# 静止衛星の相対軌道決定の研究

川　瀬　成一郎

# 静止衛星の相対軌道決定の研究

１９９４年５月

川　瀬　成一郎

## 概　要

宇宙通信の発展にともない，静止軌道にある衛星の数が増えつづけている．その結果，軌道上の狭い領域に多数の衛星を配置せざるを得ないという状況が生じるようになった．このようなときに，衛星相互の位置関係を適正に管理し，とくに危険な過接近を防止するためには，衛星の相対運動の状態をつねに正確に把握することが必要である．本論文は，そのような技術をあらたに打ち立てることをめざすものである．

衛星が近接配置されたとき，従来の対応では，各衛星の軌道決定を個別におこない，それらの関係をみることによって相互位置を管理してきた．しかしながらこの方法には実施上の制約が多く，とくに扱うことができる衛星数が少ないという欠点があった．

本論文はまず，軌道決定精度の分析にもとづいて，従来の管理技術の限界を見きわめる．そしてそれを克服するために，相対軌道決定という概念を提唱するのである．

相対軌道決定を実施するために，本論文はふたつの方法をあたえる．第１の方法は，複数の衛星に対する追跡観測を地上局において差動的におこなうというもので，各衛星に共通の観測誤差を打ち消すことによって正確な相対運動を決定する．第２の方法では，衛星間において直接に追跡観測をおこなうことにより，衛星上で相対運動を決定する．ふたつの方法についてそれぞれ，追跡観測のおこない方を示し，到達可能な決定精度をしらべる．また，観測値から相対運動を推定するカルマンフィルターをそれぞれについて導く．

本論文はさらに，これらふたつの相対軌道決定方法にもとづいて，過接近の防止ならびに相対位置の維持管理をおこなうための具体的手法を示す．これにより，多数の衛星の軌道管理が効率よく実行できるようになる．

以上の結果をふまえた結論として，衛星の増加にともなう今後の「静止軌道の混雑化」の問題は，技術的な解決が可能であることをのべる．

目　次

# 第１章　序論

## １－１　静止衛星の軌道位置

宇宙通信をになう静止衛星は，もはや現代の社会に不可欠の存在である．グローバルな宇宙通信の発展は，多くの国で新しい静止衛星の打上げをうながし，静止衛星の総数をたえまなく増加させている．

衛星を地球に対して静止させるためには，静止軌道 ― 地球の赤道の真上にある半径42165 km の円軌道 ― に置かなければならない．この軌道は，力学の法則によってただひとつしか存在しない軌道である．きわめて有用でありながら唯一の存在である静止軌道は，近年になって人類が共有する資源のひとつであると認識されるようになり，その利用の有効性，すなわちどれだけ多数の衛星を軌道上に置くことができるかという問題が重要になってきた．

ある衛星を静止軌道に配置するときには，国際的な協約に従って軌道位置の割りあてを受けることになっている．軌道位置とは，赤道に沿って測った衛星の経度，つまり衛星の直下点の地理的な経度のことである（図１－１）．原理的には３６０度の経度範囲の任意の一点に衛星を割りあてることができるから，軌道位置の数には制限がないように思われよう．ところが実際には次に述べるように，衛星に割りあてる軌道位置にはそれぞれ一定の広がりを持たせる必要があることから，軌道位置の総数は限られるのである．

静止軌道にある衛星には，地球の中心へ向かう逆自乗法則の引力が働くほかに，摂動と呼ぶ力 ― 月・太陽の引力，太陽の光が及ぼす圧力，地球内部の質量分布が球対称から歪んでいるために生じる力 ― がつねに働く．摂動は微小な力であるが，衛星の軌道を時間とともに変化させる．その結果，衛星を静止軌道のある特定の経度に配置したとしても，時間とともにその経度が変化していくことが避けられない．したがって，ひとつの位置に衛星を静止させておくためには定期的な軌道修正を必要とするが，割りあてる軌道位置の幅が狭いほど，必要な軌道修正の頻度が増してしまう．実用衛星として成りたつためには，経度の変動に一定の許容幅をもたせることが必要であり，関係諸国による検討の結果，ひとつの軌道位置の割りあて幅を 0.2 度とすることが規則として合意された［CCIR, 1982］．この割りあて幅の大きさは，衛星の設計および運用管制に与える影響が大きいため，将来的に変更される可能性が少ない．したがって割りあて可能な軌道位置の総数は，

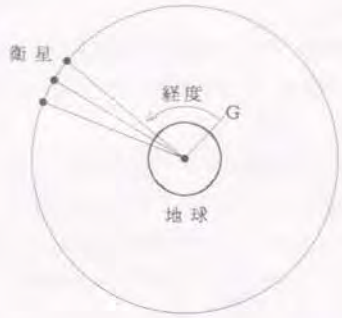



図１－１　静止衛星の軌道位置を，グリニヂ子午線Ｇからの経度で表す．

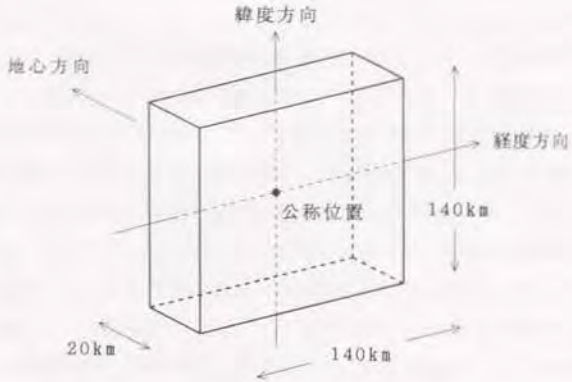



図１－２　軌道位置の広がりの範囲



最大で 360÷0.2=1800 か所である．これが，今後に有効利用をはかるべき「資源」の内容である．

では，あるひとつの衛星が軌道位置の割りあてを受けたならば，どのような空間領域を占有するであろうか．軌道の割りあて規則は経度位置の管理を目的としているから，緯度および半径方向の位置についてはとくに規制していない．しかし摂動のはたらきは，緯度と半径にも変化をひきおこす．通信・放送衛星として利用しやすい（すなわち利用者がアンテナを衛星に指向しやすい）ためには，経度と緯度の保持範囲の幅が等しいことが望ましく，実際の衛星の運用もそのように行うのが一般的である．一方，半径の保持範囲は，経度保持の実施方針に従属して定まり，通常 42165km ± 10km 程度の幅となっている．このように，ひとつの静止衛星が占有する空間領域は，緯度・経度方向にそれぞれ 0.2 度（長さ 140km），半径方向に 20km の広がりを持つ（図１－２）．以下，「軌道位置」とは，この領域の中心点すなわち公称軌道位置を指すとともに，あわせてこの占有領域の広がりの大きさをも意味するものとする．

## １－２　軌道の「混雑」の発生

軌道位置の総数が有限である一方では，衛星通信に利用できる電波の周波数チャンネルの数もまた有限である．通信衛星の数が増してくると，同一または近い周波数チャンネルを複数の衛星で共用することが必要になるので，たがいの電波の混信を避けるために，各衛星の軌道位置のあいだに間隔をあけなければならない．混信保護のための間隔は通信用アンテナの特性や周波数帯に依存するが，たとえばマイクロ波（６ＧＨｚ／４ＧＨｚ）帯を利用する衛星については従来，５度ないし３度とされていた．最近の技術的努力により，それを２度間隔に縮小することが可能になったが［Reijnen and Graaff, 1989］，これ以上の縮小は地球局の設備の負担を増すために難しいとされている．このように，軌道と周波数の割りあてが連動することにともない，割りあて可能な軌道位置の総数は数百程度に減少してしまう．そのような状況のもとで，宇宙通信の発展により衛星数が増していくならば，いずれは衛星の総数が軌道位置の数を上まわる．その対応としては，同じ軌道位置に複数の衛星を配置し，衛星ごとに異なる周波数チャンネルを割りあてるしかない．このように，ひとつの軌道位置に２機をこえる衛星を配置せざるをえない状況を，ここでは「軌道の混雑」という．

衛星放送の発展は，軌道の混雑を加速する．放送衛星の電波は通信衛星に比べて高出力であるため，同一チャンネルを放送する衛星どうしの混信保護間隔を広くとらなければならない．そこで軌道と周波数の双方に係る利用効率を確保するためには，多数の放送チャンネルを一括して同一位置に割りあて，そのような一括割りあて位置を広い間隔をあけて軌道上に配置していくのが望ましい．現実の割りあてもそのように行われていて，たとえばわが国の衛星放送用の軌道位置（東経１１０度）には合計４か国用に３０チャンネルを割りあてており，欧州では８か国用に合計４０チャンネルを割りあてた例がある（西経１９度）．このような軌道位置には必然的に複数の衛星が配置されることになるが，とくに各国が独自に衛星を打ち上げ，しかもそれぞれに予備衛星を配備するならば，全チャンネルを利用した段階において衛星数が相当の多数にのぼることは明らかである．

軌道の混雑を将来的にひきおこす別の可能性として，クラスター衛星システムという構想がある［Visher, 1979］．それは，多数の通信衛星を，ひとつの軌道位置よりも狭い範囲に集団として配備し，連携動作させようとするものである（図１－３）．連携のためには衛星間を通信回線で結ぶことになるであろう．このような衛星集団は，地上の通信ユーザーにはあたかもひとつの大型通信衛星であるかのように見える．すなわち，ロケットの打上げ能力に制約されることなく，大規模な衛星通信システムを等価的に構築できる．しかも，故障のリスクを多数の衛星に分散させることによって，通信サービスの信頼性を高くするという設計も可能である．このような利点があるために宇宙通信システムの将来像として期待されているが［Walker, 1982; Renner and Nauck, 1984］，同時にこのシステムが高密度な軌道混雑の問題につながることは明らかである．

このように，将来的な静止軌道の混雑の発生については，衛星通信・放送の発展にともなう「自然」な混雑，ならびにクラスター衛星による「意図的」な混雑，というふたつの要因を考慮しなければならない．

### １－３　従来の対応と問題点

同一の軌道位置に複数の衛星を配置すると，衛星どうしの衝突の危険性が生じる．静止軌道の有効な利用のためには，この衝突の危険度を把握し，必要ならば防止・回避の方策を示すことにより，同一位置にどれだけ多数の衛星を収容できるかという疑問に答えなければならない．この問題に関しては，これまでに次のような検討がおこなわれてきた．



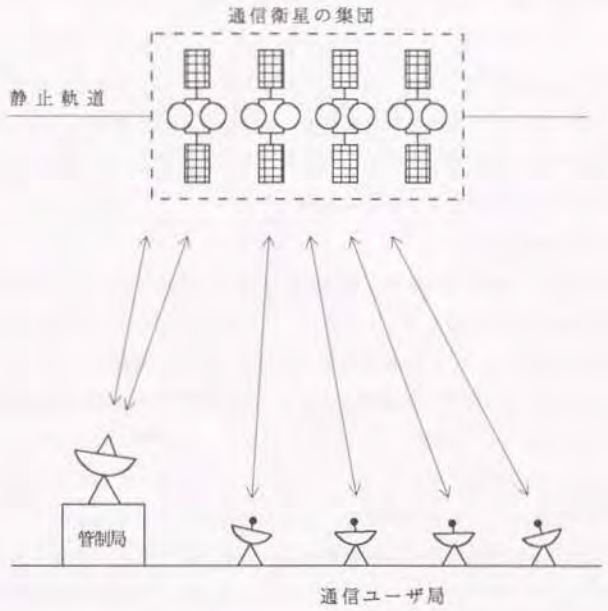



図１－３　クラスター衛星システムの概念

まず始めに，同一軌道位置にある２衛星の衝突確率を見つもる研究が行われた．Takahashi は，衛星の軌道運動を日周成分と長周期成分にわけて近似し，２衛星が重なりあう位置関係にある時間率を求めた．Hechler 等は，長期的な軌道運動にもとづいて衛星の空間分布密度の統計を作り，２衛星が重なりあう位置に存在する確率を求めた．これらの結果にもとづいて衝突率を算出すると，それぞれ次のようである．

２衛星の年間衝突数 $\doteqdot 7\times10^{-4}$ [Takahashi, 1981] (1-1)

$\doteqdot 9\times10^{-7}$ [Hechler and Van der Ha, 1981] (1-2)

ただしここでは２衛星の大きさをひとしく 10 m とした．これらの報告とは別に，衛星の運動が軌道の法則に従うことをとくに考慮せず，軌道位置のひろがりの中を２衛星がそれぞれ気体分子の運動のようにランダムに動くとする考えかたがある．それに従えば，付録Ａに示すように初等的な算出によって次の結果を得る．

２衛星の年間衝突数 $\doteqdot 6\times10^{-5}$ （気体分子モデル） (1-3)

このモデルに対しては，問題を単純化しすぎているとの批判があり，上記の各報告ともその批判にたってそれぞれに運動モデルを作成した．それらにもとづく結果は，ここに見るとおり大きく異なっている．つまり衝突確率の算出は，衛星の運動モデルの立て方によって大きく変わるのである．実際に各報告の結論も，Hechler 等では衝突の危険性は無視できるとしているのに対し，Takahashi ではサイズの大きな衛星では無視できないとしている．このように，衝突確率を絶対値として算定する試みは統一見解に至らなかった．

その次になされた試みは，衝突の確率を，十分に無視できるとみなせるレベルにまで相対的にひき下げる方法の研究である．具体的には，衛星のあいだに一定の「警戒距離」をもうけ，衛星どうしをそれ以内に接近させないように各衛星の軌道を協調的に計画しようというもので，その警戒距離のなかに軌道の管制の誤差を見込んでおくならば，衝突確率が「十分に」ひき下げられると考えるのである．このアプローチによれば，衝突確率を絶対値として算定する問題を回避することができる．衛星間に距離を確保するための具体的な方法が，これまでに図１－４（ａ～ｃ）のように提案されてきた．（ａ）はもっともわかりやすい方法で，ひとつの軌道位置をさらに経度方向に分割し，それぞれに衛星を閉じこめる．そのとき，各衛星の経度の動きが互いに同期するように軌道制御を計画することにより，衛星間距離を確保するのである．この方法はわが国の放送衛星の管制に用いられ



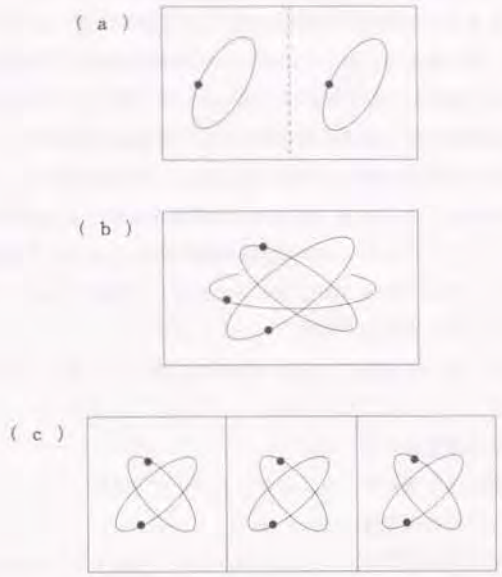



図１－４　衝突確率の低減のための諸方法
（ａ）経度方向に領域を分割する．
（ｂ）軌跡を空間的に分離する．
（ｃ）ａとｂの折衷

ており［江原, 1986］，2衛星について実績がある．しかしながら，衛星間の同期を維持するための軌道制御の作業量が衛星数とともに急増するので，3機ないし4機をこえる衛星にこの方法を適用するのは困難である．（b）では軌道位置を3次元的にとらえ，軌跡がたがいに交差しないように各衛星を配置する．この方法によれば，4機程度の衛星が収容可能であると報告されている［Eckstein et al, 1989］．しかし，各衛星が非交差軌跡を維持するために消費する燃料の増加分が無視できない［Haerting et al, 1988］．（c）は，（a）と（b）を折衷した方法で，ひとつの位置に2衛星だけを置き，必要な数の割りあて位置を並列して使用する［Hubert and Swale, 1984］．この方法では，衛星数に応じて占有領域を広げるため，軌道の利用効率の低下が避けられない．欧州各国の放送衛星4機を同一位置（先に述べた西経19度）に配置する計画が始まったとき，はじめは方式（b）を用いることにしていたが，関係の管制機関の検討により困難であるとされ，方式（c）をとることになった．さらにその際，管制システムを異にする衛星を安全のために異なる位置に分け，同一システムが運用する2衛星だけを同一位置に収容することになった［Boehnhardt, 1990; Dufor, 1991］．

以上の経緯をまとめると，同一軌道位置に複数の衛星を配置するに際して，現状では次の問題点がある：

- 2機を大きくこえる衛星の収容は困難である
- 管制システムを異にする衛星をともに収容することができない
- 管制作業量もしくは燃料消費量が増大する

これらの問題点は，いずれも静止軌道の効率的な利用を妨げ，軌道上の衛星総数を制限することに結びつく．これらが解決されなければ，今後の衛星数の増加により静止軌道がいずれ飽和に達し，宇宙通信の普及発展が停滞してしまうおそれがある．また，多数の衛星によるクラスターシステムは，検討を待たずして存立不可能であることになってしまう．本来，衛星の衝突確率は(1-1)～(1-3)式のいずれにせよ小さいにもかかわらず，このような問題点が生じてきたのはなぜか，またそれを克服して静止軌道の利用の発展を将来にわたって確保するにはどのようにすべきであるか，研究が求められている．

### 1－4　本論文の取り組みと構成

本論文は，前節で指摘した問題点の究明と，その打開を目的とする．はじめに，従来おこなわれてきた静止衛星の軌道決定について，その精度を正確に評価することにより，問題点の所在をあきらかにする．それをふまえ，問題点を打開するためには「相対軌道決定」という新しい方法が有効であることを示す（第2章）．それを実行にうつす方策として，第一に地上からの差動追跡にもとづく方法（第3章），第二に衛星間の相互追跡による方法（第4章）を，それぞれくわしく論考する．それらの結果から，相対軌道決定を導入するならば軌道の混雑に対する効果的な管理方法が得られること，しかもそれは管制の作業量および衛星の燃料消費量の点からも有利であることを示す（第5章）．最後にまとめとして，本研究の将来の宇宙通信に対する意義をのべる（第6章）．

本論文は，可能なかぎり解析的なアプローチにもとづいて論旨を展開し，一般性のある結果を導くことを特徴とする．ただし相対軌道決定用のカルマンフィルターの検証のために，数値シミュレーションをあわせ利用する．また，地上からの差動追跡方式に関しては，実験データにもとづいた精度検証をおこなう．

## 第２章　静止衛星の軌道決定精度

### ２－１　本章のねらい

軌道の混雑のもとで衛星の安全を確保するためには，各衛星の軌道を協調的に計画し，衛星間の距離をある一定の『警戒距離』よりも大きく保つことを前章でのべた．この警戒距離の大きさは，軌道決定の誤差レベルに合わせて設定すべきものであるが，その大小はあきらかに，軌道位置に収容できる衛星数を強く支配する．しかしながら静止衛星の軌道決定の誤差レベルについて，これまで十分な解明がなされたことはなかった．なぜなら，静止軌道決定の本来の目的は衛星の位置保持にあるため，割りあて位置範囲のなかに衛星があることが確かであれば，それ以上くわしい精度を問う必要がなかったからである．したがって軌道の混雑問題をくわしく論じるためには，まず第一に，軌道決定の精度を正確に評価する必要がある．

本章では，静止軌道の決定精度がどのように定まるか，ということを明らかにする．はじめに，衛星追跡のいろいろな方式に対して，軌道決定の誤差を表示する公式をつくる（２－２節～２－８節）．つぎに，衛星追跡の誤差の実例を収集し（２－９節～２－１２節），その公式に代入することによって，軌道決定の精度を実際に評価する（２－１３節）．それをふまえて，従来の混雑管理における問題点の原因をあきらかにするとともに，その打開のための方策を打ち出す（２－１４節）．

### ２－２　静止軌道の決定と精度評価

軌道決定という作業は，衛星の追跡データの取得から始まる．静止衛星の追跡の標準的な方法には，地上局と衛星の間の信号往復時間にもとづく距離の観測（測距），および衛星の方向を自動追尾するアンテナによる方位角・仰角の観測（測角）がある．衛星電波のドプラー効果にもとづく追跡は，静止衛星の距離変化率が小さいために利用できない．ほかに光学観測と電波干渉計もまた，測角の方法として可能であるが，静止衛星の追跡に定常的に用いられることはない．

地上に設置する追跡システムには，次のような種別がある．まず，１か所の追跡局において測距と測角をあわせ行う方式があり，施設がひとつですむ簡便さのために多くの国内用の通信衛星に実用されている．INTELSAT や EUTELSAT のような広域向け通信衛星



では，２か所の測距局による追跡を用いることが少なくない．気象衛星や追跡中継衛星など一部の衛星では，精度の向上を期待して３局測距を用いることがある．

静止衛星の軌道の決定ならびに運用は，次のように実施される．収集した追跡データについて，あらかじめわかっている誤差を補正した後，軌道決定処理により軌道要素を求める．次にその軌道要素にもとづいて軌道を予測し，割りあてられた軌道位置から衛星が逸脱する時期を推定する．その時期の前に，位置保持のための軌道制御をおこなう．衛星の経度と緯度を変化させる要因はそれぞれ別個であるので，経度と緯度の制御もまた別個におこなう．その場合，衛星の燃料消費を最小にする，あるいは次回の制御までの間隔を最長にするなどの条件をみたすように制御をおこなうことが多い．軌道制御の実行の後，再び追跡データ取得へもどり，以下，衛星が静止衛星として稼動しつづける限りこのサイクル（ステーションキーピング）をくりかえすのである．

われわれは，このような軌道決定がどのような精度をもつか，またそれがステーションキーピング１サイクルの間にどう変わるかを知りたい．そのさい，特定の追跡システムに限定されることなく，一般性のある精度評価を得たい．そのためには，軌道決定の誤差レベルを，追跡観測の仕様をあらわすパラメータ ── 地上局の数と配置，測距／測角の種目別，追跡観測の実行回数とその誤差レベル ── の関数として表現することが必要である．衛星の運動および追跡観測をあらわすモデルを作り，最小自乗法による未知量決定のプロセスに結び付けることによって，そのような誤差解析式を導き出す過程［川瀬・有本 1990］を，次節より順をおって述べる．

### ２－３　軌道運動のモデル

はじめに，静止軌道に２機の衛星 $S_0$ と $S$ があい近接して置かれている場合を考えよう（これが１衛星の軌道運動モデルに結びつくことは，すぐ後にのべる）．衛星 $S$ の，$S_0$ に対する相対位置を，半径方向（$R$），経度方向（$L$），および軌道面法線方向（$K$）を直交３成分とする座標系であらわす（図２－１）．このとき，ふたつの衛星の相対運動を，ランデヴを論じるための線型化方程式［Kaplan, 1976］によって次のようにあらわすことができる．

$$d^2R/dt^2 - 2\Psi\, dL/dt - 3\Psi^2 R = a_R$$

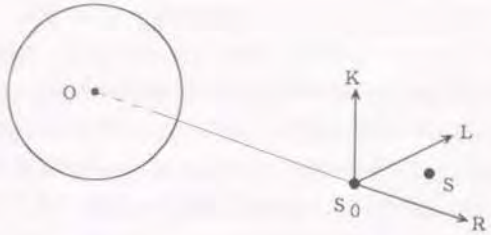



図２－１　近接した静止衛星Ｓ，$S_0$ の相対位置座標
$R$: 半径方向，$L$: 経度（軌道進行）方向，
$K$: 軌道面法線方向，Ｏ：地球中心

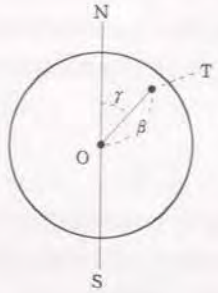



図２－２　公称静止位置から見た地上局の配置
Ｔ：追跡局，$\beta$: 地心ＯからのＴの離角，
$\gamma$: 地軸ＮＳからのＯＴの回転角



$$d^2L/dt^2 + 2\Psi\, dR/dt = a_L$$
$$d^2K/dt^2 + \Psi^2 K = a_K$$

ここで $\Psi$ は軌道の周回角速度であり，右辺は摂動にもとづく相対的な加速度である．静止衛星を対象とするとき，$\Psi$ は地球の自転角速度に等しい．時間の引数 $t$ を，地球自転の進行をあらわす角度 $s=\Psi t$ におきかえると，ランデヴ方程式は

$$R'' - 2L' - 3R = a_R$$
$$L'' + 2R' = a_L$$
$$K'' + K = a_K \qquad (2\text{-}1)$$

となって，静止軌道が扱いやすくなる．ただし $(\ )' = d(\ )/ds$ であり，右辺の加速度も $s$ によって測ることに注意する．時間を $s$ で測ることにともない，以下において「１日」とは，厳密には１恒星日である２３時間５６分４秒をいう．

軌道決定の誤差解析では，軌道要素と観測量との間の微分関係にのみ着目するので，軌道決定そのものをおこなう場合とは違って摂動を無視することができる．そこで方程式(2-1)の右辺を零とおけば，一般解を

$$R = -(2/3)E_2 + E_3\cos s + E_4\sin s$$
$$L = E_1 + E_2 s - 2E_3\sin s + 2E_4\cos s$$
$$K = E_5\cos s + E_6\sin s \qquad (2\text{-}2)$$

と書くことができる．

ここで，衛星 $S_0$ が理想的に静止した衛星であり，しかもその位置が衛星Ｓの公称静止位置にひとしいとしよう．このとき(2-2)式は，衛星Ｓの軌道運動を，公称静止位置 $S_0$ を原点として一般的に表現したものとなる．６個の任意パラメータの組

$$E = (E_1, \ldots, E_6)^T$$

は，基準時刻 $s=0$ における軌道要素をあらわす．$E_1$ と $E_2$ は平均経度とそのドリフトレートに対応し，$E_3$ と $E_4$ は離心率に，また $E_5$ と $E_6$ は軌道傾斜角にそれぞれ対応する．軌道６要素として一般に用いるケプラー要素は，離心率や軌道傾斜角が零であるときに不確定となってしまうために，静止軌道の精度解析には適さないが，６要素 $E_1, \ldots, E_6$ にはそのような特異性が無いので静止軌道の表現に適している．軌道決定の精度評価

とは，6要素 $E_1, \ldots, E_6$ の誤差を見つもることにほかならない．

## 2－4　追跡観測のモデル

2－2節によれば，静止衛星の追跡システムは2種類に大別される．ひとつは1局における測距・測角であり，他は2局ないし3局を用いて行う測距である．ここでは2局測距を，3局測距に含まれる特殊ケースであると考えることにする．測角の観測量については，通常用いる方位角と仰角 $(Az, El)$ を，変分関係

$$\delta\alpha = \rho \cos El \cdot \delta Az$$
$$\delta\varepsilon = \rho\, \delta El \tag{2-3}$$

を通して仮想的な観測量 $(\alpha, \varepsilon)$ におきかえる（$\rho$ は公称距離）．これによって，仰角が90度に近いときに方位角が不定になるという問題が解消される［Soop, 1983］．以上の扱い方により，ある時刻における1回の追跡観測が，1局追跡では

$$o = (\rho, \alpha, \varepsilon)^T$$

として，また3局測距では

$$o = (\rho_1, \rho_2, \rho_3)^T$$

として表される．観測 $o$ を1日間（$s=0$ から $s=2\pi$ まで）にわたり一定の時間間隔 $2\pi/N$ をおいて繰りかえすことにより，軌道決定用の追跡観測データを取得するものとすれば，それを

$$O = (o_0{}^T, o_1{}^T, \ldots, o_N{}^T)^T \tag{2-4}$$

として表すことができる（$i$ 番目の観測 $o_i$ の時刻は $s = s_i = 2\pi i/N$ である）．観測の全回数は $N+1$ であるが，以下では $N$ が十分に大きい場合をあつかうので，$N$ が観測回数をあらわすとする．追跡観測の期間を1日間とするのは，衛星の運動が(2-2)式により1日の周期をもつことによる要請である．

追跡観測に含まれる誤差として，ここではガウシアンノイズと一定バイアスという2種類の誤差を考える．観測ノイズのレベルすなわち標準偏差は，1局追跡では $\sigma\langle\rho\rangle, \sigma\langle\alpha\rangle, \sigma\langle\varepsilon\rangle$，また3局測距では $\sigma\langle\rho_1\rangle, \sigma\langle\rho_2\rangle, \sigma\langle\rho_3\rangle$ であるが，これらは追跡期間にわたり一定であるとする．観測のノイズとバイアスはそれぞれ，装置内の熱雑音および零点較正の不確定という，異なる誤差要因にもとづく．観測誤差にはこのほかに，たとえば大



気による余剰遅延のように，時間とともにゆるやかに変化しノイズにもバイアスにも属さないものがある．しかし静止衛星の追跡におけるそのような誤差は，観測のジオメトリーが不変であることにより，適切なモデル補正を施すことによってバイアス誤差に帰着することが多い．

追跡観測モデルとは，衛星位置の変分と観測量の変分を関係づける偏微分行列（観測行列）のことである．軌道運動とおなじく，追跡観測にも線型近似を用いるならば，観測行列は次のような定数行列である：

$$\left[\frac{\partial o}{\partial R}, \frac{\partial o}{\partial L}, \frac{\partial o}{\partial K}\right] = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} \tag{2-5}$$

公称衛星位置における観測行列の各要素は，つぎのように与えられる［Soop, 1983］．ただし，観測量をノイズレベルで規格化して表す．1局による $(\rho, \alpha, \varepsilon)$ 追跡においては

$$a_1 = \cos\beta/\sigma\langle\rho\rangle,\quad b_1 = -\sin\beta \sin\gamma/\sigma\langle\rho\rangle,\quad c_1 = -\sin\beta \cos\gamma/\sigma\langle\rho\rangle$$
$$a_2 = 0,\quad b_2 = -\cos\gamma/\sigma\langle\alpha\rangle,\quad c_2 = \sin\gamma/\sigma\langle\alpha\rangle$$
$$a_3 = \sin\beta/\sigma\langle\varepsilon\rangle,\quad b_3 = \cos\beta \sin\gamma/\sigma\langle\varepsilon\rangle,\quad c_3 = \cos\beta \cos\gamma/\sigma\langle\varepsilon\rangle \tag{2-6}$$

ここで $\beta$ と $\gamma$ は，公称衛星位置 $S_0$ から見たときの地上の追跡局の配置をあらわす角度パラメータであり，$\beta$ は地心からの局の離角，$\gamma$ は地心と局を結ぶ線分の地軸からの回転角である（図2－2；12頁）．ただしここでは，地球が真の球であると仮定する．まず $S_0$ の距離 $\rho_0$ および仰角 $El_0$ を

$$\rho_0{}^2 = r_S{}^2 + r_E{}^2 - 2 r_S r_E \cos\lambda \cos\varphi$$
$$\sin El_0 = (r_S \cos\lambda \cos\varphi - r_E)/\rho_0 \tag{2-7}$$

ただし

$r_S$ ＝ 静止軌道半径(42165 km)

$r_E$ ＝ 地球半径(6378 km)

$\varphi$ ＝ 局緯度

$\lambda$ ＝ $S_0$ から測った局経度

から求め，次に $\beta$ と $\gamma$ を

$$\cos\beta = (r_S - r_E \cos\lambda \cos\varphi)/\rho_0$$
$$\sin\beta = r_E \cos El_0 / r_S$$

$$\cos\gamma = r_S \sin\varphi / (\rho_0 \cos El_0)$$
$$\sin\gamma = r_S \sin\lambda \cos\varphi / (\rho_0 \cos El_0) \tag{2-8}$$

により求める．また方位角と仰角のノイズレベルを，(2-3)式にならって

$$\sigma\{\alpha\} = \rho_0 \cos El_0 \cdot \sigma\{Az\}$$
$$\sigma\{\varepsilon\} = \rho_0 \sigma\{El\} \tag{2-9}$$

により $(\alpha, \varepsilon)$ 対応になおす．

3局測距に対する観測行列は，(2-6)式の第1行を用いると

$$a_i = \cos\beta_i / \sigma\{\rho_i\}$$
$$b_i = -\sin\beta_i \sin\gamma_i / \sigma\{\rho_i\}$$
$$c_i = -\sin\beta_i \cos\gamma_i / \sigma\{\rho_i\} \tag{2-10}$$

である．ただし $\beta_i, \gamma_i$ は，3局の内の第 $i$ 局に対する配置角パラメータである．2局測距を扱うときは，(2-10)式で $a_3 = b_3 = c_3 = 0$ とおけばよい．

## 2－5　観測ノイズの共分散解析

以上のとおり用意した軌道運動と追跡観測のモデルを最小自乗原理に結びつけると，軌道要素の誤差が評価される．はじめに，観測誤差がノイズだけである場合を調べよう．

追跡観測 $O$ の，軌道6要素に関する偏微分をとれば，$3(N+1)$ 行 6 列の行列

$$P = \left[ \frac{\partial O}{\partial E_1}, \cdots, \frac{\partial O}{\partial E_6} \right] \tag{2-11}$$

を得る．このとき，最小自乗法の原理により，軌道決定誤差

$$\delta E = (\delta E_1, \ldots, \delta E_6)^T$$

のあらわれ方は，次の分散・共分散評価に従う．

$$\mathcal{E}\{\delta E\, \delta E^T\} = A = (P^T P)^{-1} \tag{2-12}$$

ここで $\mathcal{E}(\ )$ は期待値をあらわす．行列 $P^T P$ は，最小自乗法による未知量の推定に現れる特徴的な行列であり，ノイズによる誤差発生の経緯をすべて含んでいる．そこで，この行列を解析的にあらわすことによって，誤差解析の公式を導出しよう．$P^T P$ の $(i, j)$ 要素は(2-4)式により



$$(P^T P)_{ij} = \frac{\partial O^T}{\partial E_i} \frac{\partial O}{\partial E_j} = \sum_{k=0}^{N} \frac{\partial o_k{}^T}{\partial E_i} \frac{\partial o_k}{\partial E_j} \tag{2-13}$$

である．(2-5)および(2-2)式を，恒等式

$$\frac{\partial o_k}{\partial E_i} = \frac{\partial o_k}{\partial R} \frac{\partial R}{\partial E_i} + \frac{\partial o_k}{\partial L} \frac{\partial L}{\partial E_i} + \frac{\partial o_k}{\partial K} \frac{\partial K}{\partial E_i} \tag{2-14}$$

に代入し，さらにそれを(2-13)式に代入する．この計算を実行するためには，$N+1$ 項からなる4つのベクトル

$$(1, \quad 1, \quad \ldots, \quad 1)$$
$$(s_0, \quad s_1, \quad \ldots, \quad s_N)$$
$$(\sin s_0, \ \sin s_1, \ \ldots, \ \sin s_N)$$
$$(\cos s_0, \ \cos s_1, \ \ldots, \ \cos s_N)$$

から任意に選んだ2ベクトルの内積を求めること，すなわち(定数)，$(s_k)$，$(\sin s_k)$，$(\cos s_k)$ のなかの任意のふたつに対する積和の計算が必要である．観測回数 $N$ が十分に大きいとすると，この積和計算を，付録Bの（1）に示すように定積分で近似することができる．それにより，求める行列が次のように表現される．

$$P^T P = NQ$$

ただし $Q$ は6×6対称行列であり，その零でない要素は

$$Q_{11} = BB$$
$$Q_{12} = \pi BB - 2AB/3$$
$$Q_{22} = 4^2\pi^2 BB/3 - 4\pi AB/3 + 4AA/9$$
$$Q_{23} = 2BB$$
$$Q_{24} = -AB$$
$$Q_{26} = -BC$$
$$Q_{33} = AA/2 + 2BB$$
$$Q_{35} = CA/2$$
$$Q_{36} = -BC$$
$$Q_{44} = AA/2 + 2BB$$
$$Q_{45} = BC$$

$$Q_{46} = CA/2$$
$$Q_{55} = CC/2$$
$$Q_{66} = CC/2 \qquad (2\text{-}15)$$

である．ここで $AA, BB, \ldots$ は，追跡局の配置と観測種目およびノイズレベルから決まる定数であり，

$$AA = a_1{}^2+a_2{}^2+a_3{}^2$$
$$BB = b_1{}^2+b_2{}^2+b_3{}^2$$
$$CC = c_1{}^2+c_2{}^2+c_3{}^2$$
$$AB = a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$$
$$BC = b_1c_1+b_2c_2+b_3c_3$$
$$CA = c_1a_1+c_2a_2+c_3a_3 \qquad (2\text{-}16)$$

により求める．これから，観測ノイズにともなう軌道決定誤差の共分散評価が

$$A^{(N)} = (1/N)Q^{-1} \qquad (2\text{-}17)$$

として得られる．各軌道要素 $E_i$ の誤差レベル（$1\sigma$）は

$$\sigma\langle E_i\rangle = \sqrt{Q^{-1}{}_{ii}/N}$$

であるから，観測回数 $N$ を増すことによって，軌道6要素それぞれの誤差をひとしく $1/\sqrt{N}$ により低減させられることがわかる．

このようにして，観測ノイズの影響が評価できた．

## 2－6　観測バイアスの効果［川瀬・有本，1992］

つぎに，観測量 $(\rho, \alpha, \varepsilon)$ が小さなバイアス誤差 $(B_\rho, B_\alpha, B_\varepsilon)$ を持つ，あるいは観測量 $(\rho_1, \rho_2, \rho_3)$ が小さなバイアス誤差 $(B_{\rho 1}, B_{\rho 2}, B_{\rho 3})$ を持つ場合を考えよう．バイアス誤差を，それぞれ対応するノイズレベルで規格化する．毎回の観測 $o_i$，$i=0, 1, \ldots, N$ は，バイアスを受けて

$$o_i+B \quad \text{ただし} \quad B=(B_1, B_2, B_3)^T$$

に変位する．ここで追跡の形式に応じて

$$B_1=B_\rho/\sigma\langle\rho\rangle$$



$$B_2=B_\alpha/\sigma\langle\alpha\rangle$$
$$B_3=B_\varepsilon/\sigma\langle\varepsilon\rangle$$

もしくは

$$B_1=B_{\rho 1}/\sigma\langle\rho_1\rangle$$
$$B_2=B_{\rho 2}/\sigma\langle\rho_2\rangle$$
$$B_3=B_{\rho 3}/\sigma\langle\rho_3\rangle$$

である．方位角と仰角のバイアス値を

$$B_\alpha = \rho_0 \cos El_0 \cdot B_{Az}$$
$$B_\varepsilon = \rho_0 B_{El} \qquad (2\text{-}18)$$

により $(\alpha, \varepsilon)$ のバイアス値に変換するのは，ノイズレベルに関してと同様である．

追跡観測 $O$ がバイアスを受けて

$$O + (B^T, B^T, \ldots, B^T)^T$$

に変わるとき，軌道要素 $E$ には，最小自乗原理に従って

$$\delta E=(P^TP)^{-1}\ P^T\ (B^T, B^T, \ldots, B^T)^T \qquad (2\text{-}19)$$

という変化が生じる．これがバイアスによる軌道決定誤差である．(2-4)(2-11)式から

$$\text{ベクトル}\ P^T(B^T, B^T, \ldots, B^T)^T\ \text{の第}\ i\ \text{要素} = \sum_{k=0}^{N} \frac{\partial o_k{}^T}{\partial E_i} B$$

であるが，これを，前節と同様に(2-14)式と付録B（1）を用いて，解析的にあらわすことができる．ここで観測バイアス $B_1, B_2, B_3$ の内，ひとつの成分 $B_l$ だけに着目し，そのほかの成分を零とおく．つまりバイアス誤差の影響を，各成分について個別に評価することにしよう．計算の結果，

$$P^T\ (B^T, B^T, \ldots, B^T)^T = N\ (\ b_l,\ \pi b_l-2a_l/3,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0\ )^T B_l$$

となるが，前節で導いた $P^TP = NQ$ という関係により，(2-19)式は

$$\delta E_i = [Q^{-1}{}_{i1}b_l+Q^{-1}{}_{i2}(\pi b_l-2a_l/3)]B_l$$

となる．この式には観測回数 $N$ があらわれない．すなわち，観測バイアスがひきおこす軌道決定誤差は，観測の回数を増しても低減できない．（この結果は，バイアス誤差の性質から予想されることと一致する）．さらにこの式から，バイアス $B_l$ がひきおこす軌道決定誤差の共分散評価を次式のように得る．

$$A^{(l)}{}_{ij}=\mathscr{E}\langle\delta E_i\,\delta E_j\rangle$$
$$=[Q^{-1}{}_{i1}b_l+Q^{-1}{}_{i2}(\pi b_l-2a_l/3)]$$
$$\cdot[Q^{-1}{}_{j1}b_l+Q^{-1}{}_{j2}(\pi b_l-2a_l/3)]\,\sigma^2\langle B_l\rangle \qquad (2\text{-}20)$$

ただしここで $\sigma^2\langle B_l\rangle=\mathscr{E}\langle B_l{}^2\rangle$ とおいた．

観測バイアスの値は，未知であるが定数であることだけがわかっている．その統計的な意味について，次のように考えることができる．いま，ある追跡システムの設計を終えたとしよう．その製作，据えつけから運用開始に至る全作業をひとつの試行とし，それを繰りかえし行ったとすると，バイアス値とは，その1試行ごとに1サンプル値があらわれるランダム変数である．このランダム変数は，平均値が零のガウシアン分布にしたがうとしてよいであろう．その分布の標準偏差がバイアス誤差レベルにほかならない．これに対して，ノイズのサンプル値は毎回の観測ごとにあらわれる．つまりノイズレベルとバイアスレベルとは，同じ観測量の誤差評価であっても，サンプルを取りだしてくる母集団が異なっている．

バイアス値 $B_1, B_2, B_3$ は，互いに統計的に独立と考えてよいから，すべてのバイアス誤差にもとづく軌道決定誤差の共分散を

$$A^{(B)}=A^{(1)}+A^{(2)}+A^{(3)} \qquad (2\text{-}21)$$

とすることができる．こうして，バイアスがひきおこす軌道決定誤差の評価式が得られた．

ノイズとバイアスの統計的性質の違いを考えるならば，(2-17)式によるノイズ誤差の共分散と，(2-21)式によるバイアス誤差の共分散とは，加えあわせることなく別個に扱うべきである．観測回数 $N$ を増すことにより，ノイズの影響は低減できても，バイアスの影響は低減できないから，軌道決定精度を基本的に支配するのは観測バイアスレベルである．すなわち軌道決定の精度評価のためには，観測ノイズと観測バイアスの効果を別個に評価できることが本質的である．

## 2－7　誤差評価の表示式

前節までに，静止軌道要素の誤差を見つもる公式を導くことができた．しかしながら，われわれが具体的に知りたいのは，衛星の位置や速度の誤差，もしくはステーションキー



ピングの誤差であるから，そのような形の誤差表示を求めよう．

衛星の位置の誤差を知るためには，軌道要素の誤差 $\delta E_i$ を，(2-2)式によって，ある時刻 $s$ における誤差 $\delta R, \delta L, \delta K$ に変換する．各 $\delta E_i$ は零平均のガウシアン分布に従うので，ある時刻における $\delta R, \delta L, \delta K$ もまた同様の分布にそれぞれ従い，その分散が次式のように評価される．

$$\sigma^2\langle R\rangle=4A_{22}/9+A_{33}\cos^2 s+A_{44}\sin^2 s-(4/3)A_{23}\cos s$$
$$+2A_{34}\sin s\cos s-(4/3)A_{24}\sin s$$
$$\sigma^2\langle L\rangle=A_{11}+A_{22}s^2+4A_{33}\sin^2 s+4A_{44}\cos^2 s+2A_{12}s-4A_{13}\sin s$$
$$+4A_{14}\cos s-4A_{23}s\sin s+4A_{24}s\cos s-8A_{34}\sin s\cos s$$
$$\sigma^2\langle K\rangle=A_{55}\cos^2 s+A_{66}\sin^2 s+2A_{56}\cos s\sin s \qquad (2\text{-}22)$$

ここで，予測期間 $s$ とともに増大するのは $L$ 方向の誤差だけであることがわかる．必要ならば共分散 $\sigma\langle R, L\rangle$ なども同様に評価される．

衛星の速度の誤差を求めるためには，(2-2)式の両辺を時間微分したものを用いる．$d(\ )/dt=\Phi\, d(\ )/ds$ に注意して上記と同じ計算をおこなうと，速度の誤差評価を次式のように得る．

$$\sigma^2\langle\dot{R}\rangle=\Phi^2(A_{33}\sin^2 s+A_{44}\cos^2 s-2A_{34}\sin s\cos s)$$
$$\sigma^2\langle\dot{L}\rangle=\Phi^2(A_{22}+4A_{33}\cos^2 s+4A_{44}\sin^2 s-4A_{23}\cos s-4A_{24}\sin s$$
$$+8A_{34}\sin s\cos s)$$
$$\sigma^2\langle\dot{K}\rangle=\Phi^2(A_{55}\sin^2 s+A_{66}\cos^2 s-2A_{56}\sin s\cos s) \qquad (2\text{-}23)$$

ステーションキーピングの精度を検討するときには，衛星の平均経度位置ならびにそのまわりの周期運動について，それぞれ誤差を知りたい．(2-2)式から，軌道決定の基準時刻より $D$ 日後には $L$ 方向に

$$\delta\bar{L}=\delta E_1+2\pi D\delta E_2$$

という平均誤差があらわれ，その大きさの評価は

$$\sigma^2\langle\bar{L}\rangle=\mathscr{E}\langle\delta^2\bar{L}\rangle=A_{11}+4\pi DA_{12}+4\pi^2D^2A_{22}$$

である．誤差 $\delta E_3, \delta E_4$ は $L$ 方向に

$$\delta L = -2\delta E_3 \sin s + 2\delta E_4 \cos s$$

という1日周期の誤差をひきおこす．このことは，衛星の日周運動の振幅が，軌道決定値があらわすものに比べて最大で

$$\delta\tilde{L} = \sqrt{4(\delta E_3)^2 + 4(\delta E_4)^2}$$

だけ多くなり得ることを意味する．この余剰振幅の評価は

$$\sigma^2\langle\tilde{L}\rangle = \mathscr{E}\langle\delta^2\tilde{L}\rangle = 4A_{33} + 4A_{44}$$

である．まったく同様に，$K$ 方向への周期誤差

$$\delta K = \delta E_5 \sin s + \delta E_6 \cos s$$

にともなう余剰振幅

$$\delta\tilde{K} = \sqrt{(\delta E_5)^2 + (\delta E_6)^2}$$

の評価は

$$\sigma^2\langle\tilde{K}\rangle = A_{55} + A_{66}$$

である．

ここに現れた $\delta\tilde{L}$ と $\delta\tilde{K}$ はともに，ガウシアン分布に従うふたつの確率変数の自乗和平方根である．このような変数の上限を厳密にあらわすのは煩雑である．なぜなら，このような変数が従う確率分布は2変数の相関に依存し，簡単に表せないからである．しかし付録Cによれば，上述の $\sigma\langle\tilde{L}\rangle$，$\sigma\langle\tilde{K}\rangle$ にもとづく“$3\sigma$”上限を近似的に用いることができる．以上の各評価を地心角であらわせば，ステーションキーピング誤差の表示をつぎのように得る（$r_S$ は軌道半径）．

平均経度誤差：　$\sigma\langle\tilde{\lambda}\rangle = \sqrt{A_{11} + 4\pi D A_{12} + 4\pi^2 D^2 A_{22}} \;/ r_S$

余剰経度振幅：　$\sigma\langle\tilde{\lambda}\rangle = 2\sqrt{A_{33} + A_{44}} \;/ r_S$

余剰緯度振幅：　$\sigma\langle\tilde{\varphi}\rangle = \sqrt{A_{55} + A_{66}} \;/ r_S$　　(2-24)

こうして，軌道要素誤差の見つもり $A^{(N)}$，$A^{(B)}$ を衛星の位置・速度・ステーションキーピングの誤差表示になおす変換式が得られた．



## 2－8　誤差評価方法のまとめ

以上の一連の導出により，追跡システムの仕様に応じて軌道決定誤差を評価するための公式が整った．それらを具体的な解析方法としてまとめると，つぎのとおりである．

解析上の仮定

- 軌道運動は2体問題に従う
- 地球は真球である
- 追跡観測の期間を1日間とし，観測の回数が十分多く，その間隔は均一である
- 観測誤差はガウシアンノイズと一定バイアスの重ね合わせであり，観測時刻または観測種目が異なれば，ノイズはたがいに無相関である

追跡システムの仕様

- 追跡局数，局配置および観測種目
- 観測ノイズレベル
- 観測バイアスレベル
- 観測回数

計算手順

①追跡局の配置パラメータ $\beta, \gamma$ を，(2-7),(2-8)式により求める．
　$Az, El$ のノイズ／バイアスレベルは，(2-9),(2-18)式により $\alpha, \varepsilon$ 対応に変換

②係数(2-16)を，(2-6)式または(2-10)式により求める

③行列 $Q$ を，(2-15)式により求める

④ノイズ共分散行列 $A^{(N)}$ を，(2-17)式により算出

⑤バイアス共分散行列 $A^{(B)}$ を，(2-20),(2-21)式により算出

⑥共分散行列を(2-22),(2-23),(2-24)式に代入し，誤差表示を求める

こうして導いた誤差評価の手順は，6×6対称行列の逆演算を1回おこなうことを除いて，すべて解析的な公式の計算からなっている．そのため，この評価方法は演算が速く，しかも数値的に安定である．これを利用すれば，追跡システムの仕様をパラメータとして

連続的に変えながら，軌道決定のパフォーマンスを広範囲に調べることができる．

## 2－9　静止衛星の追跡誤差とその特徴

前節までに導出した誤差解析公式によって軌道決定精度を算定するためには，当然ながら，それに入力するパラメータとしての観測誤差レベルを知らなければならない．では，測距・測角の誤差レベルはどのように決まるのであろうか．

すでに述べたように，ランダムな観測ノイズの発生源は熱雑音である．測距のノイズは測距装置内部および信号伝送ルートの熱雑音から生じるが，その特性は，装置の設計ならびに通信回線の設計に関連してよく把握されていることが多い．測角ノイズは，アンテナの追尾システム内部の熱雑音のほかに，大気中の電波の屈折のゆらぎや風圧の影響をともなうために，測距ノイズに比べると特性が複雑である．しかし，観測データのばらつきを観察して測角ノイズレベルを推量することはむずかしくない．

一方，観測バイアスは，ノイズと異なる要因にもとづく．測距においては，地上局アンテナの位置，局内ケーブルや設備内の遅延量，衛星内の遅延量の較正における誤差の総和がバイアス誤差となる．大気による余剰遅延や地球回転パラメータの誤差もまた，衛星と地球の位置関係が不変であることによってバイアス誤差に帰着する．測角においては，角度エンコーダの零点較正の誤差がバイアスとなるほかに，アンテナの回転軸の鉛直・水平度の誤差，および大気屈折量の補正の誤差が，同じく衛星が静止していることによりバイアス誤差となってあらわれる．これら誤差要因のすべてについて，正確な較正をつねに維持することは容易ではない．とくに衛星内の遅延量は，打上げ後に再較正する手段がない．また方位の絶対較正の困難は，運用上しばしば経験されることである．

このように，静止衛星の追跡観測にはバイアス誤差の要因が多く，しかもそのレベルの把握がむずかしい．このような誤差特性をしらべることを目的として，次のような実験研究がおこなわれ，誤差レベルの具体例が報告されている．

## 2－10　光学観測による測距の較正［Kawase et al, 1981］

大口径の光学望遠鏡を用いて，静止衛星の点像を背景にある恒星とともに撮影すると，恒星の位置を基準として，衛星の視方向が正確に観測される．追跡局において測距を行いつつ，このような光学観測を行うならば，測距のバイアスを推定することが可能である．



その原理を定性的に説明すると，次のとおりである．

もしも測距に正のバイアス誤差があると，推定した衛星位置はアンテナから遠ざかるように変位する（図2－3）．それにともない，決定される軌道半径は真値よりも大きくなる．このとき，ケプラーの法則に従って衛星の公転速度が遅くなるので，地球からみた衛星は図中の矢印aの方向にドリフトしようとする．しかし精密な光学観測により衛星の視線方向が束縛されているため，ドリフト誤差をともなうような軌道決定は許されない．つまり，測距バイアスは軌道半径に影響を与えることができない．このとき軌道決定の処理においては，観測された距離と，あるべき距離とは一致しない，すなわち残差が残されたままである．このような条件下で，測距バイアスを軌道要素とならんで未知数と置くならば，その残差にもとづいてバイアス値が推定されるのである．このような定性的な解釈が成りたち，未知のバイアス量が推定可能であることが，可観測性の解析［Kawase and Tanaka, 1979a］によって示されている．この較正方法は，測距バイアスを直接に測定するのではなく，軌道運動の法則を通して間接的に推定する．したがって補正モデルの誤差を含めたオーバオールの測距較正が得られるという特長をもつ．

この方法による較正を，通信総合研究所・鹿島宇宙通信センターにおける実験用通信衛星の測距システムに対して実施した．光学観測には国立天文台・岡山天体物理観測所の口径 188 cm 望遠鏡を用いた．実験の結果，測距バイアスの推定値は 52 m であった．これは，その時点までにわかっていた誤差をすべて補正した上で，なおこれだけのバイアス誤差の存在が明らかにされたものである．つまり，精密較正をほどこしていない測距システムは，数十メートルのバイアスを持つ可能性がつよい．

精密光学観測をあわせ行うならば，測距だけでなく測角についても誤差特性が把握できる．ただし光学観測を長期間にわたり連続におこなうことが難しいので，誤差の把握は短期間に限られる．上記の実験では，アンテナが強い日射にさらされる時に，熱変形によって測角誤差を生じることがわかった（図2－4）．アンテナの主要な構造に日射のしゃへいをほどこし，空気流を循環させて温度分布を一様化するならば，このような熱変形による観測誤差をさけることができる．わが国初の実用通信・放送衛星のために設置した管制局では，そのように設計したアンテナを用いることによって安定した測角精度を得ることができた［川瀬・有本・橋本，1983］．

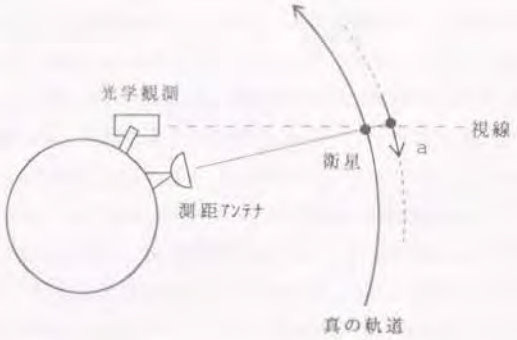



図２－３　光学観測による測距バイアス較正の方法

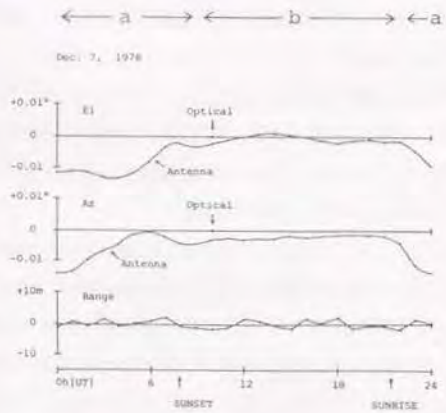



図２－４　光学観測による測角誤差較正の例[Kawase et al, 1981]
a：日射によるアンテナ熱変形誤差，b：夜間の誤差は一定バイアスに近い．
（口径１３ｍ，１９ＧＨｚ追尾アンテナによる測角）



２－１１　複合追跡による測角の較正［Kawase and Soop, 1986］

２局での測距を基準に用いて，測角を較正する方法がある（図２－５）．まず測距にもとづく軌道決定から衛星位置を求め，それを用いて方位角・仰角の基準値を算出する．この基準値との比較によって測角精度を較正するのである．測距から得た基準値にも誤差は含まれるが，それに比べて測角の誤差が一般に大きいため，基準値が正しいものとして測角精度を評価してよい．測距が継続されているかぎり，長期間にわたる測角の誤差評価が可能である．この方法により，１年間にわたる測角の誤差サンプルを収集した例を図２－６に示す．測角バイアスの長期変化の有無をみるために，このサンプルデータから移動平均（区間２日，４日および８日）をとった．その結果，方位・仰角のバイアスは，ともに１年を周期としたゆるやかな変化を示すことがわかった（図２－７）．このような変化は，大気の屈折量の季節変化によるものである．大気屈折を補正するさいには，屈折率の分布が水平方向に一様であると仮定するのがふつうであるが，それが正しければ方位角バイアスの長期変化は現れないはずである．ところが実際にはその変化が観察されたことから，水平方向にも屈折率の勾配があり，それが１年のあいだに変化していることがわかった．測角の零点較正をおこなう場合には，このような見かけの零点変化があることに注意が必要である．なおこの実験では，２局測距による軌道決定自体には較正を施していないため，絶対値としてのバイアス較正は得られていない．この評価結果は，測角バイアスが長期的に変化する範囲を示すものであり，バイアスレベルとしては楽観的な評価とみるべきである．しかし，長期にわたる測角バイアス特性について公表されたデータは他に無い．なお，バイアスを除く誤差の通年の標準偏差は，0.002度（方位角），0.003度（仰角）であった．

２－１２　観測誤差レベルのまとめ

以上，ふたつの実験による誤差評価と，他の公表データを合わせて，追跡観測の誤差レベルをまとめると表２－１のようである．測角の評価については，通信衛星の追尾に多く使われる準ミリ波（10GHz - 20GHz）帯アンテナに限った．

この表から明らかなように，測距ノイズレベルについて諸機関の見解は一致しており，前述のように測距ノイズの特性が把握しやすいことをあらわしている．一方，測距バイアスレベルについては見解がさまざまであり，その把握がむずかしいことを物語っている．

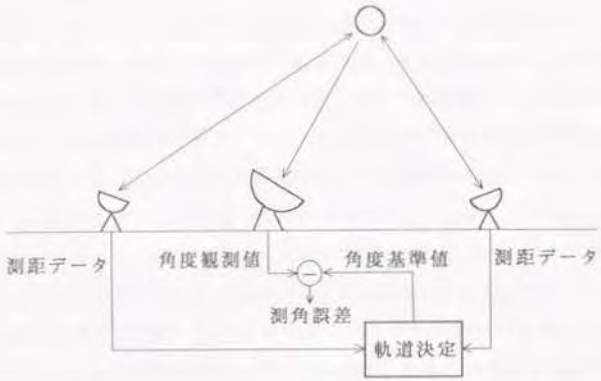



図２－５　複合追跡による測角誤差較正の方法

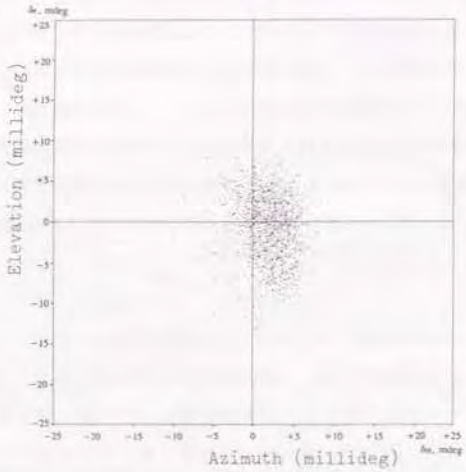



図２－６　測角誤差サンプルの長期収集例[Kawase & Soop, 1986]
１日６サンプル×１年間，口径１３．５ｍ，１１ＧＨｚ追尾アンテナによる．



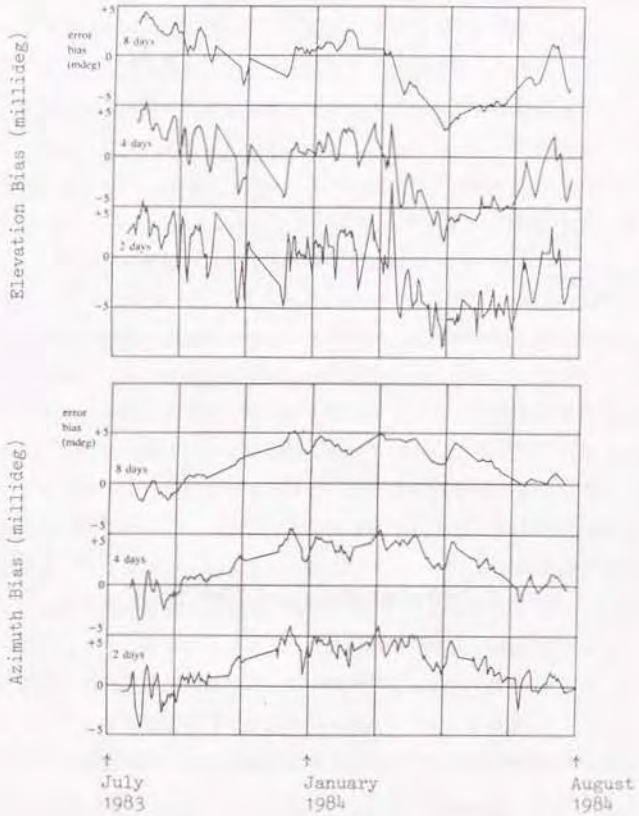



図２－７　測角バイアスには年間変化がある[Kawase & Soop, 1986].

測角ノイズレベルには，アンテナ固有の特性や環境条件に左右されるのに応じて，多少の評価の違いがみられる．

表２－１　静止衛星の追跡観測誤差レベル

| 測距 | ノイズ(m) | | バイアス(m) | |
|---|---|---|---|---|
| NASA* | 10 | | NASA* | 20 |
| ESA** | 10 | | INTELSAT** | 140 |
| TELESAT** | 10 | | [Kawase,1981] | 52 |
| USAF*** | 10 | | USAF*** | 8 |
| 測角 | ノイズ(度) | | バイアス(度) | |
| | Az | El | Az | El |
| ESA** | 0.002 | 0.007 | - | - |
| TELESAT** | 0.005 | 0.005 | - | - |
| [Kawase,1986] | 0.002 | 0.003 | 0.002 | 0.003 |

*Cooley, 1972,　**Dorsey,et al, 1986,　***Pocha, 1987

これらのデータをふまえ，追跡観測の誤差レベル（1σ）として

測距ノイズ..　10 m

測距バイアス..　50 m

測角ノイズ..　Az: 0.002 度，El: 0.003 度

測角バイアス..　Az: 0.002 度，El: 0.003 度

を，以下の検討における標準値として用いることにする．測距バイアスについては，推定の原理が明示されているデータを選びとった．また測角誤差については，ノイズとバイアスのレベルを一体で評価したデータを選びとった．



## ２－１３　軌道決定精度の評価

前節でまとめた観測誤差レベルを，２－８節の精度評価公式に代入すると，軌道決定の精度が実際に評価される．例としてわが国の放送衛星（東経 110 度）を想定し，関東地方に置いた１局での測距・測角により追跡する場合を考えよう．衛星位置の誤差評価の結果を，図２－８に示す．観測回数を $N=24$ とし，ノイズとバイアスによる軌道決定誤差を分けて表示したが，これらは以下の全ケースとも同様である．軌道決定後の日数を経るにつれて，予測した衛星位置の誤差が増大するが，それはおもに観測バイアスに起因することがわかる．最大日数を１４としたのは，ステーションキーピングサイクルを２週間とすることが多いためである．この評価では，衛星位置の誤差が始めに減少し，それから増加に転じている．このようなふるまいは，(2-22)式において共分散項 $A_{12}$ が零でない値をもつためであるが，その意味について次のような定性的解釈が成りたつ．

測角の誤差レベルを，距離×sin（測角誤差）として衛星位置の誤差に換算すると１km ないし２km となり，測距の誤差レベルよりも大きい．したがって観測誤差にともなう衛星位置誤差の範囲は，視線に垂直な方向へ大きく広がって，図２－９（１）のａｂのようになる．いま，衛星が真の位置Ｓからａへ変位したとしよう．このとき衛星は地心へ近づくので，決定される軌道半径は真値よりも短くなる．それにともない，予測した衛星位置は正方向へドリフトするように誤差をもつので，はじめに真の位置Ｓへ接近し，その傍らを通過してから遠ざかって行く．したがって衛星位置の誤差は，はじめ減少ののち増加に転ずることになる．衛星位置がｂに変位した場合でも，ドリフト方向が逆になることを除いて同様のことが起きる．衛星と追跡局の経度が近い，または衛星経度が局経度より大きいときには，このようなことは起きない．また，測距の誤差レベルが測角と同等であるほどに大きい，すなわち衛星位置の誤差範囲が同図の円ｃ（点線）のようにＳのまわりに等方的であるならば，やはりこのようなことは起きない．

つぎに，追跡局の配置を変えたときの様子をしらべよう．追跡局の緯度を図２－８の場合と同一とし，衛星の経度をパラメータとして変化させつつ，14 日後における衛星位置の誤差を評価すると，図２－１０を得る．衛星と追跡局の配置関係が変わっても，衛星の位置に誤差をもたらす主要因は，やはり観測バイアスである．

２局による測距についても，同様に誤差評価をおこなう．関東および沖縄地方に置いた測距局により，同じく放送衛星を追跡する場合について，精度評価を図２－１１に示す．

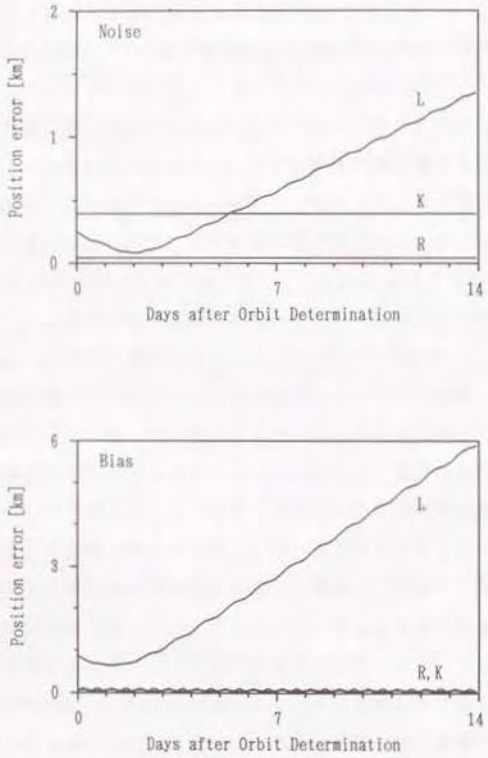
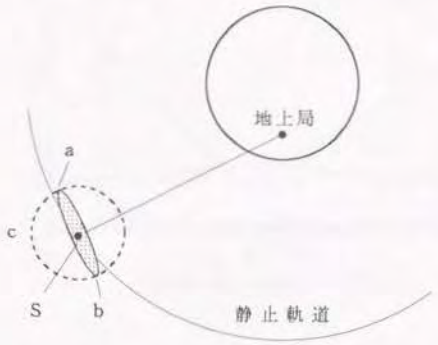
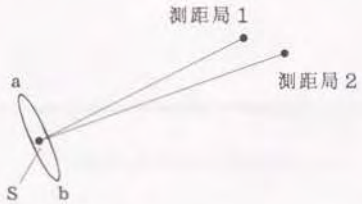



図２－８　１局測距・測角による軌道決定精度
（軌道決定後の予測日数にともなう誤差増大を示す）






（１）１局測距・測角の場合




（２）２局測距の場合
図２－９　観測誤差が衛星位置にひきおこす誤差

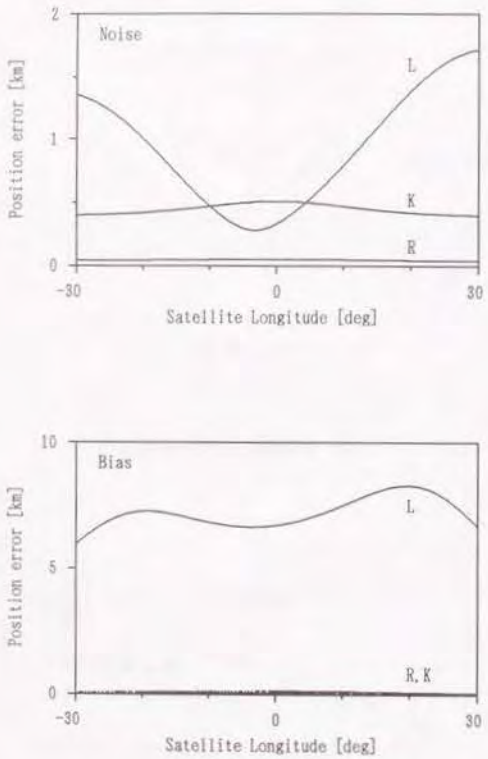



図２－１０　１局測距・測角による軌道決定精度
（衛星経度への依存性を示す．衛星経度の原点は追跡局である）



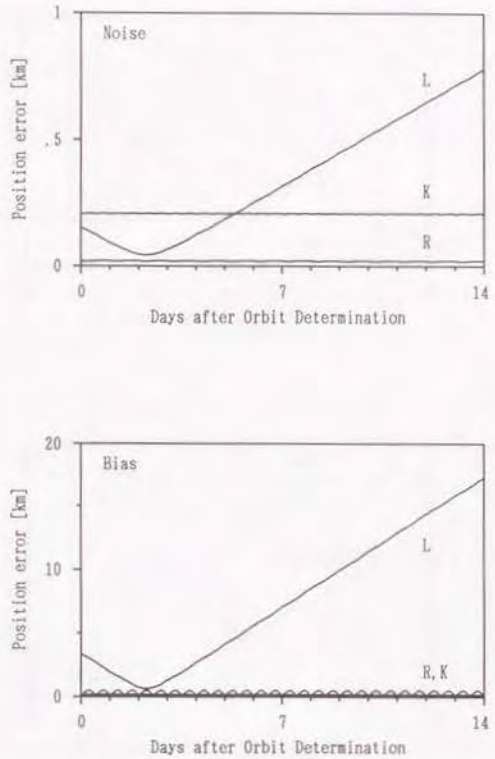



図２－１１　２局測距による軌道決定精度
（予測日数への依存性を示す）

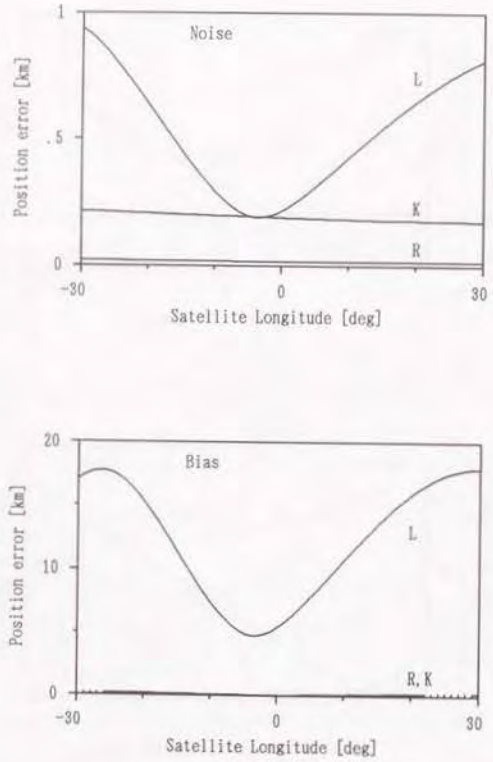



図２－１２　２局測距による軌道決定精度
（衛星経度への依存性を示す．衛星経度の原点は２局の経度中点）



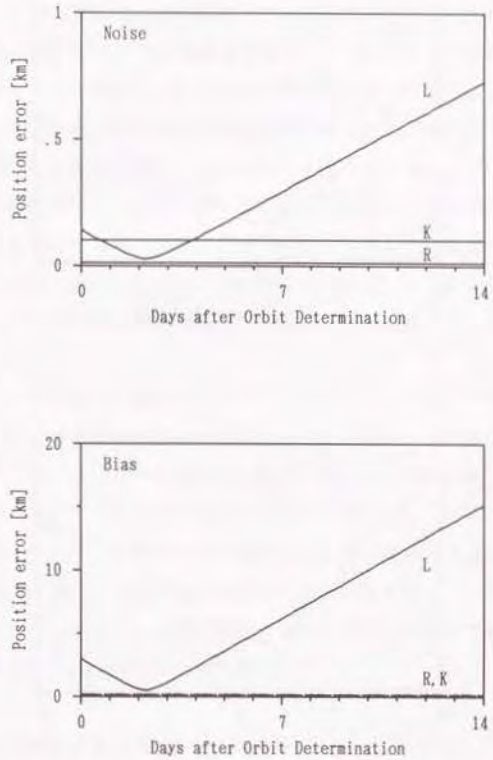



図２－１３　３局測距による軌道決定精度
（予測日数への依存性を示す）

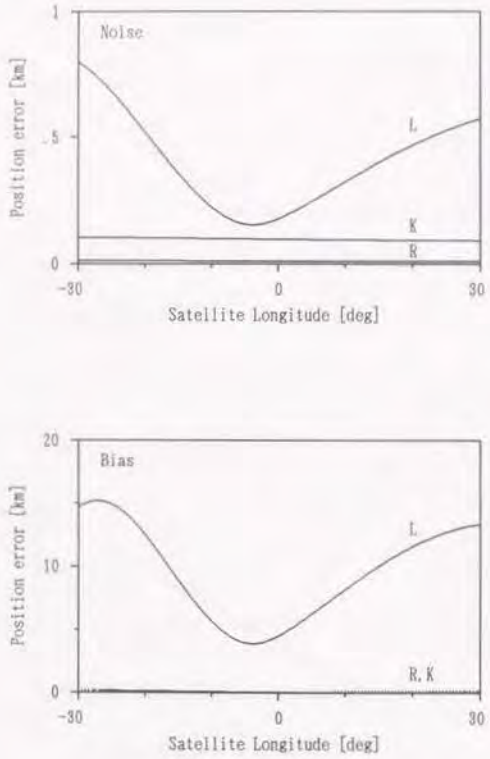



図２－１４　３局測距による軌道決定精度
（衛星経度への依存性を示す．衛星経度の原点は３局の経度平均点）



この場合の予測誤差も，はじめ減少してから増加に変わるが，その解釈を図２－９（２）に示した．たとえば測距局２にバイアスがあったとすると，衛星位置は測距局１を中心とする円周にそって変位するので，誤差範囲がａｂ方向へひろがる．このひろがりは，バイアスを 50 m，局間距離を 1000 km 程度とすると約 2 km となり，視線方向への変位よりも大である．したがって，同図（１）による解釈がここでも同様に成り立つ．衛星の経度をパラメータにとって，測距局と衛星の配置関係を変えると，図２－１２の評価結果を得る．ここでも，衛星の位置誤差の主要因は観測バイアスである．

図２－１１ならびに図２－１２のケースに，第３の測距局（日本北端）を加えて３局測距とすると，評価結果はそれぞれ図２－１３，図２－１４のようになる．局数が増すことによって若干の精度向上がみられるが，本質的な変化が現れることはない．

以上，いろいろな追跡条件について軌道決定精度の評価を得たが，それを次のように要約することができる：

「軌道決定直後の衛星位置の誤差は数百メートルないし数キロメートルである．軌道決定後の日数を経るにつれて，予測位置の誤差が経度方向に１週間あたり 3km ないし 9km の割合で増大する．その増大のおもな原因は測距・測角のバイアス誤差である．」

これは，現在おこなわれている標準的な軌道決定の方式に共通になりたつ評価である．当然ながらこの精度は，幅 140 km の軌道位置のなかに衛星を保つというステーションキーピングの要求にかなっている．ところが軌道の混雑の管理という目的からみるとき，この精度は，次にみるように不十分となるのである．

## ２－１４　従来の問題点の見なおし

標準的な軌道決定の誤差特性があきらかになったので，それをふまえ，軌道の混雑管理における問題点をみなおすことにしよう．衛星のステーションキーピングサイクルは通常２週間ほどであるから，サイクルの終端では経度方向に 10 km 前後の誤差が現れる．これに比べると半径および緯度方向の誤差は小さく，数百メートルである．これが衛星間の警戒距離に必要な大きさである．一方，これまで実際に設定されてきた警戒距離としては，方向によらず

衛星間距離 ＝ 10 km

とした例［Mineno et al. 1987; Boehnhardt, 1990; 通信・放送機構, 1993］，あるいは直交3成分について

半径方向＝1.2 km，経度方向＝5.8 km，緯度方向＝11 km

とした例がある［Boehnhardt, 1990］．これらの警戒範囲のとり方は，経度方向については大きく外れていないが，半径および緯度方向については過大であった．すなわち衛星位置の誤差範囲の正しい評価は，従来の想定と違って，経度方向に長く伸びた楕円体状となっていることがわかった．

ところで前節にみたとおり，衛星位置の誤差を増大させる主な原因は追跡観測のバイアス誤差であった．観測バイアスのあらわれ方は個々の追跡システムに依存して変わるから，衛星ごとに管制システムが異なる場合には警戒距離をさらに大きくとらなければならない．したがって従来の対応において，管制システムを異にする衛星の混在を避けてきたのは妥当な措置であった．

それでは，以上のみなおしにたって，従来の問題点を緩和することは可能であろうか．衛星位置の誤差範囲が占める体積は，これまで想定していたものよりも小さいことがわかったから，それに応じて収容する衛星数を増すことができるはずである．実際に，軌跡の分離（図1－4b）の方法を用い，誤差範囲の形状を考慮しつつ衛星を協調運用するならば，一定の増数が可能であろう．また管制システムを異にする衛星どうしであっても，それらが経度方向に並ぶことを避けるように運用するならば，混在させることが可能なはずである．しかしながら，そのような協調運用を実施した場合，ある衛星の軌道計画に変更があった時は ― 実際それは衛星や管制局の都合によりしばしば生じることである ― それがほかの衛星にも次つぎと波及することになり，煩雑な調整が必要になるであろう．とくに，異なる国の衛星のあいだでそのような調整を頻繁に行うのは現実には困難である．すなわちこのような方向においては，問題点の部分的改善しか期待できない．

問題点を根本的に解決するためには，経度方向に大きく現れている誤差を，半径方向もしくは緯度方向なみに減少させることが必要である．そのためには，前節であきらかになったふたつの誤差要因である

（1）追跡観測バイアスにもとづく誤差発生

（2）予測期間にともなう誤差増大

を解消しなければならない．ところが標準的な観測にはつねにバイアス誤差がともない，



観測回数を増してもその影響を低減できない事がわかった以上，従来の追跡方式にとどまる限り要因（1）の解消はありえない．したがって，問題へのアプローチをここで変える必要がある．われわれの目的は衛星間に安全な距離を確保することであり，そのために本質的なのは衛星相互の位置関係である．そこでわれわれは，衛星の絶対的な位置精度をさらに問うことを止め，かわりに衛星の相対位置に着目する ― つまり「相対軌道決定」を試みるのである．このような目的にかなう追跡方法として，次のふたつが考えられる：

差動追跡

同一の地上局設備を用いて複数衛星の観測を差動的におこなう．差動化により各衛星に共通なバイアス誤差を除去し，正確な相対位置を求める．

衛星間追跡

衛星間における相互追跡をおこない，相対位置を直接推定することにより，バイアスの影響を避ける．

次に要因（2）は，予測期間を短くすることで解消できる．つまり軌道決定を実時間に処理し，つねに最新の軌道推定値を用いればよい．以上のアプローチにより誤差の発生と増大を回避し，相対位置の誤差分布範囲を各方向ともに小さくすることができたならば，混雑の管理技術を大きく進歩させられるであろう．

結論として，軌道の混雑の効率的な管理のためには，あらたに「実時間処理による相対軌道決定」という方法を開発すべきである．地上からの差動追跡により，また衛星間追跡によりそれを実現する具体的な方法については，ひきつづく第3章と第4章でくわしく考察する．

## 2－15　本章のまとめ

静止軌道の混雑に対するこれまでの対応をみなおすために，本章では，静止軌道の決定精度の評価をこころみた．軌道決定の誤差解析公式を導出し，観測誤差レベルのデータをそれに入力することにより，標準的な軌道決定の誤差レベルを評価した．その結果，衛星位置に誤差をもたらす原因は追跡観測のバイアス誤差であり，それが混雑への対応に制約をあたえていた事があきらかになった．さらに，それを克服するためには，従来の軌道決定の方法から離れ，複数の衛星を対象とする相対軌道決定の方法をあらたに開発すべきことが示された．

本章で導出した軌道決定の精度評価公式は，混雑問題の分析の他にもいろいろな応用が可能である．今後に予想される静止衛星の利用のなかで，とくに衛星の位置や速度の精度が重要なものとして，地上の移動体の測位［川瀬，1988a；有本・川瀬，1989］，低高度衛星に対する追跡管制［川瀬，1988b］，標準時刻・周波数の伝送［Kawase and Sato, 1982; Kawase, 1987］が考えられる．本評価公式は，このようなシステムの設計において有効な精度解析手段となるであろう．



# 第３章　地上差動追跡による相対軌道決定
［Kawase, 1990a; Kawase, 1993］

## ３－１　本章のねらい

軌道の混雑問題への対応を進展させるために，複数の衛星に対する相対軌道決定が有効であることを前章で指摘したが，本章では，それを地上局からの差動追跡によって実現する方法を調べる．

はじめに，測距と測角のなかで差動追跡に適するのは測角であることをのべ，差動測角の実施方法を示す（３－２～３－３節）．つぎに，差動測角データにもとづいて衛星の３次元的な相対運動を推定できる，という基本的事実を証明する（３－４節）．われわれの最大の関心は，相対位置の決定精度である．それを知るために，まず誤差感度の解析式を導く（３－５節）．つぎに差動測角の観測誤差を推測するための実験方法を示し，観測誤差統計を作成する．それを誤差解析式に代入し，到達可能な相対位置精度を算定する（３－６節）．相対軌道決定の処理は実時間におこなう必要があるので，それに用いるカルマンフィルターを構成する（３－７節～３－１０節）．あわせて，差動測角の観測をさらに高精度化する方法を示す（３－１１節）．

これらの一連の議論により，差動測角という新しい追跡方法の具体的な内容 ── その実施方法，到達精度，適用範囲 ── をあきらかにする．

## ３－２　差動追跡と差動測角

差動追跡とは，ひとつの設備を用いて複数の衛星を追跡し，観測量の差のデータを取得することである．その目的は，差をとることによって各衛星に共通な観測誤差を除去し，もって衛星の相対位置を正確に求めることにある．ふたつの衛星に対する差動追跡ができれば，それを順次おこなうことによって多数の衛星にも対応できるから，以下，差動追跡の対象を２衛星とする．

静止衛星の標準的な追跡手段として測距と測角があることから，「差動測距」と「差動測角」というふたつの方法を考えるのが自然である．ところが，差動測距には現実的なむずかしさがある．まず測距設備は，どのような衛星に対しても信号の適合性を持つとは限

らない，また，他機関や他国の衛星に向けて測距のための電波を送信することは一般に歓迎されないであろう．かりにそのような問題が解決され，差動測距を実行できたとしても，その効果は限られる．なぜなら測距信号は別々の衛星のなかを通過するため，衛星内の遅延量の違いが差動観測の誤差として残るからである．これに対して差動測角には，そのような衛星への依存性がない．必要とされるのは，2衛星のビーコン波をひとつのアンテナで追尾できることだけである．したがって差動測距が実施できなくても差動測角ならば実施できる，という場合は多いであろう．しかも電波の受信だけで連続的に観測をおこなえるので，運用が簡便であるうえに実時間処理にも適する．このような利点を考え，ここでは相対軌道決定の手段として差動測角をとりあげることにする．

### 3－3　差動測角の実施方法

近接したふたつの静止衛星 ― かりに主衛星，副衛星と呼ぶ ― の測角を，あるひとつのアンテナにより行うことができるとしよう．はじめに，アンテナを主衛星に追尾させて角度を観測し，次に追尾を副衛星に切りかえて観測し，再び主衛星に切りかえて観測する．つまりひき続く3回の観測をおこなうのであるが，各観測にかける時間をそれぞれ等しく $T$ とする．$T$ を数分間の長さとすると，その間には多数の測定データ点数が得られるのがふつうである．各回ごとに観測データの平均値をとれば，主衛星：$(Az, El)_1$，副衛星：$(Az, El)_2$，主衛星：$(Az, El)_3$ という3組の測角データを得る．追尾する衛星の切りかえに要する時間が無視できるほど短いとすれば，主衛星を基準とする副衛星の差動角度が次式であたえられる．

$$\begin{pmatrix} D_A \\ D_E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Az \\ El \end{pmatrix}_2 - \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} Az \\ El \end{pmatrix}_1 + \begin{pmatrix} Az \\ El \end{pmatrix}_3\right] \tag{3-1}$$

ただしこのデータの観測時刻は，全観測時間の中点である．このような差動化により，測角におけるバイアス誤差が除去される．またバイアスのほかにも，変化のタイムスケールが $3T$ よりも長いような誤差成分が除去される．したがって，アンテナの構体や回転軸の歪みにともなう誤差，日照によるアンテナの熱歪みあるいは大気屈折のゆるやかな変化がひきおこす誤差が，すべて除去される．

角度 $Az$，$El$ の変化が時間に対して直線的ならば，(3-1)式による差動化処理は誤差をもたない．実際には $Az$，$El$ が $A\sin\omega t$ のように日周変化するため，(3-1)式による差動



化には

$$A\sin\omega t - (A/2)\left[\sin\omega(t-T) + \sin\omega(t+T)\right] \tag{3-2}$$

という形の誤差がともない，その最大値は $A(\omega T)^2/2$ である．ここで $A$ は静止衛星の軌道保持幅にほぼ対応し，0.1度前後である．観測の切りかえ時間 $T$ は，この誤差を十分小さくするように選ぶ．

2衛星の電波の周波数帯と偏波が同一であれば，差動測角は上述の手順により問題なく実行できる．周波数帯もしくは偏波が異なる場合に差動測角を実施しようとすると，追尾アンテナに複数の給電系を取りつけなければならない．このとき，もしも各給電系の電気的な視準軸が一致していなければ，差動測角にバイアス誤差が生じることとなり，差動化の効果が失われてしまう．しかしこの問題は，次にのべる方法によって解消される．まず，上にのべた手順どおりに差動測角をおこなう．つぎに，アンテナの仰角を，現在の $El$ 度から90度を通りこして $180-El$ 度まで旋回させ，また方位を現在の $Az$ 度から $Az+180$ 度へ旋回させる．このとき，アンテナはふたたび同じ方向を指しているが，アンテナ鏡面の上下と左右がともにそれぞれ反転している．この状態でふたたび差動測角をおこなうと，電気軸の不一致にともなうバイアス誤差が逆極性となってあらわれる．これら2組の差動測角結果を比較することにより，電気軸の一致度の較正を行うことができる．つまり，アンテナに複数の給電系を取りつけるとともに，方位・仰角とも反転旋回が可能なように機械系を設計しておくならば，どのような衛星の組合せに対しても一様な精度をもって差動測角をおこなうことが可能である．したがって，差動測角が実施可能であるための条件は，各衛星のビーコンの指向性のなかに追跡局がある，ということだけである．

### 3－4　相対軌道決定とその可観測性

差動測角にもとづく相対軌道決定とは，$(D_A, D_E)$ という2自由度の観測から，衛星の相対位置・速度という6自由度の未知量を推定することである．それが可能であるか否かということはただちに明らかでなく，検討を要する．このような問いを，推定理論では「可観測性」の問題という．ここでは，われわれの目ざす相対軌道決定に可観測性があることを証明する．

はじめに，ふたつの衛星の相対運動を記述しなければならない．第２章においてわれわれは，２衛星のランデヴをあらわす線型化方程式を利用して，１衛星の運動を表現した（２－３節）．ここではその方程式を，本来の用途に用いるのである．主衛星および副衛星を，図２－１における $S_0$, S とし，相対運動をランデヴ方程式(2-1)であらわす．摂動を無視すれば，相対運動の一般解が(2-2)式で表される．軌道要素 $E_1,\ldots,E_6$ は，ここでは２衛星の相対運動をあらわすので，「相対軌道要素」と呼ぶ．相対軌道決定とは，相対軌道要素 $E_1,\ldots,E_6$ を決定することにほかならない．

差動測角をおこなう追跡局の，衛星に対する配置をふたたび図２－２であらわす．２衛星の相対位置 $(R, L, K)$ に小さな変化が生じたとき，それがひきおこす差動測角値の変分を，(2-6)式を参照して

$$\begin{bmatrix} \delta D_{A'} \\ \delta D_E \end{bmatrix} = \frac{1}{\rho}\begin{bmatrix} 0 & -\cos\gamma & \sin\gamma \\ \sin\beta & \cos\beta\sin\gamma & \cos\beta\cos\gamma \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \delta R \\ \delta L \\ \delta K \end{bmatrix} \tag{3-3}$$

と書くことができる．ただし観測量として $D_A$ のかわりに

$$D_{A'} = D_A \cos El$$

を用いたが，それはひとつの衛星に対するときとおなじく，仰角が９０度に近いときの方位角の不定性を避けるためである．

観測量 $(D_{A'}, D_E)$ の，推定未知数 $(E_1,\ldots,E_6)$ に関する偏微分をとり，それらを次の関係におく：

$$\sum_{i=1}^{6} c_i \partial D_{A'}/\partial E_i = 0 \quad かつ \quad \sum_{i=1}^{6} c_i \partial D_E/\partial E_i = 0 \tag{3-4}$$

ただし $c_1,\ldots,c_6$ は定数である．可観測性があるための必要十分条件は，条件(3-4)から $c_1=\ldots=c_6=0$ が出てくること，すなわち

$$\partial(D_{A'}, D_E)/\partial E_i, \quad i=1,\ldots,6$$

が時間の関数としてたがいに線型独立となることである．(3-4)式に(3-3),(2-2)式を代入し，定数，$s$, $\sin s$, $\cos s$ をそれぞれ含む項に分類する．観測を１日間にわたり（$s=0$ から $2\pi$まで）おこなうならば，定数，$s$, $\cos s$, $\sin s$ を時間の関数として互いに独立とみなせるから，それらに付く係数はみな零でなければならない．このことから，$c_i$ に関する８つの方程式が得られ，それらは次の２組にわかれる：



$$\begin{bmatrix} -\cos\gamma & 0 \\ 0 & -\cos\gamma \\ \cos\beta\sin\gamma & -2/3\cdot\sin\beta \\ 0 & \cos\beta\sin\gamma \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3-5}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -2\cos\gamma & \sin\gamma & 0 \\ 2\cos\gamma & 0 & 0 & \sin\gamma \\ \sin\beta & 2\cos\beta\sin\gamma & \cos\beta\cos\gamma & 0 \\ -2\cos\beta\sin\gamma & \sin\beta & 0 & \cos\beta\cos\gamma \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_3 \\ c_4 \\ c_5 \\ c_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3-6}$$

追跡局が地球上にあるとき，$\beta$ の範囲は $|\beta|\leq 8.7$ deg に限られることから，方程式(3-5)の係数行列中のふたつの列が線型従属となることはない．それにより $c_1=c_2=0$ が出る．方程式(3-6)の係数行列の行列式をとれば

$$4\cos^2\beta + \sin^2\beta\sin^2\gamma \geq 4\cos^2\beta \geq 3.91 \neq 0$$

であるから，$c_3=\ldots=c_6=0$ が出る．こうして $c_1=\ldots=c_6=0$ がいえたので，可観測性があることが証明された．つまり，追跡局が地上のどこにあっても，衛星が見通せるならば，１日間の差動測角にもとづいて相対軌道決定が可能である．

### ３－５　相対軌道決定の誤差感度解析

相対位置の精度を知るための準備として，本節ではまず，差動測角の誤差がどのようにして相対位置の誤差にむすびつくかをしらべる．差動測角においてはバイアス誤差がすでに除去されているから，ランダムノイズだけを観測誤差として考えればよい．

角度 $\gamma$ が任意であるのに対し，$\beta$ の範囲が $|\beta|\leq 8.7$ deg と制限されることから，観測モデル(3-3)式において $\beta=0$ と近似する．これにより以下の解析の見通しがきわめて良くなる．可観測性が乏しいときは，このような近似が誤差感度の解析に大きく影響することがあるが，前節により，そのようなことは起きないことが保証されている．近似にともない(3-3)式は次のようになる．

$$\begin{bmatrix} -D_{A'} \\ D_E \end{bmatrix} = \frac{1}{\rho}\begin{bmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma \\ \sin\gamma & \cos\gamma \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \delta L \\ \delta K \end{bmatrix} \tag{3-7}$$

ただし，$\rho$ は追跡局から主衛星への距離である．ここで観測量 $(D_{A'}, D_E)$ を

$$\begin{bmatrix} \delta u \\ \delta v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\gamma & \sin\gamma \\ -\sin\gamma & \cos\gamma \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -\delta D_{A'} \\ \delta D_E \end{bmatrix} \tag{3-8}$$

という関係を通して仮想的な観測量 $(u, v)$ におきかえると，(3-7)式は次のように簡略になる．

$$\begin{bmatrix} \delta u \\ \delta v \end{bmatrix} = \frac{1}{\rho} \begin{bmatrix} \delta L \\ \delta K \end{bmatrix} \tag{3-9}$$

すなわち仮想観測量 $(u, v)$ は，相対運動の2成分 $(L, K)$ を直接に観測するものとなる．

仮想観測量 $(u, v)$ の，相対軌道要素 $(E_1, \ldots, E_6)$ に関する偏微分を，(3-9)式および(2-2)式を用いて求めるとつぎのようになる．

$$\begin{aligned}
\rho\partial u/\partial E_1 &= 1 \\
\rho\partial u/\partial E_2 &= s \\
\rho\partial u/\partial E_3 &= -2\sin s \\
\rho\partial u/\partial E_4 &= 2\cos s \\
\partial u/\partial E_5 &= 0 \\
\partial u/\partial E_6 &= 0
\end{aligned} \tag{3-10}$$

$$\begin{aligned}
\partial v/\partial E_1 &= 0 \\
\partial v/\partial E_2 &= 0 \\
\partial v/\partial E_3 &= 0 \\
\partial v/\partial E_4 &= 0 \\
\rho\partial v/\partial E_5 &= \cos s \\
\rho\partial v/\partial E_6 &= \sin s
\end{aligned} \tag{3-11}$$

これらの式からただちに明らかなように，相対軌道決定の問題は，観測量 $u$ にもとづいて $E_1, \ldots, E_4$ を求めることと，$v$ にもとづいて $E_5$，$E_6$ を求めること，というふたつの独立な問題にわかれる．

追跡観測の期間を1日間とし，それを $N$ 等分する時刻 $s_i = 2\pi i/N$，$i = 0, 1, \ldots, N$ においてそれぞれ観測値 $(u_i, v_i)$ を得るものとしよう．ひとつの衛星の軌道決定を検討したときと同様に，観測回数 $N$ が十分に多く，また観測ノイズレベル $\sigma\langle u\rangle$，$\sigma\langle v\rangle$ は追跡のあいだ変わらないとする．行列 $P$ を $P_{ij} = \partial u_i/\partial E_j$ とおけば，軌道要素の推定誤差



$\delta E_1, \ldots, \delta E_4$ の共分散評価が次式であたえられる．

$$\mathscr{E}\left\{ \begin{bmatrix} \delta E_1 \\ \delta E_2 \\ \delta E_3 \\ \delta E_4 \end{bmatrix} [\delta E_1, \delta E_2, \delta E_3, \delta E_4] \right\} = (P^T P)^{-1} \sigma^2 \langle u\rangle \tag{3-12}$$

行列 $P$ の構成は，(3-10)式により

$$(P_{i1}, \ldots, P_{i4}) = \frac{1}{\rho} (1,\ s_i,\ -2\sin s_i,\ 2\cos s_i)$$

となっているから，$P^T P$ という行列演算を，2－5節でおこなったと同様に付録Bの（1）を用いて実行することができる．その結果，対称行列

$$P^T P = \frac{N}{\rho^2} \begin{bmatrix} 1 & \pi & 0 & 0 \\ & 4\pi^2/3 & 2 & 0 \\ & & 2 & 0 \\ & & & 2 \end{bmatrix}$$

を得，これを(3-12)式に代入すれば誤差評価式が得られる．まったくおなじ導出を，(3-11)式を用いて $E_5, E_6$ についてもおこない，それらの結果をあわせると，相対軌道要素の誤差評価がつぎのように得られる．

$$\mathscr{E}\left\{ \begin{bmatrix} \delta E_1 \\ \delta E_2 \\ \delta E_3 \\ \delta E_4 \end{bmatrix} [\delta E_1, \delta E_2, \delta E_3, \delta E_4] \right\}$$

$$= \frac{\rho^2 \sigma^2 \langle u\rangle}{N} \begin{bmatrix} 8.58 & -2.41 & 2.41 & 0 \\ & 0.769 & -0.769 & 0 \\ & & 1.27 & 0 \\ & & & 0.50 \end{bmatrix} \tag{3-13}$$

$$\mathscr{E}\left\{ \begin{bmatrix} \delta E_5 \\ \delta E_6 \end{bmatrix} [\delta E_5, \delta E_6] \right\} = \frac{2\rho^2 \sigma^2 \langle v\rangle}{N} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3-14}$$

これにもとづいて，つぎに相対位置の誤差表示を求めよう（これは基本的に1衛星の精度検討でおこなったものと同様である），まず $L$ 方向への衛星間の平均間隔およびそのドリフトレートの誤差が，$E_1$ および $E_2$ の誤差として直ちにあらわせる．また，1日を周期とする各方向への誤差成分

$$\delta R = \delta E_3 \cos s + \delta E_4 \sin s$$

$$\delta L = -2\delta E_3 \sin s + 2\delta E_4 \cos s$$

$$\delta K = \delta E_5 \cos s + \delta E_6 \sin s$$

について，それぞれＲＭＳをとり

$$M_R = \sqrt{(\sigma^2\langle E_3\rangle + \sigma^2\langle E_4\rangle)/2}$$

$$M_L = \sqrt{2(\sigma^2\langle E_3\rangle + \sigma^2\langle E_4\rangle)}$$

$$M_K = \sqrt{(\sigma^2\langle E_5\rangle + \sigma^2\langle E_6\rangle)/2}$$

として評価する．これらの各式に，(3-13)(3-14)式から求めた $\sigma\langle E_1\rangle, \ldots, \sigma\langle E_6\rangle$ の値を代入すると，相対位置の誤差評価（$1\sigma$）が次のとおり得られる．

平均 $L$ 方向誤差

$$D_0 = \sigma\langle E_1\rangle = 2.93\rho\sigma\langle u\rangle/\sqrt{N} \tag{3-15}$$

平均 $L$ 方向ドリフト誤差（１日あたり）

$$D_1 = 2\pi\sigma\langle E_2\rangle = 5.51\rho\sigma\langle u\rangle/\sqrt{N} \tag{3-16}$$

方向別周期誤差

$$M_R = 0.94\rho\sigma\langle u\rangle/\sqrt{N}$$

$$M_L = 1.88\rho\sigma\langle u\rangle/\sqrt{N}$$

$$M_K = 1.41\rho\sigma\langle v\rangle/\sqrt{N} \tag{3-17}$$

ここで仮想観測量の誤差レベル $\sigma\langle u\rangle, \sigma\langle v\rangle$ は，$D_A$ のノイズと $D_E$ のノイズのあいだに相関がないとすれば，(3-8)式により

$$\sigma^2\langle u\rangle = \sigma^2\langle D_{A'}\rangle\cos^2\gamma + \sigma^2\langle D_E\rangle\sin^2\gamma$$

$$\sigma^2\langle v\rangle = \sigma^2\langle D_{A'}\rangle\sin^2\gamma + \sigma^2\langle D_E\rangle\cos^2\gamma \tag{3-18}$$

$$\sigma\langle D_{A'}\rangle = \sigma\langle D_A\rangle\cos El$$

である．

以上により，観測精度と相対位置精度の関係があきらかになった．



## ３－６　差動測角の誤差統計

相対軌道決定の精度を(3-15)～(3-17)式によって具体的に見つもるためには，差動測角の誤差レベル $\sigma\langle D_A\rangle$，$\sigma\langle D_E\rangle$ を知る必要がある．差動測角の誤差を厳密に評価しようとすると，あらかじめ位置関係が正確にわかっている近接２衛星を実験のために用意しなければならず，その実現は困難である．ところが次にのべる方法によれば，１衛星の測角データにもとづいて，差動測角の誤差レベルを推測できるのである．

あるひとつの静止衛星に対する測角を，長さ $3T$ の時間区間にわたり行ったとしよう．そのデータを，長さ $T$ の３区間に等分する．各区間のデータを平均すると，３組の測角データ $(Az, El)_1$，$(Az, El)_2$，$(Az, El)_3$ を得るので，それを(3-1)式に代入する．こうして算出した差動角度 ― これを擬似差動測角と呼ぶ ― は，測角ノイズが無ければつねに零を示すはずである（ただしここでは(3-2)式による誤差を考えない）．ところが実際の測角にはノイズがともなっているので，擬似差動測角は零でない値を示す．その値を，差動測角の誤差サンプルと見なすのである．真の（ふたつの衛星に対する）差動測角と，擬似差動測角とのあいだには，追尾する衛星を切りかえる動作をアンテナが行う／行わないという違いがあるから，一見，擬似差動測角には誤差サンプルとしての妥当性がないと思われよう．しかし，ひとつの衛星を角度追尾する場合であっても，アンテナの駆動装置はつねに追尾のために動いており，静止しているわけではない．それは，衛星電波の到来方向が大気中の電波屈折のゆらぎにともなってつねに変動するからである．したがって，衛星を切りかえる動作の有無が，差動角のあらわれ方に本質的な違いをもたらすことはない．よって擬似差動測角を，差動測角の誤差サンプルを良い精度で表すものと考えてよい．アンテナをとりまく環境条件（大気の状態，日照，風向風速）のいろいろな変化を含むように長い期間にわたって擬似差動測角データを収集すれば，差動測角の誤差統計を作ることができるはずである．

このような検討に利用できる測角データが，過去の実験により蓄積されている．それは衛星電波の大気中の伝播現象の研究において［Fukuchi, et al, 1986］，衛星ビーコン波の方位・仰角を１年間にわたり連続観測したものである．ビーコンの周波数は 19.5 GHz であり，それを口径 13 m のアンテナが自動追尾した．追尾方式は，高次モード検出にもとづくモノパルス追尾であり，角度のデジタル読みとり単位は 0.001 度である．このアンテナ［尾島 他，1978］は衛星通信用であって，特に精密な測角を意図して設計したも

のではない。衛星と追跡局の関係をあらわすパラメータは，$\rho = 37220$ km，$El = 48$ deg，$\gamma = 8.2$ deg である。この測角データから，切りかえ時間 $T = 3$ min として，1時間ごとに擬似差動角を算出した。

このように収集した1年間の擬似差動角 $(D_A, D_E)$ のデータのあらわれ方を，図3－1に示す（データの日時を，各月の端数で表した）。$T$=3 min としたとき，(3-2)式による差動化誤差は 0.01 ミリ度以下であるために無視できる。データの頻度分布は図3－2のようであり，擬似差動角をガウシアンノイズとみなしてよいことがわかる。ここでわれわれは，角度読みとりの最小単位である 0.001 度よりも小さいデータに主な関心を向けることになるが，それが意味をもつことは，次のように説明される。

角度データのサンプリングレートをここでは毎秒1点としたので，ひとつの平均値を作るために180点のデータを用いている。毎秒の各データには，大気のゆらぎにともなうランダムノイズがそれぞれ加わっている。このように「多数のデータにノイズを加えて平均する」という処理を施すことは，データの量子化にともなう誤差を平滑化する効果をもつ（付録D）。その結果，量子化が差動測角値にひきおこす誤差は 0.02 ミリ度（$1\sigma$）のランダム誤差だけとなるから，ここでは無視できる。したがって擬似差動角データの精度は，読みとりの量子化によって損なわれていない。同時にこの事実は，差動観測の手順として，先に各衛星ごとに観測データを平均し，それから衛星間の差動化をほどこす，という順序が重要なことを示している。

相対軌道決定は1日間の観測データにもとづくことを述べたが，時間軸を拡大したデータ例（図3－3）によれば，日がかわるとノイズレベルも変わる。そこで，全データを1日ごとの区間に分け，1日別の誤差レベル（標準偏差）を算出すると，その変動の様子は図3－4のようであった。この図において，誤差レベルのピークが方位・仰角について同時に現れるときと，そうでないときがある。その解釈として，差動測角の誤差の一部が風圧によるものであり，アンテナに対する風向によって方位・仰角の誤差の現れかたに違いが生じた，との見方がなりたつ。風圧による誤差を除けば，観測誤差はおもに大気中の電波屈折のゆらぎ（その変化の時間スケールが $T$ より長く，$3T$ より短い成分）によるものと考えられる。図3－4のデータをもとに，1日別誤差レベルの分布関数を求めると，図3－5を得る。ただしこの図では，分布関数の値を1から引いたものを示した。つまり横軸が指すあるレベルに対して，それを上まわる1日別レベルが出現する率を縦軸に示して



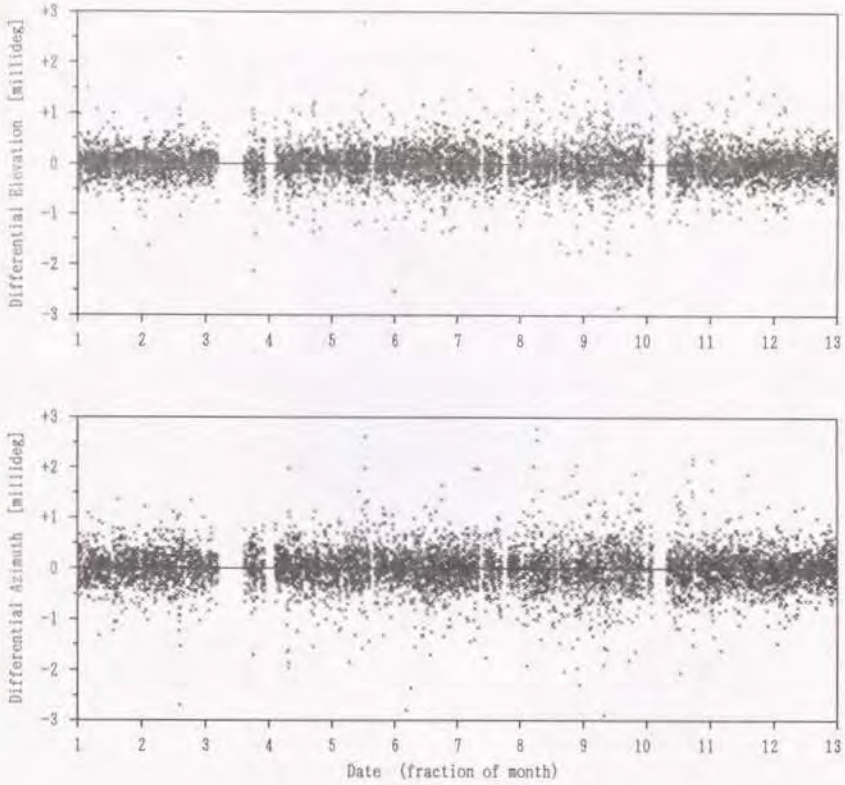



図3－1　擬似差動測角データの履歴（1982年4月－1983年3月）
受信周波数19GHz，仰角48度，口径13mアンテナによる。

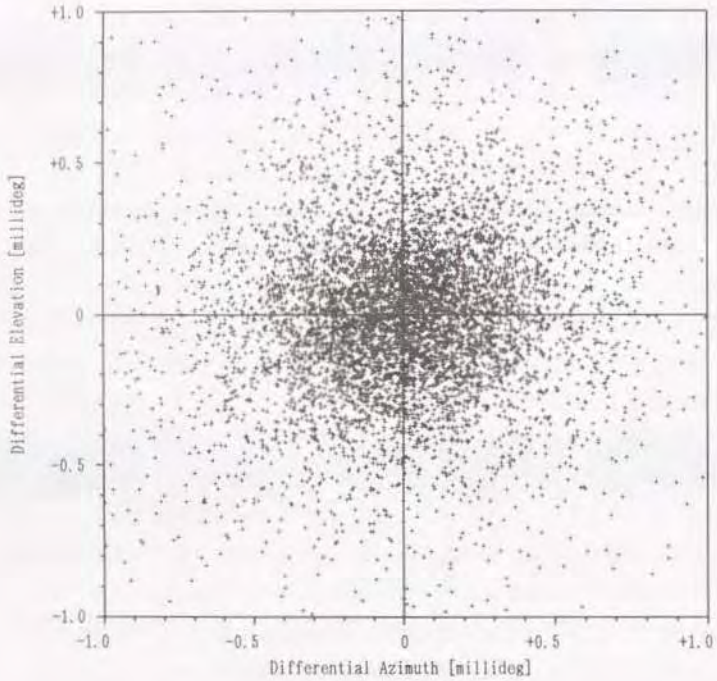



図３－１（続）　擬似差動測角データの拡大プロット



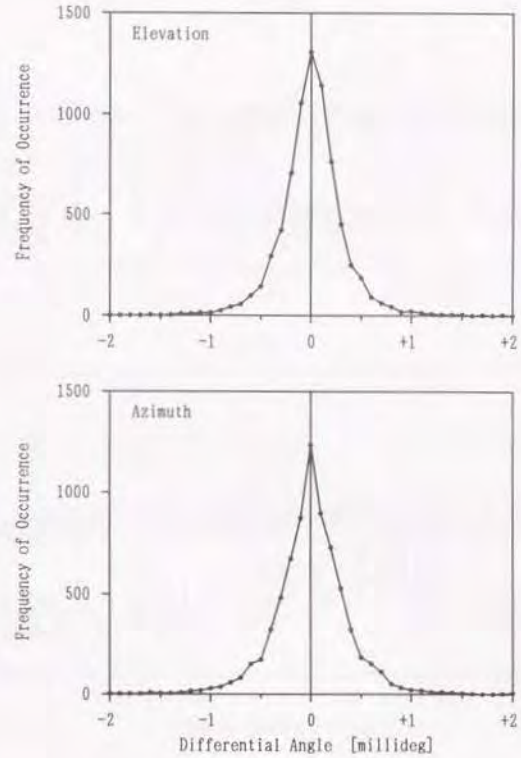



図３－２　擬似差動測角データのヒストグラム
（標準偏差は Az: 0.39 ミリ度，El: 0.34 ミリ度）

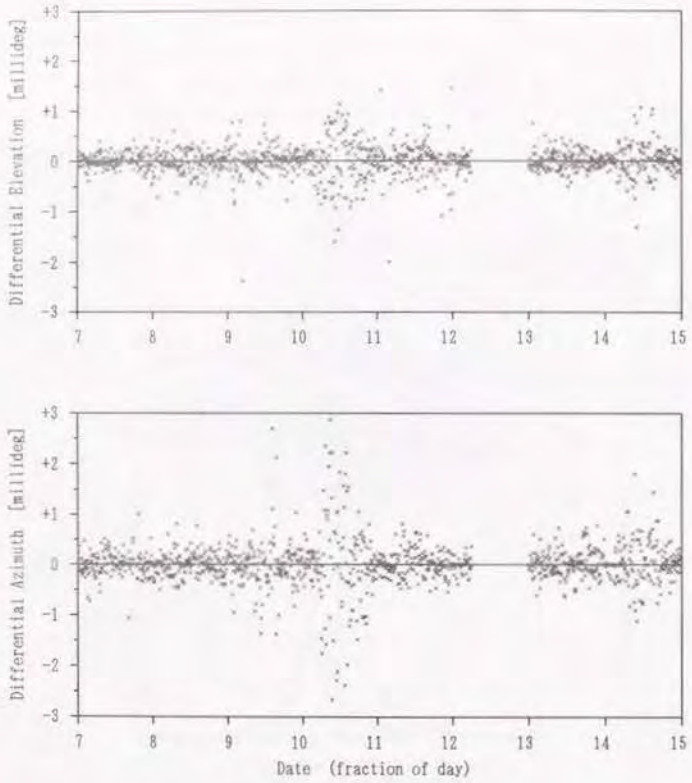



図３－３　擬似差動測角データ（時間軸を拡大，１９８２年４月）



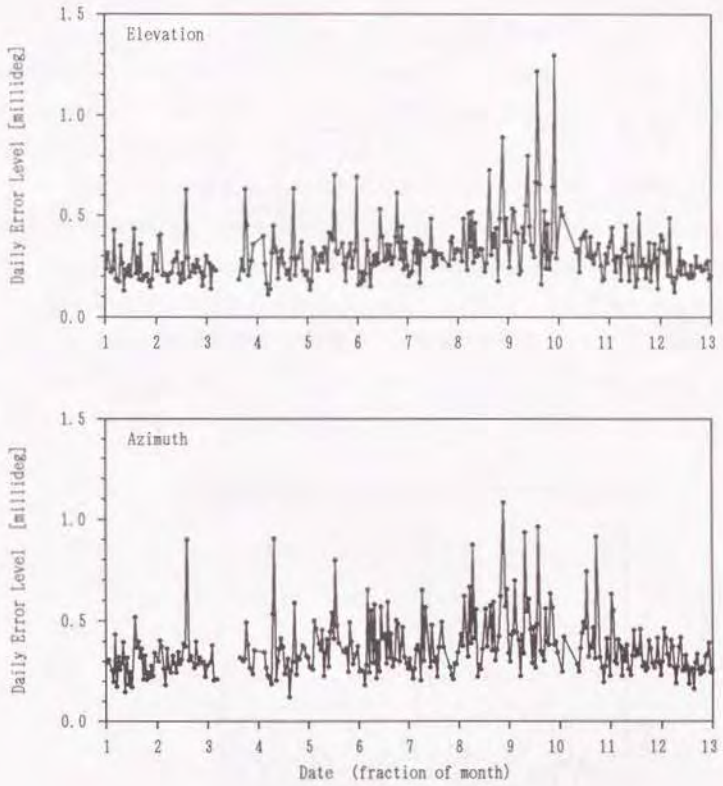



図３－４　擬似差動角の１日別レベルの変化（１９８２年４月－１９８３年３月）

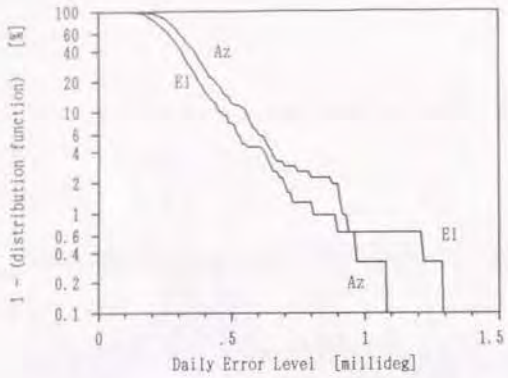



図３－５　差動測角誤差・１日別レベルの分布関数

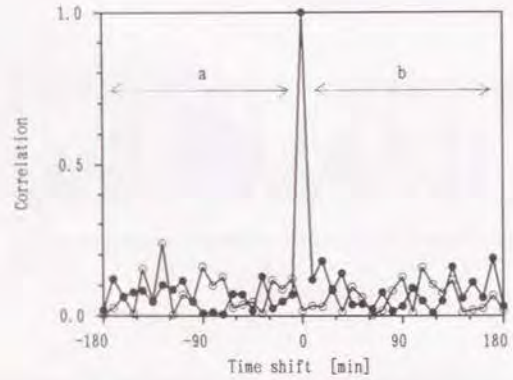



図３－６　擬似差動角の相関関数

●.. $Az$ 自己相関（ａ部）および $El$ 自己相関（ｂ部）

○.. $Az$, $El$ 相互相関



いる（こうすれば誤差レベルの上限を読みとりやすい）．これが，相対軌道決定の精度を見つもる基になる観測誤差統計である．当然ながらこの統計は，特定のアンテナに限定されたものである．しかし，差動測角のノイズ源が大気屈折や風圧にある，つまりアンテナ設備の外にあるということは，ここで得た誤差統計が他の測角アンテナについても成りたつことを期待させるものである．ただし誤差統計の内，風圧にもとづく部分はアンテナの設計に依存して変わるとみるべきである．

図３－５があらわす観測ノイズレベルを(3-15)～(3-17)式に代入すると，相対位置の誤差レベルが評価される．毎時１回の観測（$N$=24）を想定したときの評価結果を表３－１に示す．実時間推定によりつねに最新の相対位置を監視する場合には，各方向とも 100 m ないし 200 m の精度で相対位置が決定される．このように差動測角を導入すれば，衛星の相対位置の推定精度が，従来方式に比べ１オーダー以上改善されることがわかった．とくに経度方向への誤差成分が，ほぼ半径・緯度方向なみに小さく抑えられたことは，２－１４節にのべた要求にかなう結果である．

表３－１　相対位置決定の誤差レベル（1σ）

| 信頼度 | 99% | 90% | 80% |
|---|---|---|---|
| ノイズレベル[ミリ度] | | | |
| $D_A$ | 0.92 | 0.55 | 0.43 |
| $D_E$ | 0.81 | 0.45 | 0.38 |
| 平均 $L$ 方向誤差[m] | | | |
| 決定直後 | 240 | 140 | 110 |
| 半日後予測 | 330 | 190 | 150 |
| １日後予測 | 510 | 300 | 240 |
| 方向別周期誤差[m] | | | |
| $R$ | 77 | 46 | 36 |
| $L$ | 160 | 90 | 72 |
| $K$ | 150 | 84 | 71 |

$T$=3 min として，擬似差動測角を連続的に行うと，１日間に１６０点の割合でデータが取得される．そのような連続データを用いて，$D_A$ と $D_E$ の自己／相互相関関数をしらべ

た．図３－６はその一例であり，$D_A$ と $D_E$ のあいだには相関が無く，また $D_A$, $D_E$ はともに白色ノイズとみなせることが確認された．したがって，(3-18)式のために置いた仮定は正しい．また，観測回数 $N$ を増すことにより，表３－１の誤差レベルを $1/\sqrt{N}$ に比例して低減させることが可能である．

### ３－７　相対軌道決定への摂動の影響

前節までに，差動測角の基本特性としての可観測性と到達精度をあきらかにすることができた．つぎにしらべるのは，実際に差動測角から相対運動を推定するためのデータ処理方法である．相対軌道決定の処理は実時間であることが求められるので，カルマンフィルターを用いて行う．そのさい実用的なフィルターは，必要な精度を保ちつつ，できるだけ簡易であることが望ましい．一般に軌道決定の処理を複雑にしている主な要因に，摂動の処理がある．フィルターの簡易化のためには，それを省略できることが望ましい．そこでフィルターの作成の準備として，摂動の処理を省略すると相対軌道決定にどのような誤差が生じるかをしらべよう．

これまで行ってきた誤差感度解析においては，衛星にはたらく摂動の影響をすべて無視してきた．その理由は，誤差解析で注目するのは軌道要素と観測量の間の微分関係であって，そこには摂動が強く影響しないからである．しかし，相対軌道決定そのものを実行する際には，あらためて摂動の影響を調べる必要がある．静止衛星にはたらく摂動には，第１章にのべたように，地球の重力場の非対称性，月の引力，太陽の引力，太陽光の圧力，という４種類があった．これらの内，はじめの３種類すなわち重力摂動は，衛星の位置だけに依存する．もしも２衛星が十分に近接しているならば，重力摂動は両衛星に等しくはたらくため，相対運動に影響をあたえない．衛星の間隔が増すにつれてその影響が現れるはずである．一方，太陽光の圧力は衛星の断面積／質量比（すなわち各衛星の設計）に依存するので，その影響は重力摂動と異なる現れ方をするであろう．軌道位置のなかに２衛星があるとき，これらの摂動が相対運動に与える影響をみるために，次にのべる数値的テストをおこなった．

２衛星の配置を図３－７のように仮定する．このとき２衛星は，東西（$L$ 軸）方向に一定の間隔 $d$ をおき，南北（$K$ 軸）方向に振幅を $d$ とする周期運動をおこなう．このパラ



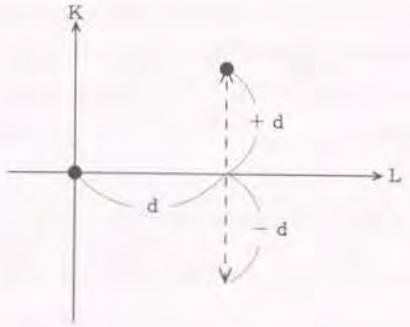



図３－７　相対摂動テストのための衛星配置
相対運動範囲の大きさを $d$ により表す．

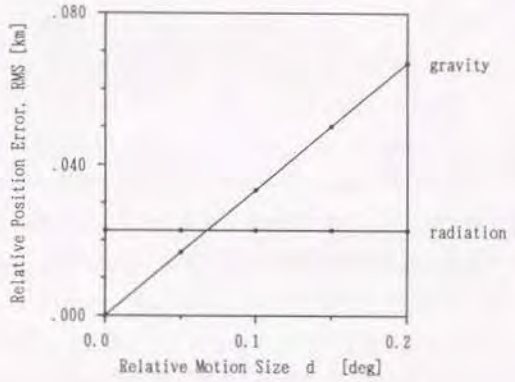



図３－８　摂動がひきおこす相対位置推定誤差
gravity :　月・太陽・地球ポテンシャル
radiation: 太陽光圧力（断面積／質量比差＝ 0.0031 $m^2$/kg）

メータ $d$ を，相対運動のひろがりの尺度とする．ある相対軌道要素にもとづいて時刻 $s$ の相対位置 $r(s)$ を予測するとき，摂動を考慮した場合としない場合の予測値をそれぞれ $r_P(s)$，$r_T(s)$ とおけば，摂動の効果は $r_P(s)-r_T(s)$ である．静止軌道の決定は，軌道1周回にわたる最小自乗フィッティングにもとづく．そこで摂動効果の1日間にわたるＲＭＳ評価

$$\left[\ \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ |r_P(s)-r_T(s)|^2\ \mathrm{d}s\ \right]^{1/2}$$

をとれば，摂動を無視したときに相対軌道決定にあらわれる誤差を概略見つもることができる．

パラメータ $d$ を変化させつつ，このような見つもりを行った結果を図３－８に示す．ここで軌道計算に摂動を考慮するためには，運動方程式の数値積分を用いた．この結果から，重力摂動が相対軌道決定におよぼす影響は，$d$ に正比例することがわかる．しかしその影響は，$d$=0.2 度という最大の場合でも，差動測角ノイズの効果（表３－１）に比べて小さい．したがって差動測角にもとづく相対軌道決定では，重力摂動の考慮を省いても精度が損なわれない．

太陽光圧力の摂動のあらわれ方は，同図が示すとおり衛星間隔 $d$ に依存しないので，衛星の断面積／質量比の差だけによって決まる．ここではわが国の放送衛星クラスの衛星を想定し，２衛星の断面積／質量比のあいだに 10% の差があるものとした．この想定は，同じ設計の２衛星を順次打上げて運用するという，現実に生じる場合に対応している．このように「２衛星が同一設計」という例では，太陽光圧力の摂動を無視しても相対軌道決定の精度を損なわない．２衛星の設計が異なるために断面積／質量比の差が大きい場合には，摂動を無視すると精度に影響をおよぼすことになるが，その正確な評価は次にのべるフィルタリングシミュレーションのなかで行う．

### ３－８　線型化カルマンフィルターの構成と動作［Kawase, 1989］

前節の検討をふまえて，摂動を省略した簡易なフィルターを構成しよう．相対運動の状態ベクトルとして，$(R,L,K)$ 座標による相対位置・速度をとり，

$$\boldsymbol{x}=(R,\ L,\ K,\ R',L',K')^T$$

とする．運動方程式(2-1)において，摂動をあらわす右辺を零とおく．このとき，ある状



態 $\boldsymbol{x}_1$ から出発して時間 $s$ 後に到達する状態を $\boldsymbol{x}_2$ とすれば，状態遷移の法則を次のように表せることがよく知られている［たとえば Prussing and Conway, 1993］．

$$\boldsymbol{x}_2=\Phi(s)\boldsymbol{x}_1$$

$$\Phi(s)=\begin{bmatrix} 4\text{-}3\cos s & 0 & 0 & \sin s & 2\text{-}2\cos s & 0 \\ 6\sin s-6s & 1 & 0 & 2\cos s\text{-}2 & 4\sin s-3s & 0 \\ 0 & 0 & \cos s & 0 & 0 & \sin s \\ 3\sin s & 0 & 0 & \cos s & 2\sin s & 0 \\ 6\cos s\text{-}6 & 0 & 0 & \text{-}2\sin s & 4\cos s\text{-}3 & 0 \\ 0 & 0 & \text{-}\sin s & 0 & 0 & \cos s \end{bmatrix} \tag{3-19}$$

この行列 $\Phi(s)$ を，状態遷移行列という．

つぎに，差動測角の観測ベクトルを

$$\boldsymbol{z}=(D_A,\ D_E)^T$$

とおく．これにともなって観測行列を

$$H=\begin{bmatrix} \partial D_A/\partial R & \partial D_A/\partial L & \partial D_A/\partial K & 0 & 0 & 0 \\ \partial D_E/\partial R & \partial D_E/\partial L & \partial D_E/\partial K & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

とすべきであるが，ここではそれを次のように近似する；２衛星とも公称静止位置にあるものとし，$A_z$，$E_l$ を副衛星の方位・仰角として

$$H=\begin{bmatrix} \partial Az/\partial R & \partial Az/\partial L & \partial Az/\partial K & 0 & 0 & 0 \\ \partial El/\partial R & \partial El/\partial L & \partial El/\partial K & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

とおく．これにより観測行列は，公称衛星位置と追跡局位置に応じて定まる定数行列となるから，事前に用意しておくことができる．

このように定めた状態ベクトル $\boldsymbol{x}$，観測ベクトル $\boldsymbol{z}$，状態遷移行列 $\Phi$，観測行列 $H$ により，差動測角 $\boldsymbol{z}$ から相対運動 $\boldsymbol{x}$ を推定する線型カルマンフィルターが構成される．

作成したフィルターの動作を，図３－９に示す数値シミュレーションによりテストした．２衛星の軌道要素として，図３－７の配置で $d$=0.01 度に相当するものを与え，４種類の摂動を考慮した軌道生成により毎時１点の観測データを発生させる．観測ノイズとしては，表３－１の信頼度 90% に相当する標準偏差をもつ正規乱数を用いる．観測ノイズの共分散行列は，公式どおりに

$$R=\begin{bmatrix} \sigma^2\langle D_A\rangle & 0 \\ 0 & \sigma^2\langle D_E\rangle \end{bmatrix}$$

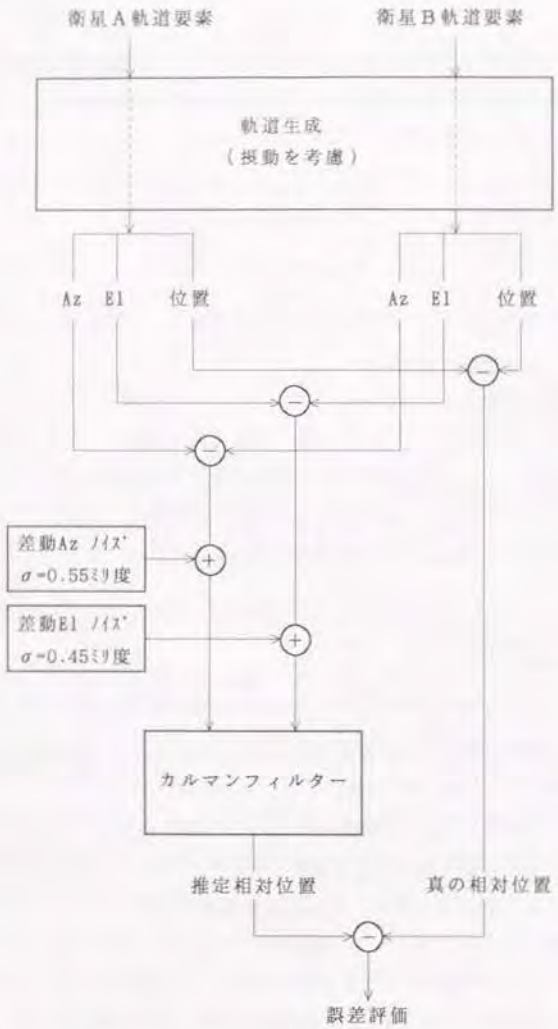



図３－９　線型化カルマンフィルターによる相対軌道決定のシミュレーションテスト



とする．力学モデルにあたえるノイズの共分散行列（通常Q行列と称する）はここでは零とした．フィルターが出力する相対位置の誤差を，軌道生成があらわす値を真値として評価する．図３－１０はその結果であり，フィルタリングの開始後，時間の経過につれて相対位置の誤差（$R,L,K$ ３成分の自乗和平方根）が減少していく様子を示す．期待されるとおり，フィルターは１日間の観測により安定に達する．フィルタリングは最も基本的なアルゴリズムにもとづいており，ＵＤ分解や平方根フィルターのような安定化の措置をほどこしていないが，数値的な不安定を生じない．それは良好な可観測性が保証されているためと考えられる．図の（ａ）は，２衛星の断面積／質量比が等しい場合である．このとき，１日間の追跡後の推定誤差レベルは 100 m と 200 m の間にあり，表３－１の 90% レベル（ただし軌道決定直後）に合致する．したがって，このカルマンフィルターの構成が妥当であることが確認された．

２衛星の断面積／質量比が異なる場合には，差動的な太陽光圧力のために相対位置の推定に誤差を生じる．同図（ｂ）は，「２衛星が同一設計」という前述の例にならって太陽光圧力に 10% の差をもたせた場合であるが，（ａ）に比べた誤差増加は大きくない．さらに同図（ｃ）では，「２衛星が異なる設計」である例として，３軸安定型とスピン安定型の衛星の組合せを想定した（具体的には，インテルサット５号および同６号衛星）．３軸安定衛星では，衛星本体の外部に太陽電池パネルを展開するので断面積が大きくなり，スピン型にくらべて大きな断面積／質量比をもつ．このような衛星の組合せにおいては，太陽光圧力の差が無視できない誤差をひきおこす．しかしながら通信・放送衛星の最近の設計は，大きな発生電力を得るために３軸安定型とすることが主流となっているから，スピン型と３軸型が混在するケースが今後に多くあらわれることはないであろう．将来の軌道の混雑問題においては多くの場合，状況は（ｃ）よりも（ｂ）に近いものと考えてよい．

ところで，本節のカルマンフィルターのもとになった方程式(2-1)は，軌道運動を線型化近似したものであるため，２衛星の相対運動範囲が大きいときには近似にともなう誤差を生じる[Dunning, 1973]．図３－１０（ａ）の例では，衛星間隔が小さいので運動モデルの精度が良く，そのような場合にはフィルタリングが進むにつれて推定誤差のレベルが単調に減少していく．相対運動の範囲 $d$ が大きくなると，線型近似誤差がはたらくた

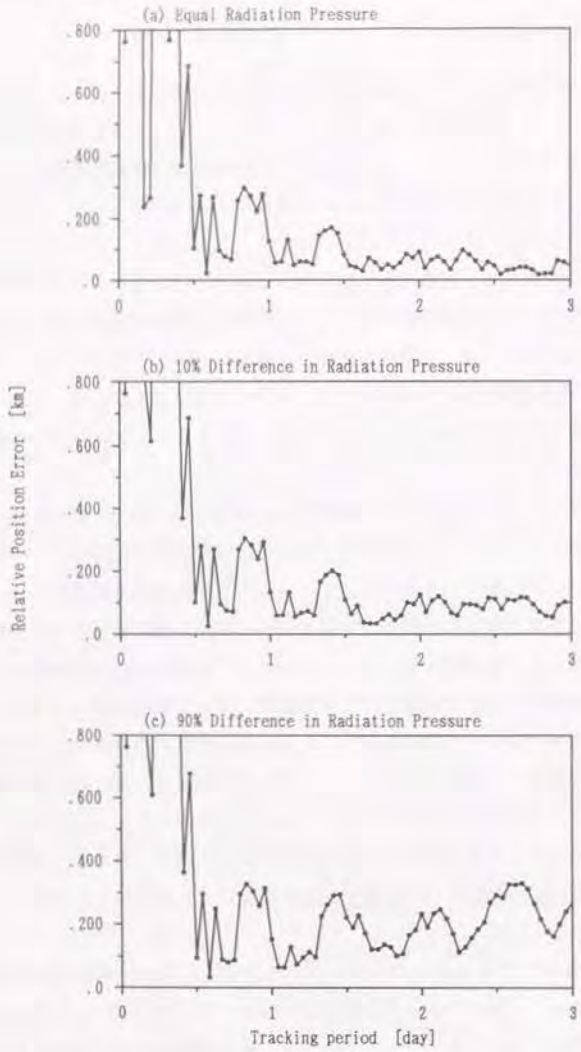



図３－１０　線型カルマンフィルターによる相対位置推定
（ａ）～（ｃ）は太陽光圧力条件の違いを表す．



め，たとえば図３－１１にみるように，推定誤差がある一定レベル（フィルタリング誤差）にとどまり，それよりも低下しなくなってしまう．同図は $d$=0.1度でのシミュレーションを示すもので，ここでは軌道生成に摂動を入れず，観測ノイズも零として，運動モデルの誤差の影響だけが現れるようにした．パラメータ $d$ を変えると，フィルタリング誤差の大きさは図３－１２のように変わった．このように線型近似誤差の影響は $d$ の自乗に比例する．とくに $d$ が0.1度をこえると，近似誤差の影響が観測ノイズの影響を上まわるため，観測データに含まれる情報が有効に利用できなくなってしまう．したがって線型化カルマンフィルターが適用できるのは，相対運動の広がりが0.1度以内である場合に限られる．

このように，線型化カルマンフィルターには適用範囲の制限があることがわかったが，衛星間隔が小さいことがあらかじめわかっている場合には，最も簡易な推定フィルターとして有効である．また，目的とする相対運動を未知量として直接に推定するので，感覚的に把握しやすいことも利点といえよう．

## ３－９　拡張カルマンフィルターの構成［川瀬・沢田 1993］

前節で導いた線型化カルマンフィルターには，$d$<0.1度という適用制限があった．相対運動の範囲がひとつの軌道位置の全域におよぶ場合，あるいは隣接する軌道位置にある衛星どうしの位置関係を監視するという場合が現実にあり得るが，線型化カルマンフィルターはそれらに対応できない．そこで本節では，衛星間隔が大きくなっても推定精度が保たれるようなフィルターの構成を考えることにしよう．

相対運動の範囲が広いときには線型化ランデヴ方程式が利用できない以上，フィルターは，２衛星の運動をそれぞれ別個に推定し，その差として相対運動を表さなければならない．つまり相対座標による運動の表現がここでは使えない．そこで各衛星の運動を，地心慣性座標系（$x, y, z$）— $x$ 軸は春分点，$z$ 軸は地軸の北を指す — で記述する．２衛星Ａ，Ｂについて，運動状態ベクトルはそれぞれ

$$\text{衛星A：}\ \boldsymbol{x}_A=(x_A,\ y_A,\ z_A,\ x'_A,\ y'_A,\ z'_A)^T$$

$$\text{衛星B：}\ \boldsymbol{x}_B=(x_B,\ y_B,\ z_B,\ x'_B,\ y'_B,\ z'_B)^T$$

であるが，これらをあわせた１２次のベクトル

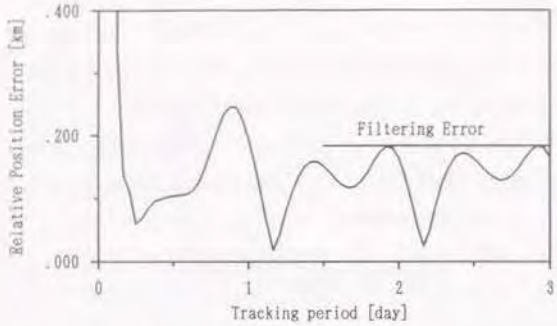



図３－１１　線型近似にともなうフィルタリング誤差の発生

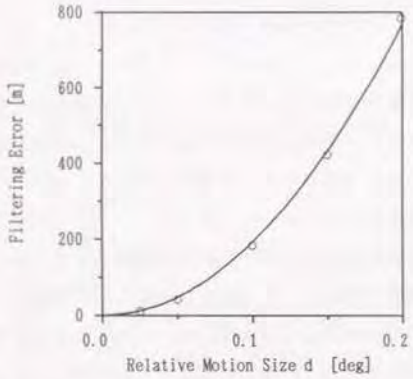



図３－１２　相対運動範囲の大きさとフィルタリング誤差の関係
シミュレーション結果（○）に２次曲線をあてはめた．



$$X=(\boldsymbol{x}_A{}^T,\ \boldsymbol{x}_B{}^T)^T$$
$$=(x_A,\ y_A,\ z_A,\ x'_A,\ y'_A,\ z'_A,\ x_B,\ y_B,\ z_B,\ x'_B,\ y'_B,\ z'_B)^T$$

により２衛星の運動をあらわす．前節とおなじく，ここでも衛星の軌道運動には摂動を考慮しない．時間の経過にともなう，状態 $X_1=X(s_1)$ から $X_2=X(s_2)$ への遷移法則は，

$$\boldsymbol{x}_{A2}=\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}_{A1},s_2-s_1)$$
$$\boldsymbol{x}_{B2}=\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}_{B1},s_2-s_1)$$

という形をとる．ここで関数 $\varphi$ の具体的な内容としては，たとえばＦＧ表現による軌道予測式[Bate et al, 1971]を用いる．この関数は非線型であるから，フィルタリングにおける状態遷移行列をつぎのような偏微分行列とする：

$$\Phi=\partial X_2/\partial X_1=\begin{bmatrix}\Phi_A & 0\\ 0 & \Phi_B\end{bmatrix}$$

$$\Phi_A=\partial\boldsymbol{x}_{A2}/\partial\boldsymbol{x}_{A1}$$
$$\Phi_B=\partial\boldsymbol{x}_{B2}/\partial\boldsymbol{x}_{B1}$$

これらの偏微分は，関数 $\varphi$ の数値的変分から算出する．

各衛星の運動を別個に推定するためには，観測データを差動測角としてではなく，衛星ごとの単独測角として与えなければならない．ただしその場合でも，２衛星に対する観測時刻は同一であるとする．すなわち差動化処理(3-1)式において，右辺の２項を，差をとらずにそれぞれ観測値とするのである．これにともない，２衛星分の $Az$，$El$ をあわせた４次のベクトル

$$Z=(Az_A,\ El_A,\ Az_B,\ El_B)^T$$

を観測ベクトルとする．状態量から観測量への関数関係

$$\begin{bmatrix}Az\\ El\end{bmatrix}=\boldsymbol{h}(x,y,z,s)$$

は，時刻 $s$ をあたえて地球の自転角を定め，幾何的に $Az$，$El$ を算出することを内容とするが，これもまた非線型であるから，観測行列はつぎのような偏微分行列となる：

$$H=\frac{\partial Z}{\partial X}=\begin{bmatrix}H_A & 0\\ 0 & H_B\end{bmatrix}$$

$$H_A=[\ \partial\boldsymbol{h}/\partial x_A\ \ \partial\boldsymbol{h}/\partial y_A\ \ \partial\boldsymbol{h}/\partial z_A\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ ]$$

$$H_B = [\ \partial h/\partial x_B \quad \partial h/\partial y_B \quad \partial h/\partial z_B \quad 0 \quad 0 \quad 0\ ]$$

この観測行列は衛星の位置に依存するので，観測時刻ごとに算出する必要がある．

以上のとおり定めた

状態ベクトル：$X$，　状態遷移法則：$\varphi$，　状態遷移行列：$\Phi$

観測ベクトル：$Z$，　観測モデル：$h$，　観測行列：$H$

を用いて，$Z$ から $X$ を推定する拡張カルマンフィルターを作ることができる．ところがこの構成においては，$X$ の推定値を得たとしても，それは単にふたつの衛星の軌道決定を同時に実行したという事にとどまり，相対軌道決定をおこなった事にはならない．なぜなら，軌道推定の処理を衛星ごとに独立としたために，「差動」観測による「相対」運動推定という概念が失われてしまったからである．差動観測の目的を反映させるためには，2系統の軌道推定処理のあいだに何らかの関係をもたせなければならない．

いま，「ふたつの観測量 $A$，$B$ があり，その差 $A$-$B$ をとるならば共通誤差が除去できる」ということは，$A$ の誤差と $B$ の誤差のあいだに正の相関があることにほかならない．この相関が強いほど，差動化による誤差除去の効果も大きい．測角値 $Az_A$，$Az_B$ のあいだに，また $El_A$，$El_B$ のあいだにあるのは，このような関係である．それを具体的に表すために，観測 $Z$ の誤差共分散行列に次のように非対角成分をもたせる：

$$R = \begin{bmatrix} \sigma^2\langle Az\rangle & 0 & \alpha\sigma^2\langle Az\rangle & 0 \\ & \sigma^2\langle El\rangle & 0 & \beta\sigma^2\langle El\rangle \\ & & \sigma^2\langle Az\rangle & 0 \\ & & & \sigma^2\langle El\rangle \end{bmatrix}$$

ここで，

$$\alpha = 1 - \sigma^2\langle D_A\rangle / 2\sigma^2\langle Az\rangle \tag{3-20}$$

$$\beta = 1 - \sigma^2\langle D_E\rangle / 2\sigma^2\langle El\rangle \tag{3-21}$$

であり，$\alpha$，$\beta$ がともに1に近いほど，差動化の効果が強いことをあらわす．

つぎに，相対運動の推定においては，2衛星にはたらく摂動がひとしいという事実が本質的な意味をもっていた．すなわちフィルターは，何らかの摂動が2衛星にはたらき，その影響があい等しい，ということを認識する必要がある．そのために，状態量 $X$ の遷移に外乱が加わることを想定し，その共分散行列につぎのように非対角成分をもたせる：



$$Q = \begin{bmatrix} 0 & & & & & & & & & & & \\ & 0 & & & & & & & & & & \\ & & 0 & & & & & & & & & \\ & & & w & \cdots & \cdots & \cdots & w & & & & \\ & & & & w & \cdots & \cdots & \cdots & w & & & \\ & & & & & w & \cdots & \cdots & \cdots & w & & \\ & & & & & & 0 & & & \vdots & & \\ & & & & & & & 0 & & \vdots & & \\ & & & & & & & & 0 & \vdots & & \\ & & & & & & & & & w & \vdots & \\ & & & & & & & & & & w & \vdots \\ & & & & & & & & & & & w \end{bmatrix}$$

ここで $w$ は，摂動の強度に相当する大きさとする．この措置により，外乱力が2衛星にひきおこす速度増分がつねに等しい，という条件が考慮されるようになる．ここで，$Q$ 行列があらわすのはランダムな外乱の存在であるのに対し，実際にはたらく摂動はランダムではない．しかしながらカルマンフィルターの実利用において，確定的な外乱力の存在をこのように近似的に $Q$ 行列であらわすことは，フィルタリングの技術として行われることである．

このように，2系統の軌道決定処理のあいだに統計的な相関をもたせることによって，差動測角による相対運動推定と同等な処理をおこなう拡張カルマンフィルターを導いた．このフィルタリング構成では，摂動の影響（図3－8）が許容できるかぎり，衛星間隔を任意に大きくすることができる．フィルターが出力する2衛星の運動 $\boldsymbol{x}_A$，$\boldsymbol{x}_B$ はそれぞれ，単独測角ノイズならびに摂動の影響を受けているから，とくに正確な推定値であることはない．ところが相対値 $\boldsymbol{x}_A - \boldsymbol{x}_B$ を作ると，共通な誤差が打ち消されるため，高い推定精度（つまり表3－1の精度）が得られるのである．フィルタリングの実行において，パラメータ $\alpha$，$\beta$，$w$ はそれぞれの物理的意味にもとづいて定まっているはずの量であるが，実際にはフィルターが良好に動作するように調整をくわえる．

### 3－10　拡張カルマンフィルターの動作

非線型拡張カルマンフィルターの動作を，図3－13に示す数値シミュレーションにより確認した．このシミュレーションでは，単独測角のノイズと差動測角のノイズをそれぞれ発生させて観測値に加える．差動測角のノイズレベルを表3－1（90%信頼度）に合わせ，単独測角のノイズレベルは「標準ノイズレベル」（2－12節）に合わせた．単独測角誤差は両衛星に共通であるから，もしもフィルター入力において差動値 $Az_A - Az_B$，

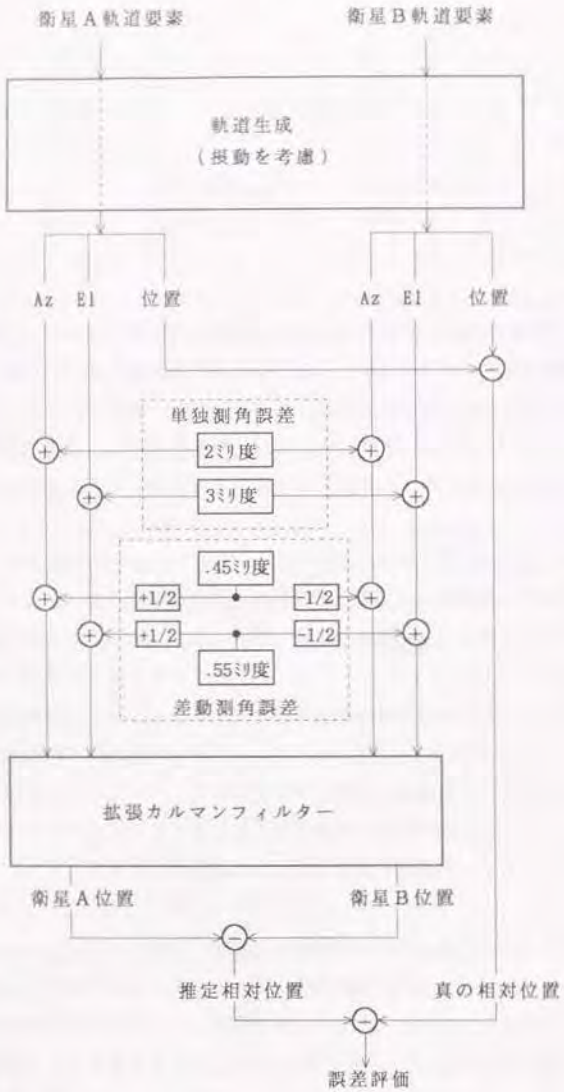



図３－１３　拡張カルマンフィルターによる相対軌道決定のシミュレーションテスト
単独・差動測角の誤差の数値は $1\sigma$ を表す．



$El_A - El_B$ をとれば，差動測角誤差だけが残るようになっている．このとき，(3-20)(3-21)式に従えば $\alpha = 0.96$，$\beta = 0.99$ とすべきであるが，実際には $\alpha$ と $\beta$ が１に近すぎるとフィルターの動作が不安定になったため，調整をくわえて $\alpha=\beta=0.8$ とした．摂動パラメータ $w$ もまた，大きすぎると不安定性をひきおこすため，調整を必要とした（ここでは観測間隔である１時間のあいだに生じる速度変化を 10 cm/s とした）．フィルタリング開始のために与える初期状態は，線型化フィルターの場合に比べ，より真値に近いことが必要であった．

相対運動範囲 $d = 0.2$ 度としたときのシミュレーション結果を，図３－１４に示す．太陽光圧力の条件（ａ）～（ｃ）は，線型フィルターの場合の図３－１０（ａ）～（ｃ）にそれぞれ同一である．図３－１４と図３－１０について，フィルター収束後の誤差レベルを比べると，条件（ａ）～（ｃ）のそれぞれにおいて両者は一致する．すなわち，この拡張フィルターを利用すれば，相対運動範囲 $d$ を大きくしても推定誤差が増大しないことが確認された．ただし，非線型処理をともなうために，収束に要する時間が線型フィルターに比べて長くなっている．ケース（ａ）において，差動化の措置をおこなわずに（つまり行列 $R$，$Q$ の非対角成分をすべて零として）フィルタリングを行うと，推定誤差が図３－１５のように増大した．これにより，相対位置の精度を保証するのは２衛星の軌道決定処理のあいだの相関であることが確かめられた．

以上により，相対運動範囲の制約を無くした推定フィルターが得られた．このフィルタリングアルゴリズムは，線型フィルターにくらべると計算量が多く，演算時間も増す．したがって相対軌道決定を実施するさいには，相対運動の範囲と許容できる計算量とを勘案し，２種類のフィルターから適切なものを選択するのがよい．

### ３－１１　差動測角の高精度化

衛星の測角をおこなうためには，追尾アンテナのほかに電波干渉計という手段がある．それは，離れた２地点にあるアンテナで衛星電波をそれぞれ受信し，その位相差を測定することによって衛星の方向を観測するというものである．干渉計を，２衛星に対して差動的に動作するように作れば，差動測角をおこなうことができる（図３－１６）．本章で明らかにしたとおり，自動追尾アンテナによる差動測角では，２衛星の観測を順に切りかえている間に大気屈折量が変わってしまうことと，風圧による外乱とが，ともに観測誤差を

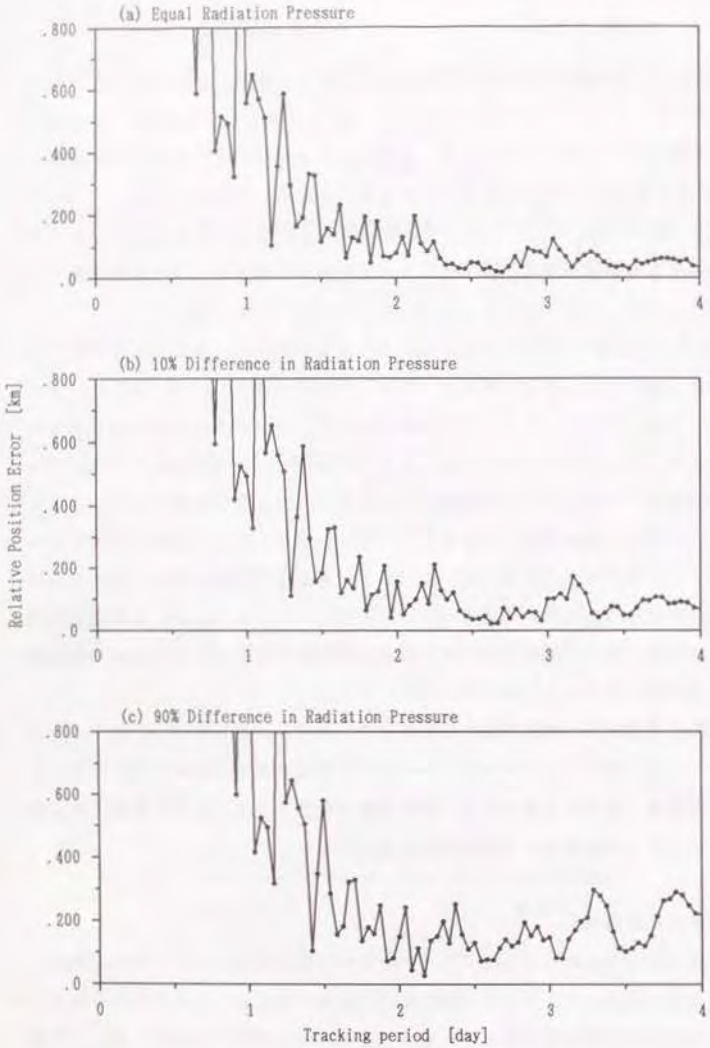



図３－１４　拡張カルマンフィルターによる相対位置推定
太陽光圧力条件（ａ）～（ｃ）は，図３－１０に同じである．



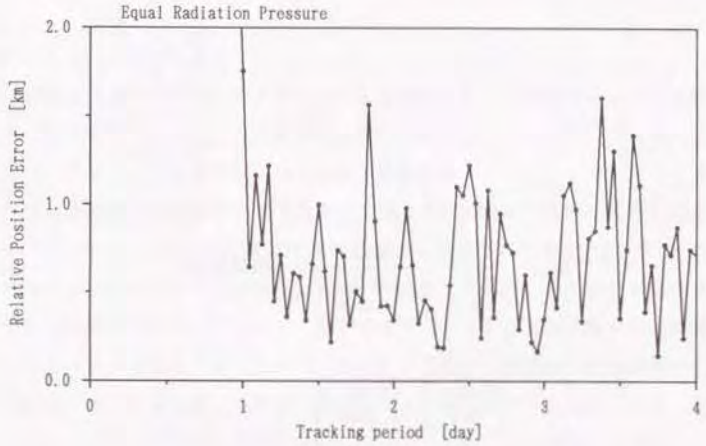



図３－１５　差動化措置を外した拡張カルマンフィルターによる相対位置推定
太陽光圧力は，図３－１４（ａ）に同じである．

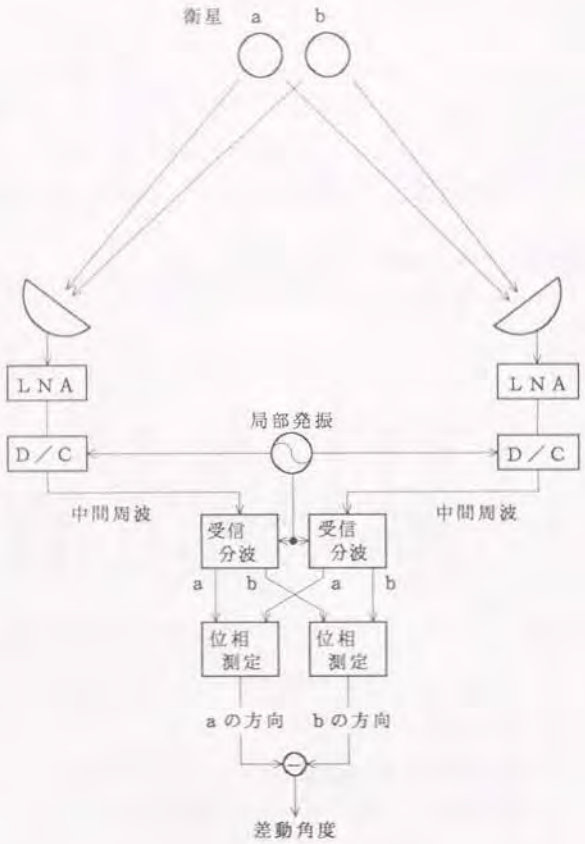



図3－16　差動型干渉計による差動測角
アンテナから受信・分波までの回路の位相誤差，および局部発振信号の供給の位相誤差の影響は，2衛星の方向差をとるときに消える．



ひきおこしていた．ところが差動干渉計では，2衛星の観測を同時におこなって差動化することができるから，大気屈折にゆらぎがあっても観測誤差をひきおこすことがない．しかも干渉計の受信アンテナを，追尾駆動を行わない固定式にできるので，風圧による指向誤差もまた避けられる．したがって，差動干渉計を用いた場合の相対軌道決定精度は，表3－1のレベルに比べてさらに相当に向上するであろう．

このように差動測角は，在来の追尾アンテナを用いても良好な精度が得られ，干渉計を用いることでさらに精度が大きく向上するという，発展性をそなえた追跡方式である．

### 3－12　本章のまとめ

近接した静止衛星の相対運動を推定する手段として，地上局における差動測角という新しい方法をしらべた．2衛星の角度差を観測することによって共通誤差を除去すると，1万分の数度という観測精度が得られる．差動角をカルマンフィルターで処理すれば，衛星の相対運動が3次元的に推定できる．このとき追跡局は，衛星を見通しできるなら地上のどこにあってもよい．2衛星が同一の設計ならば，100 m ないし 200 m の相対位置精度が得られる．推定用カルマンフィルターの構成としては，適用範囲が制限されるがアルゴリズムの簡易な線型化フィルターと，計算量は増えるが適用制限のない非線形拡張フィルターという2種類を用意したので，実施条件に応じて適切なものを選択する．

追跡すべき衛星に応じた給電系をアンテナに装備するとともに，方位・仰角の反転旋回が可能なように機械系を設計しておくならば，どのような衛星の組合せに対しても，精度をそこなわずに差動測角を実施できる．したがって，異なる国や組織に属する衛星が混在する場合にもひとしく対応可能である．追尾アンテナのかわりに差動型電波干渉計を用いると，精度がさらに向上する．

このように差動測角は，広範な衛星への適用性と，精度上の発展性を兼ねそなえた追跡方式である．

## 第４章　衛星間追跡による相対軌道決定
[Kawase, 1988; Kawase, 1990b]

### ４－１　本章のねらい

静止衛星の相対軌道決定をおこなうための，地上差動測角とならぶもうひとつの候補として，本章では衛星間追跡の方法をとりあげる．

衛星間追跡においては，衛星の間でたがいに電波を送受しあう都合により，衛星の空間的な配置の形状が制約をうける（４－２節）．この点に注目した可観測性の解析から，衛星間追跡として２種類の型式を見いだす．それぞれについて相対軌道決定の精度をあきらかにしつつ（４－３節～４－６節），両者の得失を比較する（４－７節）．ここでもまた，相対運動を推定するためのカルマンフィルターを導出するが，高精度を実現するために，太陽輻射の揺動を考慮に入れた推定アルゴリズムを導く（４－８節～４－９節）．

これらの各論により，衛星間追跡の実施方法，要求条件，ならびに到達精度をあきらかにする．

### ４－２　衛星間追跡

衛星間追跡においては，ある衛星が追跡局の機能をもち，他の衛星を追跡する．ここでは２機の衛星を考え，主衛星が観測機器を搭載して副衛星を追跡するものとする．観測の種目としては，電波の往復時間にもとづく測距，および電波の到来方向にもとづく測角が考えられる．距離変化率が小さいためにドプラー効果による追跡が利用できないという事情は，地上からの衛星追跡においてと同様である．

衛星間追跡は，それを意図して設計した衛星どうしの組合せでなければ実施できない．この方式は主に，第１章にのべたクラスター衛星システムに応用すべきものである．クラスターシステムでは各衛星のあいだを通信回線で結ぶため，その回線を利用して測距，測角をおこなうのが自然である．

衛星間に通信回線を設けるためには，両衛星のアンテナをたがいに対向させつつ，アンテナ間の見通しを確保しなければならない．このことは，衛星の空間配置の形状に制約をあたえる．もしもアンテナ間をむすぶ視線の方向が衛星機体に対して大きく変わるとする



と，アンテナを追尾旋回させる機構の設計がむずかしくなるばかりでなく，機体のまわりの構造物（通信・放送用アンテナとその支持構造，さらに３軸型衛星では太陽電池パネル）がアンテナ間の見通しをさまたげる割合が多くなってしまう．したがって，衛星間視線の方向の変化をできるだけ少なくする必要がある．つぎに，衛星間追跡のための機器は，通信ミッション機器にあてるべき重量をさいて搭載するものであるから，できるだけ軽量・簡易化をはかる必要がある．衛星間追跡の検討においては，以上ふたつの要求条件を考慮しなければならない．

### ４－３　整列配置における衛星間追跡

衛星間の視線方向の変化を最も少なくするのは，軌道進行方向に一定間隔をおいて２衛星を並べた配置である（以下これを「整列配置」という）．このとき，視線方向は機体に対して一定である．２衛星がほぼ整列配置にあるとしたとき，どのような追跡観測をおこなえば相対軌道決定が可能であるかをしらべよう．第３章でおこなったと同様に，衛星の相対位置を図２－１の $(R, L, K)$ 座標であらわし，ランデヴ方程式の解(2-2)式により相対運動をあらわす．主衛星から見た副衛星の距離 $\rho$，方位角 $\alpha$，仰角 $\varepsilon$ を，図４－１に従って次式のように定める．

$$\rho = \sqrt{R^2 + L^2 + K^2}$$

$$\alpha = \tan^{-1}\frac{L}{K}, \quad \varepsilon = \tan^{-1}\frac{R}{\sqrt{L^2 + K^2}} \tag{4-1}$$

方位・仰角のとり方には，いく通りかの定義が可能であり，そのどれをとるかは便宜上のとりきめにすぎない．ここでは主衛星を地上局の一種（ただし高度が大きい）とみたときに，通常の $Az$, $El$ のとり方に一致するものを選択した．

相対軌道決定の可観測性をしらべるために，観測量 $(\rho, \alpha, \varepsilon)$ の，推定未知量 $(E_1, \ldots, E_6)$ に関する偏微分をみる必要がある．それを(4-1)式と(2-2)式から導くと，つぎのとおりである．

$$\partial\rho/\partial E_1 = L/\rho$$

$$\partial\rho/\partial E_2 = (-2R/3 + Ls)/\rho$$

$$\partial\rho/\partial E_3 = (R\cos s - 2L\sin s)/\rho$$

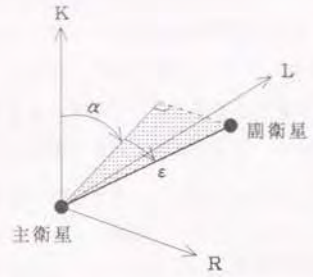



図４－１　衛星間測角の定義
$\alpha$: 方位角，$\varepsilon$: 仰角．$(K,L)$ 面を，
主衛星における水平面と考える．

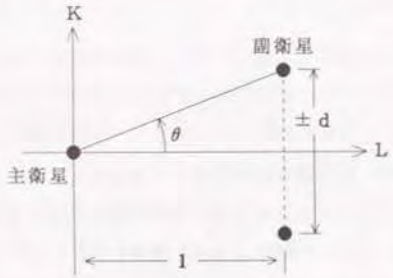



図４－２　衛星間測距を行うための衛星配置形状
（整列配置に修正をくわえる）



$$\partial\rho/\partial E_4 = (R\sin s + 2L\cos s)/\rho$$
$$\partial\rho/\partial E_5 = (K/\rho)\cos s$$
$$\partial\rho/\partial E_6 = (K/\rho)\sin s \qquad (4\text{-}2)$$

$$\partial\alpha/\partial E_1 = K/\rho_H^2$$
$$\partial\alpha/\partial E_2 = Ks/\rho_H^2$$
$$\partial\alpha/\partial E_3 = -(2K/\rho_H^2)\sin s$$
$$\partial\alpha/\partial E_4 = (2K/\rho_H^2)\cos s$$
$$\partial\alpha/\partial E_5 = -(L/\rho_H^2)\cos s$$
$$\partial\alpha/\partial E_6 = -(L/\rho_H^2)\sin s \qquad (4\text{-}3)$$

$$\partial\varepsilon/\partial E_1 = -RL/(\rho^2\rho_H)$$
$$\partial\varepsilon/\partial E_2 = -2\rho_H/(3\rho^2) - RLs/(\rho^2\rho_H)$$
$$\partial\varepsilon/\partial E_3 = \rho_H\cos s/(\rho^2) + 2RL\sin s/(\rho^2\rho_H)$$
$$\partial\varepsilon/\partial E_4 = \rho_H\sin s/(\rho^2) - 2RL\cos s/(\rho^2\rho_H)$$
$$\partial\varepsilon/\partial E_5 = -RK\cos s/(\rho^2\rho_H)$$
$$\partial\varepsilon/\partial E_6 = -RK\sin s/(\rho^2\rho_H) \qquad (4\text{-}4)$$

ただし $\rho_H = \sqrt{K^2+L^2}$ である．衛星間隔を $l$ とおいて，２衛星の整列配置をあらわす $L=l$，$R=K=0$ を代入すると，上の各式はつぎの形になる．

$$\partial\rho/\partial E_1 = 1$$
$$\partial\rho/\partial E_2 = s$$
$$\partial\rho/\partial E_3 = -2\sin s$$
$$\partial\rho/\partial E_4 = 2\cos s$$
$$\partial\rho/\partial E_5 = 0$$
$$\partial\rho/\partial E_6 = 0 \qquad (4\text{-}5)$$

$$\partial\alpha/\partial E_1 = 0$$
$$\partial\alpha/\partial E_2 = 0$$
$$\partial\alpha/\partial E_3 = 0$$
$$\partial\alpha/\partial E_4 = 0$$
$$l\,\partial\alpha/\partial E_5 = -\cos s$$
$$l\,\partial\alpha/\partial E_6 = -\sin s \tag{4-6}$$

$$\partial\varepsilon/\partial E_1 = 0$$
$$\partial\varepsilon/\partial E_2 = -2/3$$
$$\partial\varepsilon/\partial E_3 = \cos s$$
$$\partial\varepsilon/\partial E_4 = \sin s$$
$$\partial\varepsilon/\partial E_5 = 0$$
$$\partial\varepsilon/\partial E_6 = 0 \tag{4-7}$$

1日間の追跡をおこなうものとして，各式の右辺の独立性に注意すれば，(4-5)式の関係によって，$\rho$ の観測は $E_1, \ldots, E_4$ を決定する．また(4-6)式の関係により，$\alpha$ の観測は $E_5$，$E_6$ を決定する．仰角 $\varepsilon$ がもたらす情報は，$\rho$ の情報にすでに含まれているので，本質的ではない．したがって（$\rho$，$\alpha$）の1日間の観測が，相対軌道決定のために必要十分であることがわかった．距離 $\rho$ だけ，あるいは角度（$\alpha$，$\varepsilon$）だけを観測したのでは，決定できない軌道要素が残るために相対軌道決定が不可能である．

## 4－4　衛星間測距・測角による相対軌道決定精度

つぎに，（$\rho$，$\alpha$）追跡にもとづく相対軌道決定の精度を評価しよう．観測値を1日間にわたり均等に，$1/N$ 日の間隔をおいて取得したとする．ここで注目すべきこととして，誤差解析のもとになる(4-5)(4-6)式は，第3章において差動測角の誤差解析のもとになった(3-10)(3-11)式と同じ形をもつ（この一致は，衛星を $L$ 方向に整列させたことにともなっている）．したがって(3-13)(3-14)式を利用すれば，軌道要素の誤差について，ただちに次の評価式を得る．



$$\mathcal{E}\left\{\begin{bmatrix}\delta E_1\\ \delta E_2\\ \delta E_3\\ \delta E_4\end{bmatrix}[\delta E_1, \delta E_2, \delta E_3, \delta E_4]\right\}$$
$$= \frac{\sigma^2\langle\rho\rangle}{N}\begin{bmatrix} 8.58 & -2.41 & 2.41 & 0 \\ & 0.769 & -0.769 & 0 \\ & & 1.27 & 0 \\ & & & 0.50 \end{bmatrix} \tag{4-8}$$

$$\mathcal{E}\left\{\begin{bmatrix}\delta E_5\\ \delta E_6\end{bmatrix}[\delta E_5, \delta E_6]\right\} = \frac{l^2\,\sigma^2\langle\alpha\rangle}{N}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} \tag{4-9}$$

ただし $\sigma\langle\rho\rangle$，$\sigma\langle\alpha\rangle$ は，距離・方位の観測誤差レベル（$1\sigma$）である．さらにこれから，相対位置の誤差の各種評価（$1\sigma$）を次のように得る．

平均 $L$ 方向誤差

$$D_0 = \sigma\langle E_1\rangle = 2.93\sigma\langle\rho\rangle/\sqrt{N} \tag{4-10}$$

平均 $L$ 方向ドリフト誤差（1日あたり）

$$D_1 = 2\pi\sigma\langle E_2\rangle = 5.51\sigma\langle\rho\rangle/\sqrt{N} \tag{4-11}$$

方向別周期誤差

$$M_R = 0.94\,\sigma\langle\rho\rangle/\sqrt{N}$$
$$M_L = 1.88\,\sigma\langle\rho\rangle/\sqrt{N} \tag{4-12}$$
$$M_K = 1.41\,l\,\sigma\langle\alpha\rangle/\sqrt{N}$$

主衛星に姿勢誤差（ピッチ軸）があると，それは衛星間方位の観測誤差となって現れる．通信・放送衛星の姿勢は少なくとも十分の数度の精度で決定されるのがふつうであるが，ここでは一例として方位誤差レベルを0.5度としよう．測距誤差レベルを，地上局での測距にひとしく10 m とおき，$l$=10 km，$N$=24（毎時観測）を想定すれば，相対位置の決定精度は次のとおりである．

平均 $L$ 方向誤差：軌道決定直後＝6 m，1/2日後＝8 m，1日後＝13 m

方向別周期誤差：$R$＝1.9 m，$L$＝3.8 m，$K$＝25 m

観測値にバイアス誤差があるとき，その影響の現れ方は単純である．測距 $\rho$ のバイアスは，(4-5)式の右辺の定数項 1 を通して，$E_1$ のバイアス誤差となって現れる．角度 $\alpha$ のバイアスは，(4-6)式の右辺に定数項がないために，$E_5$，$E_6$ に誤差をひきおこさない．たとえ観測バイアスがあってもドリフトレート誤差 $\delta E_2$ を生じないことは，地上からの測距にくらべた衛星間追跡のすぐれた点である．

以上により，衛星を整列配置させたときの衛星間追跡の方法があきらかになった．

## 4－5　衛星間測距による相対軌道決定

2 衛星を整列配置としたときは，衛星間の距離と方位角の観測が必要であった．角度を観測するためには，電波の方向を自動追尾する装置が必要である．もしもそれを省くことができれば，観測機器の簡易軽量化にむすびつく．そこで，衛星間の測距だけにもとづいて相対軌道決定をおこなうことを考えよう．

2 衛星を整列配置したとき，測距だけでは可観測性を得られないことがすでにわかっている．ここでは $R=K=0$ という整列束縛をはずし，衛星に相対運動をもたせることによって可観測性を得ることをねらう．そして，相対軌道決定を可能にする配置形状のなかから，衛星間回線の維持のために最も都合のよい（つまり視線方向の変化が最も少ない）ものを見出すことにしよう．

はじめに，衛星間測距にもとづく相対軌道決定には，実行上，注意すべきことがある．観測量 $\rho$ を，(4-1)式と(2-2)式により，6 つのパラメータをもつ時間の関数 $\rho(E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6; s)$ の形に書くことができる．このとき，パラメータ $(E_1, E_2, E_3, E_4)$ を $(-E_1, -E_2, -E_3, -E_4)$ に置きかえても，また $(E_5, E_6)$ を $(-E_5, -E_6)$ に置きかえても，関数 $\rho$ の形は変わらない．したがって，軌道決定が可能であるときには 4 組の解がつねに存在し，そのうち 1 組が真の解で，他の 3 組は「イメージ解」である．

2 衛星に相対運動を許すことにしたが，配置形状が時間とともに発散するのは現実的に不都合であるから，$E_2=0$ という束縛をくわえよう．(2-2)式を(4-2)式に代入し，$E_2=0$ とおけば，観測量と軌道要素の偏微分関係がつぎのように得られる．

$$\partial\rho/\partial E_1 = (1/\rho)\,(E_1 - 2E_3\sin s + 2E_4\cos s) \tag{4-13a}$$



$$3\partial\rho/\partial E_2 = (1/\rho)\Big[-2E_3\cos s - 2E_4\sin s + 3s\,(E_1 - 2E_3\sin s + 2E_4\cos s)\Big] \tag{4-13b}$$

$$2\partial\rho/\partial E_3 = (1/\rho)\,(5E_3 - 4E_1\sin s - 3E_3\cos 2s - 3E_4\sin 2s) \tag{4-13c}$$

$$2\partial\rho/\partial E_4 = (1/\rho)\,(5E_4 + 4E_1\cos s + 3E_4\cos 2s - 3E_3\sin 2s) \tag{4-13d}$$

$$2\partial\rho/\partial E_5 = (1/\rho)\,(E_5 + E_5\cos 2s + E_6\sin 2s) \tag{4-13e}$$

$$2\partial\rho/\partial E_6 = (1/\rho)\,(E_6 - E_6\cos 2s + E_5\sin 2s) \tag{4-13f}$$

これらの各式からただちに，軌道決定の性質について次の事実があきらかになる．パラメータ $(E_1, E_3, E_4, E_5, E_6)$ を，ある任意定数を $u$ として $(uE_1, uE_3, uE_4, uE_5, uE_6)$ に置きかえても，(4-13)各式の右辺は形を変えない．つまり，相似を保ちつつ相対軌跡の形状を拡大・縮小しても，可観測性の有無および決定精度は変わらない．

つぎに，可観測性を得るために軌道要素 $(E_1, E_3, E_4, E_5, E_6)$ が満たすべき条件を求めよう．それは，(4-13)各式の右辺が，時間の関数としてたがいに線型独立になる条件をさがすことにほかならない．まず b 式の右辺は，もしも

$$E_1 \neq 0 \quad \text{または} \quad E_3 \neq 0 \quad \text{または} \quad E_4 \neq 0 \tag{4-14}$$

ならば，これだけが時間 $s$ とともに増大する項をもつので，他の各式から独立である．つぎに，残る a，c，d，e，f 式の右辺にそれぞれ任意の定数 $u_1$，$u_3$，$u_4$，$u_5$，$u_6$ をかけて和をとり，それを零にひとしいとおく．さらに，追跡観測を 1 日間おこなうならば 5 つの関数 1，$\cos s$，$\sin s$，$\cos 2s$，$\sin 2s$ を互いに独立とみなせることを用い，各関数にかかる係数をそれぞれ零とおく．これにともない，任意定数に関する方程式がつぎのように得られる．

$$\begin{bmatrix} E_1 & 5E_3/2 & 5E_4/2 & E_5/2 & E_6/2 \\ 2E_4 & 0 & 2E_1 & 0 & 0 \\ -2E_3 & -2E_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3E_3/2 & 3E_4/2 & E_5/2 & E_6/2 \\ 0 & -3E_4/2 & -3E_3/2 & E_6/2 & E_5/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{4-15}$$

めざす独立性が得られるのは，この方程式が $u_1=u_3=u_4=u_5=u_6=0$ を唯一の解とするときであり，そうなるための条件は(4-15)式の係数行列式が零でない，すなわち

$$E_1\Big[E_1^2(E_5^2+E_6^2) - (E_3^2+E_4^2)(E_5^2+E_6^2)$$

$$-3(E_3E_5+E_4E_6)^2\Big] \neq 0 \qquad (4\text{-}16)$$

である．ゆえに，条件(4-14)と(4-16)がともになりたつこと，すなわち

$$E_1 \neq 0,\quad E_5{}^2+E_6{}^2 \neq 0 \quad \text{かつ}$$

$$E_1{}^2 \neq E_3{}^2+E_4{}^2+3(E_3E_5+E_4E_6)^2/(E_5{}^2+E_6{}^2)$$

が，軌道決定を可能にする条件である．この条件のもとで，衛星間回線が維持しやすい，つまり，できるだけ整列配置に近い相対軌跡を考えると

$$E_1=l\neq 0,\quad E_2=E_3=E_4=0,\quad E_5{}^2+E_6{}^2=d^2\neq 0 \qquad (4\text{-}17)$$

という解が見出せる．このとき副衛星は，$(R,L,K)=(0,\ l,\ 0)$ という点を中心として，南北方向に振幅を $d$ とする1日周期の往復運動をおこなう（図4－2；80頁）．それにともなって衛星間回線の視線方向は，赤道面から最大振れ角 $\theta=\tan^{-1}d/l$ まで離れる．しかし $\theta$ が直角にくらべて小さければ，衛星間アンテナの機体への取りつけ，ならびに回線の見通し確保に関して大きな困難を生じることはないであろう．

このように，2衛星の整列配置に修正をくわえ，$K$ 方向への相対運動をもたせる（以下これを「修正整列配置」という）ならば，衛星間の測距だけにもとづく相対軌道決定が可能であることがわかった．

## 4－6　衛星間測距による相対軌道決定精度

つぎに，衛星間測距によれば，相対軌道決定の精度はどのようになるであろうか．修正整列配置をあらわす(4-17)式の形を，時間の原点の調整によって $E_1=l\neq 0$，$E_2=E_3=E_4=E_5=0$，$E_6=d$ とする．また，振れ角 $\theta$ が大きくないものとして，$\rho=l$ と近似する．これにともない，(4-2)式に相当する偏微分は

$$\begin{aligned}
\partial\rho/\partial E_1 &= 1\\
\partial\rho/\partial E_2 &= s\\
\partial\rho/\partial E_3 &= -2\sin s\\
\partial\rho/\partial E_4 &= 2\cos s\\
\partial\rho/\partial E_5 &= T/2\cdot\sin 2s\\
\partial\rho/\partial E_6 &= T/2\cdot(1-\cos 2s)
\end{aligned} \qquad (4\text{-}18)$$



という形になる．ただし $T=d/l=\tan\theta$ とおいた．この偏微分関係にもとづいて軌道要素の誤差を見つもるためには，ふたたび第3章の(3-10)式から(3-12)式を経て(3-13)式にいたる手順にならえばよい．ただしここでは，$\sin 2s$，$\cos 2s$ という倍周期項があらたに現れるので，付録Bの（2）項をあわせて用いる．その結果，軌道要素誤差の共分散評価を次のように得る．

$$\mathcal{E}\left\{\begin{bmatrix}\delta E_1\\ \delta E_2\\ \delta E_3\\ \delta E_4\\ \delta E_5\\ \delta E_6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\delta E_1 & \delta E_2 & \delta E_3 & \delta E_4 & \delta E_5 & \delta E_6\end{bmatrix}\right\}$$

$$=\frac{\sigma^2\langle\rho\rangle}{N}\begin{bmatrix}1 & \pi & 0 & 0 & 0 & T/2\\ & 4\pi^2/3 & 2 & 0 & -T/4 & \pi T/2\\ & & 2 & 0 & 0 & 0\\ & & & 2 & 0 & 0\\ & & & & T^2/8 & 0\\ & & & & & 3T^2/8\end{bmatrix}^{-1}$$

ここに現れる逆行列は，

$$\begin{bmatrix}3+\pi^2p & -\pi p & \pi p & 0 & -2\pi p/T & -4/T\\ & p & -p & 0 & 2p/T & 0\\ & & p+1/2 & 0 & -2p/T & 0\\ & & & 1/2 & 0 & 0\\ & & & & (8+4p)/T^2 & 8/T^2\\ & & & & & 3T^2/8\end{bmatrix}$$

$$\text{ただし}\quad p=\frac{1}{(\pi^2/3-5/2)}$$

として算出される．これにより，相対位置の誤差評価（$1\sigma$）をつぎのとおり得る．

平均 $L$ 方向誤差

$$D_0=\sigma\langle E_1\rangle=3.94\sigma\langle\rho\rangle/\sqrt{N} \qquad (4\text{-}19)$$

平均 $L$ 方向ドリフト誤差（1日あたり）

$$D_1=2\pi\sigma\langle E_2\rangle=7.07\sigma\langle\rho\rangle/\sqrt{N} \qquad (4\text{-}20)$$

方向別周期誤差

$$M_R=1.06\,\sigma\langle\rho\rangle/\sqrt{N}$$

$$M_L=2.13\,\sigma\langle\rho\rangle/\sqrt{N} \qquad (4\text{-}21)$$

$$M_K=3.24\,\sigma\langle\rho\rangle/(T\sqrt{N})$$

ここで，振れ角 $\theta$ が大きいほど，$K$ 方向の位置精度が良いことに注意すべきである．一例として，振れ角 $\theta=30$ 度，測距ノイズレベル $\sigma\langle\rho\rangle=10$ m とすると，

平均 $L$ 方向誤差… 軌道決定直後 = 8 m，1/2 日後 = 11 m，1 日後 = 16 m

方向別周期誤差… $R$ = 2.2 m，$L$ = 4.3 m，$K$ = 11 m

である．測距にバイアス誤差があるときは，(4-18)式に従って，それと同じ誤差が $E_1$ だけにあらわれ，他の要素には誤差があらわれない．このように，衛星間の振れ角 $\theta$ を数十度に保つならば，衛星間測距の精度そのものにほぼ等しい精度で，相対位置が推定される．この方法によれば，衛星の実サイズなみ，もしくはそれより良い精度で相対位置を推定することが期待できる．

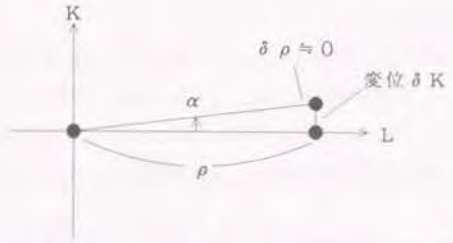
以上の検討により，衛星間測距にもとづく相対軌道決定の特徴ならびに精度があきらかになった．

## 4－7　追跡型式の比較と選択

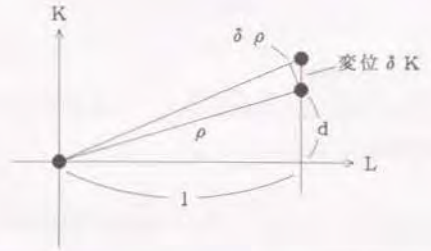
衛星間追跡のおこない方をしらべた結果，衛星配置の形状に対応した2種類の型式を見いだした．2衛星の整列配置においては，図4－3（a）のように，副衛星の位置に $K$ 方向への変位 $\delta K$ があったとしても，距離 $\rho$ にあらわれるのは高次の微小変化だけである．そこで $K$ 位置を知るために角度 $\alpha$ を測る必要があった．それに対し修正整列配置においては，同図（b）のように，副衛星が $L$ 軸から $d$ まで離れたとき，変位 $\delta K$ が距離観測に $\delta\rho=d/l\cdot\delta K=T\delta K$ という変分をひきおこすので，測距だけでも $K$ 位置の推定が可能になるのである．(4-21)式において $K$ 方向誤差が $1/T$ に比例するのはこのような経緯にもとづいている．

われわれは，衛星搭載機器の簡易化を考え，衛星間の観測を測距だけとしたい．そのた






（a）整列配置の場合…$\rho$ と $\alpha$ により $K$ を決定




（b）修正整列配置の場合…$\rho$ だけで $K$ を決定

図4－3　衛星配置形状と可観測性の関係

めには，

（1）$K$ 方向に一定の相対運動を確保し，

（2）イメージ解を識別する

というふたつの要求があった．要求（1）については，単に2衛星のステーションキーピングの実施時期を違え，軌道面の一致をさけることで対応できる．また（2）は，各衛星のステーションキーピングに係わる軌道決定を参照すればむずかしくない．よってクラスター衛星システムのための相対軌道決定は，衛星間測距にもとづいて行うことになるであろう．

一方，距離・方位角という追跡型式の利点は，衛星を整列させることによって衛星間アンテナの駆動範囲を小さく抑えられることにある．しかしそのためには，2衛星の軌道面をつねに一致させるようなステーションキーピング調整を必要とし，実際の衛星運用においてそれは必ずしも容易ではない．この追跡型式の利用は，大容量の衛星間通信をおこなうために特に大口径のアンテナが必要な場合に限ることとなろう．

## 4－8　カルマンフィルターの構成

クラスター衛星システムに用いる主な追跡方法は，衛星間測距であるとされた．それを受けて，ここでは衛星間距離から相対運動を推定するためのカルマンフィルターを導くことにしよう．

衛星間に通信回線を設けるためには，すべての衛星をほぼ軌道進行方向に沿って並べる必要があった．しかしその一方では，クラスターシステムの基本的要求により，軌道位置のサイズにくらべて十分小さい範囲のなかに全衛星が存在しなければならない．したがってクラスター衛星間の間隔は，一般的な軌道の混雑問題にかかわる場合に比べると，相当に小さくなるであろう．ここではその間隔を 10 km またはそれ以下と想定する．

衛星間隔がこのように小さければ，線型化ランデヴ方程式にもとづいてフィルターを構成しても，線型化誤差（図3－12）の影響を受けずにすむ．一方，摂動の影響を図3－8から読みとるならば，重力摂動は無視してさしつかえないが，太陽光圧力は無視できない．たとえ2衛星が同一設計であったとしても，衛星運用にともなって生じるであろう断面積／質量比の差が，無視できない誤差をひきおこすからである．したがってここでは，2衛星の太陽光圧力差を摂動として考慮に入れなければならない．その大きさを前もって



正確に知ることはむずかしいので，それを未知数として扱う必要がある．このような要求にこたえるフィルターは，つぎのように構成される[Kawase, 1989]．

相対運動の方程式

$$R'' - 2L' - 3R = a_R$$
$$L'' + 2R' = a_L$$
$$K'' + K = a_K$$

において，太陽光圧力にもとづく相対的な摂動を次のように加える．

$$a_R(s) = -y\,R_\Theta \cos\delta_\Theta \cos(s-\alpha_\Theta)$$
$$a_L(s) = \ \ y\,R_\Theta \cos\delta_\Theta \sin(s-\alpha_\Theta)$$
$$a_K(s) = -y\,R_\Theta \sin\delta_\Theta$$

ただし

$y$　　：衛星断面積／質量比の差（副衛星マイナス主衛星）

$R_\Theta$　：太陽輻射定数

$\alpha_\Theta$，$\delta_\Theta$　：太陽の赤経と赤緯

ここで $s$ は，単に時間の経過を表すだけでなく，衛星（の公称位置）の赤経を正しく表しているとする．

相対運動の状態ベクトル

$$\boldsymbol{x} = (R,\ L,\ K,\ R',\ L',\ K')^T$$

の，時刻 $s_0$ から $s_1$ への遷移法則は，摂動が加わることにともなって，次の形をもつ．

$$\boldsymbol{x}(s_1) = \Phi(s_1 - s_0)\ \boldsymbol{x}(s_0) + y\,\boldsymbol{p}(s_1, s_0) \qquad (4\text{-}22)$$

ここで $\Phi$ は，摂動がないときの状態遷移行列すなわち(3-19)式である．$y\boldsymbol{p}$ は摂動項であり，$y$ の単位量がひきおこす摂動を $\boldsymbol{p}$ と置いている．線型微分方程式の一般的な解法に従えば

$$y\,\boldsymbol{p}(s_1, s_0) = \int_{s_0}^{s_1} \Phi(s_1 - s)\ [\,0\quad 0\quad 0\quad a_R(s)\quad a_L(s)\quad a_K(s)\,]^T\ ds$$

であり，単位摂動 $\boldsymbol{p}$ の内容は次のとおりである．

$$\boldsymbol{p}(s_1, s_0) = (p_1, \ldots, p_6)^T$$

$$p_1 = R_\Theta \cos\delta_\Theta \left[ -\frac{3}{2}(s_1-s_0)\sin(s_1-\alpha_\Theta) - \frac{7}{4}\cos(s_1-\alpha_\Theta) - \frac{1}{4}\cos(2s_0-s_1-\alpha_\Theta) + 2\cos(s_0-\alpha_\Theta) \right]$$

$$p_2 = R_\Theta \cos\delta_\Theta \left[ -3(s_1-s_0)\cos(s_1-\alpha_\Theta) - 3(s_1-s_0)\cos(s_0-\alpha_\Theta) + \frac{11}{2}\sin(s_1-\alpha_\Theta) - \frac{1}{2}\sin(2s_0-s_1-\alpha_\Theta) - 5\sin(s_0-\alpha_\Theta) \right]$$

$$p_3 = R_\Theta \sin\delta_\Theta \left[ \cos(s_1-s_0) - 1 \right]$$

$$p_4 = R_\Theta \cos\delta_\Theta \left[ -\frac{3}{2}(s_1-s_0)\cos(s_1-\alpha_\Theta) + \frac{1}{4}\sin(s_1-\alpha_\Theta) - \frac{1}{4}\sin(2s_0-s_1-\alpha_\Theta) \right]$$

$$p_5 = R_\Theta \cos\delta_\Theta \left[ 3(s_1-s_0)\sin(s_1-\alpha_\Theta) + \frac{5}{2}\cos(s_1-\alpha_\Theta) + \frac{1}{2}\cos(2s_0-s_1-\alpha_\Theta) - 3\cos(s_0-\alpha_\Theta) \right]$$

$$p_6 = R_\Theta \sin\delta_\Theta \left[ -\sin(s_1-s_0) \right]$$

われわれは，パラメータ $y$ を未知量として推定したい．そこで状態ベクトル $\boldsymbol{x}$ をあらためてつぎのようにおく．

$$\boldsymbol{x} = (R, L, K, R', L', K', y)^T$$

これにともない，状態遷移法則は(4-22)式から次式に変わる．

$$\boldsymbol{x}(s_1) = \Phi_p(s_1, s_0)\, \boldsymbol{x}(s_0)$$

$$\Phi_p(s_1, s_0) = \left[ \begin{array}{c:c} \Phi(s_1-s_0) & \boldsymbol{p}(s_1, s_0) \\ \hdashline 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0 & 1 \end{array} \right]$$

パラメータ $y$ は時間が経過しても変わらないはずであるから，その事をあらわすために，新しい遷移行列 $\Phi_p$ の(7,7)要素を1としている．

つぎに，観測量



$$z = \rho(\boldsymbol{x}) = \sqrt{R^2+L^2+K^2}$$

は，状態ベクトルの関数として非線型であるから，観測行列を

$$H = \frac{\partial\rho}{\partial\boldsymbol{x}} = \left[ \frac{R}{\rho} \quad \frac{L}{\rho} \quad \frac{K}{\rho} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \right]$$

とおく．

このように与えた遷移行列 $\Phi_p$，観測モデル $\rho(\boldsymbol{x})$，観測行列 $H$ を用いて，観測 $z$ から相対運動 $\boldsymbol{x}$ を推定するカルマンフィルターが構成される．このフィルターは，状態遷移に関する処理が線型であり，観測にかかわる処理だけが非線型に拡張されている．

衛星間の距離と方位角を観測する場合においても，観測ベクトルに方位角を追加することを除けば，フィルタリングアルゴリズムは上記と同じである．

### 4－9　カルマンフィルターの動作

前節に従って作成したカルマンフィルターの動作を，シミュレーション（図4－4）により確認した．2衛星の軌道要素として，$l = 10$ km，$\Theta = 30$ deg に相当するものをあたえ，測距ノイズ（$1\sigma = 10$ m）を加える．追跡観測を開始した後の，相対位置の推定誤差（$R, L, K$ 成分の自乗和平方根）の推移を図4－5に示す．フィルターが収束するまでに約2日間の追跡観測を必要とするのは，太陽光圧力を推定未知数に加えたためである．収束後の推定誤差は，予想されるレベル（10ないし20 m）に一致し，必要な推定精度が得られている．太陽光圧力の係数を図の（a）から（b）のように変えても，推定誤差のレベルは変わらない．したがって，運用にともなって衛星の質量が変化しても，つねに一様な精度で相対位置が推定される．

推定結果がイメージ解におちいることを防ぐためには，フィルタリングの開始時に正確な初期状態をあたえる必要がある．その初期状態を誤ったために，イメージ解に収束した例を図4－6に示す．この例では，初期状態の $K$ 成分の位置・速度を逆極性に変えた．このとき $R, L$ 座標は問題なく推定され，フィルタリングが収束しているが，$K$ 座標の運動は逆相となったまま推定されている．これは $(E_5, E_6)$ のかわりに $(-E_5, -E_6)$ というイメージ解を得たことに相当する．

衛星間測距にバイアス誤差がある場合の推定例を，図4－7に示す．バイアス値にひと

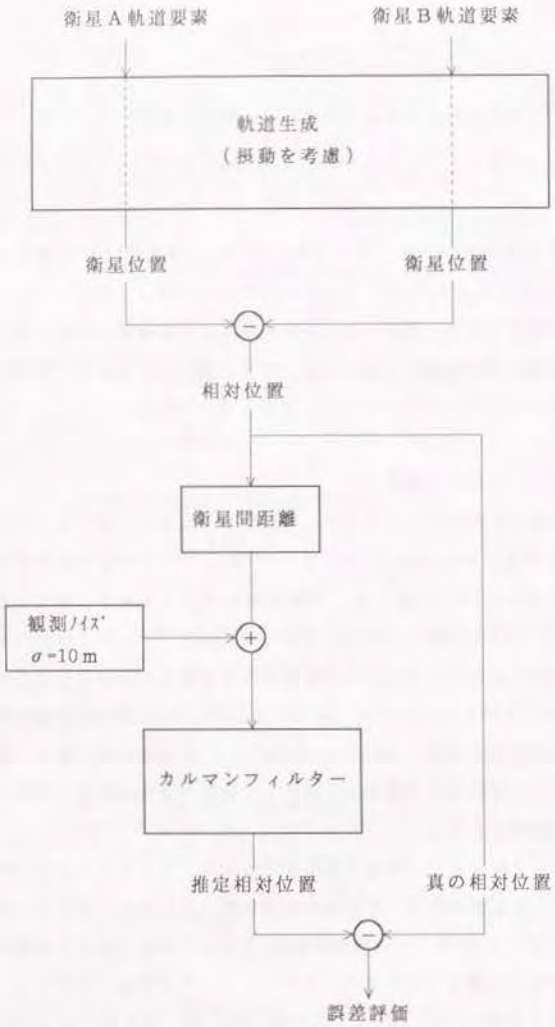



図4－4　カルマンフィルターによる相対軌道決定のシミュレーションテスト



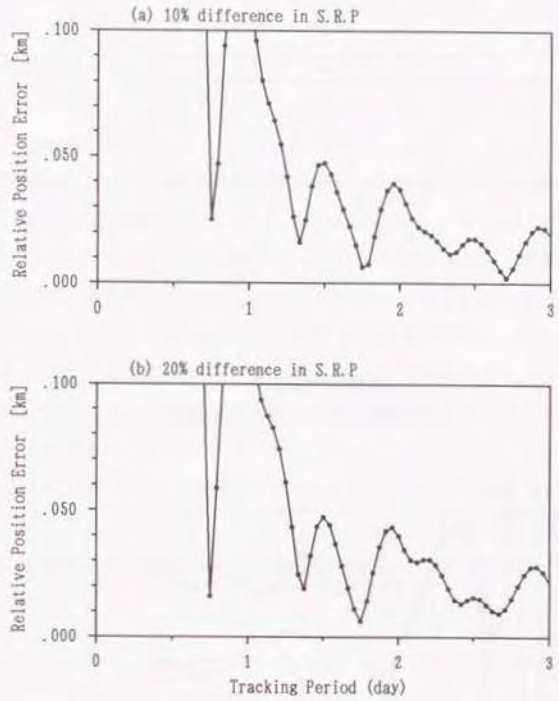



図4－5　カルマンフィルターによる相対位置推定
（a）と（b）は，太陽光圧力条件の違いを表す．

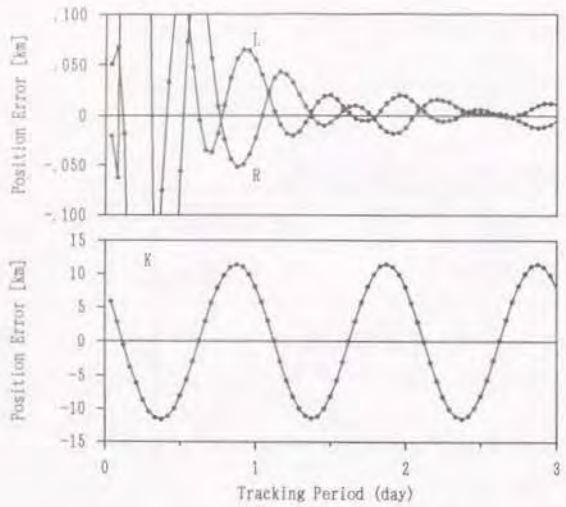



図4－6　イメージ解への誤収束の例
$K$の推定が逆相となっている．

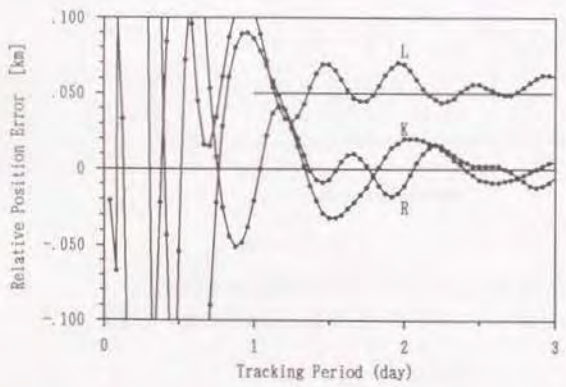



図4－7　測距バイアス誤差の影響は，$L$の推定だけに現れる．
（測距バイアス＝50 m）



しい一定誤差が$L$方向だけに現れ，他の方向には現れれないという結果は，予想したとおりである．

以上の結果により，衛星間測距にもとづいた相対軌道決定の具体的手法が確認された．フィルタリングのアルゴリズムが簡易であることから，これを衛星上に搭載し，オンボード相対軌道決定をおこなうことが可能であろう．

## 4－10　本章のまとめ

衛星間追跡の型式は，衛星の空間配置形状と密接な関係をもつ．衛星を軌道進行方向に沿って「修正」整列配置するならば，衛星間の測距にもとづく相対軌道決定が可能である．これが，クラスターシステムに適した衛星間追跡である．特殊な場合として，衛星間通信アンテナの指向駆動範囲を特に小さく抑えたい場合には，衛星間距離および方位測角という追跡型式によって対応する．

衛星間追跡による相対位置推定は，地上からの差動測角による場合に比べて，精度が約1オーダー高い．たとえ観測にバイアス誤差があっても相対位置に与える影響が軽微であるのは，衛星間追跡の特長である．推定用カルマンフィルターは，ランデヴ方程式にもとづく簡易なアルゴリズムで構成され，衛星の質量変化にかかわらず一定の推定精度が保たれる．

衛星間測距は，相対位置の決定を衛星上で行うのに適した方法である．

## 第5章　高密度管制への展望

### 5－1　本章のねらい

第3章と第4章によってわれわれは，近接した静止衛星の相対運動を知るための方法を手にした．本章では，それらを利用して軌道の混雑を管理するための具体的な方法を考察する．「自然」な混雑に対しては，差動測角にもとづく衝突の監視ならびに回避を行うことにより，多数の衛星の安全が確保されることを示す（5－2節～5－4節）．またクラスターシステムによる「意図的」な混雑においても，相対運動の監視にもとづく衛星配置の制御が可能であることを述べる（5－5節～5－8節）．地上差動追跡と衛星間追跡の利用を比較しつつこれらを論じることにより，静止軌道の高密度な利用への展望をひらく．

### 5－2　混雑管理の新方針

軌道位置の自然な混雑に対する従来の対応では，衛星どうしを可能な限りひき離すように各衛星の軌道を計画し，どの衛星もつねにその軌道を守るように制御をくわえてきた．これは，衝突回避の行動を，衝突の危険性の有無にかかわらず常時おこない続けることにほかならない．それにともなって，管制作業量と燃料消費量の増加，ひいては衛星数の制約という問題点を生じていたことは，第1章にのべたとおりである．この問題点を解決するために，ここでは新しい管制方針を提案する．それは，差動測角による相対運動の実時間監視にもとづいて，実際に衝突の危険性があるときだけ回避行動をおこない，それ以外のときは衛星が複数であることを意識しない，というものである．この方針が現実的に有効であることをいうためには，実際に回避行動を必要とする頻度と，回避にともなう燃料消費量を評価し，それらが小さいことを示さなければならない．われわれはすでに相対軌道決定の精度をあきらかにしたので，それをふまえて以下のように評価を下すことができる．

### 5－3　衝突回避とその実行頻度

相対運動の監視によって衝突発生が予測された場合には，当然ながらできるだけ早い時期に回避行動をとりたい．しかしその時期が早すぎると，軌道予測の誤差が増大するため



に不都合である．ここでは実時間監視にもとづいて常に0.5日後の状態を予測し，ある警戒範囲内にふたつの衛星が接近することが判明した時点でただちに回避行動をとる，つまり衝突もしくはニアミスの0.5日前に回避行動をおこなうものとしよう．

差動測角による相対軌道決定にもとづいて0.5日後の予測をおこなうと，その誤差（$1\sigma$）は，表3－1の99%相当を用いるならば，相対座標の各方向について

$$R\ldots 77\ \mathrm{m},\quad L\ldots 370\ \mathrm{m},\quad K\ldots 150\ \mathrm{m}$$

である．ただし$L$方向については，平均誤差と周期誤差の自乗和平方根をとった．衝突警戒範囲を$3\sigma$誤差レベルと定めるならば，各座標について

$$W_R = 230\ \mathrm{m},\quad W_L = 1100\ \mathrm{m},\quad W_K = 450\ \mathrm{m}$$

が警戒範囲である．

同じ軌道位置に2衛星があるときの1年間の衝突数を$Y$とおく．その見つもりとして，第1章では(1-1)・(1-2)という異なる見解があることをのべた．それらの見解をここでは，それぞれ悲観的・楽観的な見つもりとみなし，真の値はその間にあるか，もしくは外れたとしてもその近くにあるものとしよう．つぎに衛星のサイズを，それらの見つもりで仮定した1辺10 mのサイズから，上記の警戒範囲である$W_R \times W_L \times W_K$というサイズに拡大したと考える．そしてこのときの年間衝突数を算定すれば，それが回避行動の必要回数をあらわすはずである．衝突数は衛星の断面積に比例するが，この場合，衝突時の進入方向によって断面積が異なる．$R$軸に沿って進入衝突するときの断面積$W_L \times W_K$が最大であるから，それを安全サイドの見つもりとして用いることにすると，衝突数の増大比は

$$A = W_L \times W_K / (10\ \mathrm{m})^2 = 4900\ \text{倍}$$

である．（なおこの扱いは，警戒範囲を各軸とも等しく$\sqrt{W_L \times W_K} = 700$ mとおいたことにひとしい．）つぎに衛星の数を$N$機とすると，2機であるときに比べて，あるひとつの衛星に衝突が起きる回数が$N-1$倍に増す．しかし，衝突が予測された2衛星の内，回避行動をとるのはそのどちらか一方でよい．したがって，あるひとつの衛星について，衝突回避の年間の実施回数は$\frac{N-1}{2}AY$である．$Y$に見つもり(1-1)・(1-2)を代入すると，次の結果を得る．

$$\text{各衛星の回避実施回数（年間）} = \begin{cases} 1.7\ (N-1) & \cdots\text{悲観} \\ 0.002\ (N-1) & \cdots\text{楽観} \end{cases} \qquad (5\text{-}1)$$

ひとつの衛星に対する通常のステーションキーピングでは，1年間に20回程度の軌道制御をおこなっている．もしもそれと同数の回避行動を各衛星に許すとすれば，悲観的にみても13機の衛星の管理が可能である．実際には，これよりも相当に多数の衛星を管理できるであろう．このように，衝突回避にともなう作業量の増加は少ないとしてよい．

以上，差動測角にもとづく場合の回避数をしらべた．これに対して，もしも衛星間測距を ― これはクラスターシステムへの応用を前提として考察してきたのであるが ― 「自然」な混雑の管理にも利用できたとすると，どのような効果が得られるであろうか．衛星間測距によれば，衛星の実サイズに相当する精度をもって相対位置が推定される（4－6節）．したがって回避行動の頻度は，原理的には衛星の衝突頻度そのものに等しい．しかしながら実際的な警戒範囲としては，十分な余裕をとり，たとえば100 m程度とするのが妥当であろう．このとき，上述と同じ扱いによれば，

$$\text{各衛星の回避実施回数（年間）} = \begin{cases} 4\times10^{-2}\ (N-1) & \cdots\text{悲観} \\ 4\times10^{-5}\ (N-1) & \cdots\text{楽観} \end{cases} \tag{5-2}$$

である．すなわち衛星間測距にもとづく衝突監視は，「衝突が起きないことを確認する」という意味がつよい．電波干渉計による高精度な差動測角（3－11節）が実現したならば，これに近い意味をもつ衝突監視を，地上からの観測にもとづいて実施できるようになるであろう．

## 5－4　衝突回避にともなう燃料消費

つぎに，衝突回避行動のために各衛星が消費する燃料を見つもることにしよう．

1衛星に対する通常のステーションキーピングでは，軌道進行方向（$L$方向）に速度変更 $\Delta v$ を加えることによって，経度と離心率の保持，すなわち軌道面内の制御をおこなっている．したがって衝突回避のための軌道制御にも，同じく $L$ 方向 $\Delta v$ を用いるのが望ましい．$K$ 方向の速度変更，すなわち軌道面の変更によって回避する方法も考えられるが，一般に静止衛星の南北方向スラスターは大きな推力をもつために微調整がむずかしく，また衛星の設計上の都合により作動禁止の時間帯があるなど，突発的な回避行動に適さないことが多い．

衛星の相対運動を，軌道面すなわち $(R, L)$ 面内で考える．時刻 $s=0$ での相対位置・



速度が $p_0$，$v_0$ であるとき，$s=\pi$（つまり0.5日後）に衝突が起きるとしよう．相対位置の軌跡 $p(s)$ を，(3-19)式の状態遷移行列を用いてあらわせば，

$$p(s)=\begin{bmatrix} 4-3\cos s & 0 \\ 6\sin s-6s & 1 \end{bmatrix} p_0 + \begin{bmatrix} \sin s & 2-2\cos s \\ 2\cos s-2 & 4\sin s-3s \end{bmatrix} v_0 \tag{5-3}$$

である．$s=\pi$ で衝突がおきるときには $p(\pi)=0$ であるから，

$$v_0=\begin{bmatrix} -3\pi/16 & 1/4 \\ -28/16 & 0 \end{bmatrix} p_0 \tag{5-4}$$

が成りたっている．このとき，時刻 $s=0$ において速度 $v_0$ に $L$ 方向への変化 $\Delta v$ をあたえると，衝突するはずだった軌跡 $p(s)$ は

$$p(s;\Delta v)=\begin{bmatrix} 4-3\cos s & 0 \\ 6\sin s-6s & 1 \end{bmatrix} p_0 + \begin{bmatrix} \sin s & 2-2\cos s \\ 2\cos s-2 & 4\sin s-3s \end{bmatrix} \left(v_0+\begin{bmatrix} 0 \\ \Delta v \\ 0 \end{bmatrix}\right) \tag{5-5}$$

に変わる．図5－1はこのような状況を示すもので，初期位置のサンプルA～Dについて，それぞれ0.5日後の衝突に至る軌跡を描いた．そのさい，各出発点において $L$ 方向に $\Delta v = 1$ mm/s の増速を与えたときに，軌跡が変わることによって回避距離 $D$ が得られる様子をあわせて示した．

衝突回避に必要な燃料は，$\Delta v$ に比例して決まる．一方，ある回避距離 $D$ を得るために必要な $\Delta v$ は，図5－1にみるように初期位置 $p_0$ によって変わる．そこで，つぎのような数値計算により $\Delta v$ の必要量を見つもった．まず，2衛星とも同じ軌道位置にあるという条件下で，初期位置 $p_0$ を無作為に選ぶ．そのとき，(5-4)・(5-5)式による回避軌跡が $D=100$ m という回避距離をもつための $\Delta v$ を求める．このような $\Delta v$ を，多数の $p_0$ のサンプルについて平均する．その結果は，$\Delta v = 0.9$ mm/s であった．

差動測角にもとづく場合の衝突警戒範囲を，前節の「各軸均等」のとり方にならって700 mとすれば，必要な回避距離は最大で $D = 700$ m である．進入軌跡が警戒範囲の周辺部を通過するときには，必要な回避距離は700 mよりも小さい．しかしここでは最悪の見つもりを考え，つねに $D = 700$ m であるとする．回避行動の頻度として(5-1)を用いると，衝突回避に必要な年間の合計 $\Delta v$ は11 mm/s（悲観），0.014 mm/s（楽観）である．ところでどのような衛星も，単独のステーションキーピングのために1年間に $\Delta v =$ 45 m/s（長期平均）という制御量をもともと必要としている[Pocha, 1987]．したがって，$N$ 機の衛星があって衝突回避をおこなうとき，各衛星について

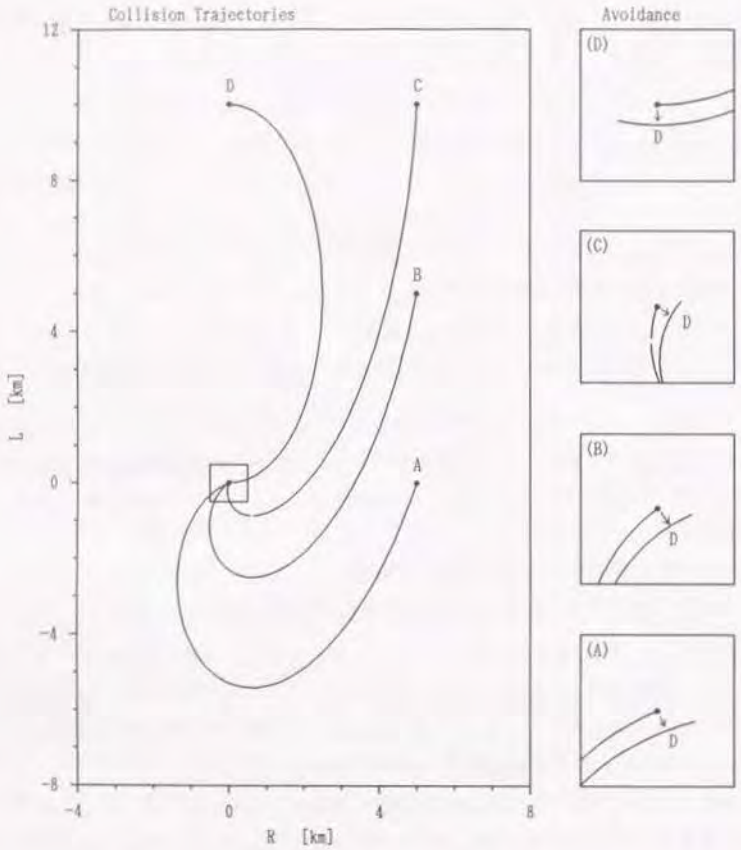



図５－１　衝突軌跡と回避軌跡の例

初期相対位置のサンプルＡ～Ｄについて，0.5 日後衝突の軌跡を示す（左図）．衝突点を含む正方形部の拡大が右図（Ａ）～（Ｄ）であり，$L$ 方向 $\Delta v$ によって衝突回避距離 $D$ をそれぞれ得る様子を示す．



$$\text{燃料消費量の増加分} = \begin{cases} 2\times10^{-2}(N-1) \ \% & \text{悲観} \\ 3\times10^{-5}(N-1) \ \% & \text{楽観} \end{cases} \qquad (5\text{-}6)$$

である．この算定結果によれば，衛星が十数機あったとしても，燃料消費の増加は十分小さい．これに比べて従来の方法では，たとえば軌跡の分離（図１－４ｂ）により２衛星を管制する場合，燃料消費の増加分が５％であると報告されている[Haerting et al, 1988]．

以上をまとめると，実時間相対軌道決定にもとづく衝突回避という方法によれば，管制作業量と燃料消費量をともに少なく抑えつつ，多数の衛星を管理できることがわかった．したがってこの方法により，軌道の混雑への対応における従来の問題点は解消される．

## ５－５　クラスター衛星の制御

つぎに，「意図的」な混雑に対する管理方法を考えよう．

多数の衛星を通信回線で結合してクラスターをつくるためには，すべての衛星を軌道進行方向に沿って並べ，隣あう２衛星をそれぞれ「修正」整列配置として図５－２のような関係に保つことが必要であった．とくに，平均経度間隔 $\bar{L}$ をある一定値に保ちつつ，そのまわりの日周振幅 $\tilde{L}$ を小さく抑えることにより，衛星間の過接近を防ぐことが重要である．あわせて振れ角 $\theta$ を適切な大きさに維持するために，南北方向振幅 $\tilde{K}$ を制御することも必要であった．われわれは，このような衛星配置形状を実現させるための制御手順を具体的に示すことによって，相対軌道決定の技術をクラスターシステムに実装する見通しを与えることにしよう．

まずはじめに，カルマンフィルターが出力するのは相対運動の状態（$R, L, K, R', L', K'$）であるから，これを配置形状をあらわすパラメータ（$\bar{L}, \tilde{L}, \tilde{K}$）に変換しなければならない．フィルターが最新推定値を出力した時刻を仮に $s=0$ とおく．(2-2)式ならびにその両辺の時間微分式において $s=0$ とおけば

$$R = -(2/3)E_2 + E_3$$
$$L = E_1 + 2E_4$$
$$K = E_5$$

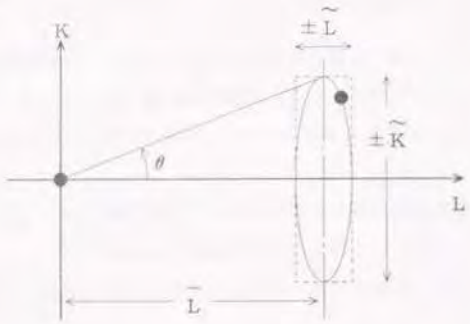



図5－2　クラスター配置形状を表すパラメータ

$\bar{L}$: $L$ 方向平均間隔，$\tilde{L}$: $L$ 方向振幅，$\tilde{K}$: $K$ 方向振幅，$\theta$: 衛星間振れ角

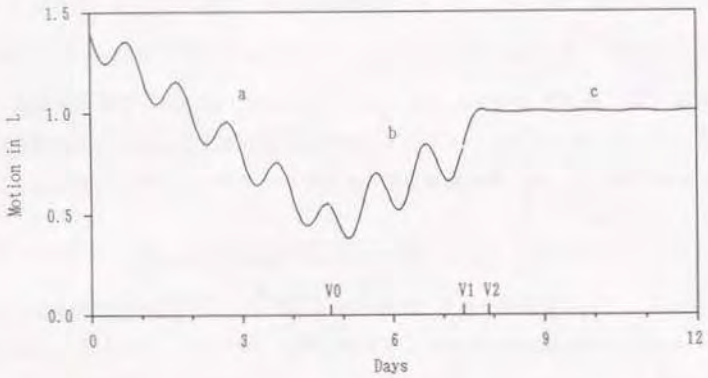



図5－3　クラスター配置における $L$ 方向制御の概念

V0　：ドリフトレート制御

V1,V2：ドリフトレート・離心率の同時制御



$$R' = E_4$$
$$L' = E_2 - 2E_3$$
$$K' = E_6$$

であるから，これを $E_1, \ldots, E_6$ について解けば

$$E_1 = L - 2R'$$
$$E_2 = -6R - 3L'$$
$$E_3 = -3R - 2L'$$
$$E_4 = R'$$
$$E_5 = K$$
$$E_6 = K'$$

である．仮に $s=0$ とおいた時刻において，$E_1$，$E_2$ はそれぞれ平均経度間隔 $\bar{L}$ とそのドリフトレート $D$ をあらわす．また ${E_3}^2+{E_4}^2$ と ${E_5}^2+{E_6}^2$ はそれぞれ $\tilde{L}^2$ と $\tilde{K}^2$ をあらわす．これらの事実は，$s=0$ という仮の時刻がフィルタリングの進行にともなって移動しても変わらない．したがって，フィルター出力を配置形状パラメータになおす変換式は

$$\bar{L} = L - 2R' \tag{5-7a}$$

$$D = d\bar{L}/ds = 6R - 3L' \tag{5-7b}$$

$$\tilde{L}^2 = (-3R - 2L')^2 + R'^2 \tag{5-7c}$$

$$\tilde{K}^2 = K^2 + K'^2 \tag{5-7d}$$

である．

## 5－6　クラスター形状パラメータの制御手順

最も重要なパラメータである $\bar{L}$ を調整するためには，(5-7b)式の関係を用いる．$L$ 方向に増速 $\Delta v = \Delta L'$ をあたえ，ドリフトレートを

$$\Delta D = -3\Delta v$$

に従って変えると，$\bar{L}$ が加減される．図5－3はこのような制御概念を示すもので，$\bar{L}$，$D$，$\tilde{L}$ の監視にもとづいて過接近を防ぐためのドリフトレート制御をおこない，$\bar{L}$ を減少

から増加に変えている（同図のａからｂ）．ただしこのときには，(5-7c)式に従って一般に $\tilde{L}$ も変化してしまうことに注意が必要である．クラスター制御の目標は，同図のｃのように $L$ を一定の目標値に保つことであり，そのためにはｂからｃへ移るさいに $D$ と $\tilde{L}$ をともに零にしなければならない．このような制御を行うためには，つぎにのべるように２回の $L$ 方向 $\Delta v$ の組合せを用いる．

はじめに準備として(5-7b)式で

$$e = -3R - 2L'$$

とおけば

$$\tilde{L}^2 = e^2 + R'^2$$

である．$e$ は時刻 $s$ の関数であり，状態遷移法則(3-19)式によれば

$$e(s+\pi) = -e(s)$$

が成りたつ．

いま，$R' = 0$ となったある時刻に着目し，それを $s=0$ とおく．このときの $e$ の値

$$e_0 = -3R_0 - 2L'_0$$

を用いると，$s=0$ において $\tilde{L} = |e_0|$ である．ここで増速 $\Delta v_1$ をあたえると，$e$ の値は

$$e_1 = e_0 - 2\Delta v_1$$

に変わる．軌道半周回後（$s=\pi$）においては，(3-19)式の関係によって再び $R' = 0$ となり，また $e = -e_1$ となっている．このとき第２の増速 $\Delta v_2$ をあたえると，$e$ はさらに

$$e_2 = -e_1 - 2\Delta v_2$$
$$= -e_0 + 2(\Delta v_1 - \Delta v_2)$$

に変わる．すなわち増速 $\Delta v_1$，$\Delta v_2$ の結果として，経度振幅は

$$\tilde{L} = |e_2| = |-e_0 + 2(\Delta v_1 - \Delta v_2)|$$

に変わる．一方，２回の増速によるドリフトレートの変化は(5-7b)式により

$$\Delta D = -3(\Delta v_1 + \Delta v_2)$$

である．ここで，$\Delta v_1 = \Delta v_2$ ならば $\tilde{L}$ は変わらず，また $\Delta v_1 = -\Delta v_2$ ならば $D$ は変わらない．したがって $\Delta v_1$，$\Delta v_2$ のあたえ方を選ぶことにより，$D$ と $\tilde{L}$ をそれぞれ任意の値に



調整することができる．とくに

$$\Delta v_1 = D/6 + e_0/4$$
$$\Delta v_2 = D/6 - e_0/4$$

とすれば，目標の $D = \tilde{L} = 0$ という状態に到達する（図５－３，ｂからｃ）．

南北振幅 $\tilde{K}$ を制御するためには，$K=0$ となる時刻において，$K$ 方向への増速 $\Delta v$ を加える．このとき，(5-7d)式の関係に従って $\tilde{K}$ の大きさが $|K'|$ から $|K' + \Delta v|$ に変わる．つまり $\tilde{K}$ を任意の大きさにすることができる．

以上のべた軌道制御の手順は，１衛星の制御のためにすでに知られている手順を２衛星についてそれぞれ立て，その差分を相対座標で記述したものにほかならない．しかしこの扱い方によって，制御手順を簡潔に表現するとともに，それを推定フィルターの出力に直結することができた．

こうして，推定フィルターとクラスター制御手順をともに衛星上に搭載し，配置形状を自動制御する見通しが得られた．

## ５－７　クラスター制御の実際

クラスター衛星の配置形状を，たとえば図５－３のａのように乱す可能性として，次のふたつが考えられる．まず，各衛星の単独のステーションキーピングにおいて，軌道面制御のための $K$ 方向増速をおこなったとき，姿勢誤差のために $L$ 方向にも増速成分が生じることがあり（南北－東西カップリング），それは $D$ と $\tilde{L}$ を変化させる．また，２衛星への太陽光圧力に差があれば，$\tilde{L}$ が時間とともに増大する．とくに前者の影響は，１衛星に対する従来のステーションキーピングにおいてもしばしば検出される大きさをもつ．したがって，クラスター形状を保つために必要な軌道制御の頻度，およびそれにともなう燃料消費の増分は，各衛星の設計によって主に定まるものであり，相対軌道決定の持つ誤差の影響はここでは小さい．

もしも，クラスター形状の維持のために必要な燃料消費が多くなった場合には，次のような対策をとることができる．クラスター保持のための $\Delta v$ は相対的なものであり，２衛星のどちらでそれを実行するかの選択に応じて，$\Delta v$ を増速・減速のいずれにも変えられ

る．その選択が適切であれば，クラスター制御の $\Delta v$ を，各衛星がもともとステーションキーピングに必要としている $\Delta v$ のなかに含めることができる．したがって，上述のカップリングと差動太陽光圧力の効果がある限度以内であれば，実質上，燃料消費を増加させずにクラスター保持をおこなうことができる．

相対軌道決定がつねに実施されているならば，それを衛星間通信アンテナの指向追尾に利用することができる．指向方向の誤差の最大値（$1\sigma$）は，衛星間距離の最小値と $R$，$K$ 誤差の最大値から見つもられ，(4-19)式により

$$\frac{\sigma\langle\rho\rangle}{\sqrt{N}}\ \frac{\sqrt{1.1^2+3.2^2/\tan^2 T}}{\bar{L}-\bar{L}}\quad [\mathrm{rad}]$$

である．一例として $\sigma\langle\rho\rangle$=10 m，$N$=24，$\theta$=30 deg，最小距離=1 km とすると，最大指向誤差は 0.8 度である．衛星間アンテナのビーム幅がこれよりも広ければ，たとえ自動追尾のためのモノパルス機構を省いても，相対軌道決定にもとづいてアンテナを対向させることができる．

## 5－8　ランダムクラスター

クラスターシステムであっても，衛星間に通信回線をもたせる必要のないものが考えられる．その一例は，通信サービスの信頼性の向上のために，通信機能を多数の衛星に分割して打上げるような場合である．このようなときは衛星を整列配置させる必要がなく，衝突が回避されればよいから，問題は「自然な」混雑にひとしくなる．ただし通信ユーザーのアンテナのビーム幅のなかに全衛星があることが必要であるから，ユーザーアンテナの口径に応じて衛星保持範囲を小さく抑えなければならない．保持範囲を $L$，$K$ 方向とも $W$ km として，差動測角による衝突監視をおこなうとすると，回避行動数と燃料消費量は，保持範囲の縮小にともなって(5-1)(5-6)式からそれぞれ次のように増大する．

$$\text{年間回避回数}=\begin{cases}1.7\ (140/W)^2\ (N-1) & \cdots\text{悲観}\\ 0.002\,(140/W)^2\,(N-1) & \cdots\text{楽観}\end{cases}$$

$$\text{燃料消費増加}=\begin{cases}2\times10^{-2}\,(140/W)^2\,(N-1)\ \ \% & \cdots\text{悲観}\\ 3\times10^{-5}\,(140/W)^2\,(N-1)\ \ \% & \cdots\text{楽観}\end{cases}$$

これらの大きさが許容できるならば，地上局からの管制にもとづくクラスターシステムが



可能である．このシステムは，追跡観測と軌道推定のための機器を衛星上に搭載する必要がないという特長をもつ．

## 5－9　本章のまとめ

衛星数の自然増加にともなう軌道の混雑に対しては，差動測角による相対軌道決定にもとづいた衝突監視ならびに衝突回避をおこなうことによって，多数の衛星を管理できることが示された．この方法では，所属機関や国の別を問わずどのような衛星でもひとしく扱うことができ，しかも，衛星が複数であるために要する管制作業量および燃料消費の増分が少ない．したがって，従来の混雑管理にともなっていた問題点は，新しい管理方法の導入によって解消される．

一方，クラスターシステムに対しては，衛星間測距による相対軌道決定にもとづいて衛星の配置形状を制御する手順を具体的に与えた．これにより，衛星上での処理にもとづく自動クラスター制御の可能性を示すことができた．衛星間回線をもたないクラスターシステムに対しては，地上管制にもとづく方法を選択枝に加えることが可能である．

このように，実時間相対軌道決定の技術を応用するならば，静止軌道の「自然」な混雑と「意図的」な混雑のいずれに対しても，効果的な管理を行うことが可能である．

## 第6章　結論

本論文は，「静止軌道の混雑」という問題に対して，「相対軌道決定」という新しい技術にもとづく解決方法を与えた．その論旨を要約すると次のとおりである．

はじめに，軌道の混雑が発生する経緯をのべ，従来の対応とその問題点を要約した（第1章）．つぎに，従来の対応では効率的な混雑管理がむずかしかった理由を知るために，静止衛星の軌道決定精度を分析した（第2章）．精度解析の公式を導出し，追跡観測の誤差を調べてそれに代入することにより，静止衛星の一般的な位置精度を明らかにした．その結果，従来の追跡方法の範囲内では衛星の位置精度の向上がむずかしく，混雑への対応を進展させられないことがわかった．

この状況を打開するために，複数の衛星に対する相対軌道決定という概念を提唱し，その実現のための候補として，地上からの差動測角にもとづく方法（第3章），ならびに衛星間測距にもとづく方法（第4章）をとりあげた．これらふたつの方法について，具体的な実施方法と適用範囲，ならびに相対位置精度を定める要因を明示するとともに，3次元相対運動を推定するためのカルマンフィルターを導出した．とくに差動測角に関しては，擬似差動測角という手法によって，実験データから観測精度を推測した．

差動測角の特長は，パッシブである（電波の受信だけでよい）ことと，適用範囲が広い（どのような衛星の組合せにも対応できる）ことにある．それに対して衛星間測距の特長は，精度が特に高いことと，衛星上自律制御への適性である．つまり，いずれの方法も，それぞれ他方にない特長を有するという関係にある．

これら，相対軌道決定の2種類の方式をふまえて，混雑を管理するための具体的方法を論じた（第5章）．軌道の「自然」な混雑に対しては，地上からの差動測角により相対運動を監視し，衝突のおそれがあるときに回避操作をおこなう．この方法によれば，国や所属を問わず多数の衛星を管理できるようになり，しかも管制作業量ならびに燃料消費量の増加はともに軽微である．これによって，混雑の管理における従来の問題は解消される．クラスターシステムによる「意図的」な混雑のもとでは，衛星間測距にもとづいて相対位置を監視し，配置形状を定期的に修正する．そのための制御手順を，カルマンフィルターに直結する形で具体的に示すことにより，衛星上におけるクラスター制御の実施の見通しを与えた．



軌道の混雑に対してこのような管理技術を導入するならば，静止軌道に収容する衛星総数を，従来の管理技術による場合に比べて，少なくとも1オーダー以上増加させることが可能である．ゆえに本論文の結論として，今後に予想される軌道の混雑の問題は，技術的な解決が可能である．

おわりに，この結論が今後の宇宙通信のあり方に関してもつ積極的な意義をのべたい．静止軌道の容量が有限であるという事実は，宇宙通信の歴史において早くから認識されてきた．その対策として，大型の衛星の上に多数の通信サービスを集約することにより，軌道位置の使用数を減らすという方向への期待がかつては強かった．しかしながら，衛星通信がしだいに市場原理にもとづくようになり，諸サービスの運営が個別の事業体に委ねられるようになると，大型衛星への集約化という方向はむずかしくなった．さらに，時代とともに変わる通信需要の動向に柔軟に適応しようとすると，大型集約衛星では限界があることから，複数の衛星に機能を分散したシステムへ向かわざるを得なくなるであろう．結果としてそれは，ふたたび軌道の混雑化に ― 「自然」な，もしくは「意図的」な要因として ― むすびつく．すなわち宇宙通信の今後の発展は，本質的に軌道の混雑化と不可分の関係にある．本研究は，そのような新しい方向への宇宙通信の発展を可能にするための，技術的根拠をあわせて与えるものである．

## 今後の研究課題

本研究の成果をさらに発展させるために，次のような研究課題が考えられる．

差動測角の精度を向上させるために，３－１１節では「差動電波干渉計」という概念を示した．これによって実際に達成可能な精度を理論的に見つもることは難しい．実験によってそれを評価し，あわせてその精度に適合するカルマンフィルターを開発するならば，地上からの差動追跡技術がさらに進展する．

衛星間測距を考察した第４章では，衛星間の通信回線に中断があってはならないという前提のもとで衛星の配置形状を考察した．もしも，衛星間回線の目的が測距だけにあり，回線の一時的中断が許されるとすれば，衛星の配置形状にたいする条件が緩くなるはずである．これにより衛星間測距を「自然な混雑」の管理に対しても適用可能とするならば，将来的な技術として有用である．

５－３節および５－４節に示した混雑管理方針においては，衝突の 0.5 日前に回避制御をおこなうことを仮定した．この回避時期のとり方については，一方では理論上の最適な時期が存在するはずであり，また他方では衛星の管制運用における実際上の諸条件がともなうであろう．そこで具体的条件を考慮した回避制御のシミュレーション検討を進めることにより，制御方法の実用化をはかるべきである．同じことが，衛星上における自律クラスター制御の方法についても言えよう．

これらの研究により，静止衛星に対する相対軌道決定技術の体系化をさらに進めることが期待される．



## 謝辞

本論文をまとめるにあたり，終始懇切なご指導をいただいた東京大学工学部 水町守志教授に深く感謝の意を表します．また，有益なご助言とご指導をいただいた東京大学工学部 羽鳥光俊教授，石谷 久教授，文部省宇宙科学研究所 中谷一郎教授ならびに東京大学工学部 堀 洋一助教授に感謝の意を表します．

また，本研究の機会を与えられ，暖かい励ましとご指導をいただいた通信総合研究所 吉村和幸所長ならびに畚野信義 前所長，および本研究を行うにあたりご支援とご指導をいただいた下世古幸雄 元鹿島支所研究調整官，内田国昭 宇宙通信部長ならびに飯田尚志 通信科学部長にお礼申し上げます．

また，本研究を行う過程で衛星電波伝搬データを提供していただいた通信総合研究所 福地 一 室長，および終始有益な討論をいただいた有本好徳 室長に深く感謝いたします．

最後に，著者が日頃ご指導をいただく通信総合研究所 杉浦 行 関東支所長に深く感謝いたします．

## 参考文献


有本好徳，川瀬成一郎：静止衛星測位システムにおける軌道決定精度について，宇宙航行エレクトロニクス研究会 SANE89-26, 1989.

江原暉将：同一静止衛星軌道位置にある２機の衛星の軌道運用法，電子通信学会論文誌，Vol.J69-B, No.11, pp.1339-1344, 1986.

尾島武之，川口則幸，橋本幸雄：ＣＳ実験用主固定局兼運用管制局－Ｋバンドアンテナ系，電波研究所季報 Vol.24, No.131, pp.720-729, 1978.

川瀬成一郎，有本好徳，橋本和彦：精密角度追尾の静止衛星管制への実用化，第２７回宇宙科学技術連合講演会，1983.

川瀬成一郎，下世古幸雄，岡 優，松岡陽一：単一静止衛星による測位方式，宇宙航行エレクトロニクス研究会 SANE88-20, 1988a.

川瀬成一郎，笠井克幸，大久保茂，新村 博：オンボード軌道計算による衛星間ビームポインティング，宇宙航行エレクトロニクス研究会 SANE88-3, 1988b.

川瀬成一郎，有本好徳：静止衛星の軌道決定精度，日本航空宇宙学会誌 Vol.38, No.440, pp.470-475, 1990.

川瀬成一郎，有本好徳：静止衛星の軌道決定精度(II)，日本航空宇宙学会誌 Vol.40, No.461, pp.354-357, 1992.

川瀬成一郎，沢田史武：差動測角による静止衛星相対軌道推定フィルタリング，宇宙航行エレクトロニクス研究会 SANE92-106, 1993.

通信・放送機構：衛星管制年報（平成４年度），1993.

Bate, R. R., Mueller, D. D. and White, J. E.: *Fundamentals of Astrodynamics*, Dover, pp.193-203, 1971.

Boehnhardt, H.: OLYMPUS Flight Dynamics Report, ESOC, Darmstadt, December 1990.

CCIR: Station-Keeping in Longitude of Geostationary Satellites using Frequency Bands Allocated to the Fixed-Satellite Service, Recommendation 484-2, 1982.





Cooley, J. L.: Error Studies for Ground Tracking of Synchronous Satellites, NASA TM-X-65831, 1972.

Dorsey, W. W., Neyret, P., Lo, G. J. P. and Ozkul, A.: Colocation of Geostationary Communication Satellites, AIAA 11th Communication Satellite Systems Conference, San Diego, 1986.

Dufor, F.: One Year of Co-Location at 19 degrees West with TDF1 and TDF2 Spacecraft, 3rd International Symposium on Spacecraft Flight Dynamics, Darmstadt, 1991.

Dunning, R. S.: The Orbital Mechanics of Flight Mechanics, NASA SP-325, NASA, pp56-57, 1973.

Eckstein, M. C., Rajasingh, C. K. and Blumer, P.: Colocation Strategy and Collision Avoidance for the Geostationary Satellites at 19 Degrees West, CNES International Symposium on Space Dynamics, Toulouse, 1989.

Fukuchi, H., Okuyama, T., Nakamura, K. and Okamoto, K.: Angle-of-Arrival Fluctuation at 20GHz on Earth-Space Path, 15th International Symposium on Space Technology and Science, Tokyo, 1986.

Haerting, A., Rajasingh, C. K., Eckstein, M. C. and Leibold, A. F: On the Collision Hazard of Colocated Geostationary Satellites, AIAA/AAS Astrodynamics Conference, Minneapolis, 1988.

Hechler, M. and Van der Ha, J. C.: Probability of Collisions in the Geostationary Ring, Journal of Spacecraft and Rockets, Vol.18, No.4, pp.361-366, 1981.

Hubert, S. and Swale, J.: Stationkeeping of a Constellation of Geostationary Communications Stallites, AIAA/AAS Astrodynamics Conference, Seattle, 1984.

Kaplan, M. H.: *Modern Spacecraft Dynamics & Control*, Wiley, pp.108-115, 1976.

Kawase, S. and Tanaka, T: A Simple Method for Estimating the System Observability in Satellite Orbit Determination, IEEE Transactions on

Aerospace and Electronic Systems, Vol.15, No.1, pp.152-156, 1979a.

Kawase, S. and Tanaka, T.: Orbit determination of a Geosyncronous Satellite by the VLBI Technique, Journal of the Radio Research Laboratory, Vol. 26, No.119, pp.65-71, 1979b.

Kawase, S., Kawaguchi, N. Tanaka, T. and Tomita, K.: Optical Calibration of Geostationary Satellite Tracking Systems, IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, Vol.17, No.2, pp.167-172, 1981.

Kawase, S. and Sato, T.: Orbital Error Analysis of Time Synchronization via Geostationary Broadcast Satellite, Journal of the Radio Research Laboratory, Vol.29, No.127, pp.103-113, 1982.

Kawase, S. and Soop, E. M.: Ground Antenna Pointing Performance for Geostationary Orbit Determination, ESA Journal, Vol.10, No.1, pp.71-83, 1986.

Kawase, S.: Closed Dynamical One-Way Time-Synchronization using Geostationary Satellite, Journal of the Radio Research Laboratory, Vol.34, No.142, pp.43-53, 1987.

Kawase, S.: Relative Orbit Determination of Collocated Geostationary Satellites by means of Intersatellite Tracking - Feasibility Analysis, 16th International Symposium on Space Technology and Science, Sapporo, 1988.

Kawase, S.: Real-Time Relative Motion Monitoring for Co-located Geostationary Satellites, Journal of the Communications Research Laboratory, Vol.36, No.148, pp.125-135, 1989.

Kawase, S.: Relative Orbit Determination of Geostationary Satellites by Differential Angle Tracking, 17th International Symposium on Space Technology and Science, Tokyo, 1990a.

Kawase, S.: Intersatellite Tracking Methods for Clustered Geostationary Satellites, IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, Vol. 26, No.3, pp.469-474, 1990b.



Kawase, S.: Differential Angle Tracking for Close Geostationary Satellites, Journal of Guidance, Control and Dynamics, Vol.16, No.6, pp.1055-1060, 1993.

Mineno, H., Chiba, K., Ohshima, H. and Tsuchiya, M.: Station Keeping for Twin Broadcasting Satellites (BS-2) on the Same Geostationary Orbit, Denshi Tokyo, No.26, pp.23-24, 1987.

Pocha, J. J.: *An Introduction to Mission Design for Geostationary Satellites*, Reidel, 1987.

Prussing, J. E. and Conway, B. A.: *Orbital Mechanics*, Oxford, pp.139-154, 1993.

Reijnen, G. C. M. and de Graaff, W.: *The Pollution of Outer Space, in Particular of the Geostationary Orbit*, Martinus Nijhoff, pp.14-21, 1989.

Renner, U. and Nauck, J.: Development Trends in Europe on Satellite Clusters and Geostationary Platforms, AIAA 10th Communications Satellite Systems Conference, 1984.

Soop, E. M.: Introdution to Geostationary Orbits, ESA SP-1053, ESA, pp.101-126, 1983.

Takahashi, K.: Collision Between Satellites in Stationary Orbits, IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, Vol.17, No.4, pp.591-596, 1981.

Visher, P.S.: Satellite Clusters, Satellite Communications, September,p.22-27, 1979.

Walker, J. G.: The Geometry of Satellite Clusters, Journal of the British Interplanetary Society, Vol.35, pp.345-354, 1982.

## 付録A　気体分子モデルによる衛星衝突率の算出

半径方向に $\pm R$，経度と緯度方向にそれぞれ $\pm L$ という広がり（$R$= 10 km，$L$=70 km）を持つ直方体領域の中に，2機の衛星があるとする．はじめに，この領域内を運動する衛星の平均自乗速度を求めよう．衛星の運動の主な成分は

半径方向：$(\alpha L/2)\cos\omega t$，　経度方向：$\alpha L\sin\omega t$，　緯度方向：$\beta L\sin\omega t$

である（2－3節参照）．ここで $\alpha$ は離心率にともなう運動，$\beta$ は軌道傾斜にともなう運動の大きさを表し，$\omega$=7.27×10$^{-5}$ rad/s は地球の回転角速度である．これから，速度 $v$ の自乗平均値は次のようになる．

$$\overline{v^2}=\omega^2L^2(5\alpha^2/4+\overline{\beta^2})/2$$

通常の静止軌道保持においては $\alpha$ = 0.2 前後である．$\beta$ は時間とともに直線的に -1 から 1 まで変化するので，$\beta^2$ の長期平均値は 1/3 である．したがって

$$\mathrm{RMS}(v)=2.23\ \mathrm{m/s}$$

である．

つぎに，平均衝突時間間隔 $T$ を求めよう．2衛星の形状を，ともに直径 $D$ の球とする．ある衛星の運動に注目し，半径 $D$ の円板を底として速度方向に伸びた円筒を考えると，そのなかに他の衛星の中心があるときに衝突が起きる．時間 $T$ のあいだに1回の衝突が起きたとすれば，高さ $vT$ の円筒中に他の衛星が存在する．つまり円筒の体積が直方体領域の全容積に等しいことになるから，

$$\pi D^2vT=2R(2L)^2$$

により

$$T=\frac{8RL^2}{\pi D^2v}$$

を得る．衛星のサイズを $D$=10 m とすると，$T$=5.60×10$^{11}$ sec となるから

$$\text{年間衝突数}=5.6\times10^{-5}$$

である．



## 付録B　積和の定積分近似

（1）　4ベクトルの場合

$s_k=2\pi k/N$，$k$=0,1,...,$N$ としたとき，4つのベクトル

$$(1,\quad 1,\quad \ldots,\quad 1)$$
$$(s_0,\quad s_1,\quad \ldots,\quad s_N)$$
$$(\sin s_0,\ \sin s_1,\ \ldots,\ \sin s_N)$$
$$(\cos s_0,\ \cos s_1,\ \ldots,\ \cos s_N)$$

の中から任意に選んだふたつのベクトルの内積を求めることが，共分散解析において必要である．その積和計算を，$N$ が十分に大きいとして，以下に示すように定積分により近似する．たとえば，第2と第3のベクトルの内積 $\sum s_k\sin s_k$ を，積分のきざみ幅を $\Delta s=2\pi/N$ とおいて，つぎのように求める．

$$\sum_{k=0}^{N}s_k\sin s_k=\frac{1}{\Delta s}\sum_{k=0}^{N}s_k\sin s_k\ \Delta s$$
$$\cong\frac{1}{\Delta s}\int_0^{2\pi}x\sin x\,dx=\frac{N}{2\pi}(-2\pi)=-N$$

同様な近似計算をすべての組合せについておこなうと，以下の各式を得る．

$$\sum 1=N$$
$$\sum s_k=N\pi$$
$$\sum \sin s_k=0$$
$$\sum \cos s_k=0$$
$$\sum s_k^2=4\pi^2N/3$$
$$\sum s_k\sin s_k=-N$$
$$\sum s_k\cos s_k=0$$
$$\sum \sin^2 s_k=N/2$$
$$\sum \sin s_k\cos s_k=0$$
$$\sum \cos^2 s_k=N/2$$

（2） 6ベクトルの場合

衛星間追跡の共分散解析においては，上記の4ベクトルに，倍周期項から成るふたつのベクトル

$$(\sin 2s_0,\ \sin 2s_1,\ \ldots,\ \sin 2s_N)$$
$$(\cos 2s_0,\ \cos 2s_1,\ \ldots,\ \cos 2s_N)$$

を追加しなければならない．それにともなう積和計算を同じ近似によっておこなうと，以下のとおりである．

$$\begin{aligned}
\sum \sin 2s_k &= 0\\
\sum \cos 2s_k &= 0\\
\sum s_k \sin 2s_k &= -N/2\\
\sum s_k \cos 2s_k &= 0\\
\sum \sin s_k \sin 2s_k &= 0\\
\sum \cos s_k \cos 2s_k &= 0\\
\sum \sin s_k \cos 2s_k &= 0\\
\sum \cos s_k \sin 2s_k &= 0\\
\sum \sin^2 2s_k &= N/2\\
\sum \cos^2 2s_k &= N/2
\end{aligned}$$

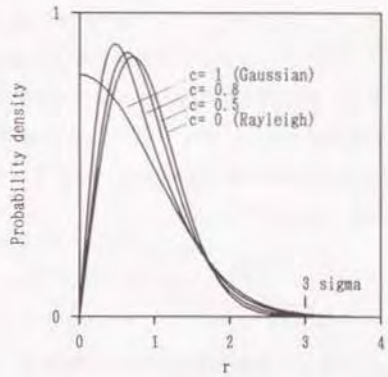


## 付録C　自乗和平方根の上限

ふたつの確率変数 $x$, $y$ があって，ともに平均値零のガウシアン分布に従い，それらの分散・共分散が $\sigma^2{}_x$, $\sigma^2{}_y$, $\sigma_{xy}$ であるとする．このとき，$r=\sqrt{x^2+y^2}$ という変数の統計的な上限を厳密に求めようとすると，$r$ の確率分布が相関係数 $c=\sigma_{xy}/\sigma_x\sigma_y$ に依存して変わるため，煩雑な計算を要する．そこで，$r$ の上限を簡単に表す近似を考える．

$x$ と $y$ が完全に相関するとき（$|c|=1$），$r$ の確率分布は $\sigma=\sqrt{\sigma_x{}^2+\sigma_y{}^2}$ を標準偏差とする片側ガウシアン分布となる。このとき，$r$ の上限として周知の“$3\sigma$”を用いることができる（危険率0.27%），$|c|$ が1よりも小さくなるにつれて，$r$ の分布はガウシアンを離れ，レイリー分布に近づく（図C－1）．しかしその場合でも、同じ危険率を使うかぎり，同図のように $r$ の上限は $3\sigma$ を超えない．

したがって相関係数の値にかかわらず，$r$ の分布を標準偏差 $\sigma=\sqrt{\sigma_x{}^2+\sigma_y{}^2}$ の片側ガウシアン分布とみなして“$3\sigma$”上限を用いることは，つねに安全側に立つ近似である．




図C－1　$r$ の確率分布密度

## 付録D　量子化誤差の平滑化

ある量 $x$（方位角または仰角）を測定するときに，ガウシアンノイズ $n$（平均値零，標準偏差 $\sigma$）が加わり，しかもデータの読みとりに図D－1のような量子化がはたらくことによって，$f(x+n)$ という測定値を得るものとする．ただしここでは量子化の単位を1とおく．このような測定を $N$ 回（ここでは $N$=180）おこなって測角平均値を作ったとしよう．それを，量子化をともなわずに行った同じ測定の平均値と比べると，

$$Q(x;\sigma) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f(x+n_i) - \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x+n_i)$$

という差をもつ（ただし $n_1, n_2, \ldots, n_N$ は，$N$ 回の測定に現れたノイズのサンプル値である）．この差を量子化誤差と呼ぶことにする．

測定ノイズがないとすれば（$\sigma$=0），量子化誤差は

$$Q(x;0) = f(x) - x$$

となって，$x$ に対し三角波状に変化する（図D－2，$\sigma$=0 の場合）．ところがノイズレベルが大きくなると（同図，$\sigma \geqq 0.5$ の場合），量子化誤差は測定量 $x$ に対する依存性を失い，$-1/2$ というバイアスと，そのまわりのランダム誤差となるのである．このランダム誤差の大きさをみるため，$x$ の1周期にわたって $Q(x;\sigma)+1/2$ のRMSをとり，その $\sigma$ への依存性を表示すると，図D－3のようである．ところで2－12節によれば，方位角と仰角のノイズレベルはそれぞれ $\sigma$=2 および $\sigma$=3 に相当するから，上記ランダム誤差のレベルは 0.020（標準偏差）である．

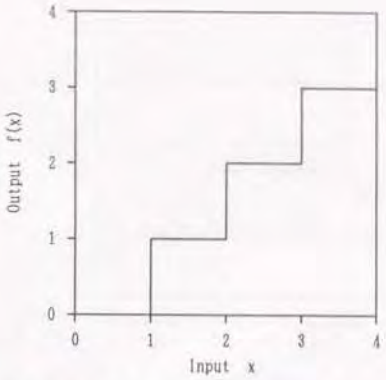
測角平均値を(3-1)式に代入して差動測角値を求めると，バイアス誤差 $-1/2$ は消える．またランダム誤差のレベルは，同式の形によって

$$0.020 \times \sqrt{1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = 0.024$$

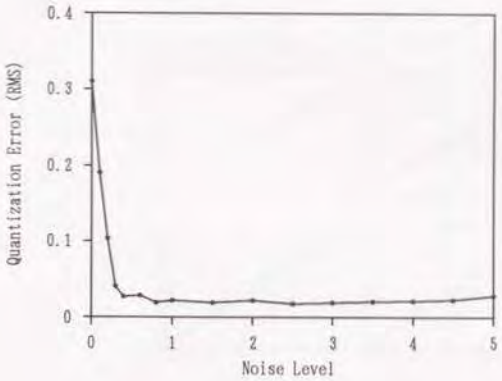
となる．

ゆえに，データの量子化にともなって差動測角値に生じる誤差は，標準偏差 0.024 のランダム誤差だけである．

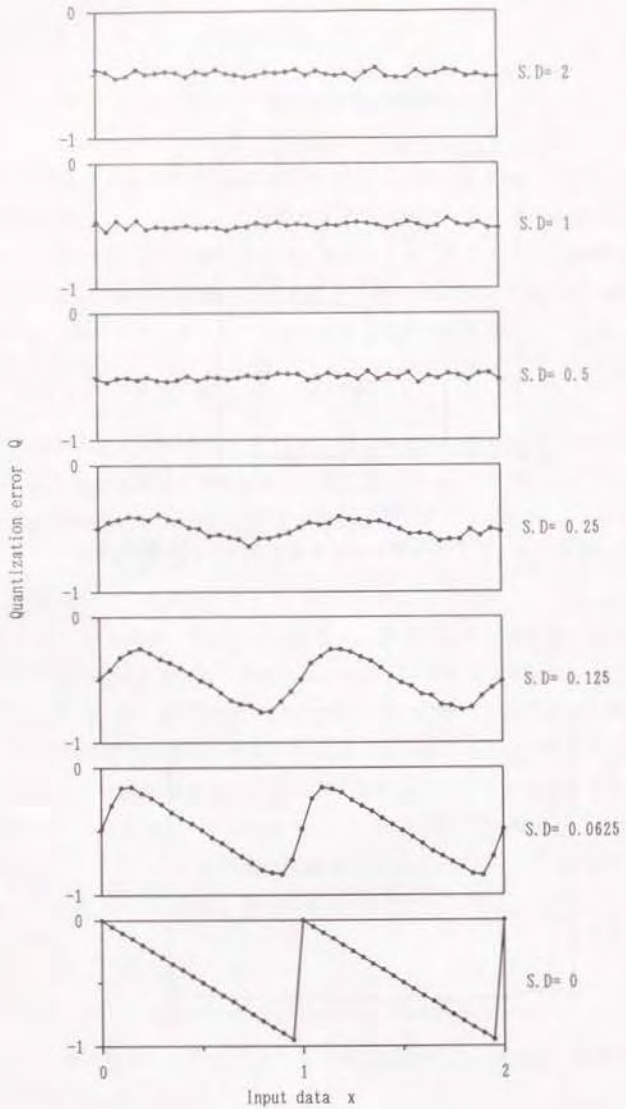





図D－1　デジタル読みとりにともなうデータ量子化




図D－3　量子化誤差の，一定バイアスへの収束




図D－2　量子化誤差の現れ方と，ノイズレベルの関係
（S，Dはノイズレベル σ を表す）