元一様等方性乱流の高次精度数値シミュレーション

本節では、３次元一様等方性乱流の高次精度直接数値シミュレーションを行った結果について述べる。初期条件はOrszagとPatterson の条件[68,69] を採用する。即ち、波数空間における速度場 $u_i(\vec{k})$ を

$$u_i(\vec{k}) = (\delta_{ij} - k_i k_j / k^2)\{r_j(\vec{k}) + \bar{i}\, s_j(\vec{k})\}, \qquad (4\cdot28)$$

と与える。ここで、$\vec{k} = (k_1, k_2, k_3)$ は波数ベクトル、kはその大きさであり、$k^2 = k_1^2 + k_2^2 + k_3^2$で与えられる。$r_j(\vec{k})$ 及び $s_j(\vec{k})$ は正規分布に従う任意のベクトルであり、乱数により与えるものとする。また、δ_{ij}はクロネッカのデルタであり、$\bar{i}$は虚数単位、$u_1(\vec{k})$ 、$u_2(\vec{k})$ 、$u_3(\vec{k})$ は波数 k_1 、k_2 、k_3 方向の速度を表すものとする。

さらに、ベクトル $r_j(\vec{k})$ 及び $s_j(\vec{k})$ はエネルギスペクトル $E(k)$ と

$$\langle r_i(\vec{k})\, r_j(\vec{k})\rangle = \langle s_i(\vec{k})\, s_j(\vec{k})\rangle = \delta_{ij}\pi^2 E(k)/2k^2, \qquad (4\cdot29)$$

のように関係付けられる。ここで、記号＜＞は集団平均を表し、初期のエネルギ・スペクトル $E(k)$ は、

$$E(k) = 16\sqrt{2/\pi}\; v_0^2 k_{max}^{-5} k^4 \exp[-2(k/k_{max})^2], \qquad (4\cdot30)$$

で与えられる。ただし、$v_0 = 1.0$, $k_{max} = 4.75683$ である。

このように波数空間における速度場 $u_i(\vec{k})$ を与えると、

$$k_i\, u_i(\vec{k}) = 0 \qquad (4\cdot31)$$

となるために、非圧縮性が保証される。

また、乱れ強さ(root mean square velocity) $v_{rms}(t)$ は物理空間における速度場、$u(x,y,z,t)$, $v(x,y,z,t)$, $w(x,y,z,t)$ を用いて

$$v_{rms}(t) = \tfrac{1}{3}(\overline{u^2} + \overline{v^2} + \overline{w^2}), \qquad (4\cdot32)$$

で定義される。ただし、記号「 ‾ 」は空間平均を表すものとする。この乱れ強さ v_{rms} を用いると、積分長さ $L(t)$ 及びTaylorのマイクロスケール $\lambda(t)$ は各々

$$L(t) = \tfrac{1}{4}\pi v_{rms}(t)^2 \Sigma k^{-1} u_i(\vec{k})\, u_i(-\vec{k}), \qquad (4\cdot33)$$

$$\lambda(t) = \left[\frac{15 v_{rms}(t)^2}{\Sigma k^2 u_i(\vec{k})\, u_i(-\vec{k})}\right]^{1/2}, \qquad (4\cdot34)$$

と定義され，L（t）及びλ（t）を代表長さとし，$v_{rms}(t)$ を代表速度とした際のレイノルズ数 $R_L(t)$ 及び $R_\lambda(t)$ は

$$R_L(t) = L(t)\, v_{rms}(t) / \nu \quad , \tag{4・35}$$

$$R_\lambda(t) = \lambda(t)\, v_{rms}(t) / \nu \quad , \tag{4・36}$$

と与えることができる。

計算領域は，$0 \leq (x, y, z) \leq \pi$ の立方体領域とし，境界条件はx，y及びz方向共に周期境界条件とする。

さらに，単位質量当りの全運動エネルギΣ（t），全エンストロフィΩ（t）及びエネルギ散逸率ε（t）は各々以下のように定義される。

$$\Sigma(t) = \frac{1}{\pi^3} \int_0^\pi\!\!\int\!\!\int \frac{1}{2} |\vec{u}(\vec{x}, t)|^2 \, d\vec{x} \quad , \tag{4・37}$$

$$\Omega(t) = \frac{1}{\pi^3} \int_0^\pi\!\!\int\!\!\int \frac{1}{2} |\vec{\omega}(\vec{x}, t)|^2 \, d\vec{x} \quad , \tag{4・38}$$

$$\varepsilon(t) = -\frac{d}{dt}\Sigma(t) = 2\nu\Omega(t) \quad . \tag{4・39}$$

これらの関係を用いると，マイクロスケールに対するレイノルズ数 $R_\lambda(t)$ は

$$R_\lambda(t) = \sqrt{\frac{10}{3}} \; \frac{\Sigma(t)}{\nu\Omega(t)^{1/2}} \quad , \tag{4・40}$$

と表すことができる。

また，帯平均エネルギ・スペクトル（band-averaged energy spectrum）E（k）及び帯平均エネルギ散逸スペクトルD（k）は以下のように表現される。

$$E(k) = \tfrac{1}{2} \sum_{k-1 \leq |\vec{k}| < k+1} \tfrac{1}{2} u_i(\vec{k})\, u_i(-\vec{k}) \quad , \tag{4・41}$$

$$D(k) = \tfrac{1}{2} \sum_{k-1 \leq |\vec{k}| < k+1} \nu k^2 u_i(\vec{k})\, u_i(-\vec{k}) \quad . \tag{4・42}$$

数値計算は，格子点数64×64×64，空間精度を１０次精度として行っている。

4．1．　低レイノルズ数シミュレーション

本項においては，３次元一様等方性乱流のテストケースとして低レイノルズ数の直接数値シミュレーションを行った結果について述べる。OrszagとPatterson[65] に従い，動粘性係数は ν=0.01189としている。採用した計算条件は表４・１１に示すとおりである。また，計算は時刻 t＝0.8 まで実行した。

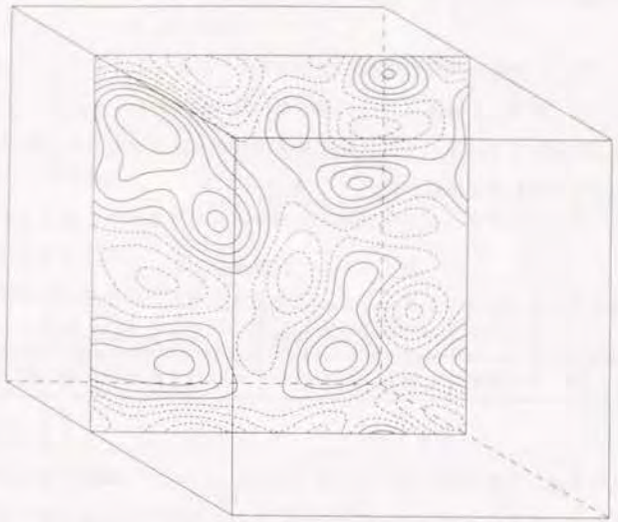
表４・１１　計算条件

$v_{rms}(0)$	$\bar{u}(0)$	$\bar{v}(0)$	$\bar{w}(0)$	ν	L(0)	λ(0)	$R_L(0)$	$R_\lambda(0)$
1.0020	1.081	0.883	1.047	0.01189	0.5136	0.4127	43.282	34.779

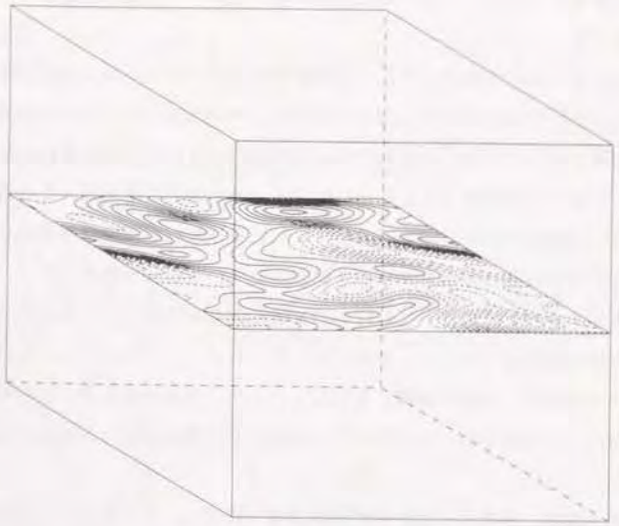
初期の乱れ強さは，一様性が保証される場合には $v_{rms}(0)=1$ を満足するはずであるが表よりわかるように厳密には満足されていない。これは初期に与えるベクトルを乱数により与えているために生じるサンプリング効果のためである。さらに，積分長さ及びマイクロスケールを基準とするレイノルズ数は初期において30〜45であり，低レイノルズ数であることが判る。

図４・５９には初期の渦度場（ω_x）の等高線を示す。図４・５９(a) にはz－x平面（y＝0.375)，(b) にはx－y平面（z＝0.500)，及び(c) にはy－z平面（x＝0.875) における等高線を示している。図より判るように初期の分布は正の渦度と負の渦度とが交互に分布しているような単純な形状を示している。流れ場の変遷を捕らえるために，図４・６０〜６２に同一３平面の時刻 t＝0.2，0.4，及び0.8 の渦度場を等高線で示す。初期の単純な流れ場が時間の経過と共に引き伸ばされている様子が認められる（t＝0.2)。これが発達過程であり，時刻 t＝0.4 においては複雑な分布となり，複雑化の過程となっていることが認められる。さらに，時刻 t＝0.8 においては複雑な分布が粘性拡散のために単純になりつつあり，単純化過程に移行していることが認められる。これらの現象は２次元乱流においても観測されたものであり，乱流の発達減衰過程の本質的なものであると考えられる。

２次元乱流の場合，渦間のエネルギ授受は渦層が伸長し，その結果生じる微小渦のエネルギがより規模の大きい渦に順次伝達される，所謂，エネルギ逆カスケードによってなされると考えられているが，３次元乱流の場合，スケールの大きな渦のエネルギが順次スケ

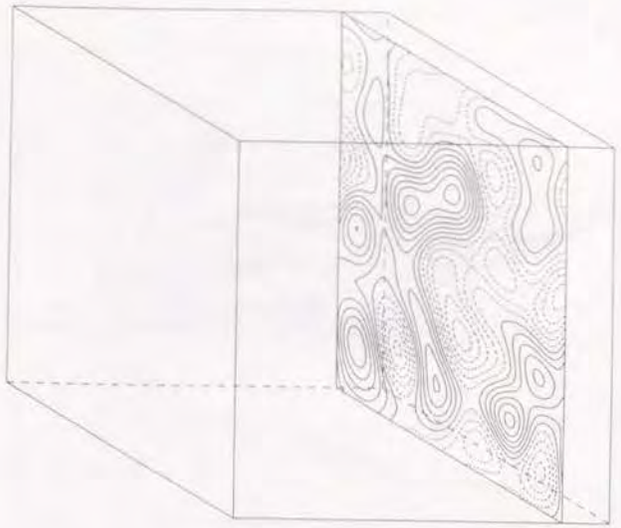


(a) z－x平面（y＝0.375）



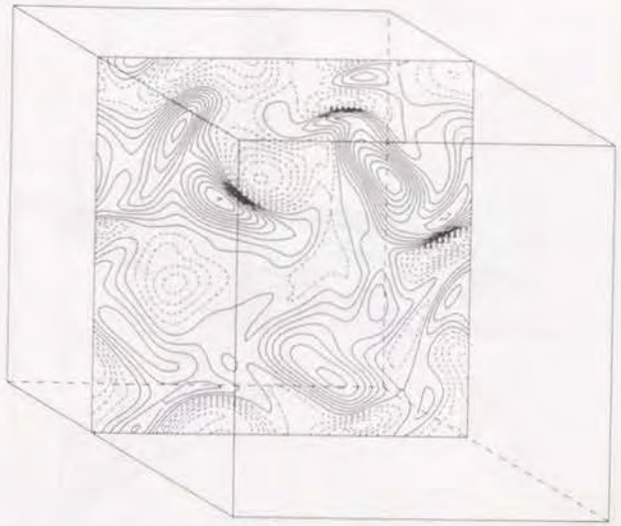
(b) x－y平面（z＝0.500）

図4・59　初期渦度場の分布（ω_x，その1）



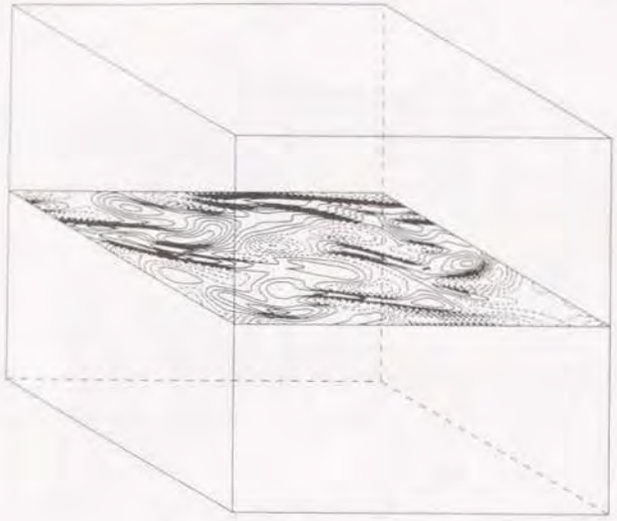
(c) y－z平面（x＝0.875）

図4・59　初期渦度場の分布（ω_x，その2）

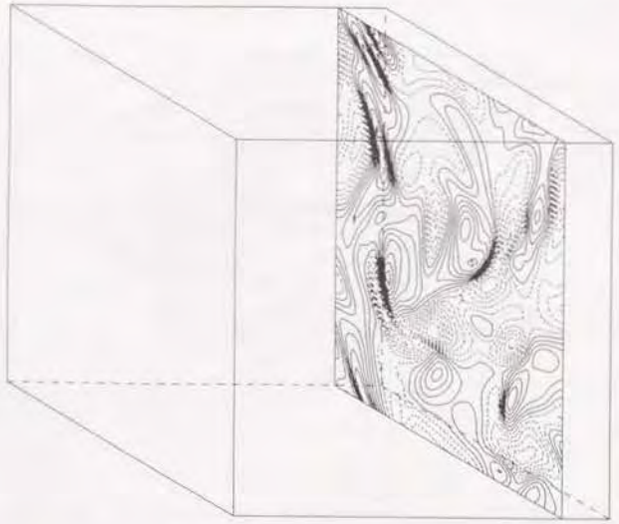


(a) z－x平面（y＝0.375）

図4・60　渦度場の分布（ω_x，t＝0.2，その1）

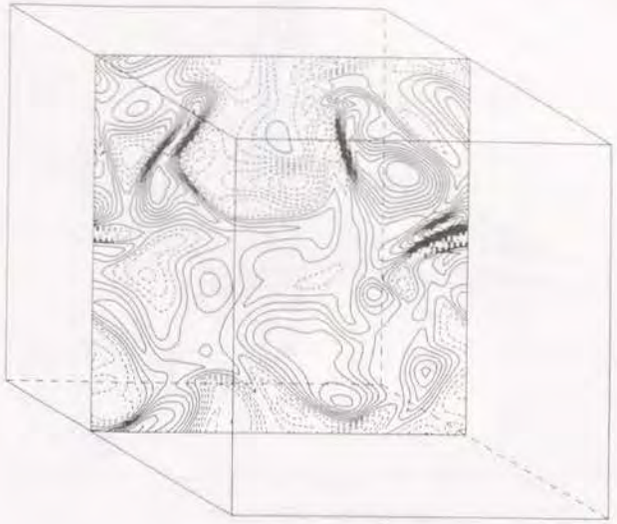


(b) x－y平面（z＝0.500）

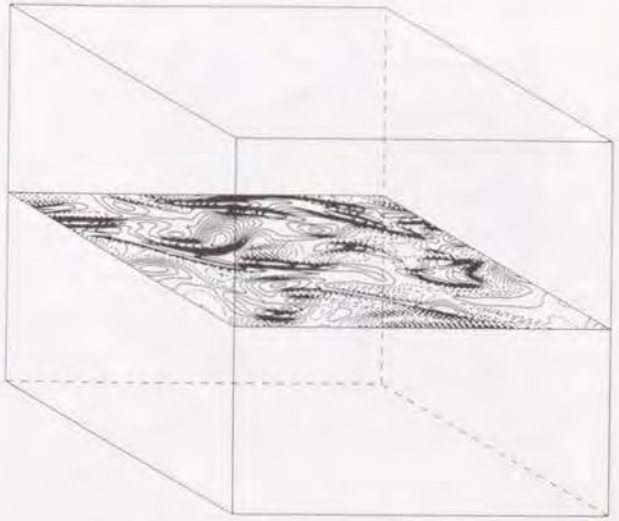


(c) y－z平面（x＝0.875）

図4・60　渦度場の分布（ω_x，t＝0.2，その2）

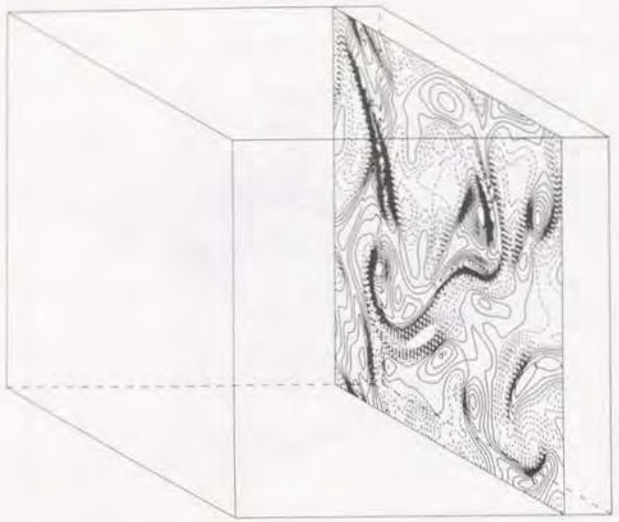


(a) z－x平面（y＝0.375）



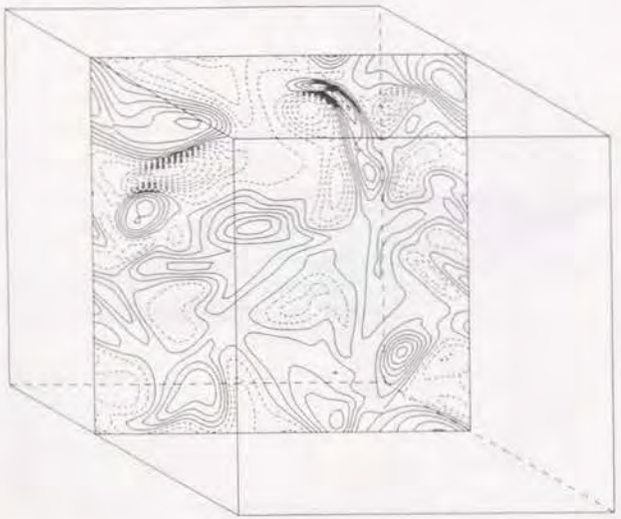
(b) x－y平面（z＝0.500）

図4・61　渦度場の分布（ω_x，t＝0.4，その1）



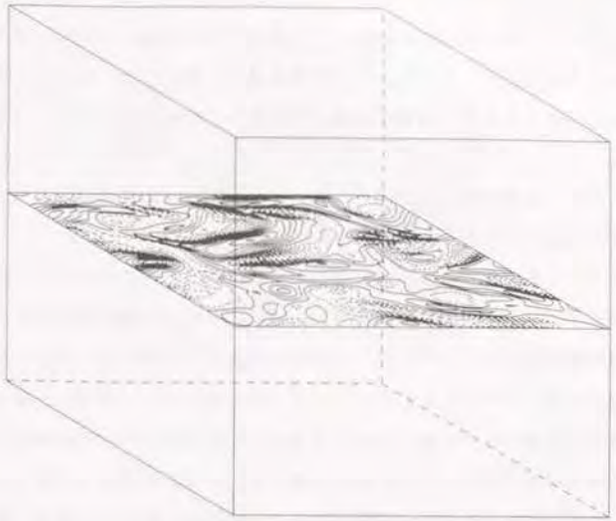
(c) $y-z$ 平面（$x=0.875$）

図４・６１　渦度場の分布（ω_x，$t=0.4$，その２）

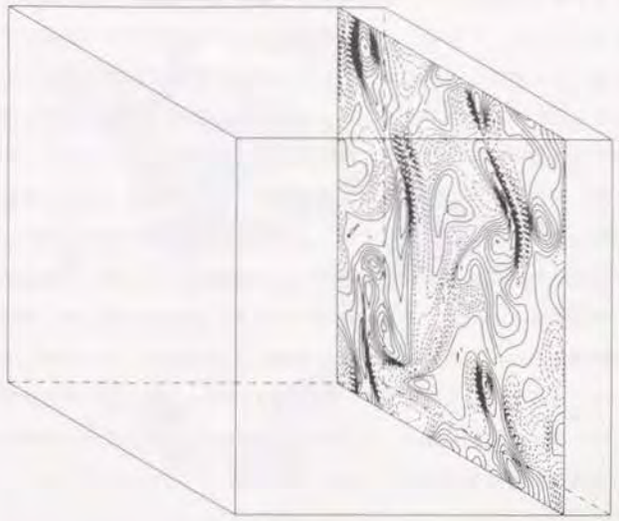


(a) $z-x$ 平面（$y=0.375$）

図４・６２　渦度場の分布（ω_x，$t=0.8$，その１）



(b) $x-y$ 平面（$z=0.500$）



(c) $y-z$ 平面（$x=0.875$）

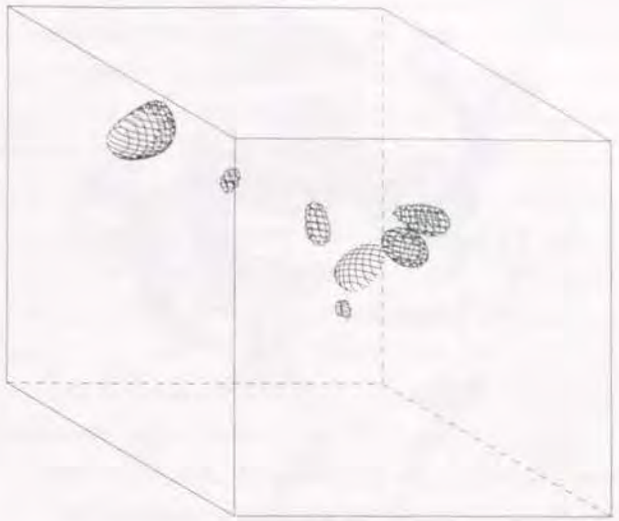
図４・６２　渦度場の分布（ω_x，$t=0.8$，その２）

ールの小さな渦へと伝達され，粘性拡散により消滅する，所謂，エネルギカスケードによってなされると考えられている。従って，単純化過程においては，２次元の場合のように渦のスケールは大きくならず，拡散する様子が時刻 t＝0.4 及び t＝0.8 の等渦度線図より理解される。

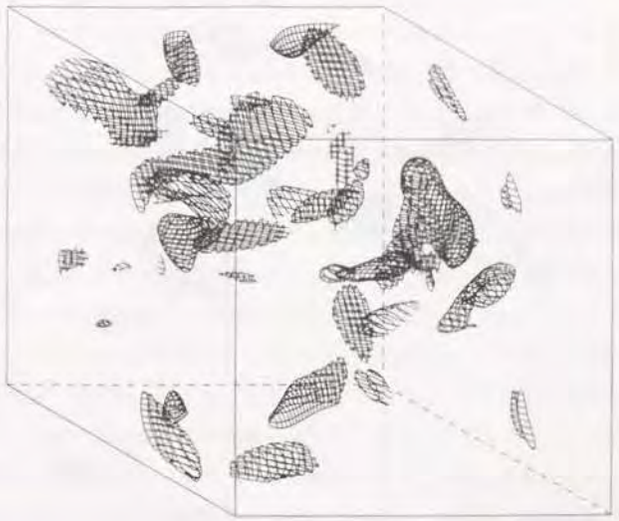
また，渦の強さの拡散過程を検討するためにエンストロフィ Ω（x,y,z）

$$\Omega(x,y,z) = \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2) \qquad (4\cdot43)$$

の等値面を図４・６３に示す。図４・６３(a) ～(d) は各々時刻 t＝0.0 、0.2 、0.4 、及び0.8 に対応している。プロット値は Ω_{plot}=12.0 である。初期のエンストロフィ分布はほぼ回転楕円体形状であり，その分布もまばらである。初期のエンストロフィの最大値は Ω_{max}=17.8である。時刻 t＝0.2 においては，最大値が Ω_{max}=18.8と急激な増加は無いものの，等値面は初期に比べ広範に分布しており，その形状も引き伸ばされた形を呈していることが認められる。従って，この時刻における流れ場が発達過程にあることが判明する。さらに，引き伸ばされた渦管が切断されることによって生じる小規模の渦管の存在も散見される。また，流れ場の発達がクライマックスに達したと考えられる時刻 t＝0.4 においては，発達過程に比べてさらに渦管が引き伸ばされている様子が観察され，その引き伸ばしに起因する微小渦管の発生が顕著であり，流れ場が複雑な様相を呈しており，この時刻が複雑化過程に対応していることが理解される。この時刻のエンストロフィ最大値は Ω_{max}=21.0であった。複雑化過程の後は，粘性拡散の影響で流れ場は単純化の方向へと移行する。時刻 t＝0.8 におけるエンストロフィの分布を複雑化過程の分布と比較すると，複雑化過程において顕著に存在していた微小渦管がほとんど観察されない。これは，粘性拡散によって微小渦管がエネルギを失い，消滅したと考えられる。また，渦管が非常に引き伸ばされて細くなっており，最大値は Ω_{max}=19.5と発達過程よりも大きいにもかかわらず，その分布領域は発達過程及び複雑化過程に比べて激減していることが認められる。２次元の場合，微小渦のエネルギはより規模の大きい渦に伝達されるため，規模の大きい渦のスケールが増大するが，３次元の場合逆に規模の大きな渦から小さな渦にエネルギが伝達されるために，規模の大きな渦のスケールは増大しない。さらに，引き伸ばしの機構は依然として存在するために，結果として渦管が引き伸ばしを受けながら粘性のためにその強さを減少させることになると考えることができる。

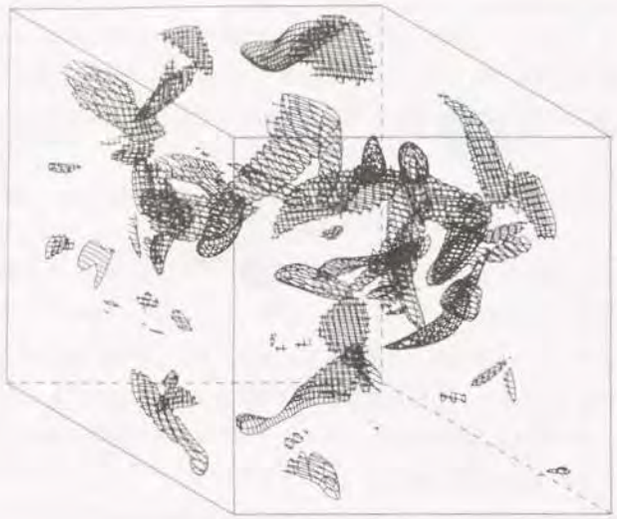


(a)　t＝0.0

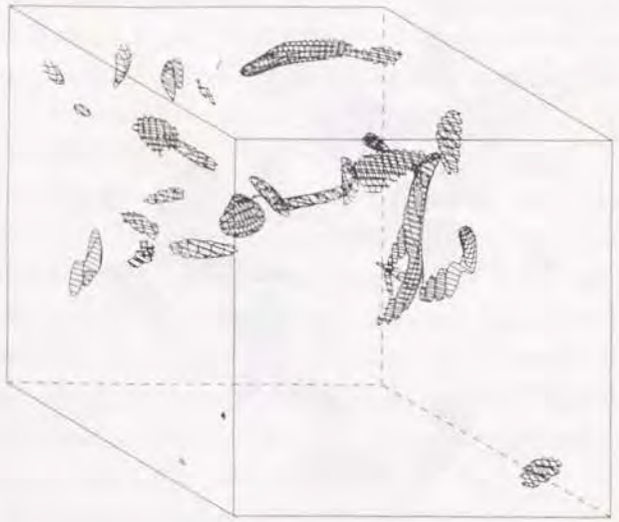


(b)　t＝0.2

図４・６３　エンストロフィ分布（Ω_{plot}＝12.0，その１）



(c) t＝0.4



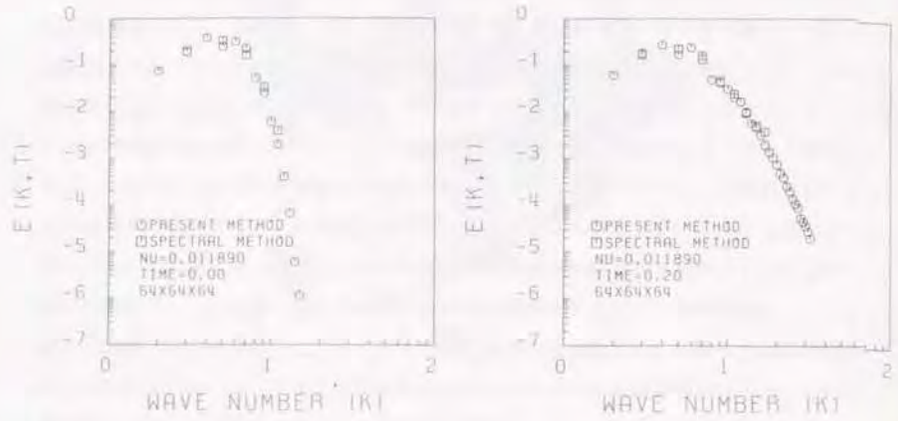
(d) t＝0.8

図４・６３　エンストロフィ分布（Ω_{plot}＝12.0，その２）

次に、各種統計量について検討を行う。まず、エネルギ・スペクトルについて検討を行うために図４・６４に各時刻（t＝0.0 、0.2 、0.4 、0.8 ）におけるエネルギ・スペクトルをOrszagとPatterson の結果[85]と比較して示す。OrszagとPatterson はスペクトル法を用いて数値計算を行っている（格子点数は32×32×32）。図中の「○」は本数値計算結果を、「□」はOrszagとPatterson の結果を各々表しており、エネルギ・スペクトルは（４・４１）式により定義される帯平均エネルギ・スペクトルを採用している。両者の結果は時刻 t＝0.2 までは非常に良く一致している。しかしながら、それ以降の時刻においては、高波数領域（k＞10）でのスペクトル法の結果が本数値計算結果よりも減少していることが認められる。これは格子点数が少ないために分解能が不足していることに起因すると考えられる。両結果共に複雑化過程まで（時刻 t≦0.4 ）は、低波数領域のエネルギが減少し、高波数領域のエネルギが増加する傾向が認められる。従って、より規模の小さな渦がエネルギを得るために流れ場は複雑な構造を呈することが理解される。複雑化過程以降（t＝0.8 ）は低波数領域のエネルギは引き続き減少すると共に、高波数領域のエネルギも減少している。このことから、規模の小さな渦はより大きな渦からエネルギを伝達されるが、そのエネルギよりも粘性拡散によって失われるエネルギの方が大きくなり自由減衰となっていることが認められる。

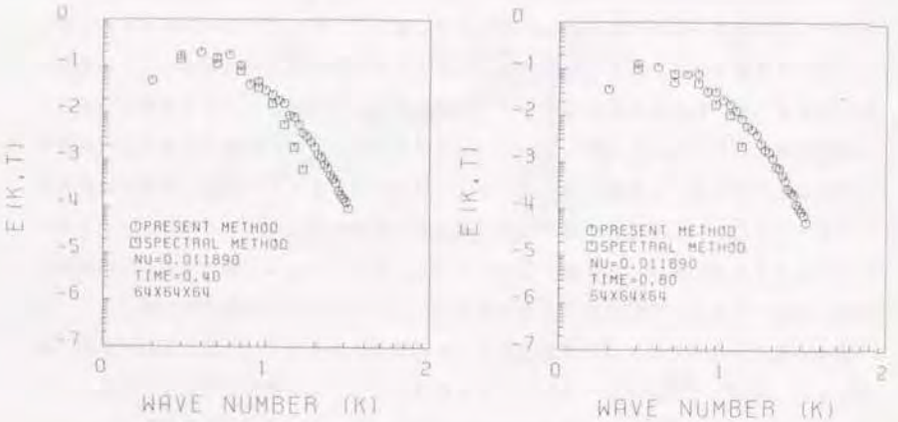
発達過程（t＝0.2 ）、複雑化過程（t＝0.4 ）、及び単純化過程（t＝0.8 ）のエネルギ・スペクトルが満足する冪乗則は各々、$k^{-8/3}$則、$k^{-5/3}$乗則、及び$k^{-5/3}$乗則となり、自由減衰となる単純化過程に移行するに従ってコルモゴロフ・スペクトルが得られることが理解される。これらの冪乗則が成立する波数領域はk＝10を中心とする非常に狭い領域であり、Kida等は論文の中で[67]３次元エネルギ・スペクトルの冪乗則が成立する波数領域は非常に狭いと報告しており、その波数領域の一端に瘤状の分布(hump)が見受けられるとしている。本数値シミュレーションにおいてもk＝7 で瘤状の分布が観察されている。さらに、Kida等は流れ場が十分に発達した時刻以降はコルモゴロフ・スペクトルが得られるとしているが、本数値シミュレーションは低レイノルズ数であるために複雑化過程においては$k^{-5/3}$乗則よりも大きな冪乗則となっていることが認められる。

図４・６５〜６８にはエネルギ散逸率ε（t），全エネルギΣ（t），エンストロフィΩ（t），及びマイクロスケールレイノルズ数R_λ（t）の時間推移を示す。ただし、エネルギ散逸率に関しては本計算結果とOrszagとPatterson の結果[85]を比較して示している。時刻 t＝0.3 においてエネルギ散逸率はピークを迎え、その後は単調減少関数となっていることが認められる。従って、時刻 t＝0.2 が発達過程、t＝0.4 が複雑化過程、及



(a) t=0.0

(b) t=0.2



(c) t=0.4

(d) t=0.8

図４・６４　エネルギ・スペクトルの比較

び t＝0.8 が単純化過程と分類したことがほぼ妥当なものであることが確認される。エネルギ散逸率がピークとなる時刻 t＝0.3 までは本数値計算結果とOrszagとPatterson の結果とは完全に一致しているが、その時刻以降は本数値計算による散逸率が低い結果となっている。これは、高波数のエネルギ散逸が抑制されることを示しており、対応する時刻の高波数領域のエネルギ・スペクトルがOrszagとPatterson のそれよりも大きくなっていることと合致している。

全エネルギは初期（1.5 ）から単調に減少し、時刻 t＝0.8 においては初期の43%になっていることが判る。また、エンストロフィは初期から増加し、時刻 t＝0.3 でピークとなり以後減少する。一方、マイクロスケールレイノルズ数は全エネルギ同様、単調減少関数となり、時刻 t＝0.8 においては初期（34.8）の約1/2 の17.3となっている。粘性が小さい場合、初期の非常に短い時間において全エネルギはほとんど減衰せず、エンストロフィは指数関数的に増加し、ピークに達する時刻までマイクロスケールレイノルズ数は急激に減少し、その後の減少は緩やかになると報告されている[67]が、本数値シミュレーションにおいては粘性が大きいために、そのような現象は捕らえることができなかった。

以上のように、低レイノルズ数シミュレーションにおいてはOrszagとPatterson の結果と遜色のない結果が得られ、本論文で提案した方法の３次元乱流解析における有効性が確認される。

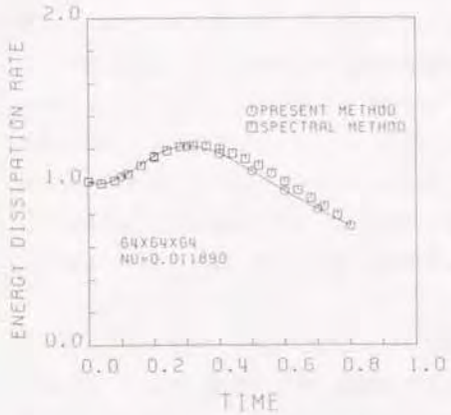


図４・６５　エネルギ散逸率の比較

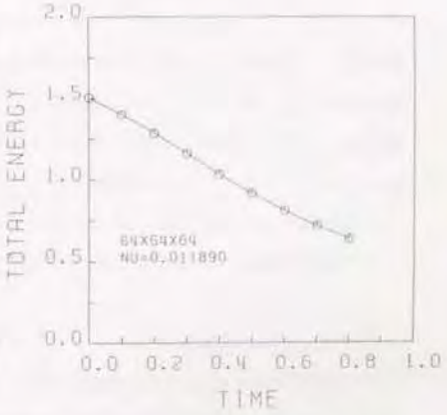


図４・６６　全エネルギの時間推移

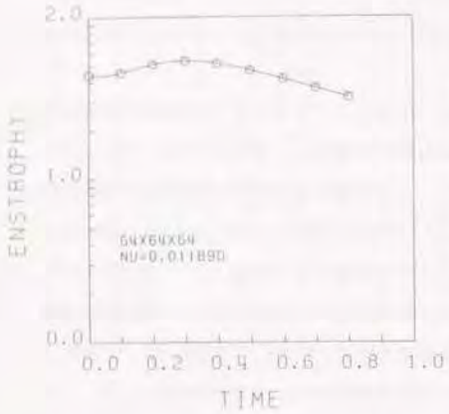


図４・６７　エンストロフィの時間推移

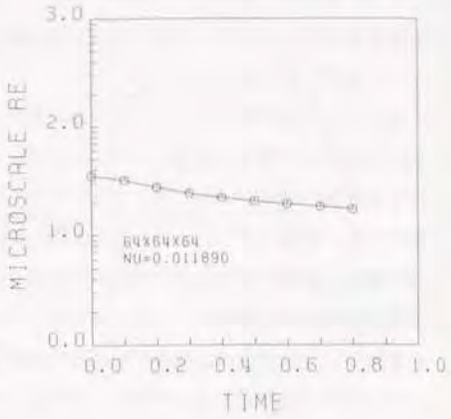


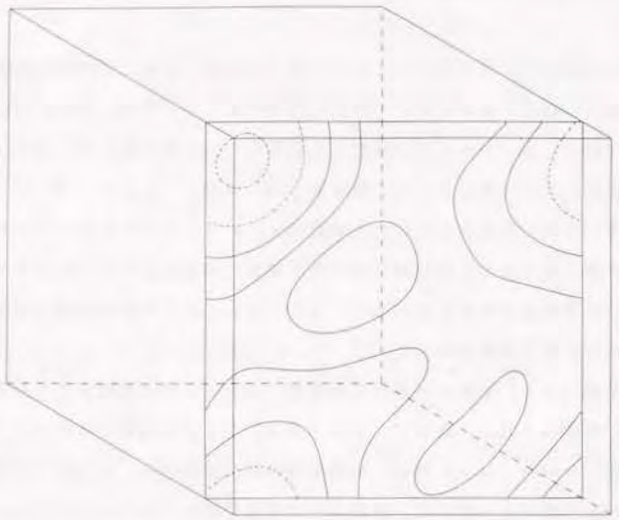
図４・６８　マイクロスケールレイノルズ数の時間推移

４．２．　中間レイノルズ数シミュレーション

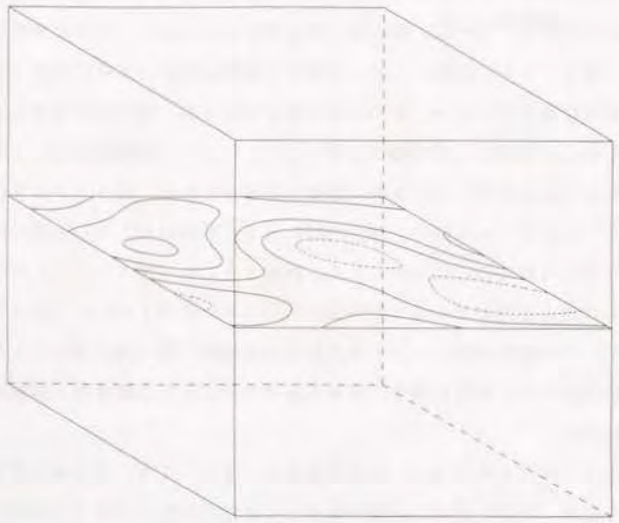
前項において低レイノルズ数シミュレーションを行い、本論文で提案した数値計算手法の有効性を検討したが、本項においては動粘性係数を$\nu=0.0025$、及び0.001189とした中間レイノルズ数シミュレーションを実施した結果について述べる。各々のケースに対応する初期のマイクロスケールレイノルズ数は$R_\lambda(0)=340$，及び$R_\lambda(0)=716$である。ただし、（４・３０）式におけるピーク波数は$k_{max}=2.37841$と与えている。これはレイノルズ数が高くなることに伴い流れ場がより複雑な様相を呈することが予想されるために、初期の分布を単純化する必要があることによる。なお、時間刻み幅は$\Delta t=1/1000$とし、時刻$t=1.0$まで計算を行った。

初期の渦度場（ω_x）を図４・６９に示すが、図４・５９と比較しても分布が単純化されていることが認められる。最初に、図４・７０，７１には初期マイクロスケールレイノルズ数$R_\lambda(0)=340$（$\nu=0.0025$）の渦度場の時間推移をω_xについて示す。ここで、等高線は$z-x$平面、$x-y$平面、及び$y-z$平面に関して各々$y=0.875$，$z=0.500$及び$x=0.250$の面において描いたものである。時刻$t=0.5$（図４・７０）においては初期の分布に比べ渦が引き伸ばされている様子が捕らえられており、流れ場が発達過程にあることが認められる。しかし、微小渦の発生は認められない。さらに時間が経過した時刻$t=1.0$（図４・７１）においては、局所的に渦層の勾配が非常に大きくなり（渦が非常に薄く引き伸ばされている）、そのために渦が切断され、微小渦が発生している様子が捕らえられている。従って、流れ場は時刻$t=0.5$に比べて複雑さを増していることが判り、分解能不足によると考えられる解の振動も見受けられる。図４・７２及び７３に初期マイクロスケールレイノルズ数$R_\lambda(0)=716$（$\nu=0.001189$）とした際の渦度場の時間推移を前ケースと同様にω_xについて示す。時刻$t=0.5$（図４・７２）における渦度場は前ケースとほとんど同一であることが認められるが、時刻$t=1.0$（図４・７３）においては大局的には渦度場は前ケースと変わらないものの、微小渦の発生がより顕著になっていることが認められ、それに伴う分解能不足のために生じる数値解の振動も顕著に現れていることが判る。

次に、エンストロフィ$\Omega(x,y,z)$の分布を図４・７４〜７６に等値面で示す。初期のエンストロフィ分布（図４・７４）は楕円体もしくは楕円管形状であり、比較的単純な分布をしており（プロット値は$\Omega_{plot}=4.0$）、最大値は5.65である。時刻$t=0.5$におけるエンストロフィ分布（図４・７５、(a) $\nu=0.0025$、(b) $\nu=0.001189$）は両ケース共に

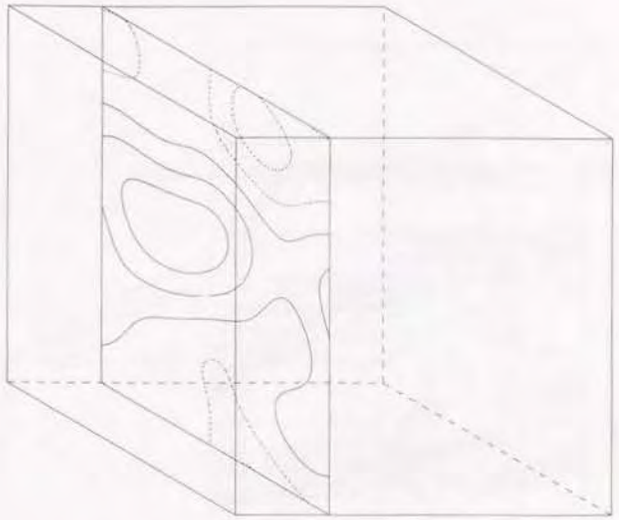


(a) z－x平面（y＝0.875）



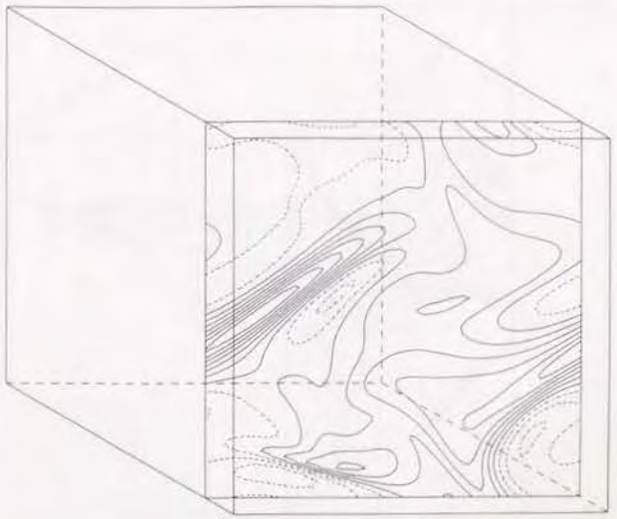
(b) x－y平面（z＝0.500）

図4・69　初期渦度場の分布（ω_x，その1）



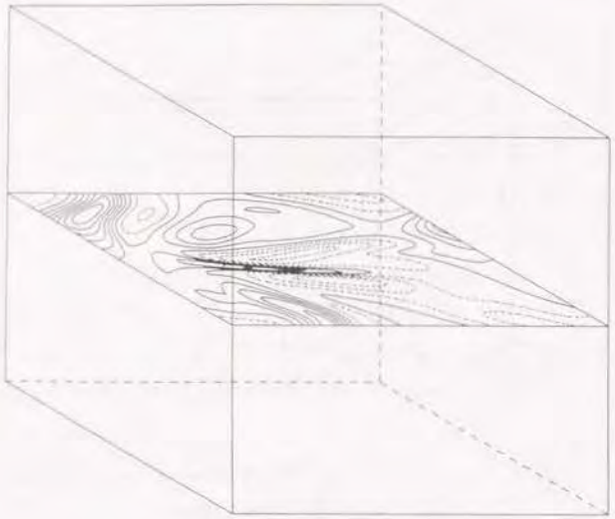
(c) y－z平面（x＝0.250）

図4・69　初期渦度場の分布（ω_x，その2）

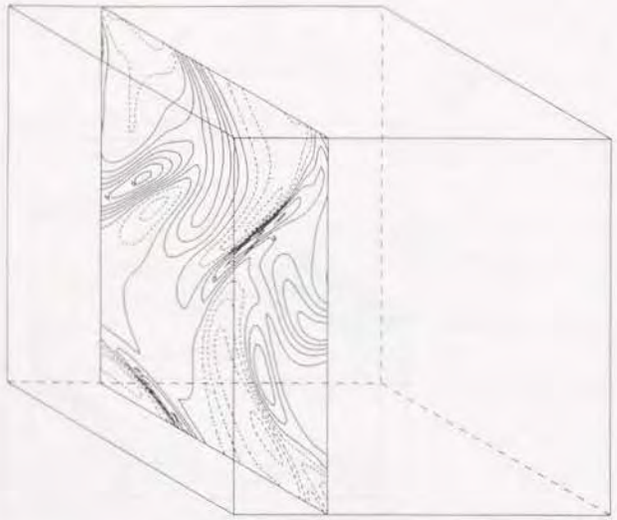


(a) z－x平面（y＝0.875）

図4・70　渦度場の分布（ν＝0.0025，ω_x，t＝0.5，その1）

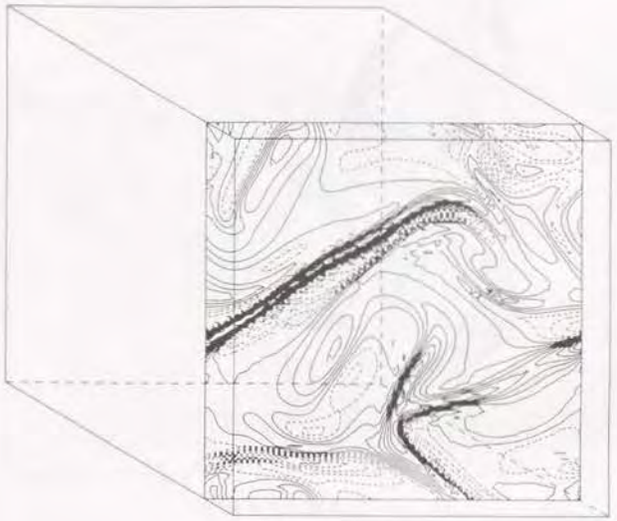


(b) x − y 平面 (z = 0.500)

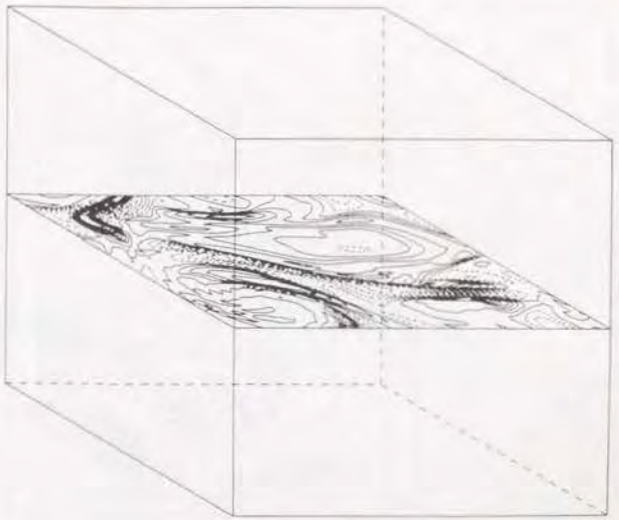


(c) y − z 平面 (x = 0.250)

図４・７０　渦度場の分布 ($\nu = 0.0025$, ω_x , t = 0.5 , その２)

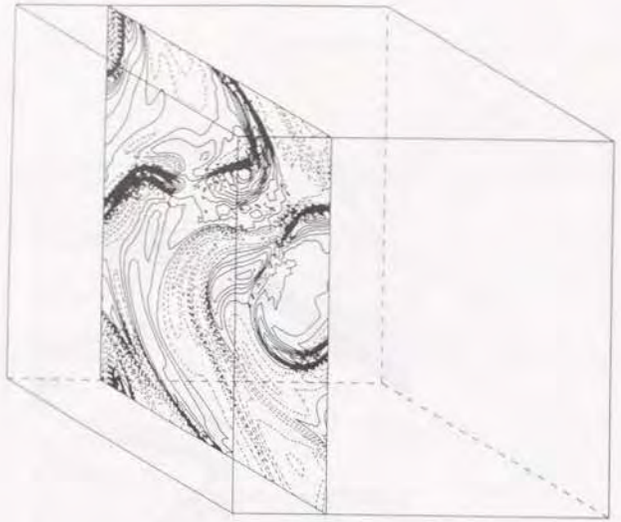


(a) z − x 平面 (y = 0.875)



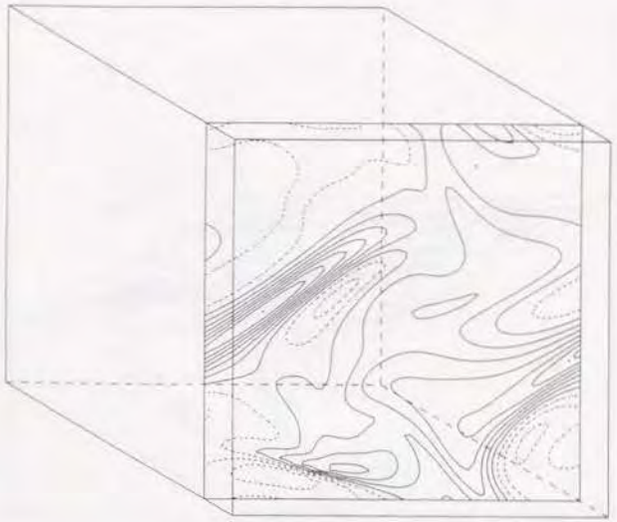
(b) x − y 平面 (z = 0.500)

図４・７１　渦度場の分布 ($\nu = 0.0025$, ω_x , t = 1.0 , その１)



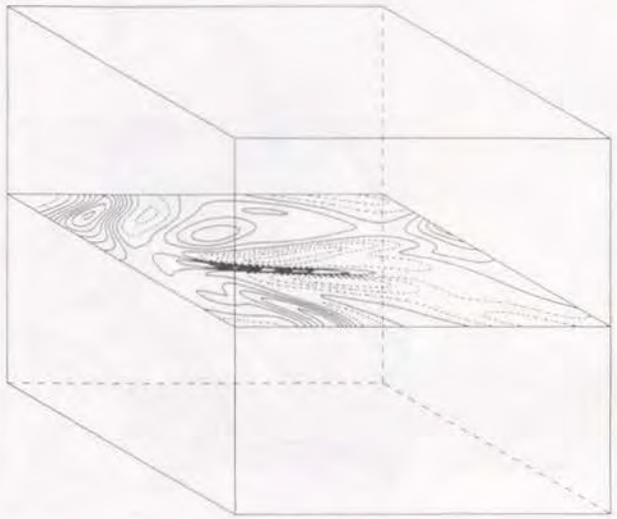
(c) y－z平面（x＝0.250）

図4・71　渦度場の分布（ν＝0.0025, ω_x, t＝1.0，その2）

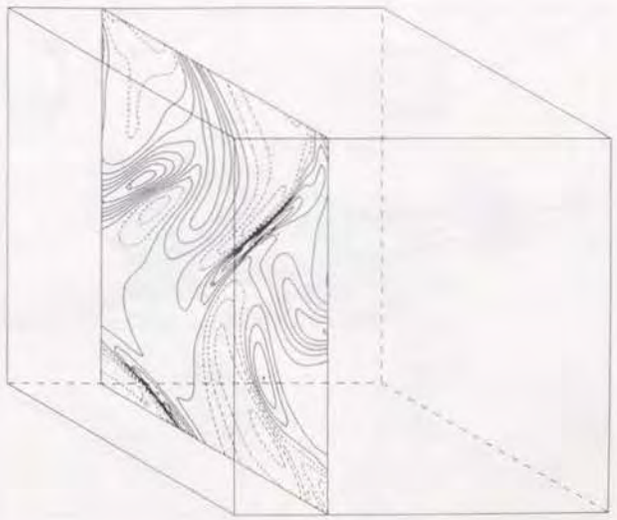


(a) z－x平面（y＝0.875）

図4・72　渦度場の分布（ν＝0.001189, ω_x, t＝0.5，その1）

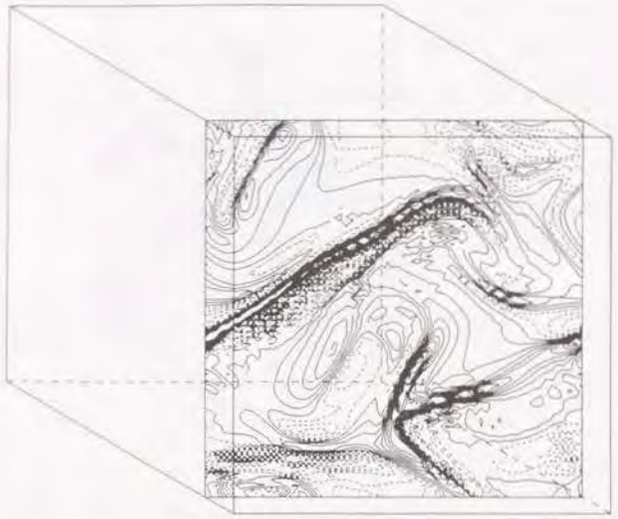


(b) x－y平面（z＝0.500）

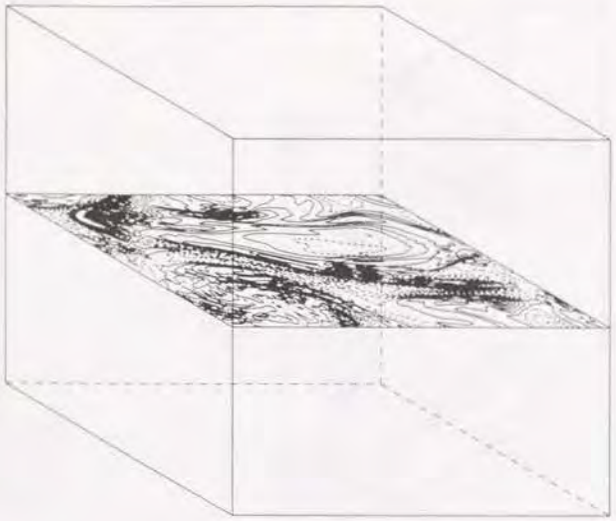


(c) y－z平面（x＝0.250）

図4・72　渦度場の分布（ν＝0.001189, ω_x, t＝0.5，その2）

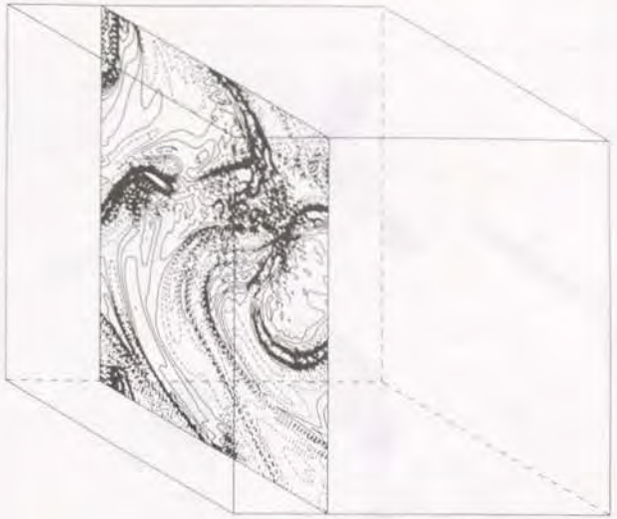


(a) z－x平面（y＝0.875）



(b) x－y平面（z＝0.500）

図４・７３　渦度場の分布（ν＝0.001189, ω_x , t＝1.0 , その１）



(c) y－z平面（x＝0.250）

図４・７３　渦度場の分布（ν＝0.001189, ω_x , t＝1.0 , その２）

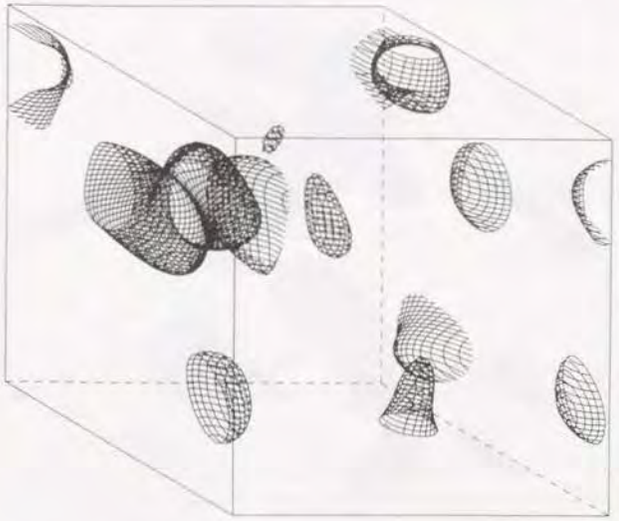
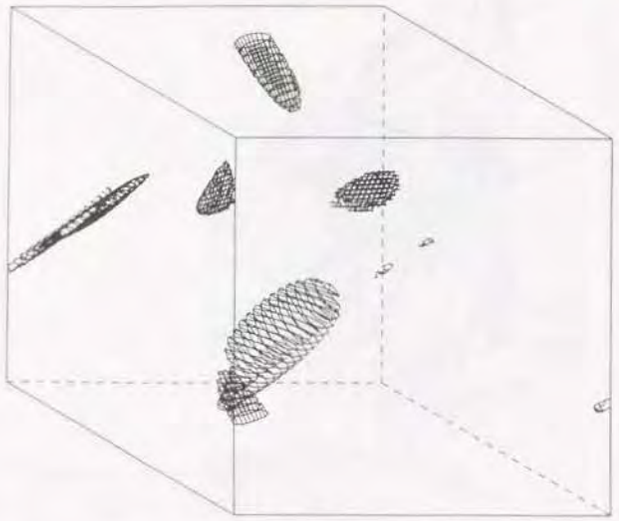


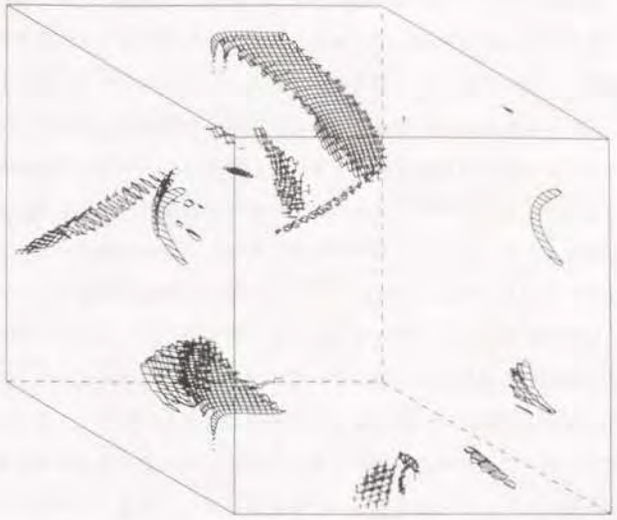
図４・７４　初期エンストロフィ分布（Ω_{plot}＝4.0 ）



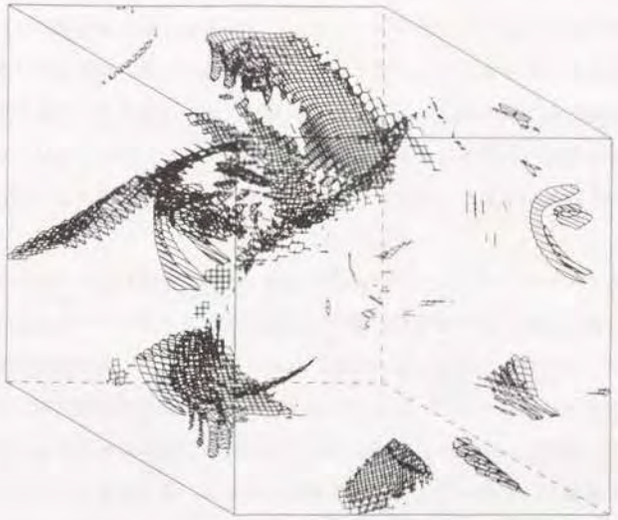
(a) $\nu = 0.0025$

(b) $\nu = 0.001189$

図４・７５　エンストロフィ分布（$\Omega_{plot}=8.0$，$t=0.5$）



(a) $\nu = 0.0025$



(b) $\nu = 0.001189$

図４・７６　エンストロフィ分布（$\Omega_{plot}=16.0$，$t=1.0$）

ほとんど同一の分布（プロット値は$\Omega_{plot}=8.0$）であり、初期に比べて渦管が薄く引き伸ばされていることが認められる。この場合、両者の最大値は各々9.93及び10.24であり最大値もほぼ同一となっていることが判る。時刻t＝1.0においては、図４・７６（(a) $\nu=0.0025$, (b) $\nu=0.001189$）に示すように（プロット値は$\Omega_{plot}=16.0$）渦管がさらに引き伸ばされている様子が確認され、$\nu=0.001189$のケースにおいては顕著な微小渦の発生も確認できる。この場合、エンストロフィの最大値は各々30.34，59.15であり、後者の渦度場が時刻t＝0.5から1.0の間に非常に発達したことを物語っている。

さらに、両者の全エネルギ、エンストロフィ、エネルギ散逸率及びマイクロスケールレイノルズ数の時間推移を図４・７７～８０に示す。図中の「□」は$\nu=0.0025$の結果を、「○」は$\nu=0.001189$の結果を各々表している。全エネルギ及びエンストロフィは、時刻t＝0.2までは両者共にほぼ同一の軌跡をたどることが判り、時刻t＝0.5においても両者の差は非常に小さいことが認められる。また、エネルギ散逸率及びマイクロスケールレイノルズ数も時刻t＝0.5まではほぼ同一の時間変化をしていることが判る。従って、この時刻までは流れ場はほぼ同一の挙動を示すものと考えられ、渦度場及びエンストロフィ分布の結果と合致する。時刻t＝0.2においてはエネルギ損失は$\nu=0.0025$の場合0.7%、$\nu=0.001189$の場合0.3%、マイクロスケールレイノルズ数の減少は4.7%及び4.6%であり、この間の変化は同一のものであると考えられる。この時刻以降、両者の統計量には差異が現れ、$\nu=0.001189$の流れ場はエンストロフィ及びエネルギ散逸率の明確な増加により、微小渦の顕著な発生へと至ることが確認できる。時刻t＝1.0においては、両者のエネルギ損失は6.5%及び3.1%であり、マイクロスケールレイノルズ数の減少は52.5%及び57.6%である。

両者のエネルギ・スペクトル分布の比較を時刻t＝0.5及び1.0について図４・８１(a)、(b)に各々示す。動粘性係数の違いによるエネルギ・スペクトルの変化は両時刻共に低波数領域（k＜10）ではほとんど存在しない。このことは、流れ場の大規模構造に対する差異は両者共に認められない結果と一致する。一方、高波数領域においては動粘性係数$\nu=0.0025$の結果が$\nu=0.001189$の結果に比べて低いことが認められる。しかも、その差異は時刻が経過するに従って大きくなる傾向が伺える。図４・８２に各々の時刻に対応するエネルギ散逸スペクトルを示す。エネルギ散逸スペクトルは動粘性係数$\nu=0.001189$の場合の方が小さいことが認められる。これらのことより、前者がより粘性の影響を強く受け、微小構造（微小渦）の粘性拡散がより顕著であることを示している。さらに、両者

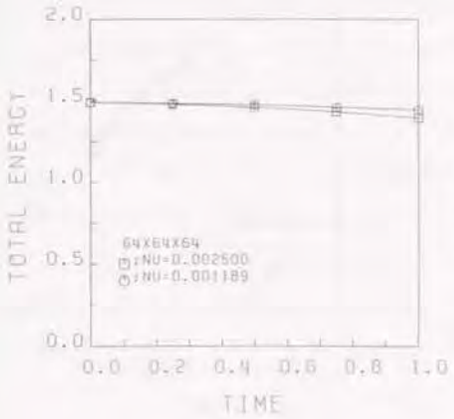


図４・７７　全エネルギの比較

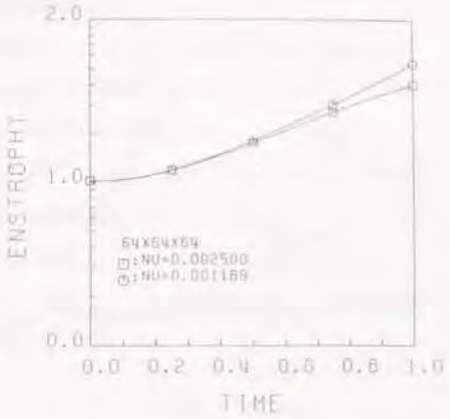


図４・７８　エンストロフィの比較

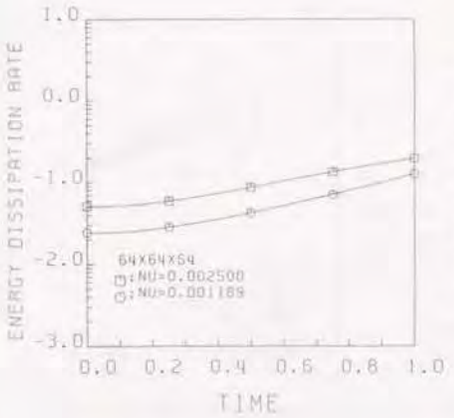
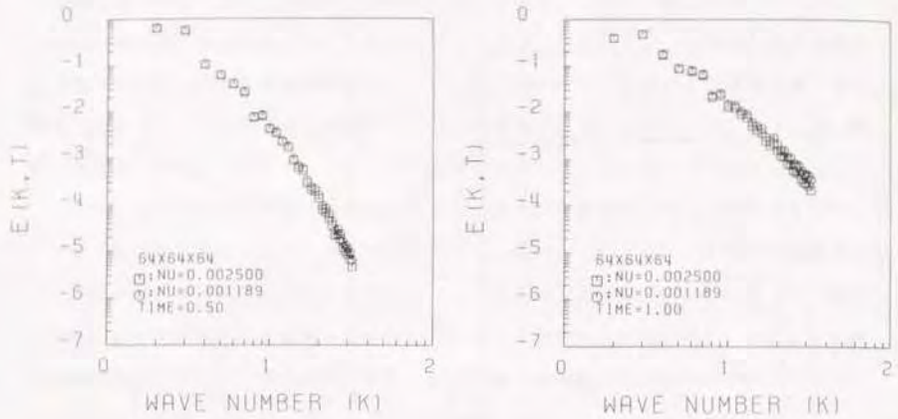


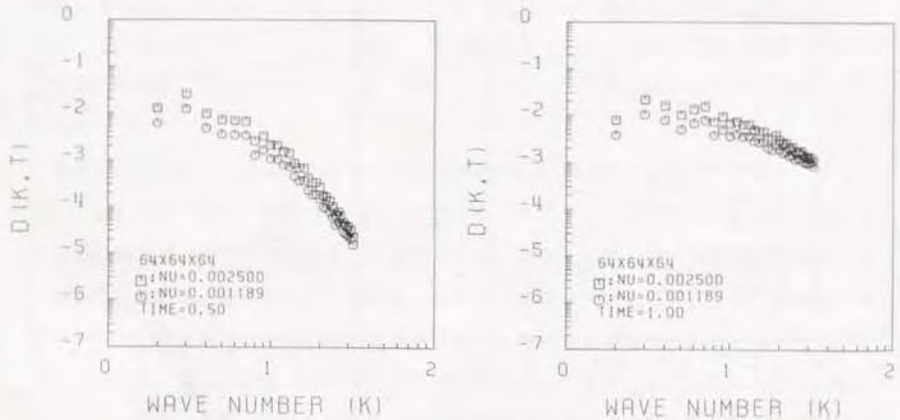
図４・７９　エンストロフィの比較

図４・８０　マイクロスケールレイノルズ数の比較



(a) t＝0.5　　(b) t＝1.0

図４・８１　エネルギ・スペクトルの比較



(a) t＝0.5　　(b) t＝1.0

図４・８２　エネルギ散逸スペクトルの比較

共に時刻の経過に従って低波数（k＝2,3）のエネルギが減少し、高波数のエネルギが増加することが確認される。これはエネルギが低波数から高波数へ伝達されるエネルギカスケードが生じていることを示している。その際には高波数領域のエネルギ散逸スペクトルも大きくなり、高波数領域における粘性拡散が顕著であることが確認できる。

本直接数値シミュレーションによって得られたエネルギ・スペクトルが満足する冪乗則は、両ケース共に流れ場が発達過程にあると考えられる時刻t＝0.5においては$k^{-9/3}$則であり、複雑化過程である時刻t＝1.0においては$k^{-5.9/3}$則である。この結果は前項の低レイノルズ数シミュレーションの発達過程及び複雑化過程のエネルギ・スペクトルの冪乗則と一致することが確認できる。従って、流れ場が発達過程にあるときはコルモゴロフ・スペクトル（$k^{-5/3}$）より大きなスペクトルが得られ、複雑化過程へと移行するにつれてコルモゴロフ・スペクトルに漸近するスペクトルとなり、自由減衰過程である単純化過程においてはコルモゴロフ・スペクトルとなることが判明する。

第５章　結　　論

本論文においては，工学上重要となる乱流現象の様な複雑な物理現象を数値解析する際に用いられる高次精度数値計算法として、高次精度線の方法を提案し，幾つかの流れ場を対象としてその信頼性を検討することを目的とし、研究を行った。その結果をまとめると以下の様になる。

本研究では作動流体を非圧縮性粘性流体と仮定しているために、流体現象を支配する方程式は非圧縮性粘性ナビェ・ストークス方程式系となる。この方程式系は，運動方程式である時間発展型偏微分方程式の非圧縮性粘性ナビェ・ストークス方程式、及び、方程式系が閉じるために必要となる楕円型偏微分方程式により構成される。従って、この方程式系を数値的に解くためには、２種類の数値計算法が必要となる。特に、楕円型方程式は毎時間ステップ収束解を求める必要があり、楕円型方程式の解法に費やされる計算時間の全計算時間に占める割合は極めて大きいために，高速の解法が必要とされる。そこで，第３章において，発展型方程式の数値解法として高次精度線の方法を、楕円型方程式の高速数値解法として可変精度多重格子法を提案し，精度・安定性・収束性等の検討を応用例を交え詳述した。

高次精度線の方法は，修正微分求積法を用いた空間微分項の離散化とその結果得られる時間に関する連立常微分方程式の４次精度ルンゲ・クッタ法による積分とにより構成される。時間積分法に古典的なルンゲ・クッタ・ギル法、及び、縮退ルンゲ・クッタ法を採用し、検定問題として、１次元熱伝導方程式、１次元バーガース方程式、及び、２次元非圧縮性粘性ナビェ・ストークス方程式を取り上げ、各々の場合について精度・安定性の検討を行った。その結果、精度の面では両方法共に４次精度を有することが確認され、安定性の面では、粘性の影響が大きい場合には縮退ルンゲ・クッタ法が、逆に、粘性の影響が小さい場合にはルンゲ・クッタ・ギル法が高い安定性を有することが確認された。一般に、工学上重要となる流れの多くは粘性の影響が小さい，即ち，レイノルズ数が高い流れであることが多く，この様な流れを解析するためには時間積分法としてルンゲ・クッタ・ギル法を採用することが最善の選択であるとの結論を得た。

可変精度多重格子法は、楕円型方程式に擬似時間項を付加した（擬似時間依存法）放物型偏微分方程式を高次精度線の方法により解くことにより、収束解を求めるものであり、さらに、収束加速法として多重格子法を採用した方法である。擬似時間依存法においては収束解のみに意味があるために、擬似時間積分法としては安定性に優れた有理ルンゲ・クッタ法を採用して収束性能の向上を図っている。この擬似時間依存法の有効性を検討するために、遷音速ポテンシャル流れに対する擬似時間依存法を取り上げ、単独翼まわりの外部流れ，及び，流路内・翼列内の内部流れについて数値計算を行った結果、演算子近似分割法の一種であるＡＦ２法，及び，他者により得られた結果と良好に一致し、擬似時間依存法が遷音速ポテンシャル流れに対しても有効であることが確認された。一方、楕円型方程式は通常緩和法を用いて解かれるが、その緩和法として本研究においては、複数の格子点を１つの群として非対称陰的差分表示し、その係数行列を解析的に反転させることにより陽的差分表示を得る群陽的反復法を採用し、その収束性を最も一般的な楕円型方程式の解法であるＳＯＲ法と比較した結果、約１／５の反復回数で収束解が得られることが確認された。さらに、遷音速完全ポテンシャル流方程式の解法に適用した結果、ＡＦ２法と比較して高い収束性能を有することが確認された。以上の有理ルンゲ・クッタ法を用いた擬似時間依存法、及び、群陽的反復法を用いた緩和法共に完全に陽的な方法であり、スーパーコンピュータ・アーキテクチャに対する適合性が高いと考えられ，スーパーコンピューティングに対して非常に有効であるとの結論を得た。

可変精度多重格子法における収束加速法として採用した多重格子法は、何層もの格子系を用い各々の格子に対応する誤差の周波数成分を迅速に減衰させる方法であり、無限個の格子を取った場合には収束までに要する計算量は未知数の数に比例すると考えられるために、最高速の緩和法となり，特に、大規模計算に対して都合が良い。そこで、検定問題として２次元ポアソン方程式を取り上げ、可変精度多重格子法の精度・収束性を検討した結果、精度に関しては任意の指定精度が得られることが，収束性に関しては従来の多重格子法と同一の収束加速効果が得られ、ＳＯＲ法と比較しても大幅な収束加速効果が得られることが確認された。さらに、空間精度を高次にした際にも，各々の空間精度において格子点数依存性は認められず，収束に要する仕事量に関しても、空間精度が１０次精度の場合、２次精度の約２倍であり、収束性能の悪化はあまり認められなかった。３次元への拡張として、３次元ポアソン方程式を取り上げ，可変精度多重格子法の精度・収束性を検討した結果、任意の指定精度が得られ，収束性に関しても２次元の結果とほぼ同一の収束加速効果が得られることが判明し、３次元への適用においても有効であるとの結論を得た。一般の楕円型方程式に対する適用例として、格子形成法に可変精度多重格子法を適用した結果、従来の多重格子法と同一の収束加速効果が得られ，本研究において提案した可変精度多重格子法が一般の楕円型方程式においても優れた収束加速効果を有する方法であることが確認された。また、粗格子系において、緩和法として群陽的反復法を採用する方法の

検討も行ったが、プログラミングの容易さと汎用性の２つの面から、本研究においては、全格子系で有理ルンゲ・クッタ法を用いた高次精度線の方法を採用することが最善の選択であるとの結論を得た。

以上述べた様に、本研究において採用した高次精度線の方法は、運動方程式、及び、それに付随する楕円型方程式共に、空間微分項の離散化に修正微分求積法を用いた線の方法であり、①１つのパラメータを変更することにより任意の空間精度が得られる、②完全に陽的な方法であるためにスーパーコンピュータ・アーキテクチャに対する適合性が高い、③３次元に容易に拡張することができる、等の特徴を有する汎用性に富んだ高次精度数値計算法であることが確認された。

次に、第４章において、高次精度線の方法を乱流現象の高次精度数値シミュレーションに適用した結果を述べた。取り上げた流れ場は、正方形・立方体キャビティ内流れ、２次元剪断層、及び、２次元、３次元一様等方性乱流であり、以下に述べる知見が得られた。

粘着壁が存在する流れ場の例として取り上げた正方形キャビティ内流れにおいては、レイノルズ数が高くなるに従って、低次精度解と高次精度解との差が拡大する傾向が認められ、高レイノルズ数流れの解析における高次精度数値計算法の必要性が確認された。さらに、空間精度を高次にすることによる収束性能の劣化は認められず、ベクトル型スーパーコンピュータに対する適合性においてもコードのチューニング無しに９７％以上のベクトル化率を誇っており、計算効率の面においても高次精度線の方法が高い効率を有していることが確認された。

３次元流れへの適用例として取り上げた立方体キャビティ内流れにおいては、高次精度（６次精度）数値シミュレーション結果は８倍の格子点数を有する２次精度解、及び、他者の結果と良好に一致することが示され、空間精度を高次精度にすることにより分解能の限界が緩和されることが確認された。さらに、収束までに要する時間ステップ数も同一の数値解が得られる２次精度法の４０％で済むことが明らかになり、高次精度線の方法は信頼性・計算効率の両面で優れた数値計算法であるとの結論を得た。

２次元剪断層中に存在する渦の巻き上がり、及び、合体の高次精度数値シミュレーションを行った結果、低次精度解と高次精度解との比較においては、空間微分項を離散化する際に生じる打切り誤差が数値分散・数値粘性として作用することに起因する低次精度解の時間遅れ・渦境界の拡散、及び、分解能不足により生じる低次精度解の振動が確認され、この種の数値解析における高次精度数値計算法の必要性を結論した。また、基本剪断流に付加する攪乱の波長により、各々の波長に対応した物理現象が起こることが判明し、渦層

厚さの成長率は巻き上がり・合体を問わず一定になることが確認された。さらに、これらの現象は、平均流と攪乱流とのエネルギ授受と対応しており、平均流から攪乱流へのエネルギ供給は渦の成長を促し、攪乱流から平均流へのエネルギ供給は渦の引き伸ばしを促すことが確認され、流れ場の変遷はこの両者の間のエネルギ授受を繰り返しながら、エネルギがバランスした準平衡状態に至ることを明らかにした。

２次元一様等方性乱流に対する高次精度数値シミュレーションを行った結果、低レイノルズ数シミュレーションにおいては、１０次精度解が楕円型方程式をフーリェ級数展開法を用いて解いた数値解と完全に一致することを示し、本研究で提案した可変精度多重格子法の信頼性を確認した。また、低次精度で数値計算を行った場合、大規模渦構造は分解可能であるが、微小渦構造は分解することができず、従って、全エネルギは良好な一致を示すが、エンストロフィ散逸率には顕著な相違が現れることが明らかになり、乱流の直接シミュレーションにおける高次精度数値計算法の必要性を確認した。また、低レイノルズ数流れにおける慣性小領域のエネルギ・スペクトルが満足すべき冪乗則はk^{-4}となることを確認した。高レイノルズ数シミュレーションにおいては、流れ場の履歴が、渦層の伸長による渦の発達化過程・渦境界での渦度勾配の急激な変化による微小渦の発生に伴う流れ場の複雑化過程・大規模渦へのエネルギ集中に伴う流れ場の単純化過程、の３つの過程に分類することが可能であることを明らかにし、各々の過程において慣性小領域のエネルギ・スペクトルが満足すべき冪乗則は、k^{-4}則・k^{-3}則・k^{-4}則となることが結論された。さらに、レイノルズ数の変化に伴う流れ場の変遷に関しては、流れ場の大規模構造はレイノルズ数の如何を問わず変化せず、渦の微小構造がレイノルズ数が高くなるに従って、複雑さを増すことが確認された。

３次元一様等方性乱流に対する高次精度直接数値シミュレーションを行った結果、低レイノルズ数シミュレーションにおいては、比較のために採用したOrszagとPatterson の結果と一致することが確認され、本研究において提案した高次精度数値計算法の有効性並びに信頼性が結論された。また、流れ場の変遷は２次元の場合と同様に、発達過程・複雑化過程・単純化過程に分類することが可能であり、各々の過程において満足すべきエネルギ・スペクトルの冪乗則は$k^{-8/3}$則、$k^{-5/3}$則及び$k^{-5/3}$則となり、単純化過程においてコルモゴロフ・スペクトル（$k^{-5/3}$）が得られることを確認した。中間レイノルズ数シミュレーションにおいては、レイノルズ数の違いによって流れ場の大規模構造に変化はなく、エネルギが低波数（大規模構造）から高波数（微小構造）へ伝達されることにより生じる流れ場の微小構造に変化が起こることを確認した。さらに、エネルギ・スペクトル分

布より、エネルギカスケードが起こっていることを確認し、エネルギ・スペクトルが満足する冪乗則は発達過程において$k^{-9/3}$則、複雑化過程において$k^{-5.9/3}$則であり、低レイノルズ数の場合と同様の結果を得た。このことより、エネルギ・スペクトルは発達過程・複雑化過程と移行するに従ってコルモゴロフ・スペクトルに漸近し、単純化過程においてコルモゴロフ・スペクトルが得られるとの結論を得た。

最後に、今後の展望、及び、問題点を述べる。現在のコンピュータ（特に、演算速度・主記憶容量）の加速度的な進歩を考慮すると、今後、スーパーコンピュータを用いたより複雑な２次元、及び、３次元乱流の高次精度直接シミュレーションが行われることが予想されるが、その際に問題となる点としては、１つに高次精度流出境界条件の設定方法が挙げられる。非圧縮性粘性流れにおいては、毎時間ステップ楕円型方程式を解く必要があるため、内点の情報が瞬時に境界に伝達され、その結果、境界条件の善し悪しが計算結果を左右する重要な要因となる。現在のところ、２次精度解法においては確立された流出境界条件は存在するが、残念ながら、高次精度流出境界条件は確立されておらず試行錯誤の状態であり、この問題を解決することが必要不可決、且つ、緊急の課題である。この高次精度流出境界条件に関しては、局所的に位相速度を算出し、この位相速度を用いて境界において移流方程式を解く方法を現在検討中であり、有望であるとの結果を得ている。

また、本研究で採用した基礎方程式は渦度－流れ関数（ベクトル・ポテンシャル）表示ナビェ・ストークス方程式系であるために、非圧縮性の条件である連続の式は自動的に満足されるものの、工学的に重要な圧力が陽に求まらない。さらに、乱流モデルとの比較等を行う際においても、直接比較可能な基礎変数（速度－圧力）表示方程式系を用いる方が都合が良い。従って、高次精度線の方法を基礎変数表示方程式系に適用することが今後の課題となる。現在の基礎変数表示方程式系の解法の主流は食い違い格子系を用いたＭＡＣ法、及び、その改良型であり、速度と圧力の定義点が異なっているために、実験データとの直接比較が困難である。そこで、速度・圧力を同一点で定義し、且つ、連続の式を満足させる様なスキームの開発が急務であると考えられる。

本研究においては、作動流体を非圧縮性粘性流体と仮定しているが、圧縮性粘性流れへの適用も興味ある課題である。圧縮性粘性流れの適用範囲は、スペースシャトル等の大気圏再突入問題、スクラムジェットの開発、アクリエーション等広範囲に渡り、工学のみならず理学・天文学上重要な問題を含んでいる。圧縮性粘性流れの数値解析においては、衝撃波等の存在により生じる不連続面をどの様に鋭く捕獲するかが重要となるが、最近スペクトル法を用いた圧縮性粘性流れの解析も行われており[68,69]、高次精度線の方法が適

用できる可能性が高いと判断できる。現在、高次精度線の方法を用いた圧縮性（一様等方性）乱流の数値シミュレーションを行っており、高次精度線の方法が有望であるとの結果も得られつつある。この場合楕円型方程式を解く必要は無く、時間発展型の運動方程式を解くだけで良いために、高次精度計算を行ったとしても１時間ステップ当たりの計算時間の増加は２次精度解法の１０％以内となることが予想され、非常に効率的なスキームを構築することが可能となると期待できる。さらに、衝撃波等の不連続面を精度良く捕獲するための高次精度非振動差分法の開発も現在開始したところである。

謝　　辞

本研究を行うに際し，終始温情ある御指導と御鞭撻を戴いた恩師である京都工芸繊維大学工芸学部機械システム工学科教授・里深信行博士に対して深甚なる謝意を表します。

また，本論文を完成させるに際し，数多くの御教示を与えて下さいますと共に大きな御力添えを戴いた東京大学生産技術研究所教授・小林敏雄博士，並びに東京大学工学部航空学科教授・久保田弘敏博士に厚く御礼申し上げます。

さらに，本研究を遂行するに際し，有益な御助言及び議論を戴きました京都工芸繊維大学工芸学部機械システム工学科助教授・森西晃嗣博士，同じく教務職員・小幡正規君に対して厚く御礼申し上げますと共に本研究の完成に便宜を図って戴いた京都工芸繊維大学工芸学部機械システム工学科の皆様に対して感謝致します。

最後に，本研究の遂行に際し，大いなる忍耐と激励を持って見守ってくれた家族の容子・絢葉・脩祐に感謝致します。

参 考 文 献

(1) 吉澤徴，" 乱流の Large-Eddy Simulation "，生産研究，Vol.36，No.4，(1984)，1-6.

(2) Orszag, S.A., "Turbulence and Transition: A Progress Report", Lecture Notes in Physics, Vol.59, (1976), 32-51, Springer-Verlag.

(3) Herring, J.R., Orszag, S.A., Kraichnan, R.H. and Fox, D.G., "Decay of Two-Dimensional Homogeneous Turbulence", Journal of Fluid Mechanics, Vol.66, (1974), 417-444.

(4) Orszag, S.A., "Comparison of Pseudospectral and Spectral Approximation", Studies in Applied Mathematics, Vol.51, No.3, (1972), 253-259.

(5) Brandt, A., "Multi-Level Adaptive Solutions to Boundary-Value Problems", Mathematics of Computation, Vol.31, No.138, (1977), 333-390.

(6) Satofuka, N. and Morinishi, K., "A Numerical Method for Solving the Vlasov Equation", NASA TM-81339, (1982).

(7) Satofuka, N., Morinishi, K. and Nishida, H., "Numerical Solutions of the Vlasov Equation", Institute of Plasma Physics Research Report, IPPJ-725, (1985), 11-24.

(8) Wambecq, A., "Rational Runge-Kutta Methods for Solving System of Ordinary Differential Equation", Computing, Vol.20, (1978), 333-342.

(9) Evans, D.J., "Group Explicit Iterative Methods for Solving Large Linear Systems", International Journal of Computer Mathematics, Vol.17, (1985), 81-108.

(10) Williamson, J.H., "Low-Storage Runge-Kutta Schemes", Journal of Computational Physics, Vol.35, (1980), 48-56.

(11) Jones, D.J., South, J.C.Jr. and Klunker, E.B., "On the Numerical Solution of Elliptic Partial Differential Equations by the Method of Lines", Journal of Computational Physics, Vol.9, (1972), 496-527.

(12) Bellman, R., Kashef B.G. and Casti, J., "Differential Quadrature: A Technique for the Rapid Solution of Nonlinear Partial Differential Equations", Journal of Computational Physics, Vol.10, (1972), 40-52.

(13) Beam, R.M. and Warming, R.F., "Alternating Direction Implicit Methods for Parabolic Equations with a Mixed Derivative", SIAM Journal of Sci. Stat. Comput., Vol.1, No.1, (1980), 131-159.

(14) Benton, E.R. and Platzman, G.W., "A Table of Solutions of the One-Dimensional Burgers Equation", Quarterly of Applied Mathematics, Vol.30, (1972), 195-212.

(15) Orszag, S.A., "Numerical Methods for the Simulation of Turbulence", Physics of Fluids SupplementⅡ, Vol.12, (1969), 250-257.

(16) Hairer, E., "Unconditionally Stable Explicit Methods for Parabolic Equations", Numerische Mathematik, Vol.35, (1985), 57-68.

(17) Nishida, H., Satofuka, N. and Yamada, T., "Numerical Simulation of Transonic Potential Flows Using Pseudo-Unsteady Methods", Memoirs of the Faculty of Engineering and Disign, Kyoto Institute of Technology, Vol.35, (1986), 103-117.

(18) Nishida, H., Satofuka, N., Tamaki, T. and Shimizu, A., "Numerical Simulation of Transonic Cascade Flows Based on Potential Equation", Computational Mechanics '86, (1986),Ⅶ71- Ⅶ76, Springer-Verlag.

(19) 里深信行，西田秀利，山田敏男，" 非粘性遷音速流に対するポテンシャル流の解とオイラー方程式の解との比較",日本機械学会論文集Ｂ編，Vol.54, No.497, (1988), 72-79.

(20) Veuillot, J.P. and Viviand, H., "A Pseudo-Unsteady Method for the Computation of Transonic Potential Flows, AIAA Paper, 78-1150, (1978).

(21) Jameson, A. and Schmidt, W., "Some Recent Developments in Numerical Methods for Transonic Flows", Computer Methods in Applies Mechanics and Engineering 51, (1985), 467-493, North-Holland.

(22) Jameson, A. and Baker, T.J., "Solution of the Euler Equations for Complex Configurations", AIAA Paper, 83-1929, (1983).

(23) Thompson, J.F., Thames, F.C. and Mastin, C.W., "Automatic Numerical Generation of Body-Fitted Curvilinear Coordinate System for Field Containing Any Number of Arbitrary Two-Dimensional Bodies", Journal of Computational Physics, Vol.15, (1974), 299-319.

(24) 里深信行，西田秀利，玉木真一，清水淳，" ＡＦ２法による遷音速翼列間流れの数値解析 "，日本機械学会論文集Ｂ編，Vol.52, No.475, (1986), 1184-1190.
Satofuka, N., Nishida, H., Tamaki, T. and Shimizu, A., "Numerical Analysis for Transonic Cascade Flows Using the AF2 Scheme", Bulletin of the JSME, Vol.29, No.257, (1986), 3710-3716.

(25) Akay, H.U. and Ecer, A., "Finite-Element Analysis of Transonic Flows in Highly Staggered Cascades", AIAA Journal, Vol.20, No.3, (1981), 410-416.

(26) Nishida, H. and Satofuka, N., "Numerical Solutions of the Transonic Full Potential Equation Using Group Explicit Iterative Method", Memoirs of the Faculty of Engineering and Design, Kyoto Institute of Technology, Vol.37, (1988), 17-29.

(27) Holst, T.L. and Albert, J., "An Implicit Algorithm for the Conservative, Transonic Full Potential Equation with Effective Rotated Differencing", NASA TM-78570, (1978).

(28) Nishida, H. and Satofuka, N., "Automatic Higher-Order Multi Grid Method and Its Applications", Memoirs of the Fuculty of Engineering and Design, Kyoto Institute of Technology, Vol.36, (1987), 24-35.

(29) 西田秀利，里深信行，" 可変精度多重格子法による正方形キャビティ内流れの高次精度数値シミュレーション "，日本機械学会論文集Ｂ編，Vol.56, No.532, (1990), 3603-3610.

(30) Nishida, H. and Satofuka, N., "Higher Order Solutions of Square Driven Cavity Flow Using a Variable-Order Multi-Grid Method", International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol.34, (1992), 637-653.

(31) Ghia, U., Ghia, K.N., and Shin, T., "High-Re Solutions for Incompressible Flow Using the Navier-Stokes Equations and a Multigrid Method", Journal of Computational Physics, Vol.48, (1982), 387-411.

(32) 西田秀利，洲崎訓任，里深信行，" ３次元立方体キャビティ内流れの高次精度数値シミュレーション "，第３回ＪＳＭＥ－ＣＦＤワークショップ　課題１資料集（解答10），(1990), 56-61.

(33) 松本洋一郎，小原拓，大橋秀雄，李英浩，" 三次元立方体キャビティ内の流れ "，第３回ＪＳＭＥ－ＣＦＤワークショップ　課題１資料集（解答4），(1990), 18-25.

(34) 岩津玲磨，" ３次元キャビティ内の流れ "，第３回ＪＳＭＥ－ＣＦＤワークショップ　課題１資料集（解答3），(1990)，13-17.

(35) 加藤保真，棚橋隆彦，" 三次元キャビティ内の流れ（Re=400,1000,5000の場合）"，第３回ＪＳＭＥ－ＣＦＤワークショップ　課題１資料集（解答18），(1990)，99-106.

(36) 望月修，木谷勝，" 正方キャビティ流れの３次元構造 "，第３回ＪＳＭＥ－ＣＦＤワークショップ　課題１資料集（解答15），(1990)，78-84.

(37) Pan, F. and Acrivos, A., "Steady Flows in Rectangular Cavities", Journal of Fluid Mechanics, Vol.28, No.4, (1967), 643-655.

(38) Koseff, J.R. and Street, R.L., "On End Wall Effects in a Lid-Driven Cavity Flow", Transactions of the ASME, Journal of Fluid Engineering, Vol.106, (1984), 385-389.

(39) 西田秀利，里深信行，" 可変精度多重格子法による２次元せん断層の数値シミュレーション "，日本機械学会論文集Ｂ編，Vol.57, No.540, (1991), 2569-2576.

(40) Brown, G.L. and Roshko, A., "On density Effects and Large Stracture in Turbulent Mixing Layers", Journal of Fluid Mechanics, Vol.64, Part4, (1974), 775-816.

(41) Metcalfe, R.W., Orszag, S., Brachet, M.E., Menon, S., and Riley, J.J., "Secondary Instability of a Temporally Growing Mixing Layer", Journal of Fluid Mechanics, Vol.184, (1987), 207-243.

(42) Patnaik, P.C., Sherman, F.S., and Corcos, G.M., "A Numerical Simulation of Kelvin-Helmholtz Waves of Finite Amplitude", Journal of Fluid Mechanics, Vol.73, Part2, (1976), 215-240.

(43) Corcos, G.M. and Sherman, F.S., "The Mixing Layer:Deterministic Models of a Turbulent Flow. Part1. Introduction and the Two-Dimensional Flow", Journal of Fluid Mechanics, Vol.139, (1984), 29-65.

(44) Lesieur, M., Staquet, C., Roy, P.E., and Comte, P., "The Mixing Layer and Its Coherence Examined from the Point of View of Two-Dimensional Turbulence" Journal of Fluid Mechanics, Vol.192, (1988), 511-534.

(45) Comte, P., Lesieur, M., Laroche, H., and Normand, X., "Numerical Simulations of Turbulent Plane Shear Layers", Turbulent Shear Flow 6, (1989), 360-380, Springer-Verlag.

(46) 宮内敏雄，斉藤拓也，谷雅弘，" 乱流混合の Large Eddy Simulation（第１報，二次元場）"，日本機械学会論文集Ｂ編，Vol.53, No.487, (1987), 816-823.

(47) Michalke, A., "On the Inviscid Instability of the Hyperbolic-Tangent Velocity Profile", Journal of Fluid Mechanics, Vol.19, (1964), 543-556.

(48) 西田秀利，里深信行，" 高次精度数値計算法による二次元一様等方性乱流の大規模数値シミュレーション "，日本機械学会論文集Ｂ編，Vol.56, No.528, (1990), 2283-2290.

(49) Kolmogorov, A.N., "The Local Stracture of Turbulence in Incompressible Viscous Fluid for Very Large Reynolds Numbers", C.R. Acad. Sci. U.R.S.S., Vol.30, (1941), 301-305.

(50) Batchelar, G.K., "Computation of the Energy Spectrum in Homogeneous Two-Dimensional Turbulence", Physics Fluids SupplementⅡ, (1969), 233-239.

(51) Kraichnan, R., "Inertial Ranges in Two-Dimensional Turbulence", Physics of Fluids, Vol.10, No.7, (1967), 1417-1423.

(52) Leith, C.E., "Diffusion Approximation for Two-Dimensional Turbulence", Physics of Fluids, Vol.11, (1968), 671-673.

(53) Saffman, P.G., "On the Spectrum and Decay of Random Two-Dimensional Vorticity Distributions at Large Reynolds Number", Studies in Applied Mathematics, Vol.50, No.4, (1971), 377-383.

(54) Lilly, D.K., "Numerical Simulation of Two-Dimensional Turbulence", Physics of Fluids SupplementⅡ, (1969), 240-249.

(55) Lilly, D.K., "Numerical Simulation of Developing and Decaying Two-Dimensional Turbulence", Journal of Fluid Mechanics, Vol.45, Part2, (1971), 395-415.

(56) Yamamoto, K., "Numerical Evidence of the k^{-3} Energy Spectrum in Two-Dimensional Turbulence", Journal of the Physical Society of Japan, Vol.53, No.12, (1984), 4094-4097.

(57) Deam, G.S. and Zabusky, N.J., "Ergodic Boundary in Numerical Simulations of Two-Dimensional Turbulence", Physical Review Letters, Vol.27, No.7, (1971), 396-399.

(58) Fornberg, B., "A Numerical Syudy of 2-D Turbulence", Journal of Computational Physics, Vol.25, (1977), 1-31.

(59) Brachet, M.E. and Sulem, P.L., "Free Decay of High Reynolds Number Two Dimensional Turbulence", Lecture Notes in Physics, Vol.218, (1984), 103-108.

(60) Brachet, M.E., Meneguzzi, M., Politano, H., and Sulem, P.L., "The Dynamics of Freely Decaying Two-Dimensional Turbulence", Journal of Fluid Mechanics, Vol.194, (1988), 333-349.

(61) Frisch, U. and Sulem, P.L., "Numerical Simulation of the Inverse Cascade in Two-Dimensional Turbulence", Physics of Fluids, Vol.27, No.8, (1984), 1921-1923.

(62) Satofuka, N. and Nishida, H., "A New Method for the Numerical Simulation of Turbulence", BAIL Ⅲ, (1984), 291-296, Boole Press.

(63) Satofuka, N., Nakamura, H., and Nishida, H., "Higher-Order Method of Lines for the Numerical Simulation of Turbulence", Lecture Notes in Physics, Vol.218, (1984), 475-480.

(64) Browning, G.L. and Kreiss, H.O., "Comparison of Numerical Methods for the Calculation of Two-Dimensional Turbulence", Mathematics of Computation, Vol.52, No.186, (1989), 369-388.

(65) Orszag, S.A. and Patterson, G.S., "Numerical Simulation of Turbulence", Statistical Models and Turbulence Proceedings of a Symposium Held at the University of California, San Diego, (1971), 127-147.

(66) Orszag, S.A. and Patterson, G.S., "Numerical Simulation of Three-Dimensional Homogeneous Isotropic Turbulence", Physical Review Letters, Vol.28, No.2, (1972), 76-79.

(67) Kida, S. and Murakami, Y., "Kolmogorov Similarity in Free Decaying Turbulence", Physics of Fluids, Vol.30, No.7, (1987), 2030-2039.

(68) 王健平，中村佳朗，保原充，"スペクトル選点法による圧縮性ナビェ・ストークス方程式の高精度計算"，日本航空宇宙学会誌，Vol.38, No.436, (1990), 232-240.

(69) Passot, T. and Pouquet, A., "Numerical Simulation of Compressible Homogeneous Flows in the Turbulent Regime", Journal of Fluid Mechanics, Vol.181, (1987), 441-466.