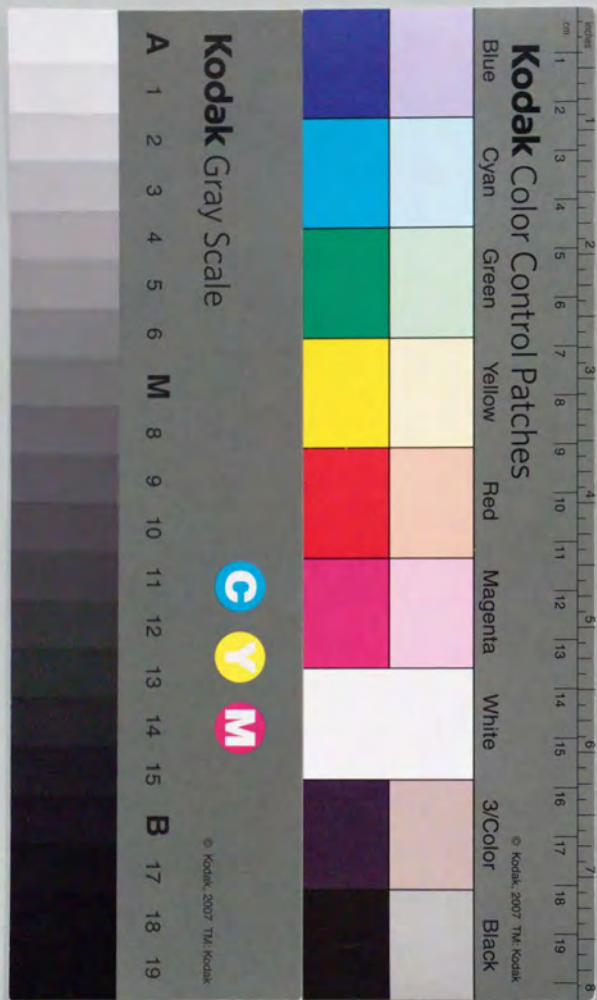


地下空間を対象とした熱負荷計算法に関する研究

永田 明寛



①

地下空間を対象とした熱負荷計算法に関する研究

1996 年 1 月

永田 明寛

NOTES ON THE HISTORY OF THE

1800-1810

1810-1820

1820-1830

1830-1840

1840-1850

1850-1860

1860-1870

1870-1880

1880-1890

1890-1900

目次

1 序論	1
1.1 はじめに	1
1.2 本論文の構成	2
2 熱伝導問題におけるシステム理論の応用	7
2.1 はじめに	7
2.2 空間領域の離散化	8
2.2.1 重みつき残差法	8
2.2.2 固有関数展開法	9
2.2.3 有限要素法	13
2.2.4 差分法	14
2.2.5 境界要素法	15
2.3 時間領域の離散化	17
2.3.1 連続時間システム	17
2.3.2 離散時間システム	23
2.4 システム合成	31
2.4.1 システムの分解と合成	31
2.4.2 離散時間システムの合成	33
2.4.3 伝達関数行列の合成	35
2.5 システムの低次元化と応答近似	35
2.5.1 システムの低次元化の意義	35
2.5.2 対象とするシステム	36

2.5.3	状態方程式の低次元化	37
2.5.4	伝達関数行列の近似	42
2.5.5	伝達関数行列の実現問題	46
2.6	パルス伝達関数行列と畳み込み計算法	47
2.6.1	パルス伝達関数行列の導出	47
2.6.2	畳み込み計算法	49
2.7	まとめ	50
3	地盤に接する壁体の熱応答	51
3.1	はじめに	51
3.2	境界要素法による定式化	53
3.2.1	積分方程式	53
3.2.2	離散化	54
3.2.3	係数行列の計算法	55
3.2.4	地表面における境界条件	57
3.2.5	地下壁面における境界条件	60
3.2.6	地表面に接する流体温が0でない場合	60
3.3	数値 Laplace 逆変換	63
3.3.1	数値 Laplace 逆変換法	63
3.3.2	1次元半無限体による検討	63
3.3.3	地下壁体における応用	66
3.4	まとめ	68
4	地盤に接する壁体の熱応答の簡易計算法	71
4.1	はじめに	71
4.2	既往の研究	71
4.3	解析解に関する考察	74
4.3.1	はじめに	74
4.3.2	Green 関数を用いた境界値問題の記述	74
4.3.3	地盤以外の熱抵抗の扱い	75
4.3.4	土間床の2次元定常問題	76
4.3.5	土間床の2次元定常問題(不易層がある場合)	85
4.3.6	地下壁・床の2次元定常問題	87
4.3.7	3次元定常問題	92
4.4	地盤に接する壁体の簡易熱応答計算法の開発	101
4.4.1	はじめに	101
4.4.2	計算方法	102
4.4.3	簡易計算式	104
4.5	まとめ	113
5	熱橋の熱応答近似	115

5.1	はじめに	115
5.2	計算方法	115
5.2.1	精算熱応答の計算方法	115
5.2.2	近似熱応答の計算方法	117
5.2.3	計算モデル	118
5.3	計算結果	118
5.4	まとめ	123
6	熱水分同時移動を考慮した多層壁体の応答	125
6.1	はじめに	125
6.2	線形熱水分同時移動方程式	126
6.3	単層のアドミッタンス行列	128
6.4	多層壁のアドミッタンス行列	131
6.5	Laplace 逆変換	132
6.6	畳み込み計算法	139
6.7	まとめ	139
7	多次元形態及び熱水分同時移動を考慮した熱負荷計算法	141
7.1	はじめに	141
7.2	放射熱伝達	142
7.2.1	放射吸収行列	142
7.2.2	等価気温	143
7.3	室内温湿度・空調負荷計算	145
7.3.1	壁体の応答	145
7.3.2	室内熱水分バランス	146
7.3.3	室内温湿度・負荷計算	149
7.4	まとめ	153
8	地下室つき住宅の実測データ解析	155
8.1	はじめに	155
8.2	実測の概要	156
8.3	外界気象条件	156
8.4	地表面熱収支と地盤物性	156
8.4.1	地表面熱収支	156
8.4.2	地表面熱伝達率	160
8.4.3	地表面湿気伝達率	160
8.4.4	飽和絶対湿度の温度に対する変化率	161
8.4.5	蒸発比	161
8.4.6	地盤物性	161
8.4.7	不易層	161
8.4.8	地表面熱伝達率・蒸発比・熱伝導率の感度解析	161

8.5 シミュレーションモデル	162
8.5.1 計算方法	162
8.5.2 建物モデル	162
8.5.3 壁体仕様	162
8.5.4 その他の設定条件	162
8.5.5 地表面境界条件	162
8.5.6 地下室側境界条件	166
8.6 計算結果	166
8.6.1 地中温度分布	166
8.6.2 日積算空調負荷	168
8.6.3 部位別熱負荷	168
8.7 まとめ	173
9 総括	175
参考文献	179
記号表	189

1.1 はじめに

日本では、欧米と比べて地下空間利用が遅れていたことや、地下空間の熱負荷は地上部分のそれと比較して格段に小さいため、従来軽視されてきたきらいがあった。しかし、都市の高密度化が進む中で地下空間は貴重な空間資源として注目を集め、1994年6月には、住宅地下部分は床面積の1/3まで容積率に算入されないように建築基準法が改正されるに到り、一方、地上部分の高断熱・高気密化が進む中で地下空間の熱負荷が相対的に大きくなってきたこともあり、設計段階での地下空間の熱負荷予測に対する需要が高まってきた。

住宅以外においては、ビルの地階、地下街、地下駐車場など地下空間利用は行われてきたが、このような浅深度地下利用にとどまらず、大深度地下も利用しようという動きがあり、宇宙・海洋と並ぶニューフロンティアとして地下が耳目を集めたのは記憶に新しい。このような動きはバブル崩壊を機に沈潜化の方向に向かったが、地下空間利用が今後着実に浸透していくことは疑う余地がない。

本研究は、以上を背景に地下空間を対象とした熱負荷計算手法の開発を行うものである。開発にあたっては熱負荷計算法として広く実用に供されている応答係数法をベースとし、地下空間の場合に特に問題になる、1) 多次元応答、2) 長周期応答、3) 熱水分同時移動応答のそれぞれに対して応答係数法の拡張を行い、最終的には地下空間の熱負荷・熱環境を予測する計算法として体系づける。また、地下室つき住宅の実測データをもとにシミュレーションによる検討を行い、その特性を明らかにする。

一方、多次元形態という点では、熱橋も地下室と同じであり、地盤に接する壁体の応答に関する知見を生かし、2次元熱橋に対して非定常応答を簡易に予測する手法を開発する。

1.2 本論文の構成

本論文は、全9章で構成される。全体構成を図1.1に示す。

第1章は序論である。

第2章では、多次元熱伝導問題を両表面温度もしくは境界流体温度を入力、表面熱流を出力とみた多入力多出力システムとみなし、システム理論の観点から、差分法・有限要素法・境界要素法による離散化、システムの低次元化・応答近似、システム合成に到るまでを統一的に論じる。建築の熱負荷計算という立場からは、壁体内の温度分布は主な関心事ではなく表面熱流だけ得られればよいケースがほとんどであるから、システム内部の状態の表現方法はあまり重要ではなく、システムの外部表現、すなわち、入出力関係のみをあらわす応答特性さえ得られればよい。建築伝熱分野においては、1次元平面壁では室外側温度入力(励振)に対する室内側熱流を貫流応答、また、室内側温度入力(励振)に対する室内側熱流を吸熱応答としてわけ、それぞれ1入力1出力システムとみなすのが一般的でありシステム理論との関係もよく研究されている。しかし、地盤などの多次元壁体に関しては、時間差分によるアプローチがほとんどであり、伝達関数によるアプローチはまったくといっていいほど行われておらず、また、応答近似とシステムの低次元化の関係についてもほとんど意識されていないようである。そこで第2章では、線形システム理論の側面から、種々の手法間の関連について整理し、本論文の3章以降で応用する、多次元壁体伝熱に対する伝達関数近似の基礎理論とする。

第3章では、地盤に接する壁体の熱応答を算出する方法として、境界要素法によって伝達関数を求め、それを数値 Laplace 逆変換する方法について検討する。この方法は Rizzo と Shippy[120] により提案されたものであり、境界要素法による非定常伝熱計算法として最初期から存在するが、境界履歴が複雑なとき、それを Laplace 変換するのが大変であることや数値 Laplace 逆変換を精度よく行うために経験的な要素が加わることから、現在では時間依存の基本解を用いる解法や近似基本解を用いた方法が主流になってきている。しかし、境界履歴が複雑な場合でも時間領域で畳み込み演算を行えばよく、伝達関数を有理多項式で近似すれば畳み込み演算を他の手法より効率的に行うことが可能であることからむしろ実用的な解法であるといえる。境界要素法は無限・半無限領域の問題を高精度に計算できることが利点の一つとしてあげられ、実際に地盤伝熱問題を解くのに利用されているが[145][129]、地表面や地中部分を離散化せずに地下壁面のみを離散化して解く手法及び地下壁近傍の非等質媒体を直接離散化せず解析的な手法を併用して要素数を増さずに解く手法の2つを新たに提案する。また、数値 Laplace 逆変換に関しても、離散 Laplace パラメータの取り方などについて検討を行い、地盤のような厚い壁体でも問題なく逆変換できることを示す。

第4章では、地盤に接する壁体熱損失の簡易計算法について今までの研究状況を振り返ったのち、土間床、地下室の定常伝熱問題に対する解析解について考察する。境界要素法と関連の深い Green 関数を用いる方法と Schwarz-Christoffel 変換による等角写像法を併用して Dirichlet 境界条件における表面熱流を解析的に算出し、更に地盤以外の熱抵抗が存

在する Robin 境界条件に関しては、Dirichlet 境界条件の場合と熱の流れる経路 (heat flow path) が同じであると仮定して地盤以外の熱抵抗を直列接続して単純化する方法 [11] を適用する。続いて、動的熱負荷計算に用いることを目的とした地盤に接する壁体の非定常熱流の簡易計算法を開発する。地盤に接する壁体を対象とした簡易熱損失計算法に関する研究は今までかなり行われているが、そのほとんどが定常計算で非定常性について扱っているものでもせいぜい年周期の周期定常止まりであり、HASP に代表される動的熱負荷計算に用いることを目的とした地盤に接する壁体の簡易熱応答計算法に関する報告は少ない。正の Laplace パラメータに対する伝達関数が求まっていれば、それを応答係数に変換することができることは第2章、第3章で示している。1次元の場合と同程度の時間で多次元の場合の伝達関数を算出できれば応用価値が高いだろう。そこで、第3章で述べた方法によって Laplace 変換領域において3次元の境界要素法を用いた熱応答計算を行い、これをもとに地下室壁体の非定常熱流応答に対する簡易計算式を導く。また、定常熱応答については、今までに様々な簡易計算法が提案されているが、解析解による検討を踏まえ、新たな簡易式を作成する。

第5章は、熱橋の熱応答近似について考察する。近年、定常計算に基づいた簡易熱負荷計算法では熱橋を扱うようになってきたが[51]、それより高度で精密とされる動的負荷計算プログラムでは熱橋への対応がほとんどなされていないのが現状である。本章の研究は、HASP など応答係数法をベースとした動的熱負荷計算プログラムで、熱橋を含む壁体の計算を簡易に行うことを目的としたものである。熱橋の非定常特性に関しては、赤坂ら[2]、Burch ら[13]などの研究があるが簡易計算法は示されていない。多次元熱流という点では熱橋も地盤伝熱も同一で、第4章までの成果をそのまま生かすことが可能であり、正の Laplace パラメータに対する伝達関数を離散的に2次元差分法によって求めこれを精解とし簡易計算法の検討を行う。熱流が1次元であると仮定して解析的に計算した各部の熱応答を面積加重平均して求めた平均熱応答を、既にデータベース化されている定常応答の補正係数を利用して修正する非常に簡易な方法で十分な精度で熱応答が近似できることを示す。

第6章では、線形熱水分同時移動系に対して、第5章までと同様に正の Laplace 変換領域における伝達関数を離散的に求め、それらに局所的な適合条件を課して有理多項式近似し時間領域の応答を求める手法(固定公比法)を適用する。多層平面壁の Laplace 変換領域における解すなわち伝達関数の解析解は、松本[65]によって示されたものの、時間領域への移行すなわち逆変換のアルゴリズムまでは行われていなかった。松尾は、熱単独の場合と同様の手法を用いて固有方程式の根を求めるアルゴリズムを開発し(精解法)、熱水分同時移動を考えると熱単独の場合と比べ、湿気の拡散速度が極めて遅いため、十分な精度を確保するのに必要項数が非常に多く必要になることを示した[84]。また、極が必ず負の実数になるという保証がないため[71]、松尾のアルゴリズム(Newton-Raphson 法による根探索)ではうまくいかない場合があり、極を求めるのは存外やっかいであることもわかった。これに対して、吉田は、離散 Fourier 変換を用いて3角波応答を求める手法を開発し、これによって計算上の困難が回避できるのみでなく計算時間も短縮できることを示した[160]。

しかし、この手法は応答が指数級数として表現されているわけではないので、畳み込み演算に項別公比法などの効率的な手法を適用することができないといった難点がある。以上の問題の解決策として固定公比法が有効であり、熱単独の場合と同程度の時間で高精度に熱水分同時移動系の応答を算出することが可能であることを示す。

第7章は、多次元形態及び熱水分同時移動を考慮した熱負荷計算法について述べる。第6章まででは壁体の熱水分応答について論じているが、建築空間に壁体が置かれたときには、壁体表面から対流による空気への熱伝達や壁体相互の放射熱伝達が生じる。本章では、新たに室温と室供給熱量を境界条件としてシステムを記述しなおし、室内温湿度・顕潜熱負荷計算法とする。Gebhaltの放射吸収係数を室の総表面積に対する対象壁面積の比で表現して壁体の相互放射を簡易に扱う手法[87]を適用すれば、室ごとに放射を加味した等価気温が唯一つ求まるため熱水分同時移動を考慮する場合でも大幅な簡易化が可能となる。簡易化を行った場合と行わない場合の具体的な計算式を示し、室数 $\times 2$ (熱・水分)の次元の方程式とする。室内湿度が制御できるようなシステムでは室内湿度が設定値に保たれるものとして、室に供給すべき熱水分量を決定してよいが、一般的には湿度は成りゆきの場合が多いのでこの場合についても考えておく必要がある。空調システムの構成は多岐にわたりそれぞれに対応した式を示すのは困難であるので、最も単純な単一ダクトCAVシステムで単室の場合を想定し熱水分同時移動を考慮した場合の考え方を示す。コイル状態(湿りコイル・乾きコイル)及び軽負荷・過負荷など空調状態の変化を考慮した計算式を示す。表面熱水分流と境界流体温度の関係に着目すればどのような計算手法をとるにせよ、離散時間領域においては、表面熱水分流は既知熱水分流及び直接伝送行列と現時点での温湿度ベクトルの積として表現できるので第7章で示す方法は普遍的なものである。

第8章では、建設省建築研究所敷地内に建てられた地下室つき実験住宅の実測データをもとに、数値シミュレーションによる検討を行う。本実験棟は本来地上部分と地下部分の一体利用検討を課題として建てられたもので、1台の空調機で1階と地階の両方を空調し負荷の状況によっては上下階の換気のみを行うことで地中熱の有効利用をはかり、省エネルギーを追求しようというものである[92]。この実験については、既報[110]において3次元有限要素法による数値シミュレーションを行っているが、地階と1階の空調負荷が分離して測定されておらず、1階部分の負荷のほうが大きく誤差要因も多いことを考慮すると地下室熱特性把握という観点からは曖昧な点が残った。そこで本実験終了後、1階床部分に断熱材を敷き詰め上下階換気を止めて地下室のみの熱特性把握のための実験が行われた。本章ではこのデータを利用し、地下壁体の熱負荷に対する検討を中心に考察する。また、実測では地中温度を測定しているため、本論文では触れることが少なかった地中温度分布についても検討を行う。地中温度分布に関する検討も行うため、空間領域は3次元差分法で、また、時間領域は後退差分法による離散化して計算する。水分蒸発や日影も考慮して地表面境界条件の設定を行い、その影響について検討するとともに、地下壁の部位別の熱負荷を算出し、その熱特性を明らかにする。

第9章は、総括であり、今後の課題などについて述べる。

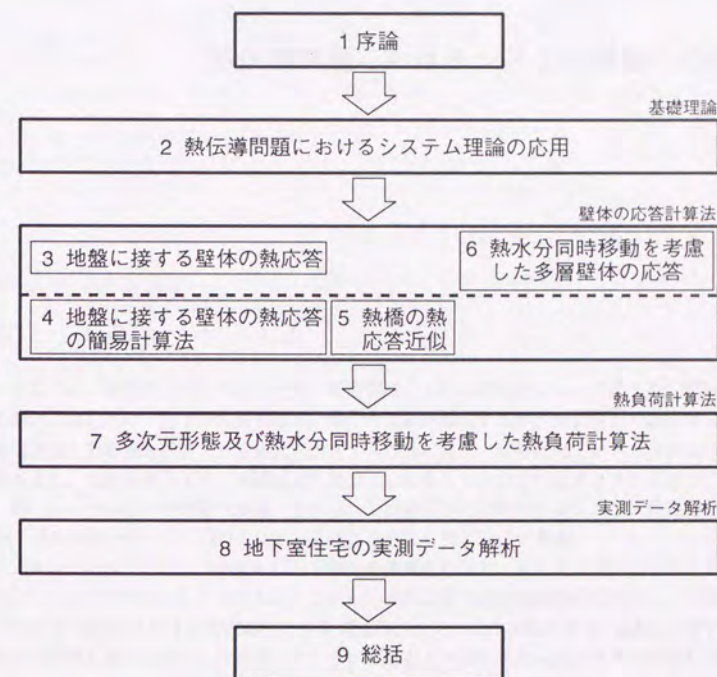


図 1.1 論文の構成

熱伝導問題におけるシステム理論の応用

2.1 はじめに

本章では、線形熱伝導方程式の空間・時間領域における離散化について述べる。無論この問題に関しては、古くから研究され、多くの文献が存在するが、解析解から差分法・有限要素法・境界要素法による離散化、システムの低次元化・応答近似、システム合成にいたるまで、表面温度を入力、表面熱流を出力とした多入力多出力の線形システムとして統一的に論じているのが特徴であると言える。この表現のことをアドミッタンス表現というが、建築伝熱分野で広く利用されている応答係数法も同じ形式である。

1次元の壁体は、両表面温度もしくは境界流体温度を入力、また両表面熱流を出力とみれば、2入力2出力システムである。しかし、実際は室内側の熱流のみに着目し、室外側温度入力(励振)に対する室内側熱流を貫流応答、また、室内側温度入力(励振)に対する室内側熱流を吸熱応答としてわけ、それぞれ1入力1出力システムとみなすのが建築伝熱の分野では一般的である。建築伝熱の分野では、1次元壁体の伝熱は実用上最も重要であり、過去に膨大な研究蓄積がある。また、システム理論との関係についても、山崎、渡辺[152]、永村[20]らによって詳細に検討されてきた。しかし、地盤などの多次元壁体に関しては、時間差分によるアプローチがほとんどであり、伝達関数によるアプローチはまったくといっていいほど行われておらず、また、応答近似とシステムの低次元化の関係についてもほとんど意識されていないようである。そこで本章では、線形システム理論の側面から、種々の手法間の関連について整理し、本論文の次章以降で応用する、多次元壁体伝熱に対する伝達関数近似の基礎理論として論ずることにしたい。

実際、建築の熱負荷計算という観点からみれば、壁体内の温度分布などは主な関心事で

はなく、表面熱流さえわかればよいケースがほとんどであるから、システム内部の状態の表現方法はあまり重要ではなく、システムの外部表現、すなわち、入出力関係のみをあらわす応答特性さえ得られればよい。例えば地盤伝熱の場合、差分法・有限要素法などの領域型解法で地盤内を離散化した場合、内部節点として膨大な節点が必要となるが、表面熱流を表現する手段としてみると内部自由度が多く、冗長な部分をかなり含んでおり効率的とはとてもいえない。システムの低次元化もしくは応答近似が重要である所以である。効率の問題は計算機の進歩で以前ほど問題にならなくなってきてはいるが、熱負荷予測とかかわりでシステム同定がクローズアップされてきており、更にシステムの最適設計について考える場合もまずはシステムを少ないパラメータで表現しておくことが必要であることから、システムの低次元化はこの種のいわゆる逆問題の側面からも重要な課題となっている。

2.2 空間領域の離散化

2.2.1 重みつき残差法

対象領域を Ω 、境界を Γ とし、 $\Omega + \Gamma$ で定義された関数 $T(\mathbf{x}, t)$ を以下の条件で求める場合を考える。

$$c\rho(\mathbf{x})\frac{\partial T(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = \nabla \cdot \lambda(\mathbf{x})\nabla T(\mathbf{x}, t) \quad \text{in } \Omega \quad (2.1)$$

$$T(\mathbf{x}, t) = T_\Gamma(\mathbf{x}, t) \quad \text{on } \Gamma \quad (2.2)$$

ただし、 $T(\mathbf{x}, t)$ は温度、 $c\rho(\mathbf{x})$ は容積比熱、 $\lambda(\mathbf{x})$ は熱伝導率で、 \mathbf{x} は空間の関数であることを、また、 t は時間の関数であることを意味する。式(2.1)は熱伝導方程式であり、式(2.2)は境界上で $T_\Gamma(\mathbf{x}, t)$ を与える Dirichlet 境界条件(第1種境界条件)である。今、 $T(\mathbf{x}, t)$ の近似関数を $\hat{T}(\mathbf{x}, t)$ とし $T(\mathbf{x}, t)$ を式(2.1)に代入すると一般に次のような残差 R が生じる。

$$R = c\rho(\mathbf{x})\frac{\partial \hat{T}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} - \nabla \cdot \lambda(\mathbf{x})\nabla \hat{T}(\mathbf{x}, t) \neq 0 \quad (2.3)$$

この領域 Ω 内の誤差 R に重み関数 $\psi(\mathbf{x})$ を乗じて Ω 内で積分したものと境界上での誤差に $-\lambda\partial\psi(\mathbf{x})/\partial n$ を乗じて境界上で積分したものを加えたとき0になるように近似関数を決定する。ここで、 $\partial/\partial n$ は外向き法線微分である。すなわち、

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} c\rho(\mathbf{x})\frac{\partial \hat{T}(\mathbf{x}, t)}{\partial t}\psi(\mathbf{x})d\Omega - \int_{\Omega} \nabla \cdot (\lambda(\mathbf{x})\nabla \hat{T}(\mathbf{x}, t))\psi(\mathbf{x})d\Omega \\ + \int_{\Gamma} (\hat{T}(\mathbf{x}, t) - T_\Gamma(\mathbf{x}, t))\left(-\lambda(\mathbf{x})\frac{\partial \psi(\mathbf{x})}{\partial n}\right)d\Gamma = 0 \end{aligned} \quad (2.4)$$

が成り立つように $\hat{T}(\mathbf{x}, t)$ を決定する(強形式)。このような手法を重みつき残差法(MWR: Method of Weighted Residuals)という[25]。式(2.4)は、Greenの定理を適用することに

より、

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} c\rho(\mathbf{x})\frac{\partial \hat{T}(\mathbf{x}, t)}{\partial t}\psi(\mathbf{x})d\Omega + \int_{\Omega} \lambda(\mathbf{x})\nabla \hat{T}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla \psi(\mathbf{x})d\Omega \\ - \int_{\Gamma} \lambda(\mathbf{x})\frac{\partial \hat{T}(\mathbf{x}, t)}{\partial n}\psi(\mathbf{x})d\Gamma + \int_{\Gamma} (\hat{T}(\mathbf{x}, t) - T_\Gamma(\mathbf{x}, t))\left(-\lambda(\mathbf{x})\frac{\partial \psi(\mathbf{x})}{\partial n}\right)d\Gamma = 0 \end{aligned} \quad (2.5)$$

と変形できる(弱形式)。式(2.5)は更に、

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} c\rho(\mathbf{x})\frac{\partial \hat{T}(\mathbf{x}, t)}{\partial t}\psi(\mathbf{x})d\Omega - \int_{\Omega} \nabla \cdot (\lambda(\mathbf{x})\nabla \psi(\mathbf{x}))\hat{T}(\mathbf{x}, t)d\Omega \\ - \int_{\Gamma} \lambda(\mathbf{x})\frac{\partial \hat{T}(\mathbf{x}, t)}{\partial n}\psi(\mathbf{x})d\Gamma - \int_{\Gamma} T_\Gamma(\mathbf{x}, t)\left(-\lambda(\mathbf{x})\frac{\partial \psi(\mathbf{x})}{\partial n}\right)d\Gamma = 0 \end{aligned} \quad (2.6)$$

とも変形できる(逆形式)。

近似関数 $\hat{T}(\mathbf{x}, t)$ を既知関数系 $\{\phi_i(\mathbf{x})\}(i=1, \dots, m)$ を用いて展開し、

$$\hat{T}(\mathbf{x}, t) = \phi_0(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^m \phi_i(\mathbf{x})c_i(t) \quad (2.7)$$

のように表現する。このとき $\phi_i(\mathbf{x})$ を試行関数という。 $c_i(t)$ は時間に関する未知の関数である。試行関数 $\phi_i(\mathbf{x})$ と重み関数 $\psi(\mathbf{x})$ の選び方によって、式(2.4)、式(2.5)、式(2.6)を出発点として、様々な解法を統一的に導出することができる。

2.2.2 固有関数展開法

式(2.7)で、試行関数 $\phi_i(\mathbf{x})$ として、

$$\int_{\Omega} c\rho(\mathbf{x})\phi_i(\mathbf{x})\phi_j(\mathbf{x})d\Omega = \delta_{ij} \quad (2.8)$$

$$\nabla \cdot \lambda(\mathbf{x})\nabla \phi_i(\mathbf{x}) = \alpha_i \phi_i(\mathbf{x}) \quad \text{in } \Omega \quad (2.9)$$

を満たす関数系で展開する方法を固有関数展開法という¹。ここで、 $\phi_i(\mathbf{x})$ は固有関数、また α_i は固有値である。ただし $\phi_0(\mathbf{x})$ は0とする。また、 δ_{ij} は、Kroneckerの記号で、

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i=j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases} \quad (2.10)$$

である。未知関数 $c_i(t)$ は、 $c_i(t) = \tilde{T}_i(t)$ と表すことにし、 $\tilde{T}_i(t)$ をモード変数と呼ぶ。 $m = \infty$ にとれば $\hat{T}(\mathbf{x}, t)$ は Ω 内で厳密解 $T(\mathbf{x}, t)$ に収束する(固有関数系の完全性)。固有関数系は境界条件を定めないと決まらないが、Dirichlet境界条件に対応させて、

$$\phi_i(\mathbf{x}) = 0 \quad \text{on } \Gamma \quad (2.11)$$

という境界条件を課すことにする。このとき、式(2.11)から明らかのように Γ 上でこの関数は必ず0になるため、 $\hat{T}(\mathbf{x}, t)$ は境界条件を満たしてはいないことに注意する。

¹スペクトル法ともいう。

重み関数 $\psi(\mathbf{x})$ として、 $\phi_i(\mathbf{x})$ そのものを用いる Galerkin 法を適用する。 $\psi(\mathbf{x}) = \phi_i(\mathbf{x})$ として、式(2.4)に式(2.7)を代入し、固有関数 $\phi_i(\mathbf{x})$ の直交性や、 Γ 上で $\dot{T}(\mathbf{x}, t) = 0$ であることなどを用いれば、

$$\dot{\bar{T}}_i(t) = \alpha_i \bar{T}_i(t) + \int_{\Gamma} T_{\Gamma}(\mathbf{x}, t) \left(-\lambda(\mathbf{x}) \frac{\partial \phi_i(\mathbf{x})}{\partial n} \right) d\Gamma \quad (2.12)$$

という m 個の式を導くことができる。ただし、 $d\bar{T}_i(t)/dt$ を $\dot{\bar{T}}_i(t)$ と簡単に表記した。この式は $\bar{T}_i(t)$ に関して独立の1階の常微分方程式なので、

$$\bar{T}_i(t) = e^{\alpha_i t} \bar{T}_i(0) + \int_0^t e^{\alpha_i(t-\tau)} \int_{\Gamma} T_{\Gamma}(\mathbf{x}, \tau) \left(-\lambda(\mathbf{x}) \frac{\partial \phi_i(\mathbf{x})}{\partial n} \right) d\Gamma d\tau \quad (2.13)$$

と求めることができる。 $\bar{T}_i(0)$ は固有関数の直交性より、

$$\bar{T}_i(0) = \int_{\Omega} c\rho(\mathbf{x}) \phi_i(\mathbf{x}) T(\mathbf{x}, 0) d\Omega \quad (2.14)$$

である。境界上の熱流は、

$$\begin{aligned} q_{\Gamma}(\mathbf{x}, t) &= -\lambda(\mathbf{x}) \frac{\partial \dot{T}(\mathbf{x}, t)}{\partial n} + K_{\Gamma}(\mathbf{x}) T_{\Gamma}(\mathbf{x}, t) \\ &= \sum_{i=1}^m \left(-\lambda(\mathbf{x}) \frac{\partial \phi_i(\mathbf{x})}{\partial n} \dot{\bar{T}}_i(t) \right) + K_{\Gamma}(\mathbf{x}) T_{\Gamma}(\mathbf{x}, t) \end{aligned} \quad (2.15)$$

から求めることができる。 $K_{\Gamma}(\mathbf{x})$ は定常時の一様ポテンシャル条件より決定する。すなわち、式(2.12)で、定常時 $\dot{\bar{T}}_i(t) = 0$ 、境界条件を $T_{\Gamma}(\mathbf{x}, t) = 1$ と与えれば、

$$\bar{T}_i(t) = -\frac{1}{\alpha_i} \int_{\Gamma} \left(-\lambda(\mathbf{x}) \frac{\partial \phi_i(\mathbf{x})}{\partial n} \right) d\Gamma \quad (2.16)$$

であり、式(2.15)で $T_{\Gamma}(\mathbf{x}, t) = 1$ として、式(2.16)を代入し、熱流が0となることより、

$$K_{\Gamma}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^m \frac{1}{\alpha_i} \left(-\lambda(\mathbf{x}) \frac{\partial \phi_i(\mathbf{x})}{\partial n} \right) \int_{\Gamma} \left(-\lambda(\xi) \frac{\partial \phi_i(\xi)}{\partial n} \right) d\Gamma \quad (2.17)$$

を得る。

境界温度を現実の境界条件に即して与えるためには、後述の境界要素法と同様に境界が適当な方法で離散化されている必要がある。最も単純な方法としては、境界 Γ を離散化して $\Gamma = \Gamma_1 + \dots + \Gamma_{N_{\Gamma}}$ と表し、部分境界 Γ_j 上で温度を一定として $T_{\Gamma j}$ とする方法が考えられる²。すると、式(2.12)、式(2.15)から、

$$\dot{\bar{T}}_i(t) = \alpha_i \bar{T}_i(t) + \sum_{j=1}^{N_{\Gamma}} \int_{\Gamma_j} \left(-\lambda(\mathbf{x}) \frac{\partial \phi_i(\mathbf{x})}{\partial n} \right) d\Gamma T_{\Gamma j}(t) \quad (2.18)$$

$$q_{\Gamma i}(t) = \sum_{j=1}^m \int_{\Gamma_i} \left(-\lambda(\mathbf{x}) \frac{\partial \phi_j(\mathbf{x})}{\partial n} \right) d\Gamma \dot{\bar{T}}_j(t) + \int_{\Gamma_i} K_{\Gamma}(\mathbf{x}) d\Gamma T_{\Gamma i}(t) \quad (2.19)$$

²境界要素法という一定要素、ただし、熱流は部分境界の積分値をとる。

となる。ここで、

$$\dot{K}_{\Omega \Gamma_j} = \int_{\Gamma_j} \left(-\lambda(\mathbf{x}) \frac{\partial \phi_i(\mathbf{x})}{\partial n} \right) d\Gamma \quad (2.20)$$

$$K_{\Gamma_i} = \int_{\Gamma_i} K_{\Gamma}(\mathbf{x}) d\Gamma \quad (2.21)$$

において、 $\dot{\bar{T}}_{\Omega}(t) = [\dot{\bar{T}}_i(t)]^T, (i = 1, \dots, m), T_{\Gamma}(t) = [T_{\Gamma_i}(t)]^T, (i = 1, \dots, N_{\Gamma}), q_{\Gamma}(t) = [q_{\Gamma_i}(t)]^T, (i = 1, \dots, N_{\Gamma}), \dot{K}_{\Omega} = \text{diag}(\alpha_i), (i = 1, \dots, m), \dot{K}_{\Omega \Gamma} = (\dot{K}_{\Omega \Gamma_j}), (i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, N_{\Gamma}), K_{\Gamma} = \text{diag}(K_{\Gamma_i}), (i = 1, \dots, N_{\Gamma})$ とかくことにすれば、

$$\dot{\bar{T}}_{\Omega}(t) = \dot{K}_{\Omega} \bar{T}_{\Omega}(t) + \dot{K}_{\Omega \Gamma} T_{\Gamma}(t) \quad (2.22)$$

$$q_{\Gamma}(t) = \dot{K}_{\Omega \Gamma}^T \bar{T}_{\Omega}(t) + K_{\Gamma} T_{\Gamma}(t) \quad (2.23)$$

とまとめて表現することができる。 $K_{\Gamma} = \text{diag}(K_{\Gamma_i})$ は、 $\dot{K}_{\Omega \Gamma}^T \dot{K}_{\Omega}^{-1} \dot{K}_{\Omega \Gamma} = (X_{ij})$ において、

$$K_{\Gamma_i} = \sum_{j=1}^{N_{\Gamma}} X_{ij} \quad (2.24)$$

から求めても同じである。

固有関数展開法は、固有値と固有関数をみつけることさえできれば後はこのように簡単に計算することができる。しかし、固有関数を解析的に求めることができるのは一様媒体かつ直方体や球、円筒などの簡単な形状の場合に限られる。例えば直方体では Fourier 級数展開、球では Legendre 関数展開、円筒では Bessel 関数展開が用いられる。ここでは Dirichlet 境界の場合しか説明しなかったが、Neumann 境界や Robin 境界の場合もそれに対応した固有値と固有関数を用いればよい。また、無限・半無限領域に関しては固有値が連続固有値となるので級数和のかわりに積分を考えなければならない場合があるので付記しておく。

最も簡単な例として1次元の一様媒体の場合を考えてみる。1次元の場合は境界を離散化する必要がないので簡単である。 $c\rho(\mathbf{x}) = c\rho, \lambda(\mathbf{x}) = \lambda$ とし、境界条件を $T(0, t) = T_{\Gamma 1}(t), T(a, t) = T_{\Gamma 2}(t)$ と与える。固有値および固有関数は、

$$\alpha_i = -\frac{\lambda i^2 \pi^2}{c\rho a^2} \quad (2.25)$$

$$\phi_i(x) = \sqrt{\frac{2}{c\rho a}} \sin \frac{i\pi x}{a} \quad (2.26)$$

となる[147]。このとき境界上で、

$$-\lambda \frac{\partial \phi_i}{\partial n} \Big|_{x=0} = \lambda \sqrt{\frac{2}{c\rho a}} \frac{i\pi}{a} \quad (2.27)$$

$$-\lambda \frac{\partial \phi_i}{\partial n} \Big|_{x=a} = (-1)^{i-1} \lambda \sqrt{\frac{2}{c\rho a}} \frac{i\pi}{a} \quad (2.28)$$

であるので、式(2.12)は、

$$\dot{T}_i(t) = \alpha_i \bar{T}_i(t) + \lambda \sqrt{\frac{2}{c\rho a}} \frac{i\pi}{a} (T_{\Gamma 1} + (-1)^{i-1} T_{\Gamma 2}) \quad (2.29)$$

となる。これは簡単に解けて、

$$\bar{T}_i(t) = e^{\alpha_i t} \bar{T}_i(0) + \lambda \sqrt{\frac{2}{c\rho a}} \frac{i\pi}{a} \int_0^t e^{\alpha_i(t-\tau)} (T_{\Gamma 1}(\tau) + (-1)^{i-1} T_{\Gamma 2}(\tau)) d\tau \quad (2.30)$$

となる。 $\bar{T}_i(0)$ は固有関数の直交性より、

$$\bar{T}_i(0) = c\rho \int_0^a \phi_i(\xi) T(\xi, 0) d\xi = c\rho \sqrt{\frac{2}{c\rho a}} \int_0^a \sin \frac{i\pi \xi}{a} T(\xi, 0) d\xi \quad (2.31)$$

である。境界上の熱流は、

$$q_{\Gamma 1}(t) = \sum_{i=1}^m \lambda \sqrt{\frac{2}{c\rho a}} \frac{i\pi}{a} \bar{T}_i(t) + \left[\sum_{i=1}^m \frac{-2\lambda}{a} \{ (1 + (-1)^{i-1}) \} \right] T_{\Gamma 1}(t) \quad (2.32)$$

$$q_{\Gamma 2}(t) = \sum_{i=1}^m (-1)^{i-1} \lambda \sqrt{\frac{2}{c\rho a}} \frac{i\pi}{a} \bar{T}_i(t) + \left[\sum_{i=1}^m \frac{-2\lambda}{a} \{ (1 + (-1)^{i-1}) \} \right] T_{\Gamma 2}(t) \quad (2.33)$$

となる。しかし、境界熱流に関して言えば、上のままでは精度が悪い。例えば、 $T_{\Gamma 1}(t) = 1$ 、 $T_{\Gamma 2}(t) = 0$ の定常熱流は、

$$q_{\Gamma 1}(t) = -q_{\Gamma 2}(t) = -\frac{2\lambda}{a} (-1)^{m-1} \quad (2.34)$$

で、 m が奇数のとき $-2\lambda/a$ 、偶数のとき0となってしまう。正解 $-\lambda/a$ にするためには m を偶数にとり最後の項を1/2倍するという工夫が必要となる。すなわち、 m を偶数にとり、

$$\phi_m(x) = \sqrt{\frac{1}{c\rho a}} \sin \frac{m\pi x}{a} \quad (2.35)$$

としておく必要がある。固有関数展開法で境界熱流を精度よく求めるためには、このような工夫が必要な場合が多い。

直方体 ($0 < x < a_x, 0 < y < a_y, 0 < z < a_z$) で一様媒体の場合は、 $c\rho(x) = c\rho$ 、 $\lambda(x) = \lambda$ とし、境界条件を $T(x, t) = T_{\Gamma}(x, t)$ と与える。固有値および固有関数は、

$$\alpha_{i_x i_y i_z} = -\frac{\lambda}{c\rho} \left(\left(\frac{i_x \pi}{a_x} \right)^2 + \left(\frac{i_y \pi}{a_y} \right)^2 + \left(\frac{i_z \pi}{a_z} \right)^2 \right) \quad (2.36)$$

$$\phi_{i_x i_y i_z}(x) = \sqrt{\frac{8}{c\rho a_x a_y a_z}} \sin \frac{i_x \pi x}{a_x} \sin \frac{i_y \pi y}{a_y} \sin \frac{i_z \pi z}{a_z} \quad (2.37)$$

となる。

2.2.3 有限要素法

有限要素法 (FEM: Finite Element Method)[161] は解析対象となる領域を2次元の場合は3角形や4角形、3次元の場合は4面体や6面体などの要素に分割する。各要素内の関数値は要素の節点値の線形結合として表現される。元の偏微分方程式を弱形式の重みつき残差法により変形して扱うため、差分法に比べて間接的な手法であり直観性に欠けるが、分割の自由度が大きく境界形状が複雑でも無理なく近似でき、また、自然境界条件の処理が容易であるといった利点を有する。離散化により得られる行列は一般に不規則な疎行列となる。

有限要素法は、試行関数 $\phi_i(x)$ として、節点 i において1、他の節点において0で、節点 i を含む要素内においてのみ値をもつような関数を選ぶ。このとき、未知の時間関数 $c_i(t)$ は、節点 i における近似解 $\hat{T}_i(t) = \hat{T}(x_i, t)$ に他ならない。境界条件を満足するよう境界 Γ 上に N_{Γ} 個の節点を設けて、

$$\hat{T}(x, t) = \sum_{i=1}^m \phi_i(x) T_i(t) + \sum_{i=1}^{N_{\Gamma}} \phi_{\Gamma_i}(x) T_{\Gamma_i}(t) \quad (2.38)$$

のように近似関数を展開する。次に、重み関数 $\psi(x)$ として、試行関数と同じものを用いる Galerkin 法を適用する。すると、弱形式の式(2.5)より、 $\psi(x) = \phi_j(x) (j = 1, \dots, m)$ として、

$$C_{\Omega} \dot{T}(t) = K_{\Omega} T(t) + K_{\Gamma} T_{\Gamma}(t) \quad (2.39)$$

という連立方程式が得られる。また、境界熱流は、

$$q_{\Gamma}(t) = K_{\Omega \Gamma}^T T(t) + K_{\Gamma} T_{\Gamma}(t) - C_{\Gamma} \dot{T}_{\Gamma}(t) \quad (2.40)$$

となる。ただし、

$$C_{\Omega_{ij}} = \int_{\Omega} c\rho(x) \phi_i(x) \phi_j(x) d\Omega \quad (2.41)$$

$$C_{\Gamma_{ij}} = \int_{\Gamma} c\rho(x) \phi_{\Gamma_i}(x) \phi_{\Gamma_j}(x) d\Gamma \quad (2.42)$$

$$K_{\Omega_{ij}} = \int_{\Omega} \lambda(x) \nabla \phi_i(x) \cdot \nabla \phi_j(x) d\Omega \quad (2.43)$$

$$K_{\Omega \Gamma_{ij}} = \int_{\Omega} \lambda(x) \nabla \phi_i(x) \cdot \nabla \phi_{\Gamma_j}(x) d\Omega \quad (2.44)$$

$$K_{\Gamma_{ij}} = \int_{\Gamma} \lambda(x) \nabla \phi_{\Gamma_i}(x) \cdot \nabla \phi_{\Gamma_j}(x) d\Gamma \quad (2.45)$$

とし、 $T(t) = [T_i(t)]^T$ ($i = 1, \dots, m$)、 $T_{\Gamma}(t) = [T_{\Gamma_i}(t)]^T$ ($i = 1, \dots, N_{\Gamma}$)、 $q_{\Gamma}(t) = [q_{\Gamma_i}(t)]^T$ ($i = 1, \dots, N_{\Gamma}$)、 $K_{\Omega} = (K_{\Omega_{ij}})$ ($i, j = 1, \dots, m$)、 $C_{\Omega} = (C_{\Omega_{ij}})$ ($i, j = 1, \dots, m$)、 $K_{\Omega \Gamma} = (K_{\Omega \Gamma_{ij}})$ ($i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, N_{\Gamma}$)、 $K_{\Gamma} = (K_{\Gamma_{ij}})$ ($i, j = 1, \dots, N_{\Gamma}$) とおいた。 C_{Γ} の項は無視されることが多いが、あつたほうが精度が良い。

$\phi_i(\mathbf{x})$ は節点 i を含む要素内以外では 0 となる局所的な関数なので、積分が領域全体に及ぶことはない。要素ごとに積分を実行し最後に重ね合わせて全体行列を作成するのが通常の手順である。なお、熱容量行列 C_Ω の計算する際に用いる $\phi_i(\mathbf{x})$ と熱伝導行列を計算する際に用いる $\phi_i(\mathbf{x})$ が同一である必要はない。実際、熱容量行列はしばしば計算の効率化の観点からだけでなく精度の面からも対角化(熱容量の集中化)が推奨されるため、 i 節点のまわりで 1、他で 0 となるような $\phi_i(\mathbf{x})$ を用いることが多い。

2.2.4 差分法

差分法(FDM:Finite Difference Method)[134]は解析対象となる領域を格子状に分割し、格子の交点(格子点)上の値を未知数とした代数方程式系に問題を帰着させて近似解を求める手法である。未知関数の偏導関数は直接差分商に置き換えられ、もとの偏微分方程式は差分方程式に変換される。定式化が容易で誤差評価をおこないやすい、得られる行列が規則的疎行列で扱いやすいといった特長を有するが、複雑な形状の領域の場合に境界条件を近似するのが困難であるのが欠点とされる。これに対しては、境界に適合した曲線格子を生成する手法[148]などが提案されている。

差分法による定式化には、Taylor 展開法、コントロールボリューム法[119](CVM:Control Volume Method)、積分法、変分定式化など様々な方法が存在するが[141]、ここでは最も簡明な Taylor 展開法による定式化について説明する。

3次元領域 Ω を、 x 軸、 y 軸、 z 軸に平行にそれぞれ h の刻み幅で格子状に等間隔で分割する。格子点の座標を $x_i = x_0 + ih$ ($i = 1, \dots, m_x$)、 $y_j = y_0 + jh$ ($j = 1, \dots, m_y$)、 $z_k = z_0 + kh$ ($k = 1, \dots, m_z$) とし、 $T_{i,j,k}(t)$ を $T(x_i, y_j, z_k)(t)$ の近似値とする。

$T(x_{i\pm 1}, y_j, z_k)$ の x_i の周りでの Taylor 展開から格子点上での x に関する 2 階偏導関数の差分近似は次のように表される。

$$\left. \frac{\partial^2 T(t)}{\partial x^2} \right|_{i,j,k} = \frac{T_{i+1,j,k}(t) - 2T_{i,j,k}(t) + T_{i-1,j,k}(t)}{h^2} + O(h^2) \quad (2.46)$$

右辺第 2 項の $O(h^2)$ は h^2 に比例する程度の項で打ち切り誤差といい、実際の計算では無視される部分である。 y, z に関する 2 階偏導関数の差分近似も同様に表される。式(2.1)を式(2.46)を用いて差分近似すると次のようになる³。

$$\begin{aligned} c\rho_{i,j,k}\dot{T}_{i,j,k}(t) = & \frac{\lambda_{i,j,k}}{h^2} \{T_{i-1,j,k}(t) + T_{i+1,j,k}(t) + T_{i,j-1,k}(t) + T_{i,j+1,k}(t) \\ & + T_{i,j,k-1}(t) + T_{i,j,k+1}(t) - 6T_{i,j,k}(t)\} \end{aligned} \quad (2.47)$$

ただし、 $1 < i < m_x, 1 < j < m_y, 1 < k < m_z$ である。単位面積あたりの境界熱流は、例えば $i = 1, 1 < j < m_y, 1 < k < m_z$ の場合は、

$$\begin{aligned} q_{1,j,k} = & \frac{\lambda_{1,j,k}}{h^2} \left\{ T_{2,j,k}(t) + \frac{1}{2}T_{1,j-1,k}(t) + \frac{1}{2}T_{1,j+1,k}(t) \right. \\ & \left. + \frac{1}{2}T_{1,j,k-1}(t) + \frac{1}{2}T_{1,j,k+1}(t) - 3T_{1,j,k}(t) \right\} - \frac{c\rho_{1,j,k}}{2}\dot{T}_{1,j,k}(t) \end{aligned} \quad (2.48)$$

³重みつき残差法でいえば重み関数として Dirac のデルタ関数を用いる選点法を適用したことになる。

となる。 $1 < i < m_x, 1 < j < m_y, 1 < k < m_z$ の格子点を Ω 、それ以外を Γ に属するものとし、これらを適当に順序をつけてベクトル表示すれば、

$$C_\Omega \dot{T}_\Omega(t) = K_\Omega T_\Omega(t) + K_{\Omega\Gamma} T_\Gamma(t) \quad (2.49)$$

$$q_\Gamma(t) = K_{\Omega\Gamma}^T T_\Omega(t) + K_\Gamma T_\Gamma(t) - C_\Gamma \dot{T}_\Gamma(t) \quad (2.50)$$

と有限要素法と同様の形式となる。

2.2.5 境界要素法

境界要素法[12]は支配微分方程式を境界積分方程式に変換したのち、有限要素法と同様の離散化をおこない、問題を解く。差分法・有限要素法などの領域型解法と異なり、未知数が境界のみに現れるので扱う次元が次元減り要素分割の手間が減少する、無限・半無限領域の問題が精度よく計算できるといった利点を有するが、得られる行列が一般に密行列であり、行列の係数計算の計算量が多いといった問題点がある。基本的には線形問題に対して有効な手法だが、非線形問題に対しても適用範囲が広がっている。

熱伝導方程式を境界要素法を用いて解く方法としては、Laplace 変換による方法、空間全体に時間差分を適用する方法、時間依存の基本解を利用する方法、近似基本解を利用する方法(DRM: Dual Reciprocity Method, MRM: Multiple Reciprocity Method)などがある[154]。ここでは MRM について説明する。Laplace 変換による方法による方法は第 3 章で説明する。

逆形式の式(2.6)で物性値が一様で $c\rho, \lambda$ であるとすれば、

$$\begin{aligned} c\rho \int_\Omega \dot{T}(\mathbf{x}, t) \psi(\mathbf{x}) d\Omega - \lambda \int_\Omega \nabla^2 \psi(\mathbf{x}) \dot{T}(\mathbf{x}, t) d\Omega \\ - \lambda \int_\Gamma \frac{\partial \dot{T}_\Gamma(\mathbf{x}, t)}{\partial n} \psi(\mathbf{x}) d\Gamma + \lambda \int_\Gamma T_\Gamma(\mathbf{x}, t) \frac{\partial \psi(\mathbf{x})}{\partial n} d\Gamma = 0 \end{aligned} \quad (2.51)$$

と表現できる。重み関数 $\psi(\mathbf{x})$ として Laplace 方程式の基本解、すなわち、

$$\nabla^2 T_0^*(\mathbf{x}; \boldsymbol{\xi}) = -\delta(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}) \quad (2.52)$$

を満たす関数、

$$T_0^*(\mathbf{x}; \boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{4\pi r} \quad (2.53)$$

を用いる。ただし、 $r = |\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|$ である。 $\delta(\mathbf{x})$ は Dirac のデルタ関数であり、 $\boldsymbol{\xi}(\xi, \eta, \zeta)$ をソース点、 $\mathbf{x}(x, y, z)$ を観測点と呼ぶ。Dirac のデルタ関数の性質から、式(2.51)は、

$$\begin{aligned} c\rho \int_\Omega \dot{T}(\mathbf{x}, t) T_0^*(\mathbf{x}; \boldsymbol{\xi}) d\Omega + \gamma(\boldsymbol{\xi}) \dot{T}(\boldsymbol{\xi}, t) \\ - \lambda \int_\Gamma \frac{\partial \dot{T}_\Gamma(\mathbf{x}, t)}{\partial n} T_0^*(\mathbf{x}; \boldsymbol{\xi}) d\Gamma + \lambda \int_\Gamma T_\Gamma(\mathbf{x}, t) \frac{\partial T_0^*(\mathbf{x}; \boldsymbol{\xi})}{\partial n} d\Gamma = 0 \end{aligned} \quad (2.54)$$

となる。ただし、 $\gamma(\boldsymbol{\xi})$ は、ソース点 $\boldsymbol{\xi}$ が Ω 内にあるとき λ 、 Γ 上で境界が滑らかであれば $\lambda/2$ で一般的には $\lambda\alpha/(2\pi)$ (α は内角)である。式(2.54)の第 1 項の領域積分を D_0 とする

と, D_0 は,

$$\lambda \nabla^2 T_1^*(x; \xi) = c \rho T_0^*(x; \xi) \quad (2.55)$$

を満足する関数 T_1^* によって更に,

$$D_0 = \lambda \int_{\Gamma} T_1(x, t) \frac{\partial T_1^*(x; \xi)}{\partial n} d\Gamma - \lambda \int_{\Gamma} \frac{\partial \hat{T}_1(x, t)}{\partial n} T_1^*(x; \xi) d\Gamma + \int_{\Omega} \hat{T}(x, t) T_1^*(x; \xi) d\Omega \quad (2.56)$$

と変形できる. この作業を続けることにより,

$$\gamma(\xi) \hat{T}(\xi, t) - \sum_{m=0}^{\infty} \int_{\Gamma} \frac{\partial^m \hat{T}_1(x, t)}{\partial t^m} q_m^*(x; \xi) d\Gamma + \sum_{m=0}^{\infty} \int_{\Gamma} \frac{\partial^m \hat{q}_1(x, t)}{\partial t^m} T_m^*(x; \xi) d\Gamma = 0 \quad (2.57)$$

と, 境界上の積分のみで表現できる. ただし,

$$\hat{q}_1(x, t) = -\lambda \frac{\partial \hat{T}(x, t)}{\partial n} \quad (2.58)$$

$$q_m^*(x; \xi) = -\lambda \frac{\partial T_m^*(x; \xi)}{\partial n} \quad (2.59)$$

とおいた.

最も簡単な一定要素の場合を用いて式 (2.57) を離散化する. 境界 Γ を有限要素法と同様の手段で $\Gamma = \sum_i \Gamma_i$ と分割して, 要素 Γ_i の重心に節点 i を設け, 節点での近似関数及びその法線微分をそれぞれ $T_i(t) = \hat{T}_1(x_i, t)$, $q_i(t) = \hat{q}_1(x_i, t)$ とする. $T_i(t)$ により Γ 上での近似関数を表現する際, 要素内で $\hat{T}_1(x_i, t)$, $\hat{q}_1(x_i, t)$ を一定とするのが一定要素である. 式 (2.57) でソース点を節点 i にとると一定要素の場合, 境界は滑らかであるので $\gamma(\xi) = \lambda/2$ であり, 結局,

$$\sum_{m=0}^{\infty} H_m \frac{\partial^m T(t)}{\partial t^m} = \sum_{m=0}^{\infty} G_m \frac{\partial^m q(t)}{\partial t^m} \quad (2.60)$$

と表現できる. ただし, $T(t) = [T_i(t)]^T$, $q(t) = [q_i(t)]^T$, $H_m = (H_{m,ij})$, $G_m = (G_{m,ij})$ で,

$$H_{m,ij} = \frac{\lambda}{2} \delta_{0m} \delta_{ij} - \sum_{i=1}^N \int_{\Gamma_i} q_m^*(x_i; \xi_j) d\Gamma \quad (2.61)$$

$$G_{m,ij} = - \sum_{i=1}^N \int_{\Gamma_i} T_m^*(x_i; \xi_j) d\Gamma \quad (2.62)$$

である. 積分の計算は解析的に行うことが可能な場合もあるが, 一般的には数値積分による. $T(t)$, $q(t)$ を時間に関して差分近似すれば, 一般に ARMA(Auto Regressive Moving Average) 表現が得られ, 逐次的に計算することが可能となる.

2.3 時間領域の離散化

2.3.1 連続時間システム

2.3.1.1 連続時間システムの標準形

連続時間システムの標準形は, $x(t)$ を状態変数ベクトル, $u(t)$ を入力変数ベクトル, $y(t)$ を出力変数ベクトルとして,

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (2.63)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \quad (2.64)$$

と表現される. ここで, A , B , C , D はそれぞれ, システム行列, 入力行列, 出力行列, 直接伝送行列という.

また,

$$E\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (2.65)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \quad (2.66)$$

を中間標準形という. ここで, $x(t)$ は中間変数または内部変数と呼ばれるベクトルである. 式 (2.63), (2.64) を Laplace 変換した,

$$sX(s) = AX(s) + Bu(s) \quad (2.67)$$

$$Y(s) = CX(s) + Du(s) \quad (2.68)$$

より,

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D \quad (2.69)$$

で定義される $G(s)$ を用いて,

$$Y(s) = G(s)U(s) \quad (2.70)$$

と表現できる. この $G(s)$ を伝達関数行列という.

2.3.1.2 集中定数・連続時間システム

熱伝導方程式を空間領域で差分法・有限要素法などを用いて離散化した場合, 一般に,

$$C_{\Omega} \dot{T}_{\Omega}(t) = K_{\Omega} T_{\Omega}(t) + K_{\Omega\Gamma} T_{\Gamma}(t) \quad (2.71)$$

$$q_{\Gamma}(t) = K_{\Omega\Gamma}^T T_{\Omega}(t) + K_{\Gamma} T_{\Gamma}(t) - C_{\Gamma} \dot{T}_{\Gamma}(t) \quad (2.72)$$

と表現できたが, これは連続時間システムとみなすことができる. すなわち, 式 (2.71) をシステム方程式, 式 (2.72) を出力方程式とし, $T_{\Omega}(t)$ を状態変数ベクトル, $T_{\Gamma}(t)$, $q_{\Omega}(t)$ を入力ベクトル, $q_{\Gamma}(t)$ を出力変数ベクトルとすれば中間標準形になっていることがわかる.

式 (2.71), 式 (2.72) で, C_{Ω} , C_{Γ} は熱容量行列で, K_{Ω} , K_{Γ} は熱伝導行列である. 熱容量行列は対角化されているものとする. 熱伝導行列は対称行列となる. $q_{\Omega}(t)$ は内部発熱

量だが、建築壁体では内部発熱は通常考える必要はないため $q_{\Omega}(t)$ は0であることが多い。そうでないのは、放射暖房用にヒータが埋め込まれているようなケースである。また、表面境界層まで含んだシステムの場合、境界層は熱抵抗だけを考えるため対応する節点の熱容量は0であり、全ての境界が流体に接する場合(第3種境界条件)は C_{Γ} は0となる⁴。ただし、壁体表面までをシステムとした場合は C_{Γ} は一般に0とはならない。

式(2.71)は、 C_{Ω} が正則であれば、左から C_{Ω}^{-1} を乗ずることによって、

$$\dot{T}_{\Omega}(t) = C_{\Omega}^{-1} K_{\Omega} T_{\Omega}(t) + C_{\Omega}^{-1} K_{\Omega \Gamma} T_{\Gamma}(t) + C_{\Omega}^{-1} q_{\Omega}(t) \quad (2.73)$$

という、標準形($\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$)に等価変換できるが、熱容量をもたない節点を考えることもできるため、 C_{Ω} が正則であることは自明ではない(C_{Ω} は対角行列なので C_{Ω} が正則でないとは、対角要素に0が存在するということを意味する)。式(2.71)が一意解をもつ必要十分条件としては、

$$\det[sC_{\Omega} - K_{\Omega}] \neq 0 \quad (s \text{ について恒等的に } 0 \text{ の多項式にならない}) \quad (2.74)$$

が知られている。適切に離散化されていれば、この条件を満足するので、今後はこの条件が成立していることを前提にする。

出力方程式(2.72)をみると、集中定数システムでは、入力に $T_{\Gamma}(t)$ の微分 $\dot{T}_{\Gamma}(t)$ を含んだ形になり、結果が入力の将来を予測していることになるので物理的に不自然なシステムとなっていることがわかる。本来、熱伝導方程式の境界値問題では境界の温度が決まれば境界熱流が一意に決定でき、Dirichlet問題というわけだが、集中定数化によって境界(を代表する節点)が一般に熱容量をもってしまふことによってこの性質が失われたことになる。これは集中定数化による必然的な帰結であるが、もし、境界条件がRobin境界条件(第3種境界条件)の場合は $T_{\Gamma}(t)$ は周囲流体温度にとれ $C_{\Gamma} = 0$ となるので式(2.72)で $\dot{T}_{\Gamma}(t)$ は不要となり、入力変数から $\dot{T}_{\Gamma}(t)$ を消去することが可能になる。また、空間離散化方法によっては、表面境界に熱容量をもたない節点を考えることが可能であり、この場合も上記の問題は生じない。例えば、コントロールボリューム法で境界面に厚み0のコントロールボリュームを配した場合[119]がこれに相当する。実際は微分値を含む場合でも、このシステムをサブシステムとする全体システムを合成することによりこのような微分値を含む境界は内部境界となり、物理的不自然性は回避されることになる。

2.3.1.3 モード解析法

標準形をした式(2.73)から、 $T_{\Omega}(t)$ は、よく知られているように行列指数関数を用いて、

$$T_{\Omega}(t) = \exp(C_{\Omega}^{-1} K_{\Omega} t) T_{\Omega}(0) + \int_0^t \exp(C_{\Omega}^{-1} K_{\Omega}(t-\tau)) C_{\Omega}^{-1} (K_{\Omega \Gamma} T_{\Gamma}(\tau) + q_{\Omega}(\tau)) d\tau \quad (2.75)$$

⁴実際には空気の熱容量は0ではないが、計算上は0とみなすということである。

と解析的に解くことが可能である。行列指数関数を実際に計算する方法はいくつか存在するが、通常は $C_{\Omega}^{-1} K_{\Omega}$ の固有値解析を行い、これを相似な対角行列を用いて計算する。しかし、 $C_{\Omega}^{-1} K_{\Omega}$ は対称行列でないので、後に数値計算をするときに効率が悪くなるという問題がある。そこで、できる限り行列の対称性を保つように計算法を述べることにしたい。

式(2.71)において、 C_{Ω} 、 K_{Ω} は対称行列なので、 C_{Ω} が正則ならば、適当な合同変換 P によって、

$$P^T C_{\Omega} P = I \quad (2.76)$$

$$P^T K_{\Omega} P = \tilde{K}_{\Omega} \quad (2.77)$$

とすることができる。ただし、 \tilde{K}_{Ω} は対角行列である。 \tilde{K}_{Ω} 、 P を求める問題は一般化固有値問題といわれる。 \tilde{K}_{Ω} の対角成分(一般に正の実数)が小さい順に並べることによれば、 \tilde{K}_{Ω} 、 P は一意に定まる。 $P^{-1} = P^T C_{\Omega}$ より、

$$P^T K_{\Omega} P = P^T C_{\Omega} C_{\Omega}^{-1} K_{\Omega} P = P^{-1} C_{\Omega}^{-1} K_{\Omega} P = \tilde{K}_{\Omega} \quad (2.78)$$

であるから、 \tilde{K}_{Ω} は $C_{\Omega}^{-1} K_{\Omega}$ の固有値を対角成分としてもつことがわかる。また、 P が $C_{\Omega}^{-1} K_{\Omega}$ の固有ベクトルを並べた行列であることもわかる。

さて、式(2.71)の左から P^T を乗ずれば、

$$P^T C_{\Omega} \dot{T}_{\Omega}(t) = P^T K_{\Omega} P T_{\Omega}(t) + P^T K_{\Omega \Gamma} T_{\Gamma}(t) + P^T q_{\Omega}(t) \quad (2.79)$$

となる。ここで、

$$T_{\Omega}(t) = P \tilde{T}_{\Omega}(t) \quad (2.80)$$

となる $\tilde{T}_{\Omega}(t)$ を考えれば、

$$P^T C_{\Omega} P \dot{\tilde{T}}_{\Omega}(t) = P^T K_{\Omega} P \tilde{T}_{\Omega}(t) + P^T K_{\Omega \Gamma} T_{\Gamma}(t) + P^T q_{\Omega}(t) \quad (2.81)$$

より、

$$\dot{\tilde{T}}_{\Omega}(t) = \tilde{K}_{\Omega} \tilde{T}_{\Omega}(t) + P^T K_{\Omega \Gamma} T_{\Gamma}(t) + P^T q_{\Omega}(t) \quad (2.82)$$

となる。この式は $\tilde{T}_{\Omega}(t)$ に関して互いに独立な方程式系である。 $\tilde{T}_{\Omega}(t)$ はモード変数ベクトルで、各モードの生起割合を示している。式(2.82)は簡単に計算できて、

$$\tilde{T}_{\Omega}(t) = \exp(\tilde{K}_{\Omega} t) \tilde{T}_{\Omega}(0) + \int_0^t \exp(\tilde{K}_{\Omega}(t-\tau)) P^T (K_{\Omega \Gamma} T_{\Gamma}(\tau) + q_{\Omega}(\tau)) d\tau \quad (2.83)$$

となる。左から P を乗ずれば、 $T_{\Omega}(t) = P \tilde{T}_{\Omega}(t)$ であるので、

$$T_{\Omega}(t) = P \exp(\tilde{K}_{\Omega} t) P^T C_{\Omega} T_{\Omega}(0) + \int_0^t P \exp(\tilde{K}_{\Omega}(t-\tau)) P^T (K_{\Omega \Gamma} T_{\Gamma}(\tau) + q_{\Omega}(\tau)) d\tau \quad (2.84)$$

と陽に $T_{\Omega}(t)$ を求めることができる。

$$\Phi(t) = P \exp(\tilde{K}_{\Omega} t) P^T C_{\Omega} \quad (2.85)$$

は推移行列と呼ばれるもので、これを用いて表現すれば、

$$T_{\Omega}(t) = \Phi(t)T_{\Omega}(0) + \int_0^t \Phi(t-\tau)C_{\Omega}^{-1}(K_{\Omega\Gamma}T_{\Gamma}(\tau) + q_{\Omega}(\tau))d\tau \quad (2.86)$$

となる。式(2.84)と式(2.75)を比べれば、

$$\Phi(t) = \exp(C_{\Omega}^{-1}K_{\Omega}t) = P \exp(\tilde{K}_{\Omega}t)P^T C_{\Omega} \quad (2.87)$$

となっていることがわかる。 $\Phi(t)$ は、一般に対称行列ではない。

表面熱流は $q_{\Gamma}(t)$ は、 $T_{\Omega}(t)$ がわかれば、式(2.72)より求めることができる。また、式(2.83)のモード変数ベクトル $\tilde{T}_{\Omega}(t)$ を使って表現すれば、

$$q_{\Gamma}(t) = K_{\Omega\Gamma}^T P \tilde{T}_{\Omega}(t) + K_{\Gamma}T_{\Gamma}(t) - C_{\Gamma}\dot{T}_{\Gamma}(t) \quad (2.88)$$

である。

上で述べてきた解析的な方法はモード解析法と呼ばれ、音響・振動分野ではごく一般的なものだが、伝熱分野では計算法として知られてはいるものの[27][118]、係数行列の性質を調べる目的以外では、あまり普及しているとはいえない。音響・振動では熱伝導方程式に更に2階の時間微分項が加わった波動(型)方程式が扱われる(減衰を表す1階微分項は無視されることも多い)。このとき固有値はシステムの固有振動数を ω としたとき ω^2 で、固有モードは固有振動形を表すといった物理的な意味をもつが、熱伝導方程式の場合は特にそういった物理的な意味がない。更に、固有値解析は計算コストが高いという点が普及の枷となっている。振動解析では高次のモードが無視できる場合が多く、通常、固有値全てを求めることはしない。伝熱解析でも同様に採用次数を適切に設定することによってモード解析法も十分実用的な解法となりうるものと思われる。この点については、2.5で考察することにする。また、モード解析法は基本的に線形システムでしか有効でないが、非線形といっても大抵の場合は離散時間で時変係数の線形問題に置き換えて計算するのが普通であり、解析対象が狭まるわけではない。ただ、効率的に計算するためには時変部分の影響をできるだけ限定しておくことが重要で、システムの線形部分と非線形部分を分離・合成して扱うのが望ましい。離散時間システム化については2.3.2で、システムの合成については2.4で論じることにする。

2.3.1.4 伝達関数行列

式(2.71)を初期値を0としてLaplace変換した、

$$sC_{\Omega}T_{\Omega}(s) = K_{\Omega}T_{\Omega}(s) + K_{\Omega\Gamma}T_{\Gamma}(s) + q_{\Omega}(s) \quad (2.89)$$

より、

$$T_{\Omega}(s) = (sC_{\Omega} - K_{\Omega})^{-1}K_{\Omega\Gamma}T_{\Gamma}(s) + (sC_{\Omega} - K_{\Omega})^{-1}q_{\Omega}(s) \quad (2.90)$$

となる。 $(sC_{\Omega} - K_{\Omega})^{-1}$ は、推移行列 $\Phi(t)$ のLaplace変換と次式のような関係がある。

$$\Phi(s) = (sC_{\Omega} - K_{\Omega})^{-1}C_{\Omega} \quad (2.91)$$

2.3 時間領域の離散化

$\Phi(s)$ はレゾルベント(resolvent)と呼ばれる。また、式(2.72)をLaplace変換した、

$$q_{\Gamma}(s) = K_{\Omega\Gamma}^T T_{\Omega}(s) + (K_{\Gamma} - sC_{\Gamma})T_{\Gamma}(s) \quad (2.92)$$

に式(2.90)を代入すれば、

$$q_{\Gamma}(s) = (K_{\Omega\Gamma}^T(sC_{\Omega} - K_{\Omega})^{-1}K_{\Omega\Gamma} + K_{\Gamma} - sC_{\Gamma})T_{\Gamma}(s) + K_{\Omega\Gamma}^T(sC_{\Omega} - K_{\Omega})^{-1}q_{\Omega}(s) \quad (2.93)$$

となるので、境界温度 $T_{\Gamma}(s)$ に対する伝達関数行列を、

$$Y(s) = K_{\Omega\Gamma}^T(sC_{\Omega} - K_{\Omega})^{-1}K_{\Omega\Gamma} + K_{\Gamma} - sC_{\Gamma} \quad (2.94)$$

また、 $q_{\Omega}(s)$ に対する伝達関数行列を、

$$Y_q(s) = K_{\Omega\Gamma}^T(sC_{\Omega} - K_{\Omega})^{-1} \quad (2.95)$$

とおけば、

$$q_{\Gamma}(s) = Y(s)T_{\Gamma}(s) + Y_q(s)q_{\Omega}(s) \quad (2.96)$$

となる。 $q_{\Omega}(s)$ は内部発熱の無い通常の壁体であれば0なので、

$$q_{\Gamma}(s) = Y(s)T_{\Gamma}(s) \quad (2.97)$$

と表現できる場合が多い。そこで、 $Y(s)$ の性質について検討してみることにする。

$sC_{\Omega} - K_{\Omega}$ は C_{Ω} 、 K_{Ω} が対称行列であることから対称行列であり、下三角行列 L を用いて $sC_{\Omega} - K_{\Omega} = LL^T$ と分解できる(Cholesky分解)。よって、

$$K_{\Omega\Gamma}^T(sC_{\Omega} - K_{\Omega})^{-1}K_{\Omega\Gamma} = K_{\Omega\Gamma}^T(LL^T)^{-1}K_{\Omega\Gamma} = (L^{-1}K_{\Omega\Gamma})^T(L^{-1}K_{\Omega\Gamma}) \quad (2.98)$$

であるから、この行列は対称行列であり、 C_{Γ} 、 K_{Γ} も対称行列であることから $Y(s)$ も対称行列となる(すなわち相反性が成立する)。

形式的には、 $(sC_{\Omega} - K_{\Omega})^{-1}$ は、

$$(sC_{\Omega} - K_{\Omega})^{-1} = \frac{1}{\det(sC_{\Omega} - K_{\Omega})} \text{adj}(sC_{\Omega} - K_{\Omega}) \quad (2.99)$$

とCramérの公式から求めることができる。ただし、 $\text{adj}(sC_{\Omega} - K_{\Omega})$ は、 $sC_{\Omega} - K_{\Omega}$ の余因子行列である。行列の次元を m とすれば、

$$\det(sC_{\Omega} - K_{\Omega}) = a_0 + a_1s + \cdots + a_ms^m \quad (2.100)$$

$$\text{adj}(sC_{\Omega} - K_{\Omega}) = A_0 + A_1s + \cdots + A_{m-1}s^{m-1} \quad (2.101)$$

と表すことができるのは明らかである。 A_i は前の議論より対称行列であることもわかる。 a_i 、 A_i を計算する実用的な方法としてはFaddeevの漸化式による方法が知られている[23]。 a_i 、 A_i が求められていれば、伝達関数行列 $Y(s)$ は、

$$Y(s) = \frac{B_0 + B_1s + \cdots + B_{m-1}s^{m-1}}{a_0 + a_1s + \cdots + a_ms^m} + K_{\Gamma} - sC_{\Gamma} \quad (2.102)$$

となる。ただし、

$$B_k = K_{\Omega\Gamma}^T A_k K_{\Omega\Gamma} \quad (2.103)$$

とおいた、式(2.102)より、 $Y(s)$ の各要素は s の有理関数となることがわかる。 $K_{\Omega\Gamma}^T(sC_{\Omega} - K_{\Omega})^{-1}K_{\Omega\Gamma}$ の各要素は、真にプロパーな有理関数であり、これから K_{Γ} を加えた $K_{\Omega\Gamma}^T(sC_{\Omega} - K_{\Omega})^{-1}K_{\Omega\Gamma} + K_{\Gamma}$ の各要素はプロパーな有理関数⁵であるが、 sC_{Γ} の項が加わることによって $Y(s)$ の各要素はプロパーでなくなる。これは、入力微分が出力に現れていることを意味するが、このことはもとの式(2.72)からも明らかである。

$(sC_{\Omega} - K_{\Omega})^{-1}$ は、

$$(sC_{\Omega} - K_{\Omega})^{-1} = C_{\Omega}^{-1}s^{-1} + C_{\Omega}^{-1}K_{\Omega}C_{\Omega}^{-1}s^{-2} + \dots \quad (2.104)$$

と展開することができるので、伝達関数行列 $Y(s)$ は、

$$Y(s) = -sC_{\Gamma} + K_{\Gamma} + B_1s^{-1} + B_2s^{-2} + \dots \quad (2.105)$$

ただし、

$$B_k = K_{\Omega\Gamma}^T C_{\Omega}^{-1} (K_{\Omega} C_{\Omega}^{-1})^k K_{\Omega\Gamma} \quad (2.106)$$

とも表現できる。このとき、 B_k をMarkovパラメータと呼ぶ。

ところで、2.3.1.3で触れたように、 $sC_{\Omega} + K_{\Omega}$ は、

$$P^T C_{\Omega} P = I \quad (2.107)$$

$$P^T K_{\Omega} P = \tilde{K}_{\Omega} = \text{diag}(\alpha_i) \quad (2.108)$$

とする P が存在し、

$$P^T(sC_{\Omega} - K_{\Omega})P = sI - \tilde{K}_{\Omega} \quad (2.109)$$

と $s - \alpha_i$ を対角要素としてもつ対角行列に変換できる。よって、

$$sC_{\Omega} - K_{\Omega} = P^{-T}(sI - \tilde{K}_{\Omega})P^{-1} \quad (2.110)$$

より、

$$\begin{aligned} K_{\Omega\Gamma}^T(sC_{\Omega} - K_{\Omega})^{-1}K_{\Omega\Gamma} &= K_{\Omega\Gamma}^T(P^{-T}(sI - \tilde{K}_{\Omega})P^{-1})^{-1}K_{\Omega\Gamma} \\ &= (P^T K_{\Omega\Gamma})^T(sI - \tilde{K}_{\Omega})^{-1}(P^T K_{\Omega\Gamma}) \end{aligned} \quad (2.111)$$

となる。従って、

$$P^T K_{\Omega\Gamma} = \tilde{K}_{\Omega\Gamma} = (\tilde{K}_{\Omega\Gamma ij}) \quad (2.112)$$

とすれば、伝達関数行列 $Y(s)$ は、

$$Y(s) = \tilde{K}_{\Omega\Gamma}^T(sI - \tilde{K}_{\Omega})^{-1}\tilde{K}_{\Omega\Gamma} + K_{\Gamma} - sC_{\Gamma} \quad (2.113)$$

⁵分母の次数のほうが分子の次数をこえることがない有理関数をプロパー (proper)、分母の次数のほうが分子の次数より大きい有理関数を真にプロパー (strictly proper) という。

となる。 $\tilde{K}_{\Omega\Gamma}$ を行ベクトルに分解して、

$$\tilde{K}_{\Omega\Gamma} = \begin{bmatrix} \tilde{K}_{\Omega\Gamma 1} \\ \tilde{K}_{\Omega\Gamma 2} \\ \vdots \\ \tilde{K}_{\Omega\Gamma k} \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (2.114)$$

とし、

$$A_k = \tilde{K}_{\Omega\Gamma k}^T \tilde{K}_{\Omega\Gamma k} \quad (2.115)$$

とおけば、

$$Y(s) = \sum_k \frac{A_k}{s - \alpha_k} + K_{\Gamma} - sC_{\Gamma} \quad (2.116)$$

と部分分数展開した形で表現できる。 $Y(s)$ をLaplace 逆変換すれば、

$$Y(t) = \sum_k A_k \exp(\alpha_k t) + K_{\Gamma} \delta(t) - C_{\Gamma} \frac{d}{dt} \quad (2.117)$$

となり、インパルス応答行列 $Y(t)$ を陽に求めることができる。ただし、 $\delta(t)$ は、Diracの δ 関数である。

以上述べたような行列の等価変換による固有値解析方法の他にも、 $Y(s)$ を計算する方法はいくつか存在するが[46]、ここでは省略する。

次に、伝達関数行列 $Y(s)$ を s を数値として与えて計算する場合について述べる。 $(sC_{\Omega} - K_{\Omega})^{-1}$ という逆行列がでてくるが、これを直接求める必要はほとんどない。直接法によって求める場合は、 $sC_{\Omega} - K_{\Omega} = LL^T$ のCholesky分解もしくは $sC_{\Omega} - K_{\Omega} = LDL^T$ (D は対角行列)の修正Cholesky分解を行い、 $X = L^{-1}K_{\Omega\Gamma}$ を計算して(L^{-1} を乗じることを前進消去という)、 $X^T X$ もしくは $X^T D^{-1} X$ を計算すればよい。SOR法、ICCG法などの反復法による場合でも、 $(sC_{\Omega} - K_{\Omega})X = K_{\Omega\Gamma}$ を解いて X を求めてから、 $K_{\Omega\Gamma}^T X$ を計算すればよい。

周波数伝達関数行列は、 ω を角振動数として、 $s = i\omega$ ($i = \sqrt{-1}$)と置き換えるだけなのでここでの議論はすべて周波数伝達関数行列を求める場合にも成立する。

2.3.2 離散時間システム

さて、 $T_{\Gamma}(t)$ 、 $q_{\Omega}(t)$ を境界条件として与える場合、連続値として与えられる場合は稀であり、離散値として与えられるのが普通である。また、計算機による処理では状態変数や出力変数も含めて離散値として扱わざるを得ない、すなわち、離散時間システムを考える必要がある。

2.3.2.1 離散時間システムの標準形

離散時間システムの標準形は, $x(n)$ を状態変数ベクトル, $u(n)$ を入力変数ベクトル, $y(n)$ を出力変数ベクトルとして,

$$x(n) = Ax(n-1) + Bu(n-1) \quad (2.118)$$

$$y(n) = Cx(n) + Du(n) \quad (2.119)$$

と表現される。ここで, A, B, C, D はそれぞれ, システム行列, 入力行列, 出力行列, 直接伝送行列という。

式 (2.118), (2.119) を z 変換した,

$$x(z) = z^{-1}Ax(z) + z^{-1}Bu(z) \quad (2.120)$$

$$y(z) = Cx(z) + Du(z) \quad (2.121)$$

より,

$$G(z) = C(zI - A)^{-1}B + D \quad (2.122)$$

で定義される $G(z)$ を用いて,

$$y(z) = G(z)u(z) \quad (2.123)$$

と表現できる。この $G(z)$ をパルス伝達関数行列という。

2.3.2.2 解析的時間積分

表現の煩雑を避けるため, $q_\Omega(t) = 0$ として, 入力としては $T_\Gamma(t)$ のみを考えることにする。すなわち,

$$C_\Omega \dot{T}_\Omega(t) = K_\Omega T_\Omega(t) + K_{\Omega\Gamma} T_\Gamma(t) \quad (2.124)$$

$$q_\Gamma(t) = K_{\Omega\Gamma}^T T_\Omega(t) + K_\Gamma T_\Gamma(t) - C_\Gamma \dot{T}_\Gamma(t) \quad (2.125)$$

というシステムのみを考えることにする。

式 (2.83) より, $\dot{T}_\Omega(n\Delta t)$ は $\dot{T}_\Omega((n-1)\Delta t)$ を使って,

$$\dot{T}_\Omega(n\Delta t) = \exp(\dot{K}_\Omega \Delta t) \dot{T}_\Omega((n-1)\Delta t) + \int_{(n-1)\Delta t}^{n\Delta t} \exp(\dot{K}_\Omega(n\Delta t - \tau)) P^T K_{\Omega\Gamma} T_\Gamma(\tau) d\tau \quad (2.126)$$

と表現できる。ここで, 入力 $T_\Gamma(t)$ に関して $T_\Gamma((n-1)\Delta t)$ から $T_\Gamma(n\Delta t)$ の間の線形変化, すなわち,

$$T_\Gamma((n-1)\Delta t + \theta\Delta t) = (1-\theta)T_\Gamma((n-1)\Delta t) + \theta T_\Gamma(n\Delta t) \quad (2.127)$$

を仮定する。ただし, $0 \leq \theta \leq 1$ である。これは, サンプルホールドとして, (2 等辺)3 角波ホールドを採用したことと同じである。

ここで, 離散時間 $0, \Delta t, 2\Delta t, \dots, n\Delta t$ における $T(0), T(\Delta t), T(2\Delta t), \dots, T(n\Delta t)$ の値のみに注目し, 簡単のため, Δt を省略して, $T(0), T(1), T(2), \dots, T(n)$ と記すことにする。すると,

$$\begin{aligned} \dot{T}_\Omega(n) &= \exp(\dot{K}_\Omega \Delta t) \dot{T}_\Omega(n-1) \\ &\quad + \int_0^1 \exp(\dot{K}_\Omega(1-\theta)\Delta t) P^T K_{\Omega\Gamma} ((1-\theta)T_\Gamma(n-1) + \theta T_\Gamma(n)) \Delta t d\theta \end{aligned} \quad (2.128)$$

より,

$$\dot{T}_\Omega(n) = R \dot{T}_\Omega(n-1) + R_1 P^T K_{\Omega\Gamma} T_\Gamma(n-1) + R_2 P^T K_{\Omega\Gamma} T_\Gamma(n) \quad (2.129)$$

ただし, R, R_1, R_2 はすべて対角行列で,

$$\begin{aligned} R &= \exp(\dot{K}_\Omega \Delta t) \\ &= \text{diag}(\exp(\alpha_i \Delta t)) \\ R_1 &= \int_0^1 \exp(\dot{K}_\Omega(1-\theta)\Delta t) (1-\theta) \Delta t d\theta \\ &= \frac{1}{\Delta t} \dot{K}_\Omega^{-2} (I - R + \dot{K}_\Omega R \Delta t) \\ &= \text{diag}\left(\frac{1 - \exp(\alpha_i \Delta t) + \alpha_i \Delta t \exp(\alpha_i \Delta t)}{\alpha_i^2 \Delta t}\right) \end{aligned} \quad (2.130)$$

$$\begin{aligned} R_2 &= \int_0^1 \exp(\dot{K}_\Omega(1-\theta)\Delta t) \theta \Delta t d\theta \\ &= \frac{1}{\Delta t} \dot{K}_\Omega^{-2} (-I + R - \dot{K}_\Omega \Delta t) \\ &= \text{diag}\left(\frac{-1 + \exp(\alpha_i \Delta t) - \alpha_i \Delta t}{\alpha_i^2 \Delta t}\right) \end{aligned} \quad (2.131)$$

となる。 α_i が負の実数であることから, $|\exp(\alpha_i \Delta t)| < 1$ なのでこの計算式は安定である。また, $\exp(\alpha_i \Delta t) > 0$ より, 振動が発生することもないこともわかる。

式 (2.129) のままでは, $T_\Gamma(n)$ を含むので, 右辺 2 項までを

$$\dot{T}_\Omega'(n) = R \dot{T}_\Omega(n-1) + R_1 P^T K_{\Omega\Gamma} T_\Gamma(n-1) \quad (2.132)$$

とおいて新たな状態変数ベクトルとする。このとき,

$$\dot{T}_\Omega'(n) = R \dot{T}_\Omega'(n-1) + R_3 P^T K_{\Omega\Gamma} T_\Gamma(n-1) \quad (2.133)$$

$$\dot{T}_\Omega(n) = \dot{T}_\Omega'(n) + R_2 P^T K_{\Omega\Gamma} T_\Gamma(n) \quad (2.134)$$

ただし, R_3 も対角行列で,

$$R_3 = R_1 + R R_2$$

$$= \frac{1}{\Delta t} \tilde{K}_\Omega^{-2} (I - R)^2 \\ = \text{diag} \left(\frac{(1 - \exp(\alpha_i \Delta t))^2}{\alpha_i^2 \Delta t} \right) \quad (2.135)$$

である。表面熱流ベクトルは、式(2.127)を t で微分すれば、

$$\dot{T}_\Gamma(t) = -\frac{1}{\Delta t} T_\Gamma(n-1) + \frac{1}{\Delta t} T_\Gamma(n) \quad (2.136)$$

であるから⁶,

$$q_\Gamma(n) = K_{\Omega\Gamma}^T P \dot{T}_\Omega(n) + K_\Gamma T_\Gamma(n) - C_\Gamma \dot{T}_\Gamma(n) \\ = K_{\Omega\Gamma}^T P \dot{T}_\Omega'(n) + \frac{1}{\Delta t} C_\Gamma T_\Gamma(n-1) \\ + \left(K_{\Omega\Gamma}^T P R_2 P^T K_{\Omega\Gamma} + K_\Gamma - \frac{1}{\Delta t} C_\Gamma \right) T_\Gamma(n) \quad (2.137)$$

となる。

$$P^T K_{\Omega\Gamma} = \tilde{K}_{\Omega\Gamma} \quad (2.138)$$

において整理すれば、モード変数ベクトル $\tilde{T}_\Omega(n)$ を用いたとき、

$$\tilde{T}_\Omega'(n) = R \tilde{T}_\Omega'(n-1) + R_3 \tilde{K}_{\Omega\Gamma} T_\Gamma(n-1) \quad (2.139)$$

$$q_\Gamma(n) = \tilde{K}_{\Omega\Gamma}^T \tilde{T}_\Omega'(n) + \frac{1}{\Delta t} C_\Gamma T_\Gamma(n-1) \\ + \left(\tilde{K}_{\Omega\Gamma}^T R_2 \tilde{K}_{\Omega\Gamma} + K_\Gamma - \frac{1}{\Delta t} C_\Gamma \right) T_\Gamma(n) \quad (2.140)$$

という表現が得られる。なお、領域内部の温度 $T_\Omega(n)$ が必要な場合は、

$$T_\Omega(n) = P \tilde{T}_\Omega(n) \\ = P \left(\tilde{T}_\Omega'(n) + R_2 \tilde{K}_{\Omega\Gamma} T_\Gamma(n) \right) \quad (2.141)$$

の関係から求めることが可能である。

モード変数ベクトル $\tilde{T}_\Omega(n)$ を陽に用いずに、

$$T_\Omega(n) = P R P^T C_\Omega T_\Omega(n-1) + P R_1 P^T K_{\Omega\Gamma} T_\Gamma(n-1) + P R_2 P^T K_{\Omega\Gamma} T_\Gamma(n) \quad (2.142)$$

から、やはり、右辺第2項までを $T_\Omega'(n)$ とにおいて、

$$T_\Omega'(n) = P R P^T C_\Omega T_\Omega'(n-1) + P R_3 P^T K_{\Omega\Gamma} T_\Gamma(n-1) \quad (2.143)$$

$$q_\Gamma(n) = K_{\Omega\Gamma}^T T_\Omega'(n) + \frac{1}{\Delta t} C_\Gamma T_\Gamma(n-1) \\ + \left(K_{\Omega\Gamma}^T P R_2 P^T K_{\Omega\Gamma} + K_\Gamma - \frac{1}{\Delta t} C_\Gamma \right) T_\Gamma(n) \quad (2.144)$$

⁶Euler 近似したことになる。

としてもよい。 $T_\Omega(n)$ を求めるのなら、

$$T_\Omega'(n) = P R P^T C_\Omega T_\Omega(n-1) + P R_1 P^T K_{\Omega\Gamma} T_\Gamma(n-1) \quad (2.145)$$

$$q_\Gamma(n) = K_{\Omega\Gamma}^T T_\Omega'(n) + \frac{1}{\Delta t} C_\Gamma T_\Gamma(n-1) \\ + \left(K_{\Omega\Gamma}^T P R_2 P^T K_{\Omega\Gamma} + K_\Gamma - \frac{1}{\Delta t} C_\Gamma \right) T_\Gamma(n) \quad (2.146)$$

$$T_\Omega(n) = T_\Omega'(n) + P R_2 P^T K_{\Omega\Gamma} T_\Gamma(n) \quad (2.147)$$

と計算しても同じことである。

重要なのは、離散時間システムの標準形として表現するために、 $T_\Omega(n)$ を式(2.142)から直接計算せずに2段階にわけて計算していることで、これは実際に $T_\Gamma(n)$ が境界条件として既知であれば無駄であるが、 $T_\Gamma(n)$ が他のシステムとの関係において求まるような場合は、このように $n-1$ ステップの段階で既知の熱流を分離しておいたほうが後々都合がよいのである。直接伝送行列、

$$Y = K_{\Omega\Gamma}^T P R_2 P^T K_{\Omega\Gamma} + K_\Gamma - \frac{1}{\Delta t} C_\Gamma \quad (2.148)$$

は、内部の状態表現によらず一意に定まる。また、

$$\bar{q}_\Gamma(n) = K_{\Omega\Gamma}^T P \tilde{T}_\Omega'(n) + \frac{1}{\Delta t} C_\Gamma T_\Gamma(n-1) = K_{\Omega\Gamma}^T T_\Omega'(n) + \frac{1}{\Delta t} C_\Gamma T_\Gamma(n-1) \quad (2.149)$$

は、領域内部および境界節点の蓄熱による項であり、これらの記号を用いれば、

$$q_\Gamma(n) = \bar{q}_\Gamma(n) + Y T_\Gamma(n) \quad (2.150)$$

と表現できる。

さて、実際に数値計算を行うことを考えると、解析的に時間積分を行う方法は、固有値解析に多大な計算コストがかかること以外にも P が密行列であるなどの問題があり、とても大規模な数値計算を行うのに適しているとはいえない。建築伝熱分野では、上記の方法とはほぼ同じ方法で計算を行っているものもあるが[118]、普及しているとはいえない。なお、 $P R P^T$ 、 $P R_1 P^T$ など $P \tilde{R} P^T$ (\tilde{R} は対角行列で $\tilde{R} = \text{diag}(r_i)$)の形式をした行列の計算が多くでてくるが、 P を、

$$P = [P_1 \ P_2 \ \cdots \ P_k \ \cdots] \quad (2.151)$$

と列ベクトルに分解すれば、

$$P \tilde{R} P^T = \sum_k P_k P_k^T r_k \quad (2.152)$$

ともかける。ここで、

$$\tilde{B}_k = P_k P_k^T \quad (2.153)$$

とおけば、

$$P \tilde{R} P^T = \sum_k \tilde{B}_k r_k \quad (2.154)$$

とも表現できる。これは導出方法は異なるが、奥山の主張する射影分解による方法 [118] に他ならない ($\tilde{B}_k C_\Omega$ が射影子になる、 $P^{-1} = P^T C_\Omega$ から)。ただ $P \tilde{R} P^T$ を計算することだけが目的であればこれを直接計算すればよいのであって、 \tilde{B}_k を計算する分だけ余計な記憶容量と計算が必要になることを考えれば、効率的な計算法とはいえない。

ここでは温度の線形変化を仮定した場合の、すなわち (2 等辺) 3 角波ホールドを採用した場合の離散時間システム化について説明したが、温度の階段状の変化 (0 次ホールド) を仮定して導けは違った離散時間システムが得られる。この他にも温度変化の仮定の仕方によって種々の離散時間システムが得ることができる。

2.3.2.3 直接時間積分

前項では、境界条件の線形変化を仮定するなどして、連続時間システムから離散時間システムへ変換したが、システム変数の $T_\Omega(t)$ にも同様の仮定を設けることによって、解析的に時間積分することなく離散時間システム化することができる。

$$C_\Omega \dot{T}_\Omega(t) = K_\Omega T_\Omega(t) + K_{\Omega\Gamma} T_\Gamma(t) \quad (2.155)$$

$$q_\Gamma(t) = K_{\Omega\Gamma}^T T_\Omega(t) + K_\Gamma T_\Gamma(t) - C_\Gamma \dot{T}_\Gamma(t) \quad (2.156)$$

というシステムで、

$$T_\Omega((n-1) + \theta) = (1 - \theta) T_\Omega(n-1) + \theta T_\Omega(n) \quad (2.157)$$

$$T_\Gamma((n-1) + \theta) = (1 - \theta) T_\Gamma(n-1) + \theta T_\Gamma(n) \quad (2.158)$$

と温度の線形変化を仮定すると ($0 \leq \theta \leq 1$)、

$$\dot{T}_\Omega(t) = -\frac{1}{\Delta t} T_\Omega(n-1) + \frac{1}{\Delta t} T_\Omega(n) \quad (2.159)$$

$$\dot{T}_\Gamma(t) = -\frac{1}{\Delta t} T_\Gamma(n-1) + \frac{1}{\Delta t} T_\Gamma(n) \quad (2.160)$$

であるから、

$$\left(\frac{1}{\Delta t} C_\Omega - \theta K_\Omega \right) T_\Omega(n) = \left(\frac{1}{\Delta t} C_\Omega + (1 - \theta) K_\Omega \right) T_\Omega(n-1) + (1 - \theta) K_{\Omega\Gamma} T_\Gamma(n-1) + \theta K_{\Omega\Gamma} T_\Gamma(n) \quad (2.161)$$

$$q_\Gamma(n) = K_{\Omega\Gamma}^T T_\Omega(n) + \frac{1}{\Delta t} C_\Gamma T_\Gamma(n-1) + \left(K_\Gamma - \frac{1}{\Delta t} C_\Gamma \right) T_\Gamma(n) \quad (2.162)$$

となる。これは著明な時間差分公式で、 θ のとりかたによって、すなわち、どの時点での熱量バランスをとるかによって⁷、 $\theta = 0$ のとき、前進差分 (Euler) 法、 $\theta = 1$ のとき、後退差

⁷ 時間に関して選点的条件を課していることに注意。

分法、 $\theta = 1/2$ のときは、Crank-Nicholson 法という名称がついている⁸、 $n-1$ から n ステップの間 ($0 \leq \theta \leq 1$) で重み関数を 1 として積分すれば、Crank-Nicholson 法に等しくなる。更に、温度変化や重み関数の仮定によって多くの計算式を導くことが可能で、実際に提案されているがここでは省略する。また、 n 、 $n-1$ ステップの値だけでなく $n-2$ ステップなどの値も利用した高次の時間差分スキームも数多く提案されており多段スキームと総称される⁹が、これらの説明も省略する。

さて、 $T_\Omega(n)$ を前節と同じく $T_\Gamma(n)$ に依存する部分とそうでない $n-1$ ステップで既知の部分にわけて表現することを考える。

$$K_1 = \frac{1}{\Delta t} C_\Omega - \theta K_\Omega \quad (2.163)$$

$$K_2 = \frac{1}{\Delta t} C_\Omega + (1 - \theta) K_\Omega \quad (2.164)$$

とおけば、

$$T_\Omega(n) = T_\Omega'(n) + \theta K_1^{-1} K_{\Omega\Gamma} T_\Gamma(n) \quad (2.165)$$

$$T_\Omega'(n) = K_1^{-1} K_2 T_\Omega(n-1) + (1 - \theta) K_1^{-1} K_{\Omega\Gamma} T_\Gamma(n-1) \\ = K_1^{-1} K_2 T_\Omega'(n-1) + K_1^{-1} \left(\theta K_2 K_1^{-1} + (1 - \theta) I \right) K_{\Omega\Gamma} T_\Gamma(n-1) \quad (2.166)$$

$$q_\Gamma(n) = K_{\Omega\Gamma}^T T_\Omega'(n) + \frac{1}{\Delta t} C_\Gamma T_\Gamma(n-1) \\ + \left(\theta K_{\Omega\Gamma}^T K_1^{-1} K_{\Omega\Gamma} + K_\Gamma - \frac{1}{\Delta t} C_\Gamma \right) T_\Gamma(n) \quad (2.167)$$

と表すことができる。ここで、

$$\bar{q}_\Gamma(n) = K_{\Omega\Gamma}^T T_\Omega'(n) + \frac{1}{\Delta t} C_\Gamma T_\Gamma(n-1) \quad (2.168)$$

$$Y = \theta K_{\Omega\Gamma}^T K_1^{-1} K_{\Omega\Gamma} + K_\Gamma - \frac{1}{\Delta t} C_\Gamma \quad (2.169)$$

とおけば、式 (2.167) は、

$$q_\Gamma(n) = \bar{q}_\Gamma(n) + Y T_\Gamma(n) \quad (2.170)$$

と解析的に積分した場合と同様の形式となる。

伝達関数行列の部分でも述べたが、実際に計算するときには、 $K_1^{-1} = (C_\Omega / \Delta t - \theta K_\Omega)^{-1}$ という逆行列を陽に計算する必要はまったくないことに注意する。

ここで、スキームの安定性について簡単に述べておく、 $\theta = 0$ の前進差分は、 C_Ω が対角行列ならば行列を解かず済むため計算は極めて容易であるが、安定なスキームとするための Δt の制限が最も厳しいことはよく知られている。前項で用いた合同変換 P によって、式 (2.161) は、

$$\left(\frac{1}{\Delta t} I - \theta \tilde{K}_\Omega \right) \tilde{T}_\Omega(n) = \left(\frac{1}{\Delta t} I + (1 - \theta) \tilde{K}_\Omega \right) \tilde{T}_\Omega(n-1) \\ + (1 - \theta) P K_{\Omega\Gamma} T_\Gamma(n-1) + \theta P K_{\Omega\Gamma} T_\Gamma(n) \quad (2.171)$$

⁸ 一般には Wilson の θ 法と呼ばれる。

⁹ 対して、 n 、 $n-1$ ステップの値だけを利用する方法を単段スキームという。

と変換される。これは、 $\tilde{T}_\Omega(n)$ に関して独立な代数方程式であり、 \tilde{K}_Ω の対角要素 α_i はすべて負の実数である。これより、モード i について、

$$\left| \frac{1 + (1 - \theta)\alpha_i \Delta t}{1 - \theta\alpha_i \Delta t} \right| < 1 \quad (2.172)$$

が成立していれば、そのモードについて安定であることがわかる。 $\theta \geq 1/2$ であればこの式はつねに満足される。 $0 \leq \theta < 1/2$ のときは、

$$\Delta t < -\frac{2}{\alpha_i(1 - 2\theta)} \quad (2.173)$$

の条件つき安定である。振動しない条件は更に厳しく、

$$\frac{1 + (1 - \theta)\alpha_i \Delta t}{1 - \theta\alpha_i \Delta t} > 0 \quad (2.174)$$

で、 $\theta = 1$ の後退差分の場合は常に振動しないが、 $0 \leq \theta < 1$ の場合は、

$$\Delta t < -\frac{1}{\alpha_i(1 - \theta)} \quad (2.175)$$

が振動解を発生させない条件となる。 $0 \leq \theta < 1/2$ のときは、システムの最大固有値 (絶対値が最大の固有値) から式 (2.173) で決まる Δt より大きい Δt を用いると不安定で必ず発散する。また、 $0 < \theta < 1$ の場合、すなわち後退差分以外では、システムの最大固有値から式 (2.175) で決まる Δt より大きい Δt を用いると振動解が発生する。しかし、高次のモードで発生する振動は速やかに減衰するので、ある程度許容できる場合が多く、実際の計算では、入力条件との兼ね合いで Δt を決定するのが普通である。

システムの固有値解析を行わなくても、システムの最大固有値の上界であれば簡単に求めることが可能である。Gershgorin の定理を用いれば、システムの最大固有値、すなわち $C_\Omega^{-1}K_\Omega$ の最大固有値 α_{\max} は、 C_Ω が対角行列のときは、 K_Ω の非対角要素が非負であることを思い出せば、

$$\alpha_{\max} > \frac{K_{\Omega_{ii}} - \sum_{i \neq j} K_{\Omega_{ij}}}{C_{\Omega_{ii}}} \quad (2.176)$$

であることがわかる¹⁰。右辺の最小値を最大固有値 α_{\max} のかわりに用いて、式 (2.173) に適用すれば、安定なスキームとするための十分条件が得られる。

2.3.2.4 パルス伝達関数行列

入力ベクトル、出力ベクトルの z 変換を $T_\Gamma(z)$ 、 $q_\Gamma(z)$ として、

$$q_\Gamma(z) = Y(z)T_\Gamma(z) \quad (2.177)$$

と表現したとき、 $Y(z)$ をパルス伝達関数行列という (2.3.2.1)。

¹⁰この場合、固有値は負の実数であることに注意。

解析的時間積分により求められた離散時間システムから導かれるパルス伝達関数行列は、式 (2.139)、式 (2.140) より、

$$Y(z) = \tilde{K}_{\Omega\Gamma}^T \left(R_2 + (zI - R)^{-1} R_3 \right) \tilde{K}_{\Omega\Gamma} + \frac{z^{-1} - 1}{\Delta t} C_\Gamma + K_\Gamma \quad (2.178)$$

となる。パルス伝達関数行列はシステムの内部表現によらないので他の式から導いても同じ結果になる。

また、直接時間積分により求められる離散時間システムから導かれるパルス伝達関数行列は、

$$Y(z) = ((1 - \theta) + z\theta) K_{\Omega\Gamma}^T (zK_1 - K_2)^{-1} K_{\Omega\Gamma} + \frac{z^{-1} - 1}{\Delta t} C_\Gamma + K_\Gamma \quad (2.179)$$

となる。

なお、 $Y(z)$ は $Y(s)$ と全く異なったものになるが、

$$\delta = \frac{z - 1}{\Delta t} \quad (2.180)$$

で定義される δ を用いて表現すると $Y(\delta)$ は $Y(s)$ に近い表現になることがわかっており、デルタオペレータモデルと呼ばれる。対して z を用いたものはシフトオペレータモデルと呼ばれる。

2.4 システム合成

2.4.1 システムの分解と合成

本章で述べてきたように、どのような解法を用いるにせよ境界部分に着目してシステムを同一形式で整理することができる。建築のように様々なものによって全体が構成されている場合、部品化は重要である。個々のシステムの内部状態は、それぞれのシステム以外には直接関係しないのであり、システムとシステムの相互作用は境界を介して行われるのであるから、境界 (interface) と内部は切り離して考えるのが合理的である。そして、全体システムは、個々のシステム (サブシステム) の総和として構成される。場合によっては、サブシステムを更にいくつかのシステムに分割することも考えられる。

一般に、大規模システムに対しては、システムをいくつかのサブシステムに分割し、個々のサブシステムごとに解析・分析し、サブシステム間の結合関係から全体システムに関する知見を得るいわゆる構造化分析手法が適用される。サブシステムは必要に応じて更に分割してサブサブシステム等々を考えることができ、この場合、システムは階層構造化される。1990 年代に広く用いられるようになってきたオブジェクト指向分析では、類似なサブシステムを共通のルール、属性を持つオブジェクトとして識別・抽出し、実体 (インスタンス) は属性値の違いとして表現される。オブジェクト指向を適用するためにもシステムをサブシステムに分解することが一義的である。このようなアプローチは並列処理との絡みで重要視されるようになってきた。

システム理論において、システムの分解・結合はよく研究されているが、あるサブシステムの出力が他のサブシステムの入力になるようなものが主たる関心事であり、シグナルフローグラフやブロック線図、ボンドグラフによる表現がされる。しかし、我々の関心は、入力同士、出力同士が結合したようなシステムであるため、これらの表現により解析することは不可能であり、回路網モデルによらざるをえない。

経済や社会システムの分野では、全体システムをサブシステムに分割すること自体が問題になる場合が多いが、建築伝熱分野でサブシステムに分割すること自体を論ずる必要性は少ないだろう。そこで、本節では既に得られているサブシステムを合成して全体システムを構成することについて考えることにする。なお、室や空調システムとの合成は第6章で取り上げるのでここでは壁体同士の結合のみを対象として考える。

システムの合成と大げさに取り上げなくても、有限要素法でいえば要素行列を合成して全体行列を作る過程そのものもシステム合成の例となっている。境界要素法ならば、部分領域解法として知られているし、固有関数展開法でも接合法[57]やITPE(Interzone Temperature Profile Estimation)法[59]のように領域を直方体などによって部分領域に分割し、各部分領域の境界上での温度の適合性、熱流の連続性から連立方程式を導く方法も提案されている。しかし、時間ステップがサブシステム間で異なる場合や離散化方法が異なるサブシステム間の接合においては事情はそれほど単純ではない。

システムの合成において基礎となるのは、連続条件と適合条件である。連続条件とは、ある境界に接する2つのサブシステムにおいて、一方のサブシステムからその境界を通して流出した熱流が他のサブシステムに境界を通して流入する熱流に等しいことを指す。すなわち、熱量の保存則のことである。また、適合条件とは、ある境界に接する2つのサブシステムにおいて同じ位置の温度が等しいことを要請するものである。これらは物理的には疑う余地のない条件ではあるが、離散化されたサブシステム同士が接している場合、連続条件と適合条件を境界上の各点で厳密に満たすのは困難であり、平均的な意味でこれらの条件を捉える必要がでてくる場合も多い。特に、異なる離散化方法をとったサブシステムが接している場合にこの問題は顕著にあらわれる。これに対しては、加川[47]が有限要素法で離散化した領域と境界要素法で離散化した領域の結合について扱っている。そこで取り上げられているのは、1次要素を用いた有限要素領域と同じく1次要素を用いた境界要素領域の接合問題で、両者で境界上の温度分布¹¹に関しては同じ仮定を採用しているのので適合条件に関しては問題がないが、熱流に関しては有限要素法で一定、境界要素法で1次変化を仮定しているため、連続条件を厳密に満たすのは不可能であり、適当な分布行列が必要となることが示されている。

時間積分法や時間ステップがサブシステム間で異なる場合については大坪・久保田[116]に詳しい解説がある。

¹¹加川は音場・電場の問題を扱っている。

2.4.2 離散時間システムの合成

本来であれば、連続時間システムの合成から議論をはじめるのが常道であろうが、連続時間システムのまま、サブシステムを考えても数値計算上あまり意味がないので離散時間システムの合成から述べることにする。

離散時間システムの場合は、すべて、

$$q_{\Gamma}(n) = \bar{q}_{\Gamma}(n) + Y_{\Gamma} T_{\Gamma}(n) \quad (2.181)$$

の形で表現されることをみてきた。本項では、 n ステップのことしか扱わないので n を省略して、これを単に、

$$q_{\Gamma} = \bar{q}_{\Gamma} + Y_{\Gamma} T_{\Gamma} \quad (2.182)$$

と表現する。

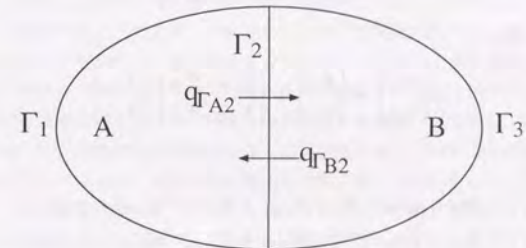


図2.1 サブシステムの結合

今、 A, B の2つのサブシステム、

$$q_{\Gamma A} = \bar{q}_{\Gamma A} + Y_A T_{\Gamma A} \quad (2.183)$$

$$q_{\Gamma B} = \bar{q}_{\Gamma B} + Y_B T_{\Gamma B} \quad (2.184)$$

で、境界の一部が共有されているシステムを考えてみる。2つのシステムで同じ離散化方法がとられており、境界節点や熱流の定義位置が同じ場合は、例えば、図2.1で、境界 Γ_2 が共有されている場合は、2つのシステムを、

$$\begin{bmatrix} q_{\Gamma 1} \\ q_{\Gamma A 2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{q}_{\Gamma A 1} \\ \bar{q}_{\Gamma A 2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Y_{A 11} & Y_{A 12} \\ Y_{A 12}^T & Y_{A 22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{\Gamma 1} \\ T_{\Gamma A 2} \end{bmatrix} \quad (2.185)$$

$$\begin{bmatrix} q_{\Gamma B 2} \\ q_{\Gamma 3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{q}_{\Gamma B 2} \\ \bar{q}_{\Gamma B 3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Y_{B 22} & Y_{B 23} \\ Y_{B 23}^T & Y_{B 33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{\Gamma B 2} \\ T_{\Gamma 3} \end{bmatrix} \quad (2.186)$$

のように整理して、適合条件、

$$T_{\Gamma A 2} = T_{\Gamma B 2} = T_{\Gamma 2} \quad (2.187)$$

と、連続条件,

$$q_{\Gamma A2} + q_{\Gamma B2} = 0 \quad (2.188)$$

より,

$$\begin{bmatrix} q_{\Gamma 1} \\ 0 \\ q_{\Gamma 3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{q}_{\Gamma A1} \\ \bar{q}_{\Gamma A2} + \bar{q}_{\Gamma B2} \\ \bar{q}_{\Gamma B3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Y_{A11} & Y_{A12} & 0 \\ Y_{A12}^T & Y_{A22} + Y_{B22} & Y_{B23} \\ 0 & Y_{B23}^T & Y_{B33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{\Gamma 1} \\ T_{\Gamma 2} \\ T_{\Gamma 3} \end{bmatrix} \quad (2.189)$$

であるから $T_{\Gamma 2}$ は,

$$\begin{aligned} T_{\Gamma 2} &= -(Y_{A22} + Y_{B22})^{-1} Y_{A12}^T T_{\Gamma 1} \\ &\quad - (Y_{A22} + Y_{B22})^{-1} Y_{B23} T_{\Gamma 3} \\ &\quad - (Y_{A22} + Y_{B22})^{-1} (\bar{q}_{\Gamma A2} + \bar{q}_{\Gamma B2}) \end{aligned} \quad (2.190)$$

となる。したがって,

$$\begin{bmatrix} q_{\Gamma 1} \\ q_{\Gamma 3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{q}_{\Gamma 1} \\ \bar{q}_{\Gamma 3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{13} \\ Y_{13}^T & Y_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{\Gamma 1} \\ T_{\Gamma 3} \end{bmatrix} \quad (2.191)$$

ただし,

$$\bar{q}_{\Gamma 1} = \bar{q}_{\Gamma A1} - Y_{A12}(Y_{A22} + Y_{B22})^{-1}(\bar{q}_{\Gamma A2} + \bar{q}_{\Gamma B2}) \quad (2.192)$$

$$\bar{q}_{\Gamma 3} = \bar{q}_{\Gamma B3} - Y_{B23}^T(Y_{A22} + Y_{B22})^{-1}(\bar{q}_{\Gamma A2} + \bar{q}_{\Gamma B2}) \quad (2.193)$$

$$Y_{11} = Y_{A11} - Y_{A12}(Y_{A22} + Y_{B22})^{-1}Y_{A12}^T \quad (2.194)$$

$$Y_{13} = -Y_{A12}(Y_{A22} + Y_{B22})^{-1}Y_{B23} \quad (2.195)$$

$$Y_{33} = Y_{B33} - Y_{B23}^T(Y_{A22} + Y_{B22})^{-1}Y_{B23} \quad (2.196)$$

と境界 Γ_2 が消去されたシステムが合成される。実際には、サブシステムの内部状態量更新のために、 $T_{\Gamma 2}$ 自体も必要となる。したがって、 $X = Y_{A22} + Y_{B22}$ とおいて,

$$\bar{T}_{\Gamma 2} = -X^{-1}(\bar{q}_{\Gamma A2} + \bar{q}_{\Gamma B2}) \quad (2.197)$$

を計算しておき,

$$\bar{q}_{\Gamma 1} = \bar{q}_{\Gamma A1} + Y_{A12} \bar{T}_{\Gamma 2} \quad (2.198)$$

$$\bar{q}_{\Gamma 3} = \bar{q}_{\Gamma B3} + Y_{B23}^T \bar{T}_{\Gamma 2} \quad (2.199)$$

として既知熱流を算出し、 $T_{\Gamma 1}$ 、 $T_{\Gamma 3}$ が決定した後に,

$$T_{\Gamma 2} = -X^{-1}(Y_{A12}^T T_{\Gamma 1} + Y_{B23} T_{\Gamma 3}) + \bar{T}_{\Gamma 2} \quad (2.200)$$

から $T_{\Gamma 2}$ を求めるという手順になるだろう。

2.4.3 伝達関数行列の合成

Laplace パラメータ s を数値として与えた場合については、形式的には離散時間システムの合成と同じである。すなわち,

$$q_{\Gamma}(s) = Y(s)T_{\Gamma}(s) \quad (2.201)$$

で s を与えた場合は、 $Y(s)$ は定数行列なので、式 (2.181) で n を s に置き換えるだけである。 $\bar{q}_{\Gamma}(s) = 0$ とできるので計算はより単純になる。

2.5 システムの低次元化と応答近似

2.5.1 システムの低次元化の意義

システムの低次元化とは、既に得られている高次元のシステムを何らかの方法で低次元のシステムに変換することである。分布定数システムは無次元のシステムであり、実際に計算する場合には有限次元に変換する必要がある。また、集中定数システムでも高次元の場合、様々な目的からシステムの低次元化が議論される場合が多い。特に入出力一本論文では境界温度と境界熱流との関係のみを議論する場合、すなわち、応答特性だけを問題にする場合は、内部の状態変数はかなりの冗長性を有していることが多く、適切に低次元化をはかることにより、効率的な計算法を構築することができる。一方、入出力関係からシステムの特性を決定する、いわゆるシステム同定の問題も現実のシステムを少ないパラメータで表現するという点で、システムの低次元化と通ずるところがあり、システム同定という側面からもシステムの低次元化は重要な課題とされている。

本節では、有限次元・連続時間システムの低次元化について考察する。無限次元 (分布定数) システムの低次元化については、一つには集中定数システムへの変換によって行われるが、これについては既に論じていることと、無限次元システムのまま議論するには、関数解析の知識が必要になること、また、実際の適用範囲が狭いことを理由に割愛した。また、離散時間システムの議論はシステム同定では重要であるが、本論文は既に物理特性が得られているシステムを対象としているため、連続時間システムの低次元化に限定して議論することにした。もっとも、連続時間システムに関する議論はほとんどそのまま離散時間システムに適用できる場合が多い。

応答近似について考える場合は、伝達関数行列の低次元化のみを議論すればよい。集中定数システムの伝達関数行列は、Laplace パラメータ s に関する有理多項式を要素としてもつ行列であり、有理多項式の分母の次数は、システムの次元に等しい¹²。もし、システムの入出力特性だけ得られればよい場合には、伝達関数自体の近似関数を考えることにより、システムの低次元モデルを作成することができる。ただし、元のシステムの状態変数との関係が明らかでないため、内部状態に関する情報も必要な場合にはふさわしくない。一方、分布定数システムの伝達関数行列の要素を Laplace パラメータ s に関する有理多項式で表

¹² 熱容量行列の対角成分に 0 が含まれている場合は、その分次数が小さくなる。

現した場合は、一般に分母の次数は無限になる。したがって、実際の計算では有限次数で打ち切らなければならないため、低次元モデルの問題が必ず生ずる。

パルス伝達関数行列の低次元化については特に述べないが、伝達関数行列における s を z に機械的に置き換えるだけで伝達関数行列に関する議論がそのまま通用する。

伝達関数近似の問題は、建築伝熱分野でも非常に関心が高く、特に1次元多層平面壁体の伝達関数近似に関しては独自の研究が随分なされてきた。この辺りの事情については、渡辺 [152] が詳しくレビューしている。また、システム理論との関連もやはり渡辺 [152] や、永村 [20] に詳しい。

2.5.2 対象とするシステム

対象とするシステムは、集中定数・連続時間システムで、物理座標では、

$$C_{\Omega} \dot{T}_{\Omega}(t) = K_{\Omega} T_{\Omega}(t) + K_{\Omega\Gamma} T_{\Gamma}(t) \quad (2.202)$$

$$q_{\Gamma}(t) = K_{\Omega\Gamma}^T T_{\Omega}(t) + K_{\Gamma} T_{\Gamma}(t) - C_{\Gamma} \dot{T}_{\Gamma}(t) \quad (2.203)$$

また、モード座標では、

$$\dot{\tilde{T}}_{\Omega}(t) = \tilde{K}_{\Omega} \tilde{T}_{\Omega}(t) + \tilde{K}_{\Omega\Gamma} T_{\Gamma}(t) \quad (2.204)$$

$$q_{\Gamma}(t) = \tilde{K}_{\Omega\Gamma}^T \tilde{T}_{\Omega}(t) + K_{\Gamma} T_{\Gamma}(t) - C_{\Gamma} \dot{T}_{\Gamma}(t) \quad (2.205)$$

と表現されているものとする。ただし、

$$P^T C_{\Omega} P = I \quad (2.206)$$

$$P^T K_{\Omega} P = \tilde{K}_{\Omega} = \text{diag}(\alpha_i) \quad (2.207)$$

であり、この合同変換 P を用いて、

$$\tilde{K}_{\Omega\Gamma} = P K_{\Omega\Gamma} \quad (2.208)$$

である。

上記の集中定数システムの伝達関数行列は、

$$Y(s) = K_{\Omega\Gamma}^T (sC_{\Omega} - K_{\Omega})^{-1} K_{\Omega\Gamma} + K_{\Gamma} - sC_{\Gamma} \quad (2.209)$$

である。これは、

$$Y(s) = \frac{B_0 + B_1 s + \cdots + B_{m-1} s^{m-1}}{a_0 + a_1 s + \cdots + a_m s^m} + K_{\Gamma} - sC_{\Gamma} \quad (2.210)$$

もしくは、部分分展開した、

$$Y(s) = \tilde{K}_{\Omega\Gamma}^T (sI - \tilde{K}_{\Omega})^{-1} \tilde{K}_{\Omega\Gamma} + K_{\Gamma} - sC_{\Gamma} \quad (2.211)$$

とも表現できることは2.3.1.4で示した。

固有関数展開法による場合ははじめからモード座標での表現になっているので、式(2.205)、式(2.204)の表現となる。

2.5.3 状態方程式の低次元化

2.5.3.1 代表根保存法

システムの低次元化では、応答の速い高次のモードをなんらかの形で省略するのが基本である。

式(2.204)で低次のモード変数ベクトルから l 個をとって $\tilde{T}_{\Omega 1}(t)$ 、 $l+1$ 以上の高次の項を $\tilde{T}_{\Omega 2}(t)$ とする。

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{T}}_{\Omega 1}(t) \\ \dot{\tilde{T}}_{\Omega 2}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{K}_{\Omega 1} & \mathbf{o} \\ \mathbf{o} & \tilde{K}_{\Omega 2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{T}_{\Omega 1}(t) \\ \tilde{T}_{\Omega 2}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{K}_{\Omega\Gamma 1} \\ \tilde{K}_{\Omega\Gamma 2} \end{bmatrix} T_{\Gamma}(t) \quad (2.212)$$

ここで、 $\tilde{K}_{\Omega 1}$ 、 $\tilde{K}_{\Omega\Gamma 1}$ の行の次元は l である。まず高次のモードを単純に無視する方法が考えられる。これは、

$$\dot{\tilde{T}}_{\Omega 1}(t) = \tilde{K}_{\Omega 1} \tilde{T}_{\Omega 1}(t) + \tilde{K}_{\Omega\Gamma 1} T_{\Gamma}(t) \quad (2.213)$$

$$q_{\Gamma}(t) = \tilde{K}_{\Omega\Gamma 1}^T \tilde{T}_{\Omega 1}(t) + K_{\Gamma} T_{\Gamma}(t) - C_{\Gamma} \dot{T}_{\Gamma}(t) \quad (2.214)$$

というシステムになり、低次の固有値は保存される。しかし、この方法ではステップ応答の定常値が異なるという問題が生じてしまう。すなわち、元のシステムの定常応答行列すなわち Laplace パラメータ $s=0$ としたときの伝達関数行列 $Y(0)$ が、

$$\begin{aligned} Y(0) &= -\tilde{K}_{\Omega\Gamma}^T \tilde{K}_{\Omega}^{-1} \tilde{K}_{\Omega\Gamma} + K_{\Gamma} \\ &= -[\tilde{K}_{\Omega\Gamma 1}^T \quad \tilde{K}_{\Omega\Gamma 2}^T] \begin{bmatrix} \tilde{K}_{\Omega 1}^{-1} & \mathbf{o} \\ \mathbf{o} & \tilde{K}_{\Omega 2}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{K}_{\Omega\Gamma 1} \\ \tilde{K}_{\Omega\Gamma 2} \end{bmatrix} + K_{\Gamma} \\ &= -\tilde{K}_{\Omega\Gamma 1}^T \tilde{K}_{\Omega 1}^{-1} \tilde{K}_{\Omega\Gamma 1} - \tilde{K}_{\Omega\Gamma 2}^T \tilde{K}_{\Omega 2}^{-1} \tilde{K}_{\Omega\Gamma 2} + K_{\Gamma} \end{aligned} \quad (2.215)$$

であるのに対し、低次元システムの定常応答行列は、

$$Y_1(0) = -\tilde{K}_{\Omega\Gamma 1}^T \tilde{K}_{\Omega 1}^{-1} \tilde{K}_{\Omega\Gamma 1} + K_{\Gamma} \quad (2.216)$$

となつて、 $\tilde{K}_{\Omega\Gamma 2}^T \tilde{K}_{\Omega 2}^{-1} \tilde{K}_{\Omega\Gamma 2}$ だけ変化してしまうのである。

この問題を回避するために、高次モードの影響を考慮して、定常値を保存する方法が考えられた [15]。式(2.212)で、 $\dot{\tilde{T}}_{\Omega 2}(t) = \mathbf{o}$ として、高次モードの微分項を無視することにより、

$$\tilde{T}_{\Omega 2}(t) = -\tilde{K}_{\Omega 2}^{-1} \tilde{K}_{\Omega\Gamma 2} T_{\Gamma}(t) \quad (2.217)$$

となるので、これから、

$$\dot{\tilde{T}}_{\Omega 1}(t) = \tilde{K}_{\Omega 1} \tilde{T}_{\Omega 1}(t) + \tilde{K}_{\Omega\Gamma 1} T_{\Gamma}(t) \quad (2.218)$$

$$q_{\Gamma}(t) = \tilde{K}_{\Omega\Gamma 1}^T \tilde{T}_{\Omega 1}(t) - \tilde{K}_{\Omega\Gamma 2}^T \tilde{K}_{\Omega 2}^{-1} \tilde{K}_{\Omega\Gamma 2} T_{\Gamma}(t) + K_{\Gamma} T_{\Gamma}(t) - C_{\Gamma} \dot{T}_{\Gamma}(t) \quad (2.219)$$

という低次元システムが導き出される。このシステムの定常応答行列が元のシステムの定常応答行列と同じなのは明らかだろう。 $T_{\Omega}(t)$ は、 P を l 列までとそれ以上にわけて P_1 、 P_2

と表現すれば,

$$T_{\Omega}(t) = P\tilde{T}_{\Omega}(t) = \begin{bmatrix} P_1 & P_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{T}_{\Omega 1}(t) \\ \tilde{T}_{\Omega 2}(t) \end{bmatrix} = P_1\tilde{T}_{\Omega 1}(t) + P_2\tilde{T}_{\Omega 2}(t) \quad (2.220)$$

であるから,

$$T_{\Omega}(t) = P_1\tilde{T}_{\Omega 1}(t) - P_2\tilde{K}_{\Omega 2}^{-1}P_2^TK_{\Omega\Gamma}T_{\Gamma}(t) \quad (2.221)$$

から求めることができる.

$$Z = P_2\tilde{K}_{\Omega 2}^{-1}P_2^T \quad (2.222)$$

は振動解析の分野で, 剰余コンプライアンス行列と呼ばれているものに相当する. 式(2.221)は, Z を用いて表現すれば,

$$T_{\Omega}(t) = P_1\tilde{T}_{\Omega 1}(t) - ZK_{\Omega\Gamma}T_{\Gamma}(t) \quad (2.223)$$

となる.

ところで, 固有値解析は計算コストが高いので, 定常応答を補正する目的だけで高次モードまですべて求めるのは無駄が多い気がする. 実は,

$$\begin{aligned} P\tilde{K}_{\Omega}^{-1}P^T &= P(P^TK_{\Omega}P)^{-1}P^T \\ &= PP^{-1}K_{\Omega}^{-1}P^{-T}P^T \\ &= K_{\Omega}^{-1} \end{aligned} \quad (2.224)$$

と,

$$P\tilde{K}_{\Omega}^{-1}P^T = \begin{bmatrix} P_1 & P_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{K}_{\Omega 1}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \tilde{K}_{\Omega 2}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1^T \\ P_2^T \end{bmatrix} = P_1\tilde{K}_{\Omega 1}^{-1}P_1^T + P_2\tilde{K}_{\Omega 2}^{-1}P_2^T \quad (2.225)$$

から,

$$Z = P_2\tilde{K}_{\Omega 2}^{-1}P_2^T = K_{\Omega}^{-1} - P_1\tilde{K}_{\Omega 1}^{-1}P_1^T \quad (2.226)$$

という関係が成立しているので, この関係を使えば式(2.215)より,

$$\begin{aligned} \tilde{K}_{\Omega\Gamma 2}^TK_{\Omega 2}^{-1}\tilde{K}_{\Omega\Gamma 2} &= K_{\Omega\Gamma}^TP_2\tilde{K}_{\Omega 2}^{-1}P_2^TK_{\Omega\Gamma} \\ &= K_{\Omega\Gamma}^T(K_{\Omega}^{-1} - P_1\tilde{K}_{\Omega 1}^{-1}P_1^T)K_{\Omega\Gamma} \\ &= K_{\Omega\Gamma}^TK_{\Omega}^{-1}K_{\Omega\Gamma} - K_{\Omega\Gamma}^TP_1\tilde{K}_{\Omega 1}^{-1}P_1^TK_{\Omega\Gamma} \\ &= K_{\Omega\Gamma}^TK_{\Omega}^{-1}K_{\Omega\Gamma} - \tilde{K}_{\Omega\Gamma 1}^T\tilde{K}_{\Omega 1}^{-1}\tilde{K}_{\Omega\Gamma 1} \end{aligned} \quad (2.227)$$

であり, $\tilde{K}_{\Omega 1}$ と P_1 だけ求めておけばよいので, 高次モードの固有値解析は不要なことがわかる. $T_{\Omega}(t)$ を求める場合にも, 式(2.223)に式(2.226)の Z を代入すればよいので, 高次モードまで求める必要はない.

式(2.226)は,

$$\begin{aligned} Z &= K_{\Omega}^{-1} - P_1\tilde{K}_{\Omega 1}^{-1}P_1^T \\ &= K_{\Omega}^{-1}(I - K_{\Omega}P_1\tilde{K}_{\Omega 1}^{-1}P_1^T) \\ &= K_{\Omega}^{-1}(I - C_{\Omega}P_1P_1^T) \end{aligned} \quad (2.228)$$

と変形すれば, Hansteen が導いた結果 [29] と同じになる.

なお, Z は密行列である上に行列の次元も一般に大きいので, Z を実際に計算するのは避けたほうがよい. $X = K_{\Omega\Gamma}T_{\Gamma}(t)$ として,

$$T_{\Omega}(t) = P_1(\tilde{T}_{\Omega 1}(t) + \tilde{K}_{\Omega 1}^{-1}(P_1^TX)) - K_{\Omega}^{-1}X \quad (2.229)$$

と計算すれば, 括弧の中は採用モード数 l の次元で済み, 記憶容量も計算量も少なく済む. もちろん, $K_{\Omega}^{-1}X$ は, K_{Ω} の疎行列としての性質を生かした解法を用いて解くべきなのはいうまでもない.

次に, 物理座標で表現すると [15],

$$T_{\Omega}(t) = \begin{bmatrix} T_{\Omega 1}(t) \\ T_{\Omega 2}(t) \end{bmatrix} \quad (2.230)$$

$$\tilde{T}_{\Omega}(t) = \begin{bmatrix} \tilde{T}_{\Omega 1}(t) \\ \tilde{T}_{\Omega 2}(t) \end{bmatrix} \quad (2.231)$$

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} \quad (2.232)$$

とおいて,

$$T_{\Omega}(t) = P\tilde{T}_{\Omega}(t) \quad (2.233)$$

より,

$$\begin{aligned} T_{\Omega 1}(t) &= P_{11}\tilde{T}_{\Omega 1}(t) + P_{12}\tilde{T}_{\Omega 2}(t) \\ &= P_{11}\tilde{T}_{\Omega 1}(t) + P_{12}\tilde{K}_{\Omega 2}^{-1}\tilde{K}_{\Omega\Gamma 2}T_{\Gamma}(t) \end{aligned} \quad (2.234)$$

$$\begin{aligned} T_{\Omega 2}(t) &= P_{21}\tilde{T}_{\Omega 1}(t) + P_{22}\tilde{T}_{\Omega 2}(t) \\ &= P_{21}\tilde{T}_{\Omega 1}(t) + P_{22}\tilde{K}_{\Omega 2}^{-1}\tilde{K}_{\Omega\Gamma 2}T_{\Gamma}(t) \end{aligned} \quad (2.235)$$

で, 式(2.234)から,

$$\tilde{T}_{\Omega 1}(t) = P_{11}^{-1}T_{\Omega 1}(t) - P_{11}^{-1}P_{12}\tilde{K}_{\Omega 2}^{-1}\tilde{K}_{\Omega\Gamma 2}T_{\Gamma}(t) \quad (2.236)$$

となる. 式(2.236)を式(2.235)に代入して,

$$T_{\Omega 2}(t) = P_{21}P_{11}^{-1}T_{\Omega 1}(t) + (P_{21}P_{11}^{-1}P_{12} - P_{22})\tilde{K}_{\Omega 2}^{-1}\tilde{K}_{\Omega\Gamma 2}T_{\Gamma}(t) \quad (2.237)$$

更にこれを、式(2.202)を $T_{\Omega 1}(t)$ と $T_{\Omega 2}(t)$ に分割した、

$$\begin{bmatrix} C_{\Omega 11} & \mathbf{o} \\ \mathbf{o} & C_{\Omega 22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{T}_{\Omega 1}(t) \\ \dot{T}_{\Omega 2}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{\Omega 11} & K_{\Omega 12} \\ K_{\Omega 21} & K_{\Omega 22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{\Omega 1}(t) \\ T_{\Omega 2}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{\Omega \Gamma 1} \\ K_{\Omega \Gamma 2} \end{bmatrix} T_{\Gamma}(t) \quad (2.238)$$

に代入すれば、 $T_{\Omega 1} = \hat{T}_{\Omega}$ とすると、

$$\hat{C}_{\Omega} \dot{\hat{T}}_{\Omega}(t) = \hat{K}_{\Omega} \hat{T}_{\Omega}(t) + \hat{K}_{\Omega \Gamma} T_{\Gamma}(t) \quad (2.239)$$

という低次元システムが得られる。ただし、

$$\hat{C}_{\Omega} = C_{\Omega 11} \quad (2.240)$$

$$\hat{K}_{\Omega} = K_{\Omega 11} + K_{\Omega 12} P_{21} P_{11}^{-1} \quad (2.241)$$

$$\hat{K}_{\Omega \Gamma} = K_{\Omega \Gamma 1} + K_{\Omega 12} (P_{21} P_{11}^{-1} P_{12} - P_{22}) \hat{K}_{\Omega 2}^{-1} \quad (2.242)$$

である。

本項では、低次の固有値を保存するような低次元システムについて考察したが、固有値の並べ方を変えても本項で述べたことが成立するのは明らかであり、一般には、元のシステムの固有値からいくつか固有値を選択して、すなわち、代表根を選択して¹³、選択した固有値のみを保存する低次元システムを構成する方法について述べたことになる。代表根を保存する低次元化手法としては他に、集約モデル [7] やそれと双対の関係にある制限モデル [142] が知られている。

2.5.3.2 特異摂動法

物理座標の式(2.202)で、

$$\begin{bmatrix} C_{\Omega 11} & \mathbf{o} \\ \mathbf{o} & C_{\Omega 22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{T}_{\Omega 1}(t) \\ \dot{T}_{\Omega 2}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{\Omega 11} & K_{\Omega 12} \\ K_{\Omega 12}^T & K_{\Omega 22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{\Omega 1}(t) \\ T_{\Omega 2}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{\Omega \Gamma 1} \\ K_{\Omega \Gamma 2} \end{bmatrix} T_{\Gamma}(t) \quad (2.243)$$

と分割する。すると、

$$T_{\Omega 2}(t) = K_{\Omega 22}^{-1} C_{\Omega 22} \dot{T}_{\Omega 2}(t) - K_{\Omega 22}^{-1} K_{\Omega 12}^T T_{\Omega 1}(t) - K_{\Omega 22}^{-1} K_{\Omega \Gamma 2} T_{\Gamma}(t) \quad (2.244)$$

となるので、

$$\begin{aligned} C_{\Omega 11} \dot{T}_{\Omega 1}(t) &= K_{\Omega 12} K_{\Omega 22}^{-1} C_{\Omega 22} \dot{T}_{\Omega 2}(t) \\ &\quad + (K_{\Omega 11} - K_{\Omega 12} K_{\Omega 22}^{-1} K_{\Omega 12}^T) T_{\Omega 1}(t) \\ &\quad + (K_{\Omega \Gamma 1} - K_{\Omega 12} K_{\Omega 22}^{-1} K_{\Omega \Gamma 2}) T_{\Gamma}(t) \end{aligned} \quad (2.245)$$

と表現できる。ここで、単純に $C_{\Omega 22} \dot{T}_{\Omega 2}(t) = \mathbf{o}$ と近似すれば、 $T_{\Omega 1} = \hat{T}_{\Omega}$ とすると、

$$\hat{C}_{\Omega} \dot{\hat{T}}_{\Omega}(t) = \hat{K}_{\Omega} \hat{T}_{\Omega}(t) + \hat{K}_{\Omega \Gamma} T_{\Gamma}(t) \quad (2.246)$$

¹³固有値は固有方程式の根であるので固有値のことを根という場合がある。

という低次元システムが得られる。ただし、

$$\hat{C}_{\Omega} = C_{\Omega 11} \quad (2.247)$$

$$\hat{K}_{\Omega} = K_{\Omega 11} - K_{\Omega 12} K_{\Omega 22}^{-1} K_{\Omega 12}^T \quad (2.248)$$

$$\hat{K}_{\Omega \Gamma} = K_{\Omega \Gamma 1} - K_{\Omega 12} K_{\Omega 22}^{-1} K_{\Omega \Gamma 2} \quad (2.249)$$

である。このような方法を特異摂動法 [55] という。

もし $K_{\Omega \Gamma 2} = \mathbf{o}$ となるように分割した場合は、式(2.244)で $K_{\Omega \Gamma 2} = \mathbf{o}$ と置いて両辺を時間微分した、

$$\dot{T}_{\Omega 2}(t) = K_{\Omega 22}^{-1} C_{\Omega 22} \ddot{T}_{\Omega 2}(t) - K_{\Omega 22}^{-1} K_{\Omega 12}^T \dot{T}_{\Omega 1}(t) \quad (2.250)$$

で、2階の微分項 $\ddot{T}_{\Omega 2}(t)$ を \mathbf{o} として、

$$\dot{T}_{\Omega 2}(t) = -K_{\Omega 22}^{-1} K_{\Omega 12}^T \dot{T}_{\Omega 1}(t) \quad (2.251)$$

と近似することによって、 $T_{\Omega 1} = \hat{T}_{\Omega}$ とすると、

$$\hat{C}_{\Omega} \dot{\hat{T}}_{\Omega}(t) = \hat{K}_{\Omega} \hat{T}_{\Omega}(t) - \hat{K}_{\Omega \Gamma} T_{\Gamma}(t) \quad (2.252)$$

という低次元システムが得られる。ただし、

$$\hat{C}_{\Omega} = C_{\Omega 11} + K_{\Omega 12} K_{\Omega 22}^{-1} C_{\Omega 22} K_{\Omega 22}^{-1} K_{\Omega 12}^T \quad (2.253)$$

$$\hat{K}_{\Omega} = K_{\Omega 11} - K_{\Omega 12} K_{\Omega 22}^{-1} K_{\Omega 12}^T \quad (2.254)$$

$$\hat{K}_{\Omega \Gamma} = K_{\Omega \Gamma 1} \quad (2.255)$$

である。

次にシステム変数 $T_{\Omega}(t)$ をすべて消去することを考えてみる。式(2.202)から、

$$T_{\Omega}(t) = K_{\Omega}^{-1} C_{\Omega} \dot{T}_{\Omega}(t) - K_{\Omega}^{-1} K_{\Omega \Gamma} T_{\Gamma}(t) \quad (2.256)$$

とし、両辺を時間微分した、

$$\dot{T}_{\Omega}(t) = K_{\Omega}^{-1} C_{\Omega} \ddot{T}_{\Omega}(t) - K_{\Omega}^{-1} K_{\Omega \Gamma} \dot{T}_{\Gamma}(t) \quad (2.257)$$

で2階の微分項 $\ddot{T}_{\Omega}(t)$ を \mathbf{o} と近似した、

$$\dot{T}_{\Omega}(t) = -K_{\Omega}^{-1} K_{\Omega \Gamma} \dot{T}_{\Gamma}(t) \quad (2.258)$$

を式(2.256)に代入すると、

$$T_{\Omega}(t) = -K_{\Omega}^{-1} C_{\Omega} K_{\Omega}^{-1} K_{\Omega \Gamma} \dot{T}_{\Gamma}(t) - K_{\Omega}^{-1} K_{\Omega \Gamma} T_{\Gamma}(t) \quad (2.259)$$

と $T_{\Omega}(t)$ は、 $T_{\Gamma}(t)$ と $\dot{T}_{\Gamma}(t)$ によって表現できる。よって、式(2.259)を式(2.203)に代入すると、

$$q_{\Gamma}(t) = -(C_{\Gamma} + K_{\Omega \Gamma}^T K_{\Omega}^{-1} C_{\Omega} K_{\Omega}^{-1} K_{\Omega \Gamma}) \dot{T}_{\Gamma}(t) + (K_{\Gamma} - K_{\Omega \Gamma}^T K_{\Omega}^{-1} K_{\Omega \Gamma}) T_{\Gamma}(t) \quad (2.260)$$

という方程式が得られる。これは、構造・振動解析分野でよく用いられる手法で、Guyanの静縮小 [28] (超要素法 (super element method)) と呼ばれている。また、建築伝熱分野では奥山が試みており濃縮と呼んでいる。

2.5.4 伝達関数行列の近似

2.5.4.1 代表根保存による近似

式(2.211), で 2.5.3.1 と同じように低次の固有値からなる部分と高次の固有値からなる部分にわけて,

$$\tilde{K}_\Omega = \begin{bmatrix} \tilde{K}_{\Omega 1} & \mathbf{o} \\ \mathbf{o} & \tilde{K}_{\Omega 2} \end{bmatrix} \quad (2.261)$$

とし, それぞれの固有値に対応する変換行列 P_1, P_2 を,

$$P = [P_1 \ P_2] \quad (2.262)$$

とすれば, 伝達関数行列 $Y(s)$ は,

$$Y(s) = \tilde{K}_{\Omega 1}^{-T} (sI - \tilde{K}_{\Omega 1})^{-1} \tilde{K}_{\Omega 1} + \tilde{K}_{\Omega 2}^{-T} (sI - \tilde{K}_{\Omega 2})^{-1} \tilde{K}_{\Omega 2} + K_\Gamma - sC_\Gamma \quad (2.263)$$

とも表現できる。ただし, $\tilde{K}_{\Omega 1} = P_1^T K_\Omega$, $\tilde{K}_{\Omega 2} = P_2^T K_\Omega$ である。 $|sI|$ に比べて, $|\tilde{K}_{\Omega 2}|$ が十分大きければ,

$$sI - \tilde{K}_{\Omega 2} \sim -\tilde{K}_{\Omega 2} \quad (2.264)$$

と近似できるだろう。すると式(2.263)は,

$$Y(s) = \tilde{K}_{\Omega 1}^{-T} (sI - \tilde{K}_{\Omega 1})^{-1} \tilde{K}_{\Omega 1} - \tilde{K}_{\Omega 2}^{-T} \tilde{K}_{\Omega 2}^{-1} \tilde{K}_{\Omega 2} + K_\Gamma - sC_\Gamma \quad (2.265)$$

となる。これは, 式(2.218), 式(2.219) から求まる伝達関数行列に他ならない。式(2.265)は, 2.5.3.1 で述べたのと同様に,

$$Y(s) = \tilde{K}_{\Omega 1}^{-T} (sI - \tilde{K}_{\Omega 1})^{-1} \tilde{K}_{\Omega 1} - K_\Omega^{-T} K_\Omega^{-1} K_\Omega + \tilde{K}_{\Omega 1}^{-T} \tilde{K}_{\Omega 1}^{-1} \tilde{K}_{\Omega 1} + K_\Gamma - sC_\Gamma \quad (2.266)$$

とも表現できるので, 高次の固有値解析を行わなくても低次元システムの伝達関数行列を計算することができる。この方法は, 本質的には 2.5.3.1 で述べた方法を Laplace 変換領域で説明しただけのことである。代表根は保存され, 物理座標での意味も明確である。

2.5.4.2 Padé 近似

純粋に関数近似という側面からみた場合, 上記の方法はあまりにも単純でもう少し精度のよい方法があるように思われる。近似関数は, どのような種類の関数であってもよいはずだが, Laplace 逆変換するときのことを考えて, やはり有理多項式で近似するのが普通である。そこで, 有理多項式の次数低減法として知られている Padé 近似について述べることにする。なお, 連分数展開法やモーメント法もよく知られた方法であるが, 元の式が有理多項式で与えられている場合にはこれら 3 つの方法は等価であることがわかっている。詳しくは永村 [20] を参照されたい。

式(2.210)の 1 つの要素 $Y_{ij}(s)$ に着目してみる。ここでは, 簡単のため, $Y_{ij}(s)$ を単に $Y(s)$ などと記すことにする。 $Y(s)$ の近似伝達関数を $\hat{Y}(s)$ とし, 真にプロバーな部分を取り出して, 以下のように表現することを考える。

$$R(s) = Y(s) - K_\Gamma + sC_\Gamma = \frac{B_0 + B_1 s + \cdots + B_{m-1} s^{m-1}}{a_0 + a_1 s + \cdots + a_m s^m} \quad (2.267)$$

$$\hat{R}(s) = \hat{Y}(s) - K_\Gamma + sC_\Gamma = \frac{\hat{B}_0 + \hat{B}_1 s + \cdots + \hat{B}_{l-1} s^{l-1}}{\hat{a}_0 + \hat{a}_1 s + \cdots + \hat{a}_l s^l} \quad (2.268)$$

ただし, 一般性を失わず $\hat{a}_0 = 1$ とする。これらの右辺を $s = 0$ のまわりで展開した,

$$R(s) = C_0 + C_1 s + C_2 s^2 + \cdots \quad (2.269)$$

$$\hat{R}(s) = \hat{C}_0 + \hat{C}_1 s + \hat{C}_2 s^2 + \cdots \quad (2.270)$$

で,

$$\hat{C}_i = C_i, \quad (i = 0, 1, \dots, 2l-1) \quad (2.271)$$

と Taylor 展開係数のはじめの $2l$ 項が一致するように近似する方法を Padé 近似という¹⁴。よく知られているように,

$$C_i = \left. \frac{d^i R(s)}{i! ds^i} \right|_{s=0} \quad (2.272)$$

の関係があるのでこれをもとに係数 \hat{a}_k, \hat{B}_i を決定すればよい。 $s = \infty$ のまわりで展開したとき, すなわち,

$$R(s) = C_1 s^{-1} + C_2 s^{-2} + \cdots + \quad (2.273)$$

と展開したとき, C_i を Markov パラメータという。 $\hat{R}(s)$ についても展開し, やはりはじめの $2l$ 項が一致するように係数を \hat{a}_i, \hat{B}_i を決定することもできる。 C_i は $R(s)$ を Laplace 逆変換したインパルス応答 $R(t)$ と次のような関係がある。

$$C_i = \left. \frac{d^i R(t)}{i! dt^i} \right|_{t=0} \quad (2.274)$$

各成分を対象に Padé 近似する方法を示したが, この場合, 分母の係数が各要素ごとに異なってしまうという問題がある。

スカラー伝達関数の近似方法について述べてきたものの, 伝達関数行列のまま近似する方法については, いくつか提案されているものの実際の適用にあたっては難しい問題を抱えている。

¹⁴ 分母 n 次, 分子 m 次のもを (n, m) 形 Padé 近似という。この場合 $(l, l-1)$ 形 Padé 近似ということになる。

2.5.4.3 応答の最小 2 乗近似

2.5.4.1, 2.5.4.2では, 元の伝達関数行列の要素が Laplace パラメータ s の有理多項式で与えられている場合について述べてきたが, ここでは, 応答の最小 2 乗近似の観点から伝達関数の低次元化を考える.

前項 2.5.4.2と同様に, 伝達関数で真にプロパーな部分を取り出し, 元の伝達関数を $\tilde{R}(s)$, 近似伝達関数を $\hat{R}(s)$ とする. ここでは, 時間領域と Laplace 変換領域を区別するため, 時間領域を $R(t)$, Laplace 変換領域で $\tilde{R}(s)$ と表記することにする. 元のシステムの関数形については特別な仮定は不要だが, 近似システムに関しては, Laplace 逆変換のことを考えて, 有理多項式で表現するものとする. $\tilde{R}(s)$ の部分分数展開形を,

$$\tilde{R}(s) = \sum_{i=1}^l \frac{A_i}{s - \alpha_i} \quad (2.275)$$

とすると, インパルス応答は,

$$\hat{R}(t) = \sum_{i=1}^l A_i e^{\alpha_i t} \quad (2.276)$$

という Dirichlet 級数となる.

Schapery[125] は, インパルス応答の 2 乗誤差,

$$E^2 = \int_0^\infty (\hat{R}(t) - R(t))^2 dt \quad (2.277)$$

が最小となるように A_i を決定することを提案した. すなわち,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial E}{\partial A_k} &= \int_0^\infty (\hat{R}(t) - R(t)) e^{\alpha_k t} dt \\ &= \tilde{R}(-\alpha_k) - \tilde{R}(-\alpha_k) \end{aligned} \quad (2.278)$$

が 0 であることより,

$$\tilde{R}(-\alpha_k) = \tilde{R}(-\alpha_k), \quad (k = 1, \dots, l) \quad (2.279)$$

となるので α_k を与えれば,

$$S_{ij} = \frac{1}{-\alpha_i - \alpha_j} \quad (2.280)$$

という要素をもつ行列 $S = (S_{ij})$ を考え, $A = [A_i]^T$, $\tilde{R} = [\tilde{R}(-\alpha_k)]^T$ とかけば,

$$SA = \tilde{R} \quad (2.281)$$

を解くことにより, A を求めることができる.

インパルス応答の最小 2 乗近似により得られた近似伝達関数は, 定常応答を一般に保存しない. そこで, 単位応答の 2 乗誤差を最小にする方法について考えてみる. 単位 (ステップ) 応答を,

$$\hat{H}(t) = \int_0^\infty \hat{R}(t) dt = B_0 + \sum_{i=1}^l B_i e^{\alpha_i t} \quad (2.282)$$

と近似する. B_0 は定常応答になっている. この Laplace 変換は,

$$\tilde{H}(s) = \frac{\tilde{R}(s)}{s} = \frac{B_0}{s} + \sum_{i=1}^l \frac{B_i}{s - \alpha_i} \quad (2.283)$$

である. B_i と A_i には,

$$B_0 = - \sum_{i=1}^l \frac{A_i}{\alpha_i} \quad (2.284)$$

$$B_i = \frac{A_i}{\alpha_i} \quad (i = 1, \dots, l) \quad (2.285)$$

の関係がある. 元の単位応答の Laplace 変換を $\tilde{H}(s)$ とし, 単位応答の 2 乗誤差,

$$E^2 = \int_0^\infty (\hat{H}(t) - H(t))^2 dt \quad (2.286)$$

が最小になる条件は,

$$\frac{1}{2} \frac{\partial E}{\partial B_0} = \int_0^\infty (\hat{H}(t) - H(t)) dt \quad (2.287)$$

および,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial E}{\partial B_k} &= \int_0^\infty (\hat{H}(t) - H(t)) e^{\alpha_k t} dt \\ &= \tilde{H}(-\alpha_k) - \tilde{H}(-\alpha_k) \end{aligned} \quad (2.288)$$

が 0 であることより,

$$\tilde{H}(\infty) = H(\infty) \quad (2.289)$$

$$\tilde{H}(-\alpha_k) = \tilde{H}(-\alpha_k) \quad (k = 1, \dots, l) \quad (2.290)$$

となる. したがって, 定常応答 B_0 は,

$$B_0 = \tilde{H}(\infty) = H(\infty) \quad (2.291)$$

なので, 元の伝達関数と近似伝達関数で定常応答は等しくなる. 式 (2.290) の両辺を $-\alpha_k$ 倍すれば,

$$B_0 + \sum_{i=1}^l \frac{-\alpha_k B_i}{-\alpha_k - \alpha_i} = \tilde{R}(-\alpha_k) \quad (2.292)$$

であり, インパルス応答近似のときと同様に, α_k を与えれば,

$$S'_{ij} = \frac{-\alpha_i}{-\alpha_i - \alpha_j} \quad (2.293)$$

という要素をもつ行列 $S' = (S'_{ij})$ を考え, $B = [B_i]^T$, $\tilde{R}' = [\tilde{R}(-\alpha_i) - B_0]^T$ とかけば,

$$S'B = \tilde{R}' \quad (2.294)$$

を解くことにより、 B を求めることができる。この方法も Schapery 自身は単位応答の最小 2 乗近似であるという理論的根拠を示していないものの、Schapery[125] により提案されたものである。これらは、 $\tilde{R}(s)$ を正の Laplace 変換領域で有理多項式近似したものとなすことができ、正の Laplace パラメータに対する伝達関数が数値的に求まってさえいれば適用することが可能である。Laplace 変換領域で有理多項式で表現されれば、時間領域に変換するのは容易であり、Laplace 逆変換方法としてもっとも一般的なものである。Laplace 変換領域で離散的に得られた関数を時間領域に変換する方法は数値 Laplace 逆変換と総称され、ここで示したもの以外にもいくつか提案されている [17] [33]。

建築伝熱の立場から言えば定常応答を保存する単位応答の最小 2 乗近似の方法によるのがよい。松尾 [76] は、平面壁の伝達関数近似にこの方法を用いており、固定公比法と呼ばれている。また、極 α_k をあらかじめ固定して与えるのではなく、 α_k も未知として最小 2 乗近似することも可能である。その場合は Schapery も指摘しているように α_k 、 A_k に関する非線形の方程式になるので計算は複雑になる。松尾はこの方法についても検討しており [82]、国内の建築空調負荷計算プログラムとして著明な HASP[78] シリーズの HASP/ACLD/8501 [86] で採用されている。通常の建築壁体は、極も未知数とした場合は 3 項以下で固定公比法によった場合でも 5, 6 項でかなりの近似精度が得られる。しかし、地下壁では第 3 章で述べるように極も未知数とした場合で 7 項程度、また、固定公比法で 14 項程度必要となる。項数が増えると S' などとはかなり ill condition なため計算が不安定になりがちであり、特異値分解などによる解法を採用する必要がある。また、極を未知数とする場合は、修正 Marquardt 法などの非線形最小 2 乗法の中でも安定な解法を採用しても解が得られない場合がある¹⁵。

以上述べてきた方法は、真にプロパーな部分のみを対象としており、それ以外の部分については特に近似をしていない。したがって、真にプロパーな部分以外の特性があらわしめ得られている必要がある。

2.5.5 伝達関数行列の実現問題

$\hat{Y}(s)$ の真にプロパーな部分、

$$\tilde{R}(s) = \hat{Y}(s) - K_{\Gamma} + sC_{\Gamma} \quad (2.295)$$

を近似した $\tilde{R}(s)$ の各要素についてすべて同じ極を与えれば、

$$\tilde{R}(s) = \sum_{k=1}^l \frac{A_k}{s - \alpha_k} \quad (2.296)$$

という形で表現できたことになり、式 (2.116) の行列の部分分数展開表現と同形式である。これから、システムを再構築すれば、

$$\dot{\hat{T}}_k(t) = \alpha_k \hat{T}_k(t) + T_{\Gamma}(t) \quad (k=1, \dots, l) \quad (2.297)$$

¹⁵ 適切な初期値を与えるのが難しい。

$$q_{\Gamma}(t) = \sum_{k=1}^l A_k \hat{T}_k + \tilde{K}_{\Gamma} T_{\Gamma}(t) - C_{\Gamma} \dot{T}_{\Gamma}(t) \quad (2.298)$$

もしくは、

$$\dot{\hat{q}}_k(t) = \alpha_k \hat{T}_k(t) + A_k T_{\Gamma}(t) \quad (k=1, \dots, l) \quad (2.299)$$

$$q_{\Gamma}(t) = \sum_{k=1}^l \hat{q}_k + \tilde{K}_{\Gamma} T_{\Gamma}(t) - C_{\Gamma} \dot{T}_{\Gamma}(t) \quad (2.300)$$

というシステムが得られる。伝達関数行列から連続時間システムに変換することを伝達関数行列の実現という。しかし、上で得られたシステムは最小実現システム、すなわち伝達関数の実現のうち次元が最小のものになっていない。実際、入力ベクトル $T_{\Gamma}(t)$ 、出力ベクトル $q_{\Gamma}(t)$ の次元を n とすると¹⁶、元のシステムの次元は m であったのに対し、伝達関数行列を経由して、上記実現方法で全く近似をせずに連続時間システムに戻すと次元が mn になって n 倍にふくれあがってしまう。この問題は 1 入力 1 出力のシステムの場合にはない多入力多出力システムに固有の問題である。最小実現システムとするためには、行列の部分分数展開の形になっているならば、 A_k のランクを r_k とし、ランク r_k の K_{Bk} 、 K_{Ck} を用いて、

$$A_k = K_{Ck} K_{Bk} \quad (2.301)$$

と最大階数分解し、

$$\dot{\hat{T}}_k(t) = \alpha_k \hat{T}_k(t) + K_{Bk} T_{\Gamma}(t) \quad (k=1, \dots, l) \quad (2.302)$$

$$q_{\Gamma}(t) = \sum_{k=1}^l K_{Ck} \hat{T}_k + \tilde{K}_{\Gamma} T_{\Gamma}(t) - C_{\Gamma} \dot{T}_{\Gamma}(t) \quad (2.303)$$

とすればよい [137]。ただし、最大階数分解は一意ではない。行列の部分分数展開の形になっていない場合の最小実現方法としては、Markov パラメータを並べたブロック Hankel 行列から構成する方法や正準構造分解による方法などが知られている [137]。

第 7 章で述べるが、熱負荷計算という立場から言えば、境界の数は室及び外気スペースの数に最終的に落して考えることができるため、最小実現システムにそれほどこだわる必要はない。しかし、壁表面温度を正確に評価することを目的とした場合には、このことを考慮する必要があるだろう。

2.6 パルス伝達関数行列と畳み込み計算法

2.6.1 パルス伝達関数行列の導出

2.5 で連続時間システムの低次元化手法について述べたが、数値計算のためにはこれを離散時間システムにしなければならぬのはいうまでもない。伝達関数行列が得られている

¹⁶ 今まで述べてきたのは入出力ベクトルの次元が等しいシステムである。

場合、2.5.5により連続時間システムを実現して、2.3.2で述べた方法により、離散時間システムに変換してもよいのだが、ここでは伝達関数行列からパルス伝達関数行列を直接導く方法について述べることにする。

伝達関数行列が、

$$Y(s) = sB'_{-1} + B'_0 + \sum_{k=1}^m \frac{B'_k}{s - \alpha_k} \quad (2.304)$$

と部分分数展開表現されているとき、

$$B_{-1} = B'_{-1} \quad (2.305)$$

$$B_0 = B'_0 - \sum_{k=1}^m \frac{B'_k}{\alpha_k} \quad (2.306)$$

$$B_k = \frac{B'_k}{\alpha_k}, \quad (k=1, \dots, m) \quad (2.307)$$

と置き換えれば、

$$Y(s) = sB_{-1} + B_0 + \sum_{k=1}^m \frac{sB_k}{s - \alpha_k} \quad (2.308)$$

とも表現できる。このとき、単位応答は2.5.4.3でも述べたように、

$$H(t) = B_{-1}\delta(t) + B_0 + \sum_{k=1}^m B_k e^{\alpha_k t} \quad (2.309)$$

となっており、定常応答を重視する建築伝熱の立場からはこちらの表現のほうが便利である。2等辺3角波ホールド関数のLaplace変換は、

$$G_h(s) = \frac{(1 - e^{-s\Delta t})^2 e^{s\Delta t}}{s^2 \Delta t} \quad (2.310)$$

であるので、 $Y(s)G_h(s)$ の z 変換形より、

$$Y(z) = (1 - z^{-1}) \frac{B_{-1}}{\Delta t} + B_0 + \sum_{k=1}^m \frac{B_k(1 - e^{\alpha_k \Delta t})}{\alpha_k \Delta t} + \sum_{k=1}^m \frac{-B_k(1 - e^{\alpha_k \Delta t})^2}{\alpha_k \Delta t(z - e^{\alpha_k \Delta t})} \quad (2.311)$$

と $Y(z)$ が求まる。ここで、

$$\rho_k = e^{\alpha_k \Delta t}, \quad (k=1, \dots, m) \quad (2.312)$$

$$\rho_{m+1} = 0 \quad (2.313)$$

$$A_0 = \frac{B_{-1}}{\Delta t} + B_0 + \sum_{k=1}^m \frac{B_k(1 - e^{\alpha_k \Delta t})}{\alpha_k \Delta t} \quad (2.314)$$

$$A_k = -\frac{B_k(1 - e^{\alpha_k \Delta t})^2}{\alpha_k \Delta t}, \quad (k=1, \dots, m) \quad (2.315)$$

$$A_{m+1} = -\frac{B_{-1}}{\Delta t} \quad (2.316)$$

と置けば、

$$Y(z) = A_0 + \sum_{k=1}^{m+1} \frac{A_k}{z - \rho_k} \quad (2.317)$$

となる。

2.6.2 畳み込み計算法

パルス伝達関数行列を z^{-1} で、

$$Y(z) = C_0 + C_1 z^{-1} + C_2 z^{-2} + \dots \quad (2.318)$$

と展開したとき C_k をMarkovパラメータというが、これは応答係数行列となっている。すなわち、

$$q_{\Gamma}(n) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k T_{\Gamma}(n-k) \quad (2.319)$$

というMA(Moving Average)表現の係数になっている。古典的な応答係数法は上の畳み込み計算を有限項で打ち切って計算する実直なものであるが¹⁷、精度を確保するのに必要な項数が多くなるという問題がある。 $Y(z)$ が z の有理関数行列として表現されている場合はより効率的な方法を構築することが可能なことから、様々な計算法が提案されてきた。例えば、ASHRAE Fundamentals[9]の伝達係数法や松尾の項別公比法などが建築伝熱分野では代表的なものである。これらは以下のように簡単に導くことができる。

$$Y(z) = \left(\sum_{k=0}^m A_k z^{-k} \right)^{-1} \sum_{k=0}^m B_k z^{-k} \quad (2.320)$$

という表現が得られていればただちに、

$$\sum_{k=0}^m A_k q_{\Gamma}(n-k) = \sum_{k=0}^m B_k T_{\Gamma}(n-k) \quad (2.321)$$

というARMA(Auto Regressive Moving Average)表現が得られ、これはASHRAEの伝達係数法であり、

$$Y(z) = C_0 + \sum_{k=1}^m \frac{C_k}{z - \rho_k} \quad (2.322)$$

という部分分数展開表現が得られていれば、

$$q_{\Gamma k}(n) = \rho_k q_{\Gamma k}(n-1) + C_k T_{\Gamma}(n-1), \quad (k=1, \dots, m) \quad (2.323)$$

$$q_{\Gamma}(n) = \sum_{k=1}^m q_{\Gamma k}(n) + C_0 T_{\Gamma}(n) \quad (2.324)$$

というシステムの実現により計算することもでき、これは項別公比法に他ならない。その他にも種々の計算法が提案されており、渡辺[152]が整理したものが存在する。伝達係数法と項別公比法はシステムの次数 m が等しければ数学的には等価であり、伝達係数法のほうが記憶容量を多く必要とすることから、項別公比法のほうが優れた方法といえる。

¹⁷ 従来は1入力1出力システムでしか考えていないので行列表現ではない。

2.7 まとめ

本章では、多次元壁体の伝熱を表面温度を入力、表面熱流を出力とする線形システムとして捉え、その応答計算法を概観し、更に応答近似について論じた。内部状態変数として物理量、すなわち、壁体内部の温度自身を使用する有限要素法などは汎用的で非線形問題などへの拡張が容易であるという利点をもつ一方、単純に応答特性を表現するには冗長な部分を多く含んでいる。最近ではあまり用いられなくなっているが、伝達関数を用いた表現も、線形システムに限定されるもののまだまだ有用性は失っておらず、もっと利用されてしかるべきであろう。

地盤に接する壁体の熱応答

3.1 はじめに

本章では、第2章で取り上げた手法のうち、地盤に接する壁体の熱応答を算出する方法として、境界要素法によって伝達関数を求め、それを数値 Laplace 逆変換する方法について検討する。

本章で地中伝熱計算法として提案するのは、境界要素法を用いて求めた応答から(広義の)応答係数法によって時間領域で計算を行うものである。国内で熱負荷計算プログラムとして標準的位置を占める HASP/ACLD で応答係数法が用いられているのはよく知られている。応答係数を求めるにはインパルス応答(ステップ応答等でも良い)を求めることが必要である。これには大別して2つの方法がある。時間領域で応答を求める方法及び、Laplace 変換等で時間依存性を一時的に取り除きもとの放物型偏微分方程式より扱いやすい楕円型偏微分方程式を解いて応答を導く方法である。1次元伝熱では後者により解析的に応答が求まるのだが、3次元伝熱では、どちらにしても数値解法に依らざるを得ない。ここでは Laplace 変換解法について述べる。楕円型偏微分方程式の解法としては、差分法、有限要素法、境界要素法のどの解法も選択できるが、境界要素法は地中伝熱のような半無限領域を精度良くかつ簡便に扱え、また表面熱流が直接求まるなど優れた点が多い。

境界要素法は第2章でも簡単に説明したが、以前から境界積分方程式法などと呼ばれていたものに、C.A.Brebbia が汎用性のある重み付き残差法による定式化を行い、また有限要素法で使われる要素を導入することによって、1980年頃から急速に発展した偏微分方程式の解法の一つである[12]。建築伝熱分野でも寺井が早くから研究しており、地盤伝熱関連でも研究[145]がある。また、土間床の周期定常伝熱で地表面温度を与えた場合に関し

では解析解があるが、地表面における積分を数値積分して周期定常解を求めた前田 [64] の研究も広い意味では境界要素法の一つとみなすこともできよう。境界要素法の利点は、差分法や有限要素法などの領域型解法と異なり、境界だけを離散化の対象とするため、扱う次元が1次元減り要素分割の手間が減少すること、無限・半無限領域の問題が精度良く計算できることなどである。欠点は行列が密になること、行列の係数計算の計算量が多いことなどである。また、場が不均一である場合や非線形問題に対して境界要素法はあまり効率的でなくなる、すなわち、領域を小領域に分割しなければならず(部分領域解法)、領域型解法とあまり変わりばえがしないものになってしまうからである。結局のところ、建築伝熱では地中伝熱の分野が境界要素法の本領を最も発揮できる分野であろう。しかし、その能力をうまく活用するためにはそれなりの工夫が必要とされる。

3.2では、熱伝導方程式を対象にして、境界要素法による Laplace 変換解法の定式化を行う。この定式化は、Rizzo と Shippy [120] により提案され、非定常熱伝導問題を解くのに用いられた。問題とするすべての関数が Laplace 変換できれば、時間依存性が一時的に取り除かれ、もとの放物型偏微分方程式より扱いやすい楕円型偏微分方程式を解くことに帰着できる。これを境界積分方程式にし、離散化すれば境界要素解法の定式化は完了するが、いくつかの工夫をすることによって更に効率的な解法にすることができる。地表面や地中部分を離散化せずに地下壁面のみを離散化して解く手法及び地下壁近傍の非等質媒体を直接離散化せず解析的な手法を併用して要素数を増さずに解く手法の2つを新たに提案する。3.3では数値 Laplace 逆変換について述べる。3.2の方法により変換領域における解は求まるが、これを時間領域の解に変換する必要がある。いくつかの変換パラメータについて変換領域における解を求めれば、求まった値を数値 Laplace 逆変換することによって時間領域での解を求めることができる。数値 Laplace 逆変換法としては、第2章で述べた固定公比法と最小2乗法の2つの手法を試みる。これらは時間領域での解を指数級数(Dirichlet 級数)として表現するものであり、変換領域では有理関数としてあらわされる。地下壁体の応答を表現するのに必要な級数の項数、及び逆変換に必要なパラメータの範囲や間隔について考察し、いくつかの適用例を示す。

なお、最近では Laplace 変換解法ではなく、時間領域ではじめから計算する方法のほう主流である。この場合、差分法や有限要素法で空間を直接離散化し節点温度を逐次求めていく手法が一般的だが、境界要素法によるアプローチも可能で時間差分法や時間依存性の基本解を用いる方法が提案されている。しかし、領域積分が必要となるという問題があり、そのためには地中部分を結局離散化しなければならず、境界要素法の魅力は薄れる。境界積分に変換できる場合もあるが、この場合でも畳み込み演算が必要となり、後述のように応答を指数級数で近似することによって畳み込み演算で効率化がはかれる本手法は、実用性の面で優っているように思える。

3.2 境界要素法による定式化

3.2.1 積分方程式

温度を $T = T(\mathbf{x}, t)$ とし、領域 Ω 内で一様媒質であるとするれば、 $c\rho$ を容積比熱、 λ を熱伝導率として、熱伝導方程式は、

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \nabla^2 T \quad (3.1)$$

となる。これは熱拡散率、

$$a = \frac{\lambda}{c\rho} \quad (3.2)$$

を使って、

$$\nabla^2 T - \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t} = 0 \quad (3.3)$$

ともかける。式(3.3)を初期値を0として Laplace 変換すると、Laplace パラメータを s とし、変換領域でも同じ記号 $T = T(\mathbf{x}, s)$ を用いることにすれば、

$$L[T] = \nabla^2 T - \beta^2 T = 0 \quad (3.4)$$

となる。ただし、

$$\beta = \sqrt{\frac{s}{a}} \quad (3.5)$$

である。これは変形 Helmholtz 方程式と呼ばれるものである。 T は s の関数であるが、以降は s を省略して $T = T(\mathbf{x})$ とかくこともある。微分作用素 L はこの場合自己随伴であるから T, T^* が、境界を Γ とし、 $\Omega + \Gamma$ において2階導関数まで連続な関数であるとする、Green の公式、

$$\int_{\Omega} (T^* L[T] - T L[T^*]) d\Omega = \int_{\Gamma} \left(T^* \frac{\partial T}{\partial n} - T \frac{\partial T^*}{\partial n} \right) d\Gamma \quad (3.6)$$

が成り立つ。ただし、 $\partial/\partial n$ は外向き法線微分である。ここで Ω 内で、

$$L[T^*] = -\delta(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}) \quad (3.7)$$

となるように $T^* = T^*(\mathbf{x}; \boldsymbol{\xi})$ を定める。ただし、 $\delta(\mathbf{x})$ は Dirac のデルタ関数である。 T^* は基本解¹と呼ばれ、3次元の変形 Helmholtz 方程式の場合、

$$T^*(\mathbf{x}; \boldsymbol{\xi}) = T^*(r) = \frac{1}{4\pi r} e^{-\beta r} \quad (3.8)$$

ただし、 r は、ソース点 $\boldsymbol{\xi}$ と観測点 \mathbf{x} の間の距離で $r = |\mathbf{r}| = |\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|$ である。式(3.6)の左辺は $L[T] = 0$ とデルタ関数の性質から、ソース点 $\boldsymbol{\xi}$ が領域内にある場合、 $T(\boldsymbol{\xi})$ 、また、滑らかな境界上にあるときは、 $T(\boldsymbol{\xi})/2$ になる。変換領域での熱流、

$$q(\mathbf{x}) = -\lambda \frac{\partial T(\mathbf{x})}{\partial n(\mathbf{x})} \quad (3.9)$$

¹ここでは、基本解 (fundamental solution) という用語を用いたが、他に主要解 (principal solution)、Green 関数等の呼称がある。Green 関数といったときは境界条件を満足しているという意味合いが強い。

を用いれば式 (3.6) は、領域内で、

$$T(\xi) + \int_{\Gamma} T(x) \frac{\partial T^*(x; \xi)}{\partial n(x)} d\Gamma = -\frac{1}{\lambda} \int_{\Gamma} T^*(x; \xi) q(x) d\Gamma \quad (3.10)$$

また、滑らかな境界上で、

$$\frac{1}{2} T(\xi) + \int_{\Gamma} T(x) \frac{\partial T^*(x; \xi)}{\partial n(x)} d\Gamma = -\frac{1}{\lambda} \int_{\Gamma} T^*(x; \xi) q(x) d\Gamma \quad (3.11)$$

とかけると、式 (3.11) を境界積分方程式といい、境界要素法の基礎式となる。

3.2.2 離散化

境界 Γ を N 個の部分境界 Γ_i (境界要素と呼ばれる) に分割する。境界要素 Γ_i の形状は、3 角形、4 角形をはじめとして曲面 3 角形、曲面 4 角形 (高次要素と呼ばれる) 等があり、有限要素法の手法が用いられる。本論文では、4 角形一定要素を利用する。滑らかな境界上の点における境界積分方程式は、

$$\frac{1}{2} T(\xi) + \int_{\Gamma} T(x) \frac{\partial T^*(x; \xi)}{\partial n(x)} d\Gamma = -\frac{1}{\lambda} \int_{\Gamma} T^*(x; \xi) q(x) d\Gamma \quad (3.12)$$

であった。境界要素 Γ_i において温度 $T(\xi)$ 、熱流 $q(\xi)$ の値が、一定値 $T_i = T(\xi_i)$ 、 $q_i = q(\xi_i)$ (要素重心座標 ξ_i の値で代表させる) であるとすれば、

$$\frac{1}{2} T_i + \sum_{j=1}^N T_j \int_{\Gamma_j} \frac{\partial T^*(x; \xi_i)}{\partial n_j} d\Gamma = -\frac{1}{\lambda} \sum_{j=1}^N q_j \int_{\Gamma_j} T^*(x; \xi_i) d\Gamma \quad (3.13)$$

のように表すことができる。ただし、 n_j は j 要素の外向き法線微分である。このような要素のことを一定要素もしくは 0 次要素と呼ぶ²。ここで、

$$H_{ij} = \frac{1}{2} \delta_{ij} + \int_{\Gamma_j} \frac{\partial T^*(x; \xi_i)}{\partial n_j} d\Gamma \quad (3.14)$$

$$G_{ij} = -\frac{1}{\lambda} \int_{\Gamma_j} T^*(x; \xi_i) d\Gamma \quad (3.15)$$

とおく。ただし、 δ_{ij} は Kronecker の記号である。 N 個の点における境界積分方程式を連立すれば、 $\mathbf{T} = [T_i]^T$ 、 $\mathbf{q} = [q_i]^T$ 、 $\mathbf{H} = (H_{ij})$ 、 $\mathbf{G} = (G_{ij})$ において、

$$\mathbf{HT} = \mathbf{Gq} \quad (3.16)$$

の行列表示を得る。

図 3.1 のような 4 角形要素を考え、各節点を領域の外側から見て反時計回りに番号付けし、 i 節点の座標を $\mathbf{x}_i = (x_i, y_i, z_i)$ とする。すると、要素内の座標は -1 から 1 までの値をとる ξ 、 η を用いて、

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^4 \phi_i \mathbf{x}_i \quad (3.17)$$

²要素内では 1 次変化するというのが線形要素もしくは 1 次要素。

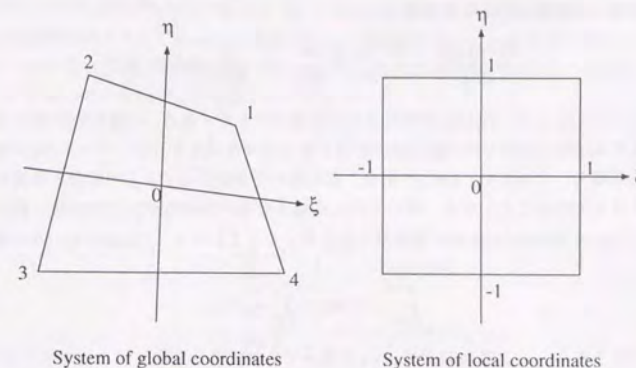


図 3.1 全体座標系と局所座標系

と表すことができる。ここで ϕ_i は形状関数でこの場合、

$$\phi_1 = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta) \quad (3.18)$$

$$\phi_2 = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta) \quad (3.19)$$

$$\phi_3 = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta) \quad (3.20)$$

$$\phi_4 = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta) \quad (3.21)$$

となる。このように形状関数を導入することにより、全体座標系 $\mathbf{x} = (x, y, z)$ から局所座標系 (ξ, η) による表現に変換することができたが、積分中の $d\Gamma$ に関しても変換する必要がある。

$$d\Gamma = \left| \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \eta} \right| = |g| d\xi d\eta \quad (3.22)$$

ここで g は、

$$g = \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial z}{\partial \eta} - \frac{\partial z}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta}, \frac{\partial z}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial z}{\partial \eta}, \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} \right)^T \quad (3.23)$$

である。

3.2.3 係数行列の計算法

基本解はソース $\xi = (\xi, \eta, \zeta)$ と観測点 $\mathbf{x} = (x, y, z)$ の距離 $r = |\mathbf{r}| (r = \mathbf{x} - \xi)$ の関数であり、

$$T^*(\mathbf{x}; \xi) = \frac{1}{4\pi r} e^{-\beta r} \quad (3.24)$$

と表せる。基本解の外向き法線微分は、

$$\frac{\partial T^*(x; \xi)}{\partial n_j} = \frac{\partial T^*(x; \xi)}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial n_j} = -\frac{d}{4\pi r^3} (1 + \beta r) e^{-\beta r} \quad (3.25)$$

ただし、 $d = n_j \cdot r$ で、 n_j は Γ_j の外向き単位法線ベクトルである。係数行列の成分 H_{ij} 、 G_{ij} を計算する場合には何らかの形で積分計算を行わなければならない。ソース点 ξ が積分範囲 Γ_j にある場合、すなわち、 $i = j$ の場合、基本解の特異性から $i \neq j$ の場合と事情が異なるため分けて述べることにする。積分方法には様々なものがあるが、ここでは一般的によく使われている Gauss-Legendre 数値積分法を用いることにする。Gauss-Legendre 数値積分法は、

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \sim \sum_{k=1}^n w_k f(x_k) \quad (3.26)$$

の形で表される。ここで x_k は分点、 w_k は重みであり、積分次数 n によってすべて異なる。分点、重みに関しては文献 [155] などを参照されたい。この公式を用いれば、 $i \neq j$ のとき、

$$H_{ij} = \int_{\Gamma_j} \frac{\partial T^*(x; \xi_i)}{\partial n_j} d\Gamma = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\partial T^*(x; \xi_i)}{\partial n_j} |g| d\xi d\eta \quad (3.27)$$

$$G_{ij} = \int_{\Gamma_j} T^*(x; \xi_i) d\Gamma = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 T^*(x; \xi_i) |g| d\xi d\eta \quad (3.28)$$

となる。ただし、 ξ_i は、境界要素 Γ_i の重心の座標にとる。

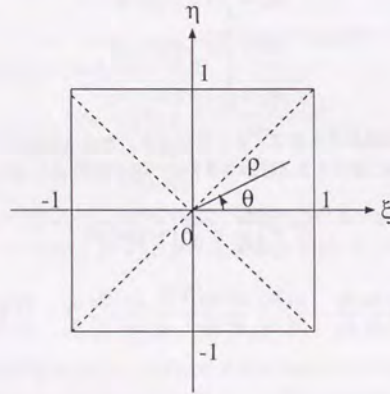


図 3.2 局所座標系とその極座標表示

H_{ii} 、 G_{ii} に含まれる積分は基本解がの特異性を有することから前述の方法では特異点を避けるように積分点を選べば計算は可能ではあるが精度が悪い。 H_{ii} は、一定要素の場合 r

と n の直交性から $\partial T^* / \partial n = 0$ で単純に $H_{ii} = 1/2$ となるので G_{ii} の場合が問題となる。特異性は極座標変換することによって除去することが可能であり、いくつかの積分方法が開発されている³[150][32]。本論文では Utamura and Koizumi[150]の方法を一定要素に適用したものをを用いているのでこの方法について説明する。

$$\int_{\Gamma_i} T^* d\Gamma = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 T^* |g| d\xi d\eta \quad (3.29)$$

において $\xi = \rho \cos \theta$ 、 $\eta = \rho \sin \theta$ とおけば、

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_i} T^* d\Gamma &= \sum_{k=1}^4 \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \int_0^{\sec \varphi} T^* |g| \rho d\rho d\varphi \\ &= \sum_{k=1}^4 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 T^* |g| \frac{\pi}{8} \rho \sec \varphi d\xi' d\eta' \end{aligned} \quad (3.30)$$

となる。ただし、

$$\varphi = \theta - \frac{\pi}{2}(k-1) = \frac{\pi}{4}\xi' \quad (3.31)$$

$$\rho = \frac{1}{2} \sec \varphi (1 + \eta') \quad (3.32)$$

とおいた。ここで、 ξ' 、 η' に関して Gauss-Legendre 数値積分を行えば良い。積分領域を 4 つにわけて計算するため積分次数が同じ場合、 ξ 、 η に関して Gauss-Legendre 数値積分する場合に比べ計算量は 4 倍になる。なお、計算プログラムでは、予め、 (ξ, η) 座標系における分点と重みを計算して用意しておけば、 ξ 、 η に関してそのまま Gauss-Legendre 数値積分を行う場合と単に分点と重みが異なるだけである。

3.2.4 地表面における境界条件

対象とする領域を $z > 0$ とする。 $z = 0$ の平面での同次 Dirichlet 境界条件

$$T(x) = 0 \quad \text{on } \Gamma_{z=0} \quad (3.33)$$

を予め満足する基本解は、ソース点 $\xi = (\xi, \eta, \zeta)$ の $z = 0$ の平面に対して対称な点 $\xi' = (\xi, \eta, -\zeta)$ を考え、

$$T_1^*(x; \xi) = T_\infty^*(r) - T_\infty^*(r') \quad (3.34)$$

とすれば良い。ただし、 $r = |x - \xi|$ 、 $r' = |x - \xi'|$ である。 $z = 0$ の平面上の点に対し $r = r'$ であるから明かに式 (3.33) を満たす。 $r \neq 0$ より、 $T_1^*(r)$ は同次方程式の解であり、基本解の性質は保たれる。ここで $T_\infty^*(r)$ は無限領域での基本解である。Neumann 境界条件、

$$\frac{\partial T(x)}{\partial z} = 0 \quad \text{on } \Gamma_{z=0} \quad (3.35)$$

³ $\beta = 0$ の場合、すなわち、Laplace 方程式の場合は解析的に積分できる。

をみたす基本解は同様に

$$T_2^*(x; \xi) = T_\infty^*(r) + T_\infty^*(r') \quad (3.36)$$

を考えれば良い, これは対称条件の際よく使われる, Robin 境界条件,

$$\frac{\partial T(x)}{\partial z} = hT(x) \quad \text{on } \Gamma_{z=0} \quad (3.37)$$

の場合は, 多少複雑だが,

$$T_3^*(x; \xi) = T_\infty^*(r) + T_\infty^*(r') - 2he^{h\zeta} \int_{-\infty}^{-\zeta} T_\infty^*(r_\nu) e^{h\nu} d\nu \quad (3.38)$$

となる [34]. ただし, $h = \alpha/\lambda$ で, α は地表面熱伝達率であり, また, $r_\nu = |r_\nu| = |\mathbf{x} - \xi_\nu|$ で, $\xi_\nu = (\xi, \eta, \nu)$ である. $T_3^*(x; \xi)$ は, $h = 0$ のとき $T_2^*(x; \xi)$, $h = \infty$ のとき $T_1^*(x; \xi)$ となるのは自明である.

我々が, 地下室問題等地下伝熱の問題を扱う際式 (3.37) は地表面に接する流体温が 0 の場合の熱伝達境界に相当する. すなわち, この境界条件を予め満足した基本解を用いれば地表面に接する流体温が 0 のときは地表面を離散化する必要がなくなる. またこのとき地中内, 地下室から無限遠で T, q が 0 になることから地中内も離散化しなくてよい. 地表面に接する流体温が 0 でない場合の取扱いは後に行う.

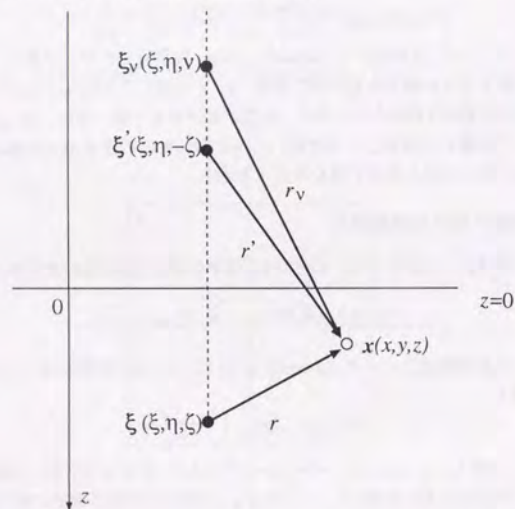


図 3.3 鏡像点

このように式 (3.38) を基本解として用いれば地表面を離散化しなくてすむのだが, 式 (3.38) は第 3 項に積分を含んでいる. 解析的にこの積分を行うのは特殊な条件の場合以外

不可能なので数値積分を行う.

$$T_c^*(x; \xi) = he^{h\zeta} \int_{-\infty}^{-\zeta} T_\infty^*(r_\nu) e^{h\nu} d\nu = \int_0^\infty e^{-\mu} T_\infty^*(r_\nu) d\mu \quad (3.39)$$

ただし,

$$\mu = -h(\zeta + \nu) \quad (3.40)$$

とし, 次の Gauss-Laguerre 数値積分法を用いる.

$$\int_0^\infty e^{-x} f(x) \sim \sum_{k=1}^n f(x_k) w_k \quad (3.41)$$

ただし, x_k は分点, w_k は重みである. 分点及び重みに関する定義は文献 [155] などを参照されたい.

Gauss-Laguerre 数値積分の次数を決定するために, 積分精度について検討する. $x = \xi$, $y = \eta$ のときは, 式 (3.39) は解析的に積分することが可能である. すなわち, $r' = z + \zeta$, $r_\nu = z - \nu$ より,

$$T_c^*(x; \xi) = T_c^*(r') = -he^{hr'} \text{Ei}(-(h + \beta)r') \quad (3.42)$$

となる. ここで, $\text{Ei}(x)$ は積分指数関数である. 図 3.4 に $\beta = 0$ (定常) のときの式 (3.39) の Gauss-Laguerre 数値積分の相対誤差を示す. $h = \alpha/\lambda$ は, 地表面熱伝達率 $\alpha = 20 [\text{kcal}/\text{m}^2\text{hK}]$ とし, 地盤熱伝導率 $\lambda = 2 [\text{kcal}/\text{mhK}]$ と大きめに想定して $h = 10 [\text{m}]$ の値を設定した. $z + \zeta$ が最も小さい値をとるのは地表面に最も近い境界要素における積分であるが, 要素重心の z 座標が $0.2 [\text{m}]$ 程度すなわち, 要素分割幅が $0.4 [\text{m}]$ 程度であれば, 2 次の数値積分によって最悪 ($z = 0$, $\zeta = 0.2$) でも相対誤差で 10^{-2} 程度は確保できる. したがって, 要素全体の積分で考えれば, 更に要素分割幅が小さくても 2, 3 次の数値積分で十分な精度が得られることがわかる. なお, h が小さいほど, また, β が大きいほど相対誤差は大きくなるが, h は $10 [\text{m}]$ 程度が下限であり, β は大きくなるほど相対誤差は大きくなるものの, T_c^* は β が大きくなると急激に減衰するので, 絶対誤差では小さくなり実際上問題ない. h を変えたときの 2 次の数値積分の相対誤差を図 3.5 に, また, β を変えたときの 2 次の数値積分の絶対誤差を図 3.6 に示す.

ところで $1/h$ は地表面の抵抗を土壌の厚みに換算したときの係数になるが, $h = 10$ のとき $1/h = 0.1 [\text{m}]$ で $0.1 [\text{m}]$ 程度の凹凸は現実の地表面に存在することを考えると, あまり厳密に数値積分の精度を議論しても無意味である. そこで, より簡易な計算法として,

$$T_3^*(x; \xi) = T_\infty^*(r) - \frac{h - \beta}{h + \beta} T_\infty^*(r'') \quad (3.43)$$

を提案する. ここで, $r'' = |r''| = |\mathbf{x} - \xi''|$ で,

$$\xi'' = \left(\xi, \eta, -\zeta - \frac{2}{h + \beta} \right) \quad (3.44)$$

である. $\beta = 0$ の定常のとき, これは地表面の抵抗を土壌の厚みに置き換えて新たに地表面位置を $-1/h$ の位置に設定したことになる. また, $\beta \rightarrow \infty$ のときは $T_2^*(x; \xi)$ になり, 地表

面を断熱境界としたのと同じになる。地表に近い壁体の抵抗が地表面の熱伝達抵抗に対して十分大きければ、式(3.43)でも十分な精度を確保できるだろう。地表面の熱抵抗を $0.05 [\text{m}^2\text{hK/kcal}]$ 、壁体の熱抵抗をコンクリート $0.1[\text{m}]$ 程度を想定して、 $0.1[\text{m}^2\text{hK/kcal}]$ 、地下壁表面の熱抵抗を $0.125[\text{m}^2\text{hK/kcal}]$ とすれば、地表面の熱抵抗は、地盤の抵抗を無視しても全抵抗の18%程度に過ぎず、断熱が施されていれば更に地表面熱抵抗の影響は小さくなることから考えて、特に高い精度が要求されない場合は式(3.43)を用いても問題ないものと思われる。このことに関しては、3.3.3で更に検討することにする。

3.2.5 地下壁面における境界条件

通常は、Dirichlet, Neumann もしくは Robin 境界条件を与えて、式(3.16)を解くのだが地下室近傍壁体(例えばコンクリート・断熱材等)に関して解析的な方法を併用して取り扱う方法を示す。

近傍壁体を有限要素法や境界要素法を用いて直接離散化し地中と連成する方法もあるが、非常に薄い部材を離散化した場合、数値積分の精度を確保するにはかなり多くの積分点をとらねばならず、また要素数を増せばそれだけ計算量も増す。そこで近傍壁体に関しては1次元的に扱うことを提案する。境界要素に対応した分割壁体の4端子行列を考える。すなわち、

$$\begin{bmatrix} T_i' \\ q_i' \end{bmatrix} = F_i \begin{bmatrix} T_i \\ q_i \end{bmatrix} \quad (3.45)$$

ただし、

$$F_i = \begin{bmatrix} f_{Ai} & f_{Bi} \\ f_{Ci} & f_{Di} \end{bmatrix} \quad (3.46)$$

とし、 F_i の各成分からなる対角行列、 $F_A = \text{diag}(F_{Ai})$, $F_B = \text{diag}(F_{Bi})$, $F_C = \text{diag}(F_{Ci})$, $F_D = \text{diag}(F_{Di})$ を考える。そして、 $T = [T_i]^T$, $T' = [T_i']^T$, $q = [q_i]^T$, $q' = [q_i']^T$ とすれば、

$$T' = F_A T + F_B q \quad (3.47)$$

$$q' = F_C T + F_D q \quad (3.48)$$

と壁両面の温度・熱流に関する方程式を表現できる。また、地中伝熱に関する境界要素法による式は、

$$HT' = Gq' \quad (3.49)$$

であるので、これらを連成すると、結局、次の方程式が解くべき方程式となる。

$$(HF_A - GF_C)T = (HF_D - GF_B)q \quad (3.50)$$

3.2.6 地表面に接する流体温度が0でない場合

地表面に接する流体温度(建築環境工学では日射の影響も等価温度上昇に換算してかわえるので以後、地表面 SAT と呼ぶ)が0でない場合は、地下室から無限遠で、とも0に収束

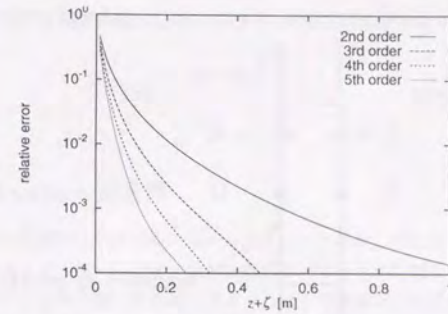


図 3.4 Gauss-Laguerre 数値積分の相対誤差 ($\beta = 0$, $h = 10[\text{m}]$)

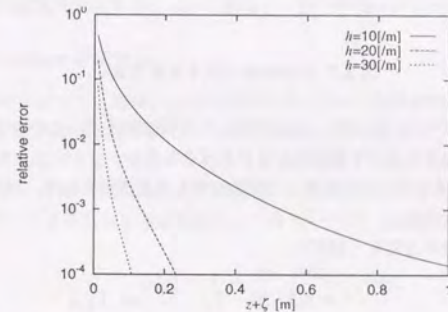


図 3.5 h を変化させたときの 2 次の Gauss-Laguerre 数値積分の相対誤差 ($\beta = 0$)

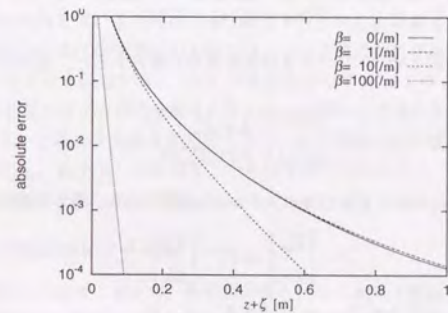


図 3.6 β を変化させたときの 2 次の Gauss-Laguerre 数値積分の絶対誤差 ($h = 10[\text{m}]$)

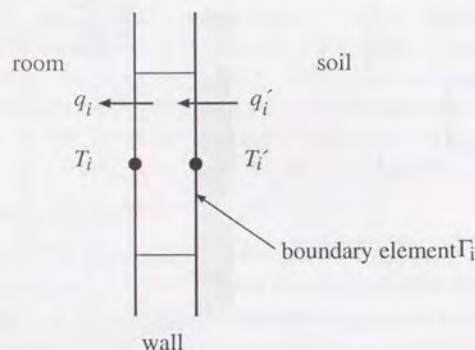


図 3.7 近傍壁体に関する取り扱い

せず 1 次元解に収束する。よって、3.2.4 で示した方法は使えず、このままでは地表面・地中とも適当な仮想境界を用いて離散化しなければならない。しかし、これに対しては、寺井 [145] が示しているように 1 次元解との偏差に関して定式化すれば、地表面・地中とも離散化する必要がなくなる。

地表面における境界条件を一般的に、

$$\frac{\partial T'(x)}{\partial z} = h(T'(x) - T_0) \quad \text{on } \Gamma_{z=0} \quad (3.51)$$

とした場合について考えよう。

$$T'(x) = T'_a(x) + T'_b(x) \quad (3.52)$$

とし、 $T'_a(x)$ が地表面 SAT が T_0 のときの無限遠での解とすると、地中では、

$$T'_a(x) = \frac{h}{h + \beta} e^{-\beta z} T_0 \quad (3.53)$$

$$q'_a(x) = \beta \lambda n_z T'_a(x) \quad (3.54)$$

となる。ただし、 n_z は外向き単位法線ベクトルの z 成分である。地下壁面の境界要素 Γ_i では、

$$\begin{bmatrix} T_{ai} \\ q_{ai} \end{bmatrix} = F_i^{-1} \begin{bmatrix} T'_{ai} \\ q'_{ai} \end{bmatrix} \quad (3.55)$$

の関係があるので、これから T_{ai} 、 q_{ai} が求まる。よって、

$$T_{bi} = T_i - T_{ai} \quad (3.56)$$

からなる $T_b = [T_{bi}]^T$ を境界条件にして、式 (3.50) を解けば q_b が求まり、最後に q_a を加え、

$$q = q_a + q_b \quad (3.57)$$

とすればよい。

3.3 数値 Laplace 逆変換

1 次元壁体では伝達関数を解析的に求めることができるが、多次元壁体では解析的に伝達関数を求めることが一般にできず、離散的な変換パラメータに関してしか解を求めることができないため、変換領域で離散的に求まった解を時間領域の解に変換する、いわゆる数値 Laplace 逆変換が本質的に必要である。前節では、Laplace 変換領域における解を境界要素法によって求める手法について述べた。本節では、それを数値 Laplace 逆変換することによって壁体の応答を得る手法について概説し、地下壁体への適用を試みる。

3.3.1 数値 Laplace 逆変換法

応用上の目的からいって、壁体の応答は時間領域において指数関数の有限級数の形で表現したい。項別公比法や逐次積分法もしくは伝達係数法を時間領域における畳み込み手法として採用するためには、まず応答がそのように表現されていることが前提となっており、誤差関数などを含んだ形では狭義の応答係数法しか採用することができないためである。そこで、第 2 章で応答の最小 2 乗近似法として取り上げた、伝達関数、

$$G(s) = A_0 + \sum_{k=1}^N \frac{s A_k}{s - \alpha_k} \quad (3.58)$$

を単位 (ステップ) 応答の最小 2 乗近似となるように係数を決定する手法として、固定公比法と最小 2 乗法⁴を採用し、地盤に接する壁体の応答近似に適用する。両手法とも変換パラメータとして正の実数を用いる点では共通しており、このため計算はすべて実数で行うことができる。固定公比法 [76] (選点法 [125]) では、 $-\alpha_k$ を離散的に与える Laplace パラメータの値 s_k に等しいものと仮定する。 $s = 0$ の場合を含めて $N + 1$ の s_k について $G(s_k)$ を求めれば、係数は N 元連立方程式を解くことによって簡単に求められる。最小 2 乗法 [82] は、変換領域において最小 2 乗法を適用するものであり係数 $-\alpha_k$ を既知とする方法もあるが、ここでは係数 α_k 、 A_k ともに未知数としたものを指すことにする。この場合、方程式が非線形なので反復解法を取らざるを得ない。

3.3.2 1 次元半無限体による検討

多次元半無限体への適用に先立ち、解析解の得られる 1 次元半無限体の吸熱応答により検討を行う。逆変換は本質的には曲線近似なので解の挙動を前もって知っていることが重要

⁴ 極を未知とした非線形最小 2 乗法を解くものを本論文では最小 2 乗法と呼ぶことにする。

である。なぜなら、余り多数の値を選ぶと計算量が増え非効率であるだけでなく式が不安定になり係数を決定すること自体が困難になってしまうし、少なすぎれば曲線を精度よく近似することができないからである。このため逆変換に必要なパラメータの範囲や項数についてあらかじめ検討しておく必要がある。変換パラメータ s の値を選ぶためには $\log s$ と伝達関数 $G(s)$ の関係を見れば良いことが指摘されている [125])。

単層壁(地盤に直接接する壁)においては、吸熱応答の伝達関数 $G(s)$ は、表面熱伝達率を α [kcal/m²hK] として、

$$G(s) = \frac{\alpha \sqrt{c\rho\lambda s}}{\alpha + \sqrt{c\rho\lambda s}} \quad (3.59)$$

と解析的に求まる。これは、式(3.59)の形から明らかなように、 $s=0$ で $G(s)=0$ 、 $s \rightarrow \infty$ で $G(s) \rightarrow \alpha$ となる単調増加関数である。

図 3.8 に $c\rho\lambda$ の値を変化させたときの Laplace パラメータ s と伝達関数 $G(s)$ の関係を示す。地盤の $c\rho\lambda$ は 100~1000 [kcal²/m⁴hK²] 程度であり、岩盤等を除けば、 s の下限は 10^{-5} 程度を考えれば良い。伝達関数の近似には、固定公比法をまず用いる。 $s_1 = 10^{-5}$ から s_N まで $s_{k+1}/s_k = r$ (定数) として変換パラメータ系列をつくる。周波数領域で近似精度をみると、 $r = \sqrt{10}$ 、 $N = 14$ で十分な精度が得られていることがわかる(図 3.9)。この系列はまた、時間領域で応答を近似する手法 [56][21] で採用された系列と一致している。次に最小 2 乗法を用いて逆変換を行った。 $r = \sqrt{10}$ 、 $N = 14$ で近似項数を変えた場合を図 3.10 に示す。最大項数である 7 項(最小 2 乗法ではなく極も未知数とした非線形方程式を解いたことになる)までとれば、固定公比法と比べれば若干の振動が見られるものの十分な近似が得られる。

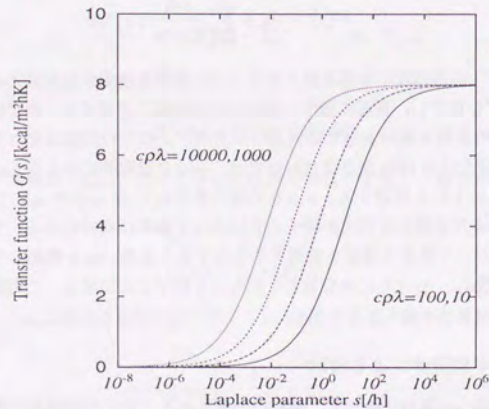


図 3.8 Laplace 変換パラメータと伝達関数の関係

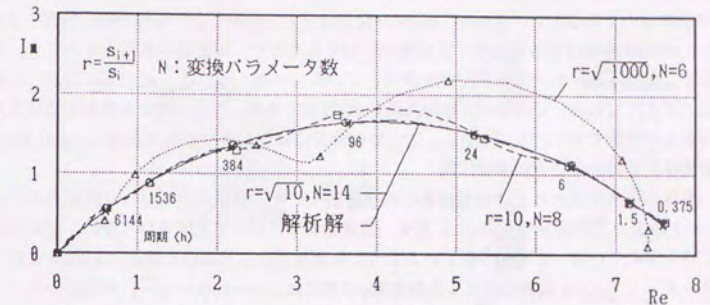


図 3.9 1 次元半無限体(単層)の固定公比法による応答近似(周波数領域)

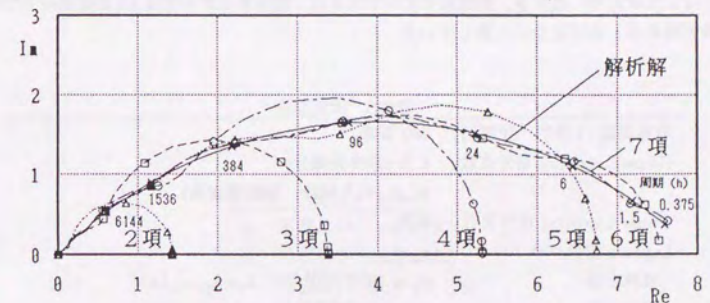


図 3.10 1 次元半無限体(単層)の最小 2 乗法による応答近似(周波数領域)

3.3.3 地下壁体における応用

住宅規模の地下室を想定した計算モデル(図 3.11)の地下壁体の応答を境界要素法を用いて求めた。計算には、地表面を離散化しない方法を用いているが、まずはじめに、壁の応答を計算したときにどの程度の誤差になるのかを調べる。Gauss-Laguerre 数値積分の次数を 10 次ものを精解とし、Gauss-Laguerre 数値積分で次数が 2 次ものの相対誤差をプロットしたのが図 3.12 である。地下室全体の平均応答なので、無断熱の条件においても、貫流応答、吸熱応答とも十分な精度で計算できている。一方、図には、式 (3.43) に示した簡易式による計算も示しているが、相対誤差で 1% 程度であり、この方法でも実用上はほとんど問題なく計算できている。しかし、ここでの計算にはより高精度の 3 次の Gauss-Laguerre 数値積分を用いることにする。

壁体の断熱仕様としては断熱材無しの無断熱モデルと壁部分を断熱した壁断熱モデルの 2 つを考えた。設定条件を表 3.1 に示す。周波数領域において比較を行うため、直接周波数応答も求めている。よく知られているように初期条件を 0 とおいた場合、Laplace 変換パラメータ s と Fourier 変換における角振動数 ω の間には、 $s = i\omega (i = \sqrt{-1})$ の関係があり、周波数応答はこの置き換えにより計算することができる。数値逆変換には固定公比法と極も未知数とした方法の 2 つを試みた。計算結果を、図 3.13 から図 3.16 に示す。吸熱応答に関しては、 $s_1 = 10^{-5}$, $r = s_{k+1}/s_k = \sqrt{10}$, $N = 14$ のパラメータ系列で十分な近似ができている。貫流応答に関しては一般に吸熱応答より小さいパラメータまでとらなければならないが、本例では $s_1 = 10^{-8}$, $r = \sqrt{10}$, $N = 14$ のパラメータ系列を用いたところ妥当な近似が得られた。ところで、本例をみてもわかるように地下壁体においては、貫流応答よりも吸熱応答のほうが重要である。吸熱応答は、物理的にも明かなように、周期が短くなるほど 1 次元解に近づき、無断熱モデルでは 4 日、壁断熱モデルでは 16 日周期以下では 1 次元解析解とはほぼ完全に一致している。

表 3.1 設定条件

境界要素 (4 角形一定要素)	300 要素
Gauss-Legendre 積分点数	4 点 (非特異積分)
	36 点 (特異積分, 極座標変換)
Gauss-Laguerre 積分次数	3 次
Laplace 変換パラメータ	$s_0 = 0$
吸熱応答	$s_k = 10^{-5+0.5(k-1)}$, $k = 1, \dots, 14$
貫流応答	$s_k = 10^{-8+0.5(k-1)}$, $k = 1, \dots, 14$
数値 Laplace 逆変換法	固定公比法 14 項
	最小 2 乗法 (極も未知とした方法) 7 項 (最大項数)
壁体仕様	無断熱モデル
	壁断熱モデル

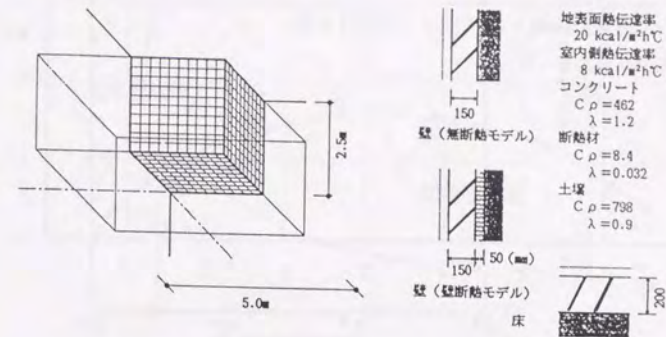


図 3.11 シミュレーションモデル

表 3.2 記号

cp	容積比熱 [kcal/m³K]
λ	熱伝導率 [kcal/mhK]
s	Laplace パラメータ [/h]
ω	角振動数 [cycle/h]
T	温度 [K]
q	熱流 [kcal/m²h]

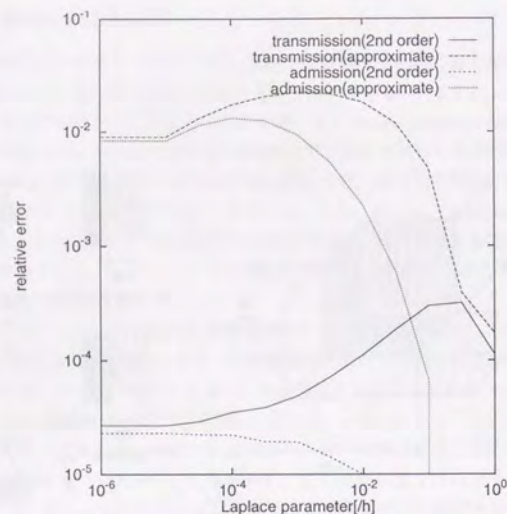


図 3.12 地表面 Robin 境界条件に対する計算法の違いによる相対誤差の検討

3.4 まとめ

半無限体のように応答が長期にわたるものを実際に時間領域で処理するためには、逐次積分法や項別公比法もしくは伝達係数法による方法以外は現実性がなく、これらの方法を利用するためには応答を指数関数の和で表さなければならない。数値 Laplace 逆変換手法として固定公比法と最小 2 乗法の 2 つの手法を検討し、境界要素法の Laplace 変換解法によって得た地盤の応答も 10 項程度で近似可能であることを示した。これは、通常の壁体が 2 項程度で近似可能である [82] とされているのと比べればかなり多くの項数を必要とするといえるが、非現実的というほどのものではない。また、時間領域での計算法は従来の手法をほぼそのままの形で適用することが可能であり、応答さえ求めておけば、地中伝熱問題で多く用いられている地中内の温度も同時に計算する手法と比べ計算量・記憶容量の点から見て圧倒的に有利である。

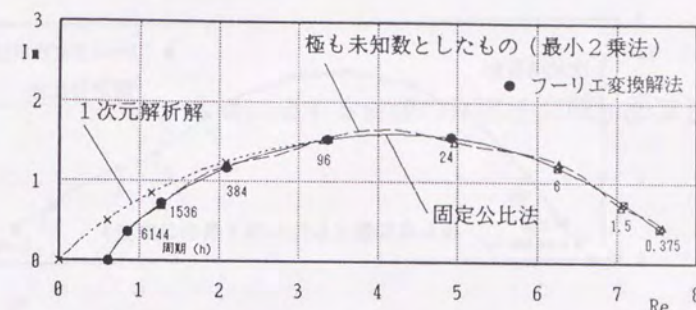


図 3.13 単位面積当たりの地下壁の吸熱応答 (無断熱)

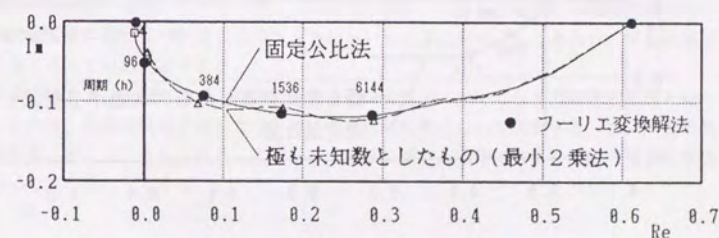


図 3.14 単位面積当たりの地下壁の貫流応答 (無断熱)

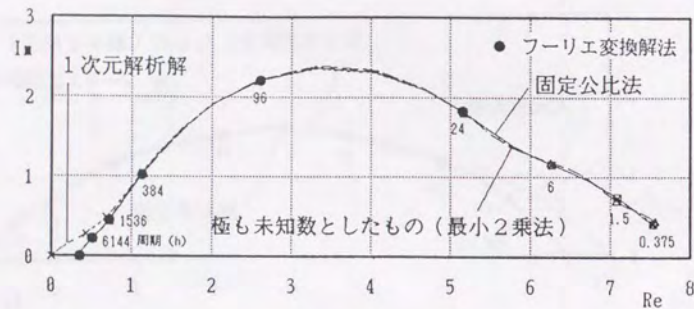


図 3.15 単位面積当たりの地下壁の吸熱応答 (壁断熱)

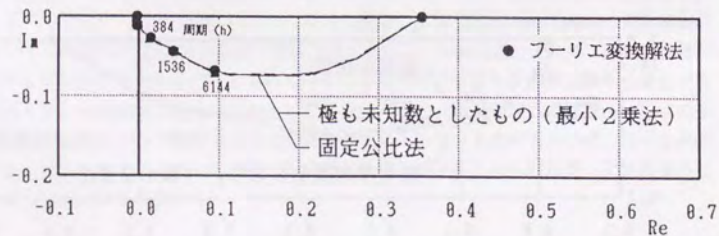


図 3.16 単位面積当たりの地下壁の貫流応答 (壁断熱)

地盤に接する壁体の熱応答の簡易計算法

4.1 はじめに

1次元壁体の熱損失係数の計算は、非常に簡便なため、定常伝熱を仮定した簡易計算法は実務の現場においてよく用いられる。しかしこれが熱橋や地下室・土間床などにおける地中伝熱の問題などになると、2次元・3次元の取り扱いをしなければならないため、定常計算であってもいきなり問題が複雑になってしまう。ましてや非定常計算ともなれば大規模なコンピュータシミュレーションを行わなければまず正確な値を得ることは不可能である。そのため、最近は差分法や有限要素法、境界要素法といった数値計算法を用いるのが研究レベルでは一般化してきている。とはいっても、これらをいきなり設計段階で用いるのは入力の手間や計算負荷の大きさからいってまだ先のことであろう。簡易計算法が必要とされている所以である。

本章ではまず、地盤に接する壁体熱損失の簡易計算法についてこれまでの研究状況を振り返ったのち、簡易計算法を構築するために必要な解析解について考察する。次に、動的熱負荷計算に用いることを目的として開発した地盤に接する壁体の非定常熱流の簡易計算法について述べることにする。

4.2 既往の研究

地下室や土間床の熱損失計算の場合に限らないが、一般にこの種の計算方法は大きく2つに分類できる。第1は解析的方法であり、もう1つは数値的方法である。まず、解析的方法について述べることにしよう。

地盤に接する壁体の熱損失を、実際に生じ得る様々な条件のもとで計算することは所詮できないので、現実の複雑な条件を適切な仮定の下にうまく単純化し計算できるようにしなければならない。すなわち、モデル化の問題である。地中伝熱の場合でいえば、地盤内の水分移動は考えないとか、地盤の熱物性値は一定とするといったことが通常行われる。3次元問題を2次元問題に置き換えるとか、地盤以外の部分の壁に関しては熱容量を無視し熱抵抗のみを考慮する、地下室形状を単純化して直方体にするなどという簡略化が更に行われる場合も多い。

「適切な仮定」が行われないとモデル化誤差が大きくなりすぎて使いものにならないものになってしまう危険性があるので、モデル化は慎重に行う必要がある。

様々な仮定を設けて問題を単純化していても解析的に解けるようにするにはかなり職人芸的な技量が必要とされるため格好の研究分野となり、熱伝導問題に関して前世紀から膨大な研究がなされてきた[14]。多少複雑な形状のものでも、2次元問題であれば複素関数論の知識を用いて、例えば Schwarz-Christoffel 変換により解析的に解くことができることがわかっている[14][50]。

簡略化された条件のもとでの解析解は今までに多数発表されているが、ほとんどが土間床に関するものである。地盤を半無限体とみて、地表面温度分布が与えられたときに地盤内部の温度分布や表面の熱流がどうなるかという問題に対しては3次元の場合でも解析解が得られている。ただし、これは地表面温度分布を表す関数を積分の中に含んでおり、数学的にはこれで解けたことになるのだろうが、具体的に積分して初等関数(＋特殊関数程度)で表現できないと実際には使えない。これに関しては地表面の温度分布を室内側、室外側でそれぞれ一定値を与え室内外を隔てる壁内で直線的に温度変化するという仮定をした場合の解を求めた例[18]がある。

Krarti et al.[59]は地盤をいくつかのゾーンにわけ、Fourier 変換領域で各ゾーンの温度分布と熱流の関係を解析的に計算したのちゾーン間で連成して解く ITPE(Interzone Temperature Profile Estimation)法を提案している。これは半解析的アプローチと言え、手計算でこれを遂行するのは困難だが大規模な数値シミュレーションと比較すれば微々たる計算量で解を得ることができる方法である。ただし、基礎式はかなり複雑なものである。

Boileau and Latta の heat flow path 法[11]は ASHRAE Handbook Fundamentals でも取り上げられている方法であり最もよく知られた定常計算法であろう。熱流が地盤内で円弧状になるとして熱の通過する長さを算出し、表面熱伝達抵抗や壁床の断熱材の抵抗は等価的な土の厚みに置き換えてこれに加え1次元計算によって各部位の熱流を計算することができる。地下室全体の熱流は各部位の熱流を積分すれば得ることができる。地下室・土間床を問わず適用することができ、部分断熱の扱いも簡単である。ただし、heat flow path をはじめから仮定している点、3次元的な熱の広がりを無視している点などから精度的には多くを期待できない。国内では、石田がこの方法を検討しており、3次元的な隅角部に対する面積割り増し等を提案している[43]。

以上の解析的なアプローチの他に、差分法・有限要素法・境界要素法などの離散化手続を経て、問題を連立1次方程式を解くことに帰着させる方法がある。定常熱伝導問題程

度であればパソコンでも相当規模の計算が可能になってきており、複雑な境界条件や物性値の不均一性など解析的方法では全く不可能であった計算が大した苦勞もなくできてしまう。その分、現象の関数的理解が損なわれるという批判もある。

数値シミュレーションを大量にかつ系統的に行い、その結果をもとに近似式を作成する試みはいくつか行われている。

Shipp は2次元差分計算結果の重回帰分析から推定式を作成しており[132]、ASHRAE Standard 90.2P, "Energy Efficient Design of New, Low-Rise Residential Buildings."で断熱レベルの算出根拠となっている[16]。

また、G.P.Mitalas[95]は土間床・地下室の2,3次元有限要素法による解析結果をもとにまとめており、R2000の暖房負荷計算プログラム HOT2000 で用いられている。他にも、Akridge et al.[6]の3次元差分法によるもの、Yard et al.[157]が2次元有限要素法によるものがあり、国内でも赤坂[1][4]や、松本・吉野[73]が2次元有限要素法の結果をもとに近似式を作成している。

近似式の作成方法はそれぞれ特徴があり、Akridge et al.は建物が無かった場合の地中温から生じる熱損失に建物を作ったことによる影響を表す Decrement Factor を乗じる形をとっており、Yard et al.は無次元化パラメータを用いて推定式を作成している。Mitalas のものは実測結果との比較がなされている点、非常に多岐にわたる断熱仕様に対しても検討している点で注目値するが、計算式が断熱仕様、地盤物性値別に表形式で与えられており、多少複雑な体裁となっている。

ここで、数値シミュレーションで行えるケーススタディの数は有限であるから、近似式の作り方次第では近似式の当てはめに用いた数値の範囲を逸脱した場合、精度が極端に悪くなることがしばしば生じることは指摘しておいたほうがよいだろう。無論、近似式の作成段階で極限値を満足することを考慮すればこのようなことは避けられるが、常用範囲での精度と引き替えになることもあり、両方をにらみながら近似式の形を決めるのはなかなか難しいところである。一方、解析的なアプローチによる方法はある程度物理的過程から演繹的に式を導いているので、極端に値がおかしくなることが無い反面、式が複雑になりがちである。解析的に解くために無理な仮定をしがちであるといった問題がある。よって、解析的なアプローチから得られた式をもとに簡略化し、式中にあらわれる係数を数値シミュレーションによるケーススタディの結果を用いて推定するというのが最もよい方法であろう。現在 ISO 案として提出されている方法[39]はこれに最も近い。推定式は Boileau and Latta の Heat Flow Path 法より導出される式に類似のものをを用い、係数を数値計算で求めたものである。土間床、地下室、床下空間に対してそれぞれ計算式が提出されており、Mitalas はほどではないものの断熱仕様に対してもある程度配慮がされている。

計算ではなく、実測結果から地下室の期間暖房負荷の推定式を作成した例も存在する(Swinton[138])。推定式は、デグリーデー、断熱抵抗、地下室温などから計算される係数に周囲長を乗ずる形をとっている。

MacDonald ら[63]は各種計算方法によって期間暖房負荷を計算し比較検討している。概ね Mitalas が最も大きな推定値をだし、続いて Yard, VBDD, Shipp, Latta-DD, Akridge,

Swinton の順となり、Mitalas と Swinton では無断熱の場合、3 倍近い差が生ずることがある、と報告している (VBDD, Latta-DD は文献 [11] をもとに期間負荷を出せるようにしたもの)。また、Sobotka ら [135] はいくつかの実測結果と、簡易計算法の比較を行っている。Mitalas, ASHRAE Fundamentals (Latta-DD), ISO 案、2 次元有限要素法について考察しているが、Mitalas がもっとも実測結果と照合しており、2 次元有限要素法や ASHRAE Fundamentals では熱負荷を小さめに推定してしまうことを指摘している。そして、実用的にはそれらの間に位置する ISO 案が適当だと結論づけている。

4.3 解析解に関する考察

4.3.1 はじめに

簡単な形状や境界条件の場合、解析解が得られている例がいくつかある。特に 2 次元定常状態については土間床や地下壁に対する解析解が比較的簡単な式となり、そのまま普遍化するのは無理としても、熱負荷簡易推定式作成に役立つことが期待できる。そこで、本節では、解析解について若干の考察を行うことにする。熱伝導問題や Laplace 問題などの境界値問題については膨大な研究がなされており、成書も多数ある。これらの古典的偏微分方程式論では、Legendre 関数・Bessel 関数をはじめとする特殊関数を駆使した華麗な世界が展開している。しかし、本論文の目的は、全てを解析的に解こうとするのではなく、解析解を基にして土間床や地下壁の熱負荷を簡易に推定する式を構成することにあり、過度に複雑な表現になるものは利用価値が少いため考察の対象から除外している。

解析解の求め方には、固有関数系による展開を用いる方法や Green 関数を用いる方法などがある。また、2 次元問題に対しては等角写像法により簡単に求まる場合もある。固有関数展開法については第 2 章で簡単に説明したが、簡易式作成という観点からみた場合、一般に固有関数展開法によって得られる解は無級数なので利用しにくい。そこで、ここでは境界要素法と関連の深い Green 関数を用いる方法で表面熱流を求めることにしたい。また、2 次元定常問題において威力を発揮する等角写像法も併用する。Krarti ら [60] は Schwarz-Christoffel 変換によって土間床、地下室に関連した 2 次元定常問題の解をいくつか具体的に示しているが、表面熱流にはほとんど言及していないので、表面熱流を中心に考察することにする。

4.3.2 Green 関数を用いた境界値問題の記述

一般に、Laplace 方程式や Helmholtz 方程式で内部ソースが無い場合、領域内部の点に関して T の境界積分方程式は、 Γ を境界として、

$$T(x) + \int_{\Gamma} \frac{\partial T^*(x; \xi)}{\partial n(\xi)} T(\xi) d\Gamma(\xi) = \int_{\Gamma} T^*(x; \xi) \frac{\partial T(\xi)}{\partial n(\xi)} d\Gamma(\xi) \quad (4.1)$$

となる。ただし、ここで T^* は基本解、 $\partial/\partial n$ は外向き法線微分である。境界上で T を与える Dirichlet 問題では、境界上で $T^* = 0$ となるような基本解 (Green 関数) を用いることに

4.3 解析解に関する考察

より、

$$T(x) = - \int_{\Gamma} \frac{\partial T^*(x; \xi)}{\partial n(\xi)} T(\xi) d\Gamma(\xi) \quad (4.2)$$

と境界上の T を用いて領域内部の T を一意に決定できる。一方、境界上で $\partial T/\partial n$ を与える Neumann 問題では $\partial T^*/\partial n = 0$ となるような Green 関数を用いることにより同様に、

$$T(x) = \int_{\Gamma} T^*(x; \xi) \frac{\partial T(\xi)}{\partial n(\xi)} d\Gamma(\xi) \quad (4.3)$$

と境界上の $\partial T(x)/\partial n(x) = 0$ を用いて領域内部の $T(x)$ を決定できる (ただし、任意定数 C を加えた $T + C$ も上式を満たすので完全な Neumann 問題の場合は定数項だけの不定性が残る)。このように Green 関数を用いる方法では、境界条件に対応した Green 関数を求めることが中心的な課題となる。

4.3.3 地盤以外の熱抵抗の扱い

表面温度を与える場合について述べたが、実際には地表面や土間床・壁表面には熱伝達境界層や壁・床による熱抵抗が存在する。この Robin 境界条件を満足するような Green 関数を考えることは可能である。例えば、2 次元で地表面温度を与えた場合の半無限問題 4.3.4 にかえて、地表面熱伝達率 α を考えた、

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial z} = \alpha T \quad (4.4)$$

の境界条件の場合 Green 関数は、 $h = \alpha/\lambda$ として、

$$T^*(x, y; \xi, \eta) = T_{\infty}^*(x, y; \xi, \eta) + T_{\infty}^*(x, y; \xi, -\eta) - 2he^{h\eta} \int_{-\infty}^{-\eta} T_{\infty}^*(x, y; \xi, \nu) e^{h\nu} d\nu \quad (4.5)$$

となる。しかし、位置によって表面熱伝達率が異なる場合などについて一般的に論ずるのは困難で非常に適用範囲が狭い。このため、本章では熱の流れる経路 (heat flow path) は Dirichlet 境界のときと同じであると仮定して単純化する方法 [11] について検討することにする。この方法は、Dirichlet 境界条件で求められた熱流を x の関数として、

$$q(x) = \frac{1}{R(x)} \quad (4.6)$$

のように表現したとき、表面抵抗を $R'(x)$ として、

$$q(x) = \frac{1}{R(x) + R'(x)} \quad (4.7)$$

と単純に直列接続する方法である。熱流を求める部分以外の熱抵抗は熱流の広がりを考慮して接続したほうが精度がよいはずだが、熱流を求める表面部分に集中して与えた例しかみることがない。床・壁部分の熱流は 1 次元的とみてもほとんど問題ないので単純な方法のわりに比較的よい結果を得ることができる。また、地表面熱伝達抵抗を土の厚みに置き換えると、5cm 程度にしかならず全抵抗に比べれば微々たるものであり、熱流を少なく見積もってしまうが床や壁にかわりに抵抗を与えてもそれほど問題はない。

4.3.4 土間床の2次元定常問題

2次元定常問題,

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \quad (4.8)$$

で, 境界を定めない無限領域における Green 関数 (基本解) T_∞^* は,

$$T_\infty^*(x, y; \xi, \eta) = \frac{1}{2\pi} \log \frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}} \quad (4.9)$$

となる. 今, 地盤を半無限体 ($y > 0$) とし, 地表面温度を与えた時について考えてみよう. これは, 具体的には土間床問題に対応している. この場合, 地表面 ($y = 0$) で $T^* = 0$ となるような Green 関数は,

$$T^*(x, y; \xi, \eta) = T_\infty^*(x, y; \xi, \eta) - T_\infty^*(x, y; \xi, -\eta) = \frac{1}{2\pi} \log \frac{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y+\eta)^2}}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}} \quad (4.10)$$

で与えられる. これは, $(\xi, -\eta)$ に (ξ, η) と同じ強さで負のソースを配置したものと考えられ, $y = 0$ で $T^* = 0$ となるのは自明である. このような方法を鏡像法といい, Green 関数を求める代表的な方法の一つである. さて,

$$\left. \frac{\partial T^*(x, y; \xi, \eta)}{\partial n} \right|_{\eta=0} = - \left. \frac{\partial T^*(x, y; \xi, \eta)}{\partial \eta} \right|_{\eta=0} = - \frac{1}{\pi} \frac{y}{(x-\xi)^2 + y^2} \quad (4.11)$$

であるから, 領域内部の温度は $T(x, y)$ は, 境界上の温度を用いて,

$$T(x, y) = \int_{\Gamma} \frac{\partial T^*(x, y; \xi, \eta)}{\partial n} T(\xi, 0) d\Gamma = - \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y}{(x-\xi)^2 + y^2} T(\xi, 0) d\xi \quad (4.12)$$

となる. また, 地表面での熱流 $q(x)$ は,

$$q(x) = -\lambda \left. \frac{\partial T}{\partial n} \right|_{y=0} = \lambda \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=0} = \frac{\lambda}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{T(\xi, 0)}{(x-\xi)^2} d\xi \quad (4.13)$$

である.

さて, 境界条件を,

$$T(x, 0) = \begin{cases} \Delta T & x \leq 0 \\ 0 & x > 0 \end{cases} \quad (4.14)$$

と与えると, 式 (4.13) は,

$$q(x) = \frac{\lambda}{\pi x} \Delta T \quad (4.15)$$

となる.

実際には, 壁が存在しているのでこれを考慮した場合について調べておく. 壁の厚みを考え, その部分で断熱とした境界条件を考えればよいが, この境界条件では鏡像法が利用できないので, 等角写像法を用いる. この場合, Schwarz-Christoffel 変換が有効である. Schwarz-Christoffel 変換は多角形を半平面に変換する手法で古くから広く利用されている [14][50]. Schwarz-Christoffel 変換によって任意の多角形を半平面に変換できるので半平面

4.3 解析解に関する考察

を経由して多角形から多角形への写像を考えることができるのである. よって, 写像された空間で解が簡単に表現できるような変換を考えれば, 原空間の解も比較的容易に求めることができる. 等角写像に関する文献は多いのでここでは簡単に説明するにとどめる. なお, 以降は, 簡単のため適当な代表長さを考えて無次元化して扱うことにする. すなわち, a を代表長さ, ΔT を代表温度差, λ を代表熱伝導率とすれば, 熱流は実際の熱流を $q(x)$ としたとき,

$$q'(x') = \frac{q(x)}{a\lambda\Delta T} \quad (4.16)$$

で無次元化される. ここで $x' = x/a$ である. しかし, 以降は煩雑を避けるため x' , $q'(x')$ 等を x , $q(x)$ と記す. 代表長さは問題によって異なるが, その都度明記することにする.

原空間を $z = x + iy$, 写像された空間を $\zeta = \xi + i\eta$ とする. ただし, ここでは $i = \sqrt{-1}$ である. はじめに, 前出の境界条件, 式 (4.14) について Schwarz-Christoffel 変換によって求めてみよう. 図 4.1 のような変換は,

$$\zeta = A \int z^{-1} dz + C = A \log z + C \quad (4.17)$$

となる. 未知定数 A , C は $z = -0$ で $\zeta = -\infty + i$, $z = +0$ で $\zeta = -\infty$ の条件より, $A = 1/\pi$, \log は主値をとることにして $C = 0$ とする. したがって,

$$\zeta = \frac{1}{\pi} \log z \quad (4.18)$$

となる. また, 逆変換は,

$$z = \exp(\pi\zeta) \quad (4.19)$$

である. ζ 空間では, 熱流はどこも一様で 1 であるので, z 空間では $d\zeta/dz$ が熱流の強さとなる. よって $y = 0$ の表面では,

$$q(x) = \left. \frac{d\zeta}{dz} \right|_{y=0} = \frac{1}{\pi x} \quad (4.20)$$

となり, 式 (4.15) を $\lambda, \Delta T$ で無次元化したものに一致する. 等温線と熱流を図 4.2 に示す. 図中, 実線は等温線を示す $\eta = \text{const.}$ の線であり, 破線は熱流の向きを示す $\xi = \text{const.}$ の線である. 併せて表面熱流もプロットしてある.

図 4.3 のような変換は,

$$\zeta = \frac{1}{\pi} \cosh^{-1} z \quad (4.21)$$

$$z = \cosh(\pi\zeta) \quad (4.22)$$

であるので $y = 0$ の境界で $|x| \leq 1$ を断熱境界とし, $x < -1$ で 1, $x > 1$ で 0 としたときの, $x > 1$ での表面熱流は,

$$q(x) = \left. \frac{d\zeta}{dz} \right|_{y=0} = \frac{1}{\pi\sqrt{x^2-1}} \quad (4.23)$$

となる。ここで代表長さは、壁の厚さを d としたとき $d/2$ である。等温線と熱流は図 4.4 のようになる。また、図 4.5 のような変換は、

$$\zeta = \frac{1}{\pi} \sinh^{-1} z \quad (4.24)$$

$$z = \sinh(\pi\zeta) \quad (4.25)$$

であるので、 $x=0, 0 \leq y \leq 1$ を完全断熱としたときの、 $x > 1$ での表面熱流は、

$$q(x) = \left. \frac{d\xi}{dx} \right|_{y=0} = \frac{1}{\pi\sqrt{x^2+1}} \quad (4.26)$$

である。これは、基礎断熱が完全断熱の場合に相当している。ここでの代表長さは、基礎断熱深さである。等温線と熱流は図 4.6 のようになる。

土間床領域として $|x| \leq 1$ を考えると式 (4.13) より、

$$q(x) = \frac{2}{\pi(1-x^2)} \quad (4.27)$$

となる。これは、等角写像、

$$\zeta = \frac{2}{\pi} \tanh^{-1} z \quad (4.28)$$

$$z = \tanh\left(\frac{\pi\zeta}{2}\right) \quad (4.29)$$

によって求めてもよい (図 4.8, 図 4.9)。しかし、この解は、土間床中央から床端までの全体の熱流を求めようとすると¹、すなわち、

$$Q = \int_0^1 q(x) dx \quad (4.30)$$

を求めようとした場合、発散してしまうという問題がある。Delsante et al. は、もう少し現実的な仮定として、壁の厚み d を考え、その間で温度が線形に変化すると考えることを提案している [18] (図 4.7)。この場合、境界条件は、

$$T(x, 0) = \begin{cases} 0 & |x| < 1 \\ (|x| - 1)/d & 1 \leq |x| \leq b \\ 1 & |x| > b \end{cases} \quad (4.31)$$

であるので²、

$$q(x) = \frac{1}{\pi d} \log \left| \frac{b^2 - x^2}{1 - x^2} \right| \quad (4.32)$$

$$Q = \frac{1}{\pi} \left\{ \frac{2}{d} \log \left(1 + \frac{d}{2} \right) + \log \left(1 + \frac{2}{d} \right) \right\} \quad (4.33)$$

¹土間床中央で対称になっているので、土間床全体の熱流は $2Q$ である。

²土間床表面熱流を正にとるため、Delsante et al. と逆の温度分布を仮定した。

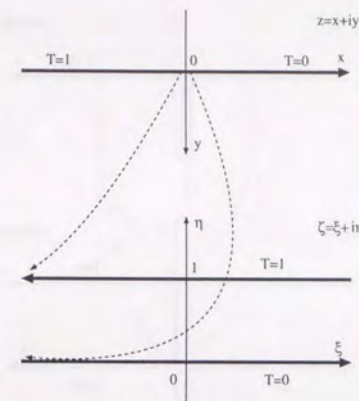


図 4.1 $x \leq 0$ で $T=1$, $x > 0$ で $T=0$ のときの等角写像

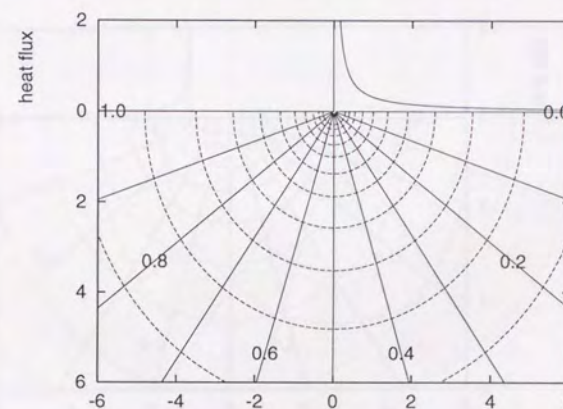
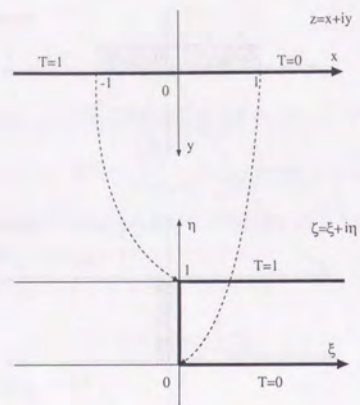
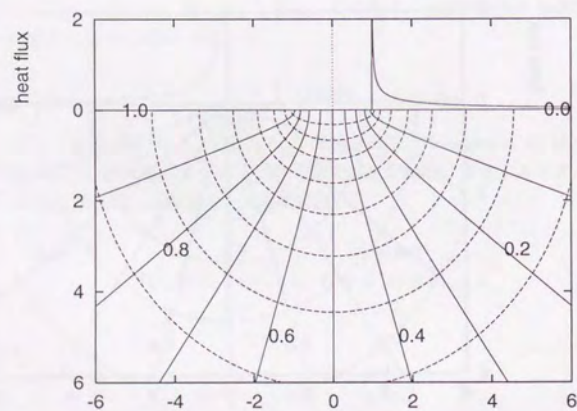
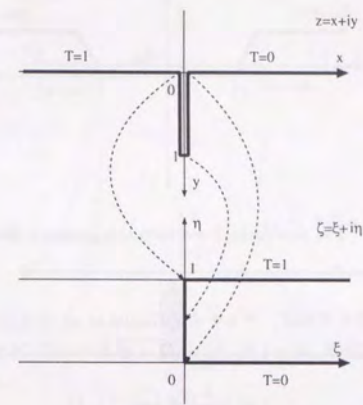
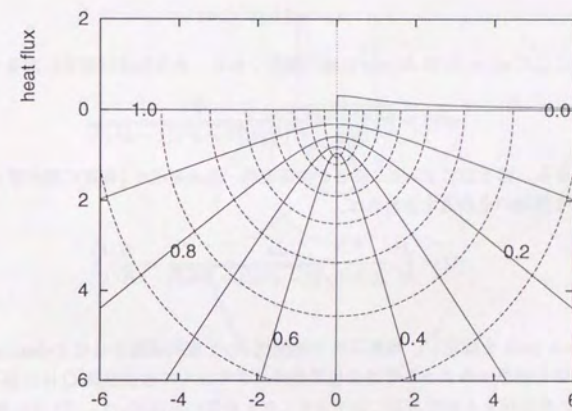


図 4.2 $x \leq 0$ で $T=1$, $x > 0$ で $T=0$ のときの等温線・熱流

図 4.3 $|x| \leq 1$ を断熱としたときの等角写像図 4.4 $|x| \leq 1$ を断熱としたときの等温線・熱流図 4.5 $x = 0$ で深さ 1 の断熱をしたときの等角写像図 4.6 $x = 0$ で深さ 1 の断熱をしたときの等温線・熱流

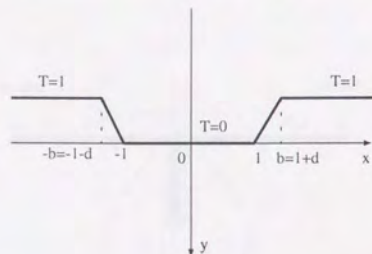


図 4.7 The double inclined-step temperature distribution.

となる。

壁の部分を通熱境界とすれば、そもそも Delsante et al. の仮定による必要はない。壁の厚さを d として $b = 1 + d$, $k = 1/b$, $k' = \sqrt{1 - k^2}$ において、Schwarz-Christoffel 変換、

$$\zeta = \frac{1}{K(k')} F(\sin^{-1} z, k) \quad (4.34)$$

により z 平面から ζ 平面に写像することができる (図 4.10)。ここで $F(\varphi, k)$ は第 1 種楕円積分、 $K(k)$ は第 1 種完全楕円積分である。また、 ζ から z への写像は、

$$z = \operatorname{sn}(K(k')\zeta, k) \quad (4.35)$$

である。ここで $\operatorname{sn}(u, k)$ は Jacobi の楕円関数である。表面熱流は簡単に計算できて、

$$q(x) = \left. \frac{d\zeta}{dx} \right|_{y=0} = \frac{1}{K(k')\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} \quad (4.36)$$

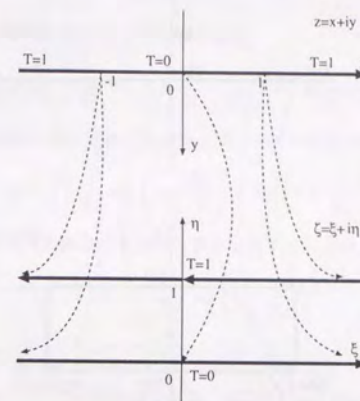
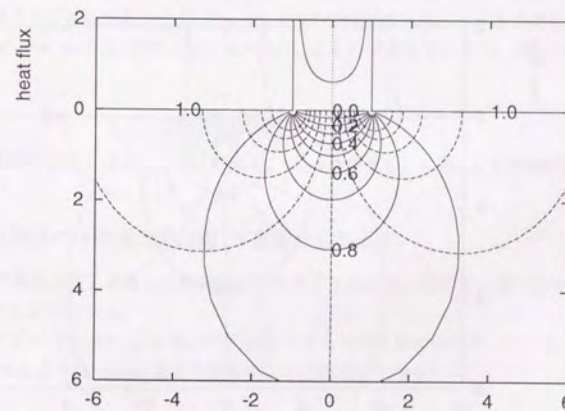
のようになる。図 4.11 に $d = 0.5$ のときの等温線・熱流を示す (極端に壁が厚い例である)。土間床 $1/2$ 領域の全熱流を求めれば、

$$Q = \int_0^1 \frac{dx}{K(k')\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \frac{K(k)}{K(k')} \quad (4.37)$$

となる。

heat flow path を固定し、地盤以外の熱抵抗 R_F を直列接続すれば Delsante et al. の仮定や壁下端を通熱するような複雑な境界条件によらずとも全熱流 Q は計算可能である。地盤以外の熱抵抗を土間床表面に集中させこれを地盤の熱抵抗 $\pi(1-x^2)/2$ に加えたものが全抵抗であるとして、

$$Q = \int_0^1 \frac{dx}{\frac{\pi(1-x^2)}{2} + R_F} = \frac{2}{\pi\mu} \coth^{-1} \mu \quad (4.38)$$

図 4.8 $|x| \leq 1$ で 0, $|x| > 1$ で 1 のときの等角写像図 4.9 $|x| \leq 1$ で 0, $|x| > 1$ で 1 のときの等温線・熱流

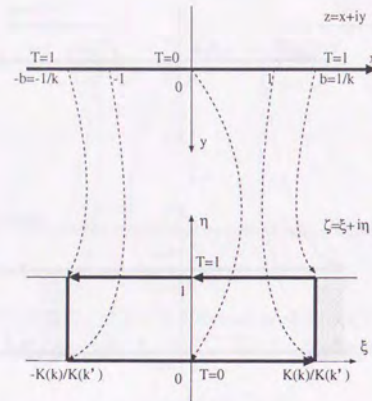
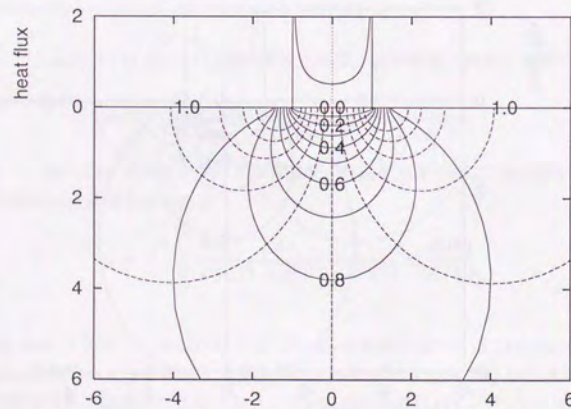


図 4.10 土間床で壁部分を断熱としたときの等角写像

図 4.11 土間床で壁部分を断熱としたときの等温線・熱流 ($d=0.5$)

となる。ただし、

$$\mu = \sqrt{1 + \frac{2R_F}{\pi}} \quad (4.39)$$

である。土間床エッジが2つあるとして計算すると、

$$Q = \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\frac{1}{\pi(1-x) + R_F} + \frac{1}{\pi(1+x) + R_F} \right) dx = \frac{1}{\pi} \log \left(1 + \frac{2\pi}{R_F} \right) \quad (4.40)$$

となる。式(4.33)も同様の形式で書きなおすと $R_F = d$ であるから、

$$Q = \frac{1}{\pi} \left(\frac{2}{R_F} \log \left(1 + \frac{R_F}{2} \right) + \log \left(1 + \frac{2}{R_F} \right) \right) \quad (4.41)$$

となる³。続いて ISO 案の方法 [39] を同様に書きなおすと以下ようになる。

$$Q = \frac{1}{\pi + \frac{R_F}{2}} \log \left(1 + \frac{2\pi}{R_F} \right) \quad (4.42)$$

式(4.42)は式(4.40)に類似しているが \log にかかる係数が異なっている。

これらを比較プロットしたのが図4.12である。ここで Fixed heat flow path 1 は式(4.38), Fixed heat flow path 2 は式(4.40), Delsante method は式(4.41), ISO draft method は式(4.42)によって計算したものである。これを見ると ISO draft method は Fixed heat flow path 1 とほぼ同じ結果となっており、他はこれらより大きい。床抵抗の分も含めて壁の厚みに置き換えるという無理な設定をしたためである。実際、壁の厚みは床幅の1/2に対して0.1を越えることは考えられず、 $0 < R_F < 0.1$ ではどれも同じような結果を与えるので、Fixed heat flow path 1, ISO draft method によるのが妥当であろう。後で利用するため更に、

$$Q = \frac{1}{\pi} \log \left(1 + \frac{1}{0.24 R_F^{1.15}} \right) \quad (4.43)$$

という近似式を提案しておく。式(4.43)は、式(4.38)を $0.1 \leq R_F \leq 2$ で相対誤差2%で近似する。

4.3.5 土間床の2次元定常問題 (不易層がある場合)

次に、不易層温度を考慮した場合について考えてみよう。これは、地下水位がそれ程深くない場合に重要である。

$y=0$ で $T=T(x,0)$, $y=H_W$ で $T=0$ のときの解を求めるため、 $y=0$, $y=H_W$ で $T^*=0$ となるような Green 関数を鏡像法により構成してみると、

$$T^* = T^*(x, y; \xi, \eta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (T_{\infty}(x, y; \xi, \eta + 2nH_W) - T_{\infty}(x, y; \xi, -\eta + 2nH_W)) \quad (4.44)$$

となる。平行2平面であるため、あわせ鏡と同じで鏡像点が無限に存在することになる

³壁の厚みの部分とその他の抵抗をわけて考えるのが本来だがここでは考えない。

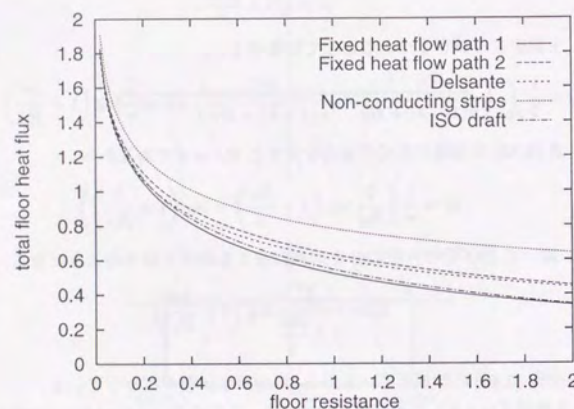


図 4.12 土間床全熱流の比較

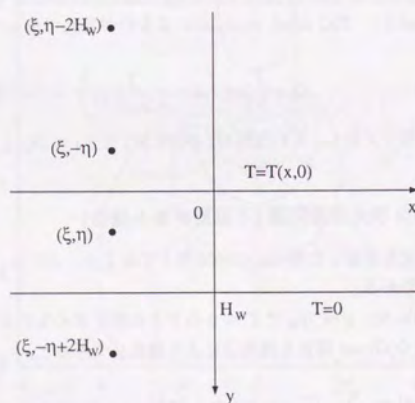


図 4.13 不易層を考慮した場合

(図 4.13). Green 関数の地表面での法線微分は,

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial T^*}{\partial n} \right|_{\eta=0} &= - \left. \frac{\partial T^*(x, y; \xi, \eta)}{\partial \eta} \right|_{\eta=0} \\ &= - \frac{1}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{y - 2nH_W}{(x - \xi)^2 + (y - 2nH_W)^2} \\ &= - \frac{1}{2H_W} \frac{\sin \frac{\pi y}{H_W}}{\cosh \frac{\pi(x - \xi)}{H_W} - \cos \frac{\pi y}{H_W}} \end{aligned} \quad (4.45)$$

なので温度 T および熱流 q は,

$$T(x, y) = - \frac{1}{2H_W} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{T(\xi, 0) \sin \frac{\pi y}{H_W}}{\cosh \frac{\pi(x - \xi)}{H_W} - \cos \frac{\pi y}{H_W}} d\xi \quad (4.46)$$

$$q(x) = - \frac{1}{2H_W^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{T(\xi, 0)}{\cosh \frac{\pi(x - \xi)}{H_W} - 1} d\xi \quad (4.47)$$

となる。土間床領域として $|x| \leq 1$ を想定すると、表面熱流は,

$$\begin{aligned} q(x) &= \frac{1}{2H_W} \left(\coth \frac{\pi(1-x)}{2H_W} + \coth \frac{\pi(1+x)}{2H_W} \right) \\ &= \frac{1}{H_W \operatorname{cosech} \frac{\pi}{H_W} \left(\cosh \frac{\pi}{H_W} - \cosh \frac{\pi x}{H_W} \right)} \end{aligned} \quad (4.48)$$

となる。

これに地盤以外の熱抵抗 R_F を加えて、土間床 $1/2$ 領域で積分すると,

$$\begin{aligned} Q &= \int_0^1 \frac{dx}{H_W \operatorname{cosech} \frac{\pi}{H_W} \left(\cosh \frac{\pi}{H_W} - \cosh \frac{\pi x}{H_W} \right) + R_F} \\ &= \frac{H_W}{\pi R_F \sqrt{\nu^2 - 1}} \sinh \frac{\pi}{H_W} \cosh^{-1} \nu \end{aligned} \quad (4.49)$$

となる。ただし、ここで,

$$\nu = \cosh \frac{\pi}{H_W} + \frac{H_W}{R_F} \sinh \frac{\pi}{H_W} \quad (4.50)$$

である。

4.3.6 地下壁・床の2次元定常問題

次に、 $y = 0$, $x \geq 0$ 及び、 $x = 0$, $y \geq 0$ で表面温度を与える問題について考えてみよう。これらの境界で $T^* = 0$ を満たす Green 関数は,

$$T^*(x, y; \xi, \eta) = T_{\infty}^*(x, y; \xi, \eta) - T_{\infty}^*(x, y; \xi, -\eta) + T_{\infty}^*(x, y; -\xi, -\eta) - T_{\infty}^*(x, y; -\xi, \eta) \quad (4.51)$$

であるから領域内部の温度は,

$$T(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \left(\frac{y}{(x-\xi)^2 + y^2} - \frac{y}{(x+\xi)^2 + y^2} \right) T(\xi, 0) d\xi \\ + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \left(\frac{x}{x^2 + (y-\eta)^2} - \frac{x}{x^2 + (y+\eta)^2} \right) T(0, \eta) d\eta \quad (4.52)$$

また, $x=0$ の表面の熱流は,

$$q(y) = \lambda \frac{\partial T(x, y)}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{4\lambda y}{\pi} \left[\int_0^\infty \frac{\xi T(\xi, 0)}{(y^2 + \xi^2)^2} d\xi + \int_0^\infty \frac{\eta T(0, \eta)}{(y^2 - \eta^2)^2} d\eta \right] \quad (4.53)$$

となる.

さて, 地下壁面が無限に続く形状を考え, 境界条件を,

$$\begin{cases} T(0, y) = 0 & y > 0 \\ T(x, 0) = 1 & x \geq 0 \end{cases} \quad (4.54)$$

と与えると, 式 (4.53) は,

$$q(y) = \frac{2\lambda}{\pi y} \quad (4.55)$$

となる. これは $x=0, y>0$ で図 4.2 の温度がちょうど 0.5 であることから, 図 4.2 で温度差を 2 倍にしたときと同じになっていることがわかる. $x=0, y=0$ を中心とし, $1/4$ 円弧上に熱流が生じており, これは, Boileau and Latta の方法に他ならないが, 地下壁側の境界条件として, 無限の深さまで同じ温度で保たれるという仮定がなされていることに注意されたい. 実際は, 地下室の深さ以下では, 温度は 1 に向かって収束していくので, Boileau and Latta は地下壁負荷をその分だけ小さく見積もってしまうことになる (実際の現象は 3 次元なので 2 次元より負荷は大きくなり, 両者が相殺している). 地下室深さと λ で無次元化し, 地盤以外の抵抗 R_W を加えて地下壁面で積分して地下壁全熱流を計算すると,

$$Q_W = \int_0^1 \frac{dy}{\frac{\pi y}{2} + R_W} = \frac{2}{\pi} \log \left(1 + \frac{\pi}{2R_W} \right) \quad (4.56)$$

となる. 図 4.6 で x 軸と y 軸を交換して 2 倍すれば, 地下壁の熱伝導率が土壌と同じであると仮定し壁の上端で断熱としたときと同一視することができる. すなわち, 壁の厚さを代表長さにとれば, 地下壁の表面熱流は, 式 (4.26) より,

$$q(y) = \frac{2}{\pi \sqrt{y^2 + 1}} \quad (4.57)$$

で求めることができる.

図 4.14 のような地下床面が無限に続く形状を考え, 地下室表面温度を 0, 地表面温度を 1 とする. 代表長さを地下室深さにとれば, $z = x + iy (i = \sqrt{-1})$ 平面を $w = u + iv$ に移す Schwarz-Christoffel 変換から,

$$z = \frac{1}{\pi} \left\{ \sqrt{w^2 - 1} - \cosh^{-1} w \right\} + i \quad (4.58)$$

であり [60], また w 平面での解は 4.3.4 で既に計算済であるのでこれを z 平面に逆変換すればよい. Krarti らは具体的に表面熱流を計算していないが, 熱流一定場を $\zeta = \xi + i\eta$ とすると, 熱流は,

$$q(z) = \frac{d\xi}{dz} = \frac{d\xi}{dw} \frac{dw}{dz} \quad (4.59)$$

であり, $v=0$ の実軸上が地表面, 地下室壁・床面に相当することから, 床面では, $t = \cosh^{-1} u$ とおいて $t > 0$ で,

$$x(t) = \frac{1}{\pi} (\sinh t - t) \quad (4.60)$$

$$q(t) = \frac{1}{\sinh t} \quad (4.61)$$

$$(4.62)$$

また, 壁面では, $t = \cos^{-1} u$ とおいて $-\pi < t < 0$ で,

$$y(t) = -\frac{1}{\pi} (\sin t - t) + 1 \quad (4.63)$$

$$q(t) = -\frac{1}{\sin t} \quad (4.64)$$

となる. w を z の関数として陽に表現できないので, パラメトリックな表現にせざるをえないが, 適宜に変数変換して扱いやすい形にした. 等温線と表面熱流を図 4.15 に示すが, 地表との接続部分以外に隅角部でも熱流は無限大になる. さて, heat flow path を固定して抵抗を加え, 壁部分の熱流の積算値 Q_W を求めてみる. 地盤以外の抵抗の総和を R_W とすると,

$$Q_W = \int_{-\pi}^0 \frac{dt}{-\sin t + R_W} \frac{dy}{dt} \\ = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 \frac{1 - \cos t}{-\sin t + R_W} dt \\ = \frac{2}{\pi \sqrt{1 - R_W^2}} \tanh^{-1} \sqrt{1 - R_W^2} \quad (4.65)$$

と求めることができる. ただし, $R_W \geq 1$ のときは,

$$Q_W = \frac{2}{\pi \sqrt{R_W^2 - 1}} \tan^{-1} \sqrt{R_W^2 - 1} \quad (4.66)$$

となる.

次に, 図 4.16 のような地下室を考え, 地下室表面温度を 0, 地表面温度を 1 とする. 代表長さを地下室幅の $1/2$ にとれば, $z = x + iy (i = \sqrt{-1})$ 平面を $w = u + iv$ に移す Schwarz-Christoffel 変換から,

$$z = \frac{E(\sin^{-1} w, k) - k'^2 F(\sin^{-1} w, k)}{E(k) - k'^2 K(k)} + ih \quad (4.67)$$

$$\frac{dz}{dw} = \frac{k^2}{E(k) - k'^2 K(k)} \sqrt{\frac{1 - w^2}{1 - k^2 w^2}} \quad (4.68)$$

となる [60]⁴。ただし、 $F(\varphi, k)$ 、 $E(\varphi, k)$ はそれぞれ第 1 種及び第 2 種楕円積分であり、 $K(k)$ 、 $E(k)$ はそれぞれ第 1 種及び第 2 種完全楕円積分、また $k' = \sqrt{1-k^2}$ である。 h は地下室深さで k は、

$$h = \frac{E(k') - k'^2 K(k')}{E(k) - k'^2 K(k)} \quad (4.69)$$

を満たすように決定する。 $k=1$ のとき $h=0$ で土間床問題になる。式 (4.29) により、更に一様熱流場に変換すれば、温度場を決定することができる。表面熱流は地下室床 ($|u| < 1$) で、

$$x(u) = \frac{E(\sin^{-1} u, k) - k'^2 F(\sin^{-1} u, k)}{E(k) - k'^2 K(k)} \quad (4.70)$$

$$q(u) = \frac{2}{\pi k} \frac{E(k) - k'^2 K(k)}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2 u^2)}} \quad (4.71)$$

また、地下室壁 ($1 < |u| < 1/k$) で、

$$y(u) = -i \left(\frac{E(\sin^{-1} u, k) - k'^2 F(\sin^{-1} u, k)}{E(k) - k'^2 K(k)} + h \right) \quad (4.72)$$

$$q(u) = \frac{2}{\pi k} \frac{E(k) - k'^2 K(k)}{\sqrt{(u^2-1)(1-k^2 u^2)}} \quad (4.73)$$

である。Krarti らは表面熱流を表面と温度差 0.01 の位置と表面位置の差から計算することを提案しているが、表面熱流は上式のように求めることが可能である。地下室深さ $h=1$ ($k=k'=1/\sqrt{2}$) のときの等温線と表面熱流を図 4.17 に示す。全熱流は地下室壁では発散するが、床中央部分から床端までの全熱流は、

$$Q_F = \frac{2}{\pi} \tanh^{-1} k \quad (4.74)$$

となる。

同じ形状で地下室壁が断熱の場合は、式 (4.29) のかわりに式 (4.35) を用いるだけである。地下室床表面の熱流は、

$$x(u) = \frac{E(\sin^{-1} u, k) - k'^2 F(\sin^{-1} u, k)}{E(k) - k'^2 K(k)} \quad (4.75)$$

$$q(u) = \frac{E(k) - k'^2 K(k)}{k^2 K(k')} \frac{1}{(1-u^2)} \quad (4.76)$$

となる。地下室深さ $h=1$ ($k=k'=1/\sqrt{2}$) のときの等温線と表面熱流を図 4.19 に示す。床中央部分から床端までの全熱流は、

$$Q_F = \frac{K(k)}{K(k')} \quad (4.77)$$

となる。

⁴Krarti らの論文は複素楕円積分の計算式に誤りがあり結果の等温線もおかしい。

地下室深さを代表長さにとるためには、式 (4.72) で y/h 、 qh とすればよい。このとき、地下室幅の $1/2$ は $a=1/h$ となる。図 4.20 は、 a を変化させたときの地下室壁の熱流プロファイルをプロットしたものであり、 $a=\infty$ のときは式 (4.63) に等しくなる。 a を変化させても地下室壁の熱流プロファイルはほとんど変化せず、地下室・床の隅角部で若干の違いが生じるだけである。式 (4.55) の地下室壁が無限に続く仮定では、地表面付近はよいが、地下室・床の隅角部の熱流の増加が全く考慮されないため大きく異なっていることがわかる。このことから、地下室の全熱流については、地盤以外の抵抗を含めて式 (4.65)、式 (4.66) で評価するのがよいだろう。ISO draft の地下室全熱流の式は、代表長さを地下室深さにとると、

$$Q_W = \frac{2}{\pi} \left(1 + \frac{0.5 R_F}{1 + R_F} \right) \log \left(1 + \frac{1}{R_W} \right) \quad (4.78)$$

となる ($R_W < R_F$ のときは R_F を R_W に置き換える)。図 4.21 に、式 (4.56)、式 (4.65)、式 (4.78) を比較したものを示す。ISO draft 式で $R_F=1$ の設定をしたときは R_F は R_W にすべて置き換えられるので ISO draft 式の最大値となるが、それでも地下室壁が無限に続く仮定をしたものより小さい値になっている。3 次元で考えれば水平方向の熱の広がりがあるので 2 次元解より値は大きくなり、更に誤差は拡大する。地盤以外の抵抗を考慮した場合は地下室壁が無限に続く仮定をしたものでも壁全熱流はそれほど式 (4.65) から計算されたものと変わらず、床仕様を変えても壁の全熱流にはほとんど影響しないことが推察される。式 (4.78) に比べて、式 (4.65)、式 (4.66) は若干煩雑である。そこで、式 (4.78) を参考にして、

$$Q_W = 0.7 \log \left(1 + \frac{1.5}{R_W} \right) \quad (4.79)$$

という簡易式を作成した。この式は $0.05 \leq R_W \leq 2$ で式 (4.65)、式 (4.66) を相対誤差 2% 程度で近似できる。

地下室深さ h 及び地下室壁の断熱の有無による地下室床熱流のプロファイルの違いを図 4.22 に示す。地下室壁断熱無しのときは式 (4.72) に従い、地下室壁完全断熱のときは式 (4.75) に従って計算している。 $h=0$ のときは土間床と同じになり両者は一致する。深さ、断熱の有無、双方とも地下室床熱流に大きく影響を及ぼし無視できないパラメータであることがわかる。同じく地下室深さ h を変化させたときの、壁が断熱されてない場合の床全熱流 (式 (4.74)) と完全断熱されている場合の床全熱流 (式 (4.77)) を比較したものを、図 4.23 に示す。併せて、ISO draft で地盤以外の熱抵抗を 0 とし、代表長さを地下室幅の $1/2$ にとったときの床中央部分から床端までの全熱流、

$$Q_F = \frac{2}{2\pi + 0.5h} \log \left(\frac{2\pi}{0.5h} + 1 \right) \quad (4.80)$$

も示している。実際はこれに地盤以外の抵抗が加わるとはいえ、壁仕様による床全熱流の違いは無視できるオーダーではない。ISO draft では床全熱流は壁仕様によらないが、完全断熱と断熱無しの両極端の間を推移している。地盤以外の熱抵抗を考えない場合は、解析的に積分できるわけだが、実際は、 h から k を求めるときに式 (4.69) の関係から Newton-Raphson

法などによる必要があり不便である。 $0 \leq h \leq 1$ で、

$$k \sim \frac{1}{\sqrt{1+h}} \quad (4.81)$$

は比較的よい近似を与えるので、これによってもよいが、より簡易な式として、壁無断熱のとき、

$$Q_F = \frac{1}{\pi} \log \left(1 + \frac{1}{0.207h^{0.88}} \right) \quad (4.82)$$

また、壁完全断熱のとき、

$$Q_F = \frac{1}{\pi} \log \left(1 + \frac{1}{0.045h^{0.88}} \right) \quad (4.83)$$

を作成した。これは、 $h=1$ のときに解析解に一致するように 0.207, 0.045 の係数を定めた後、 h の幂指数を決めたものである。幂指数は壁無断熱で相対誤差 2% ($0.2 \leq h \leq 2$) となるように決め、無断熱の場合も共通の幂指数とした。これは、壁の断熱仕様によるパラメータを 1 つに限定するためである。

更に地盤以外の抵抗 R_F を加えた場合について解析的に積分するのは困難である。よって、DE 公式 (Double Exponential Formula)[98] によって数値積分して計算した結果を図 4.24, 図 4.25, 図 4.26 に示す。さて、この 2 次元解析解の近似式だが、 $h=0$ の土間床で式 (4.43) を、また、 $R_F=0$ のとき、式 (4.82) もしくは式 (4.83) を満足するように関数形を決定する。これらの式はすべて、

$$Q_F = \frac{1}{\pi} \log \left(1 + \frac{1}{A} \right) \quad (4.84)$$

という形になるように作成している。そこで、

$$A = A(h, R_F) = \left(A_h(h)^b + A_F(R_F)^b \right)^{\frac{1}{b}} \quad (4.85)$$

ただし、

$$A_h(h) = ch^{0.88} \quad (4.86)$$

$$A_F(R_F) = 0.24R_F^{1.15} \quad (4.87)$$

と A を合成することを提案する。ここで、 c は壁断熱仕様に関する係数で、無断熱のとき 0.207, 完全断熱のとき 0.045 となる。また、合成時に用いる係数 b は、 $b=1$ としてしまえば単純であるが、図 4.25, 図 4.26 をみればわかるように等値線図はカーブを描いており、 $b=1$ のときは直線になってしまうのでこれを補正するため導入した係数である。実際は壁断熱仕様によって最適な係数は異なるが、煩雑を避けるため、中庸をとって $b=0.7$ とした。

4.3.7 3次元定常問題

3次元問題では、2次元の場合の等角写像法のような便利な方法がないので解析的に解が得られるケースは更に限定される。また、計算結果も複雑になってしまうのでここでは土間床問題の例を 1 つ示すにとどめる。

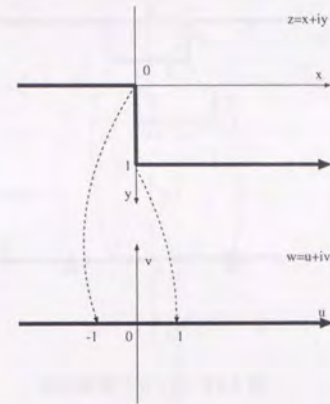


図 4.14 地下壁エッジ部分の等角写像

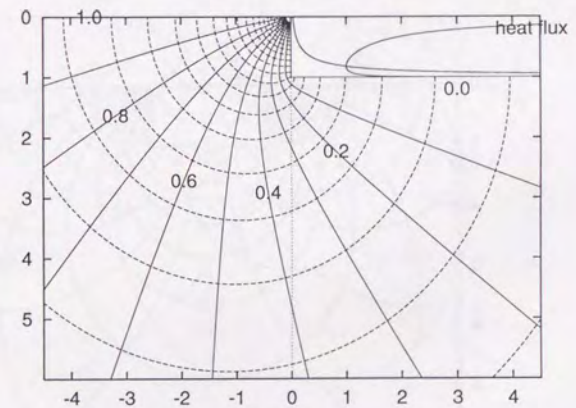


図 4.15 地下壁エッジ部分の等温線・熱流

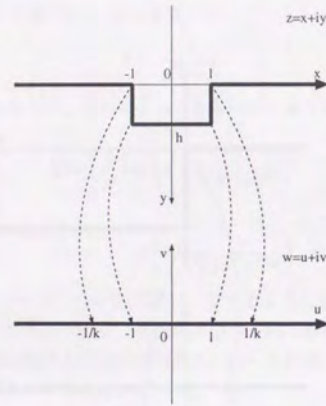


図 4.16 地下室の等角写像

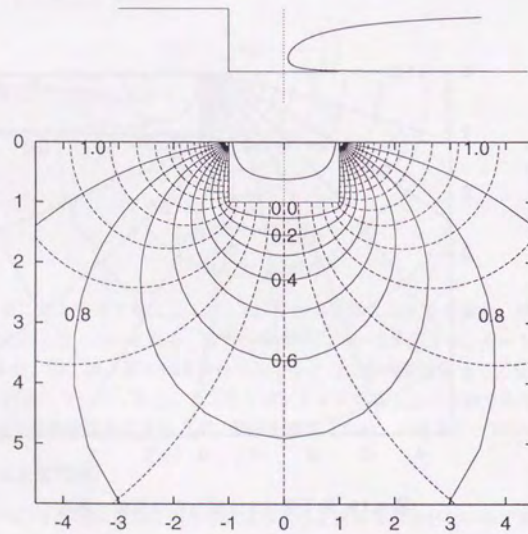


図 4.17 地下室の等温線・熱流

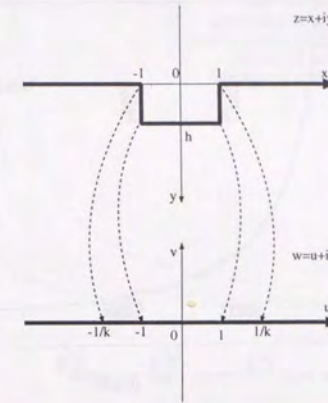


図 4.18 地下室の等角写像

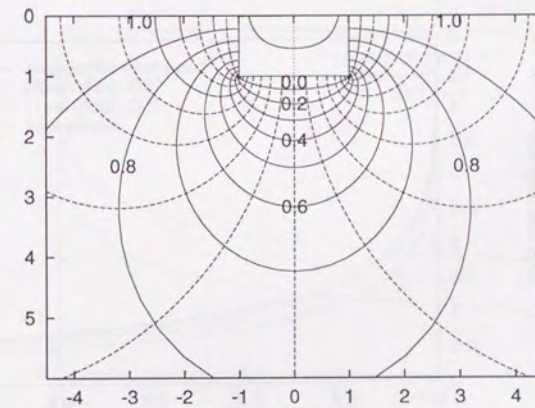


図 4.19 地下室 (壁断熱) の等温線・熱流

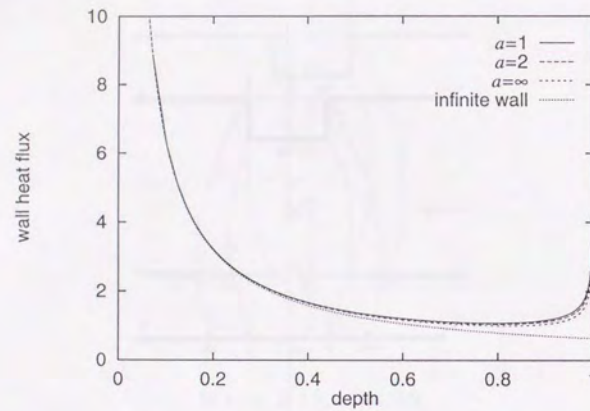


図 4.20 地下室壁の無次元熱流プロフィール

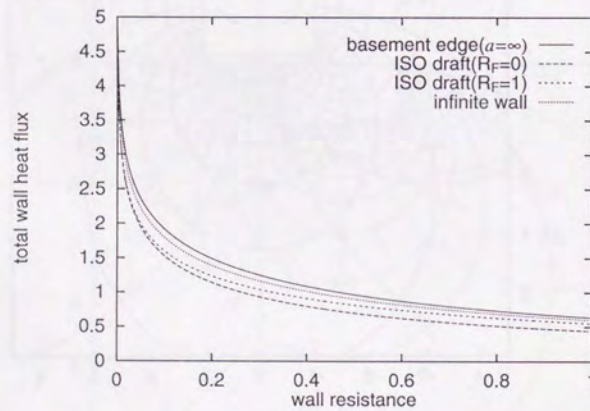


図 4.21 地下室壁の無次元全熱流

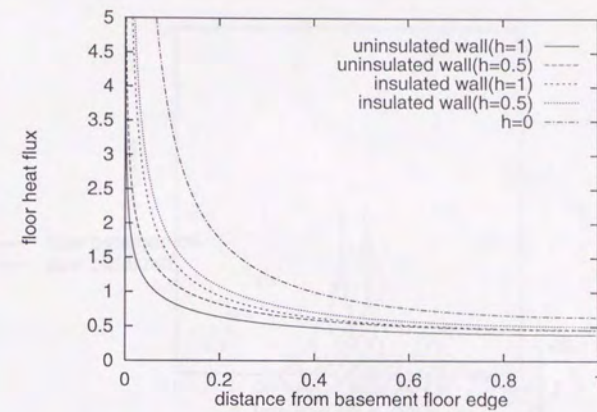
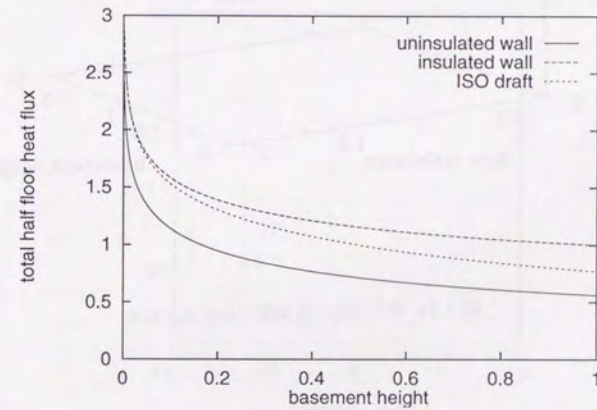


図 4.22 地下室床 1/2 領域の無次元熱流プロフィール

図 4.23 地下室床 1/2 領域の無次元全熱流 ($R_F = 0$)

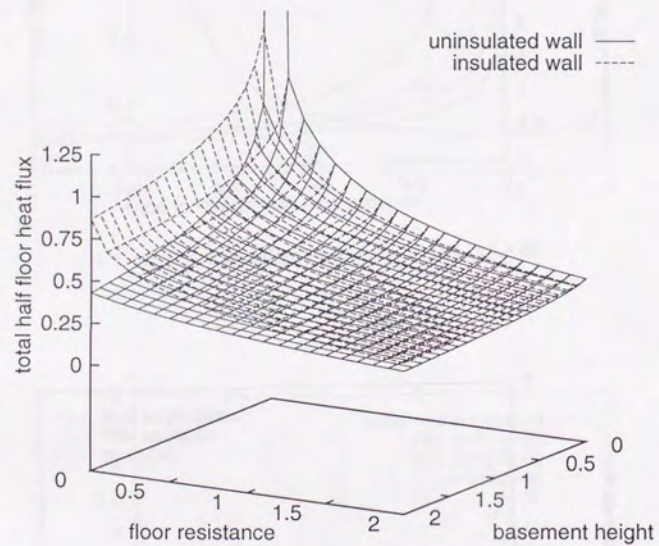


図 4.24 地下室床 1/2 領域の無次元全熱流

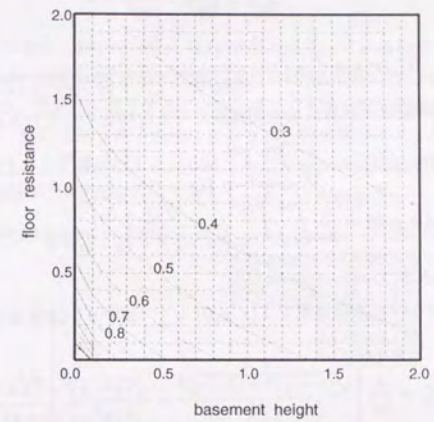


図 4.25 地下室床 1/2 領域の無次元全熱流の等値線図 (壁無断熱)

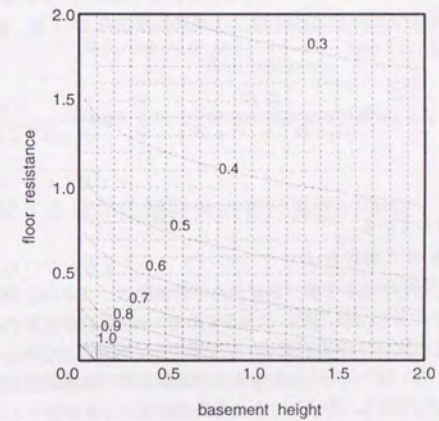


図 4.26 地下室床 1/2 領域の無次元全熱流の等値線図 (壁断熱)

3次元定常問題,

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0 \quad (4.88)$$

の基本解は,

$$T_{\infty}^*(x, y, z; \xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{4\pi\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}} \quad (4.89)$$

である。2次元の場合と同様に地表面温度を与えた場合の温度分布および地表面熱流,

$$T(x, y, z) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{zT(\xi, \eta, 0)}{\{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + z^2\}^{\frac{3}{2}}} d\xi d\eta \quad (4.90)$$

$$q(x, y, 0) = \frac{\lambda}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{T(\xi, \eta, 0)}{\{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2\}^{\frac{3}{2}}} d\xi d\eta \quad (4.91)$$

を得ることができる。

$|x| < a$, $|y| < b$ の長方形領域で $T(x, y, 0) = 1$, 他で 0 の境界条件で地表面熱流を計算すると,

$$q(x, y, 0) = \frac{\lambda}{2\pi} \left[\frac{\sqrt{(a-x)^2 + (b-y)^2}}{(a-x)(b-y)} + \frac{\sqrt{(a-x)^2 + (b+y)^2}}{(a-x)(b+y)} \right. \\ \left. + \frac{\sqrt{(a+x)^2 + (b+y)^2}}{(a+x)(b+y)} + \frac{\sqrt{(a+x)^2 + (b-y)^2}}{(a+x)(b-y)} \right] \quad (4.92)$$

となる。Delsante[18] は, 2次元の場合と同様に壁部分での線形的な温度変化を仮定した場合の解を具体的に計算している。計算結果はかなり込み入っているのが省略するが, 近似的には, 土間床 1/4 領域の全熱流 Q は土間床の寸法を $W \times D$, 壁の厚みを d として, $W, D \gg d$ のとき,

$$Q_F = \frac{\lambda}{\pi} \left[\frac{W}{2} \log \frac{WD}{d(\sqrt{W^2 + D^2} + W)} + \frac{D}{2} \log \frac{WD}{d(\sqrt{W^2 + D^2} + D)} \right. \\ \left. + \sqrt{W^2 + D^2} - W - D \right] \quad (4.93)$$

となることが示されている。

地下室平面は幅 W と奥行き D の 2 つのパラメータを含んでいるが, 特徴長さ $B = WD/2(W+D)$ を用いて 1 つのパラメータに集約した。これは, 地下室床面積 WD をペリメータ長 $P = 2(W+D)$ で除したものであり, $W = D$ の正方形のとき $B = W/4$, $D \rightarrow \infty$ のとき $B = W/2$ になるパラメータである。これは, ISO draft で採用されているのと同じ方法であり, このことにより 3次元問題を 2次元問題に置き換えて計算することが可能になる。この方法は, HASP で 2次元異形部材を 1次元化するのに用いられている方法でもある。土間床幅 W の 1/2 を代表長さとして, 式(4.38)を適用すると, 土間床の無次元熱貫流率は,

$$K_F = \frac{2}{\pi B \mu} \coth^{-1} \mu \quad (4.94)$$

ただし,

$$\mu = \sqrt{1 + \frac{2R_F}{\pi B}} \quad (4.95)$$

とあらわせる。この場合, B についても $W/2$ で無次元化しているので B は, 0.5 から 1 の間の値をとるパラメータである⁵。さて, 式(4.92)に地盤以外の抵抗 R_F を加えて積分するのは困難であるから, 数値的に積分することにして, B を使った 2次元化手法を適用した場合と比較してみる。積分は優良格子点法による 2次元数値積分によって行った[98]。比較結果を図 4.27 に示す。 B を使った 2次元化によってかなりの近似精度が得られており, 少なくとも土間床熱流については妥当性を有していることがわかる。

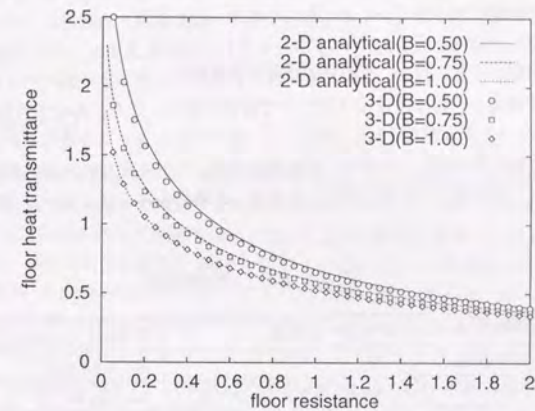


図 4.27 3次元土間床の無次元熱貫流率

4.4 地盤に接する壁体の簡易熱応答計算法の開発

4.4.1 はじめに

地盤に接する壁体を対象とした簡易熱損失計算法に関する研究は今までかなり行われているが, そのほとんどが定常計算で非定常性について扱っているものでもせいぜい年周期の周期定常止まりであり, HASP に代表される動的熱負荷計算に用いることを目的とした地盤に接する壁体の簡易熱応答計算法に関する報告は少ない。第 2 章で述べたように, 正の Laplace パラメータに対する伝達関数が求まっていれば, それを応答係数に変換することができることはわかっている。1次元の場合と同程度の手間でも多次元の場合の伝達関数を算出できれば応用価値が高いだろう。そこで, 本節では, 第 3 章で述べた方法によって

⁵ B で無次元化しなかったのはグラフが重なって比較できなくなるためである。

Laplace 変換領域において 3 次元の境界要素法を用いた熱応答計算を行い、これをもとに地下室壁体の非定常熱流応答に対する簡易計算式を導く。また、定常熱応答については、今までに様々な簡易計算法が提案されているが、前節の 2 次元解析解による検討を踏まえ、新たな簡易式を作成する。

4.4.2 計算方法

4.4.2.1 地下室モデル

対象としては、住宅規模の全地下室型地下室を考える (図 4.28)。断熱材は壁全面もしくは床全面の外側に施されている場合のみを考え、部分断熱・内断熱については検討していない。固定した条件を表 4.1 に、パラメータとした条件を表 4.2 に示す。地盤物性、壁及び床の断熱材厚さなどのほか、3 次元性を検討するために地下室平面のアスペクト比を変えたケースを設定し、計 216 ケースについて計算を行う。また、非定常特性を求めるため、Laplace パラメータ s が $0, 10^{-5}, 10^{-4.5}, \dots, 10^{-0.5}$ の 11 ケースをそれぞれ計算する。計算は 3 次元の境界要素法により行い、対称性を考慮して 1/4 領域のみを離散化している。壁部分に関しては熱流が 1 次元的であると仮定した境界条件を与えている (第 3 章)。

表 4.1 固定した計算条件

境界要素メッシュ (4 角形一定要素)	0.25[m] × 0.25[m]
壁・床躯体	RC 0.15 [m]
RC 熱伝導率 [kcal/mhK] (熱拡散率 [m ² /h])	1.2 (26 × 10 ⁻⁴)
断熱材熱伝導率 [kcal/mhK] (熱拡散率 [m ² /h])	0.032 (38 × 10 ⁻⁴)
室内外熱伝達率 [kcal/m ² hK]	8 (室内側), 20 (室外側)

表 4.2 パラメータとした計算条件

地下室の深さ H [m]	1.25, 2.5 [2 通り]
地下室平面 W[m] × D[m]	3 × 3, 6 × 3, 9 × 3, 6 × 6 [4 通り]
土壌熱物性 熱伝導率 [kcal/mhK] (熱拡散率 [m ² /h])	0.5 (10 × 10 ⁻⁴), 1.0 (20 × 10 ⁻⁴), 1.5 (30 × 10 ⁻⁴) [3 通り]
壁断熱材の厚さ [m]	0.0, 0.025, 0.05 [3 通り]
床断熱材の厚さ [m]	0.0, 0.025, 0.05 [3 通り]
ラプラスパラメータ [1/h]	0, 10 ⁻⁵ , 10 ^{-4.5} , ..., 10 ^{-0.5} [11 通り]

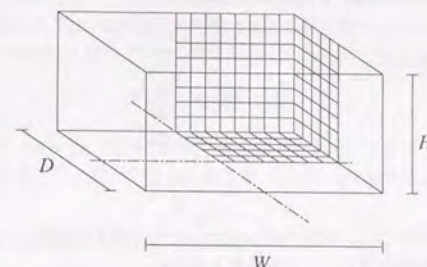


図 4.28 地下室モデル

4.4.2.2 解析方針

簡易計算式を導くにあたっては、次元の整合性をとることに留意し、応答及び各パラメータを無次元化したのち最小 2 乗法によるあてはめを行う [157]。壁・床壁体の影響に関しては内外熱伝達抵抗も含んだ熱抵抗 R_W, R_F によって表現できるとした (地盤部分を除いた熱抵抗)。地下室平面は幅 W と奥行き D の 2 つのパラメータを含んでいる特徴長さ $B = WD/2(W + D)$ を用いて 1 つのパラメータに集約した。これは、地下室床面積 WD をペリメータ長 $P = 2(W + D)$ で除いたものであり、 $W = D$ の正方平面のとき $B = W/4$ 、 $D \rightarrow \infty$ のとき $B = W/2$ になるパラメータである。したがって $D \rightarrow \infty$ のとき 2 次元解に収束するので、前節で検討した 2 次元解析解を利用することができる。これは ISO draft [39] の方法にならったものだが、定義が、ISO draft で使われている特徴長さ B' の 1/2 となっている。

無次元化は、壁の熱応答に関しては、地下室高さ H によって、また、床の熱応答に関しては、前述の特徴長さ B によって行う。無次元量は H で無次元化したものに $''$ を、また、 B で無次元化したものに $'''$ をつけた。さらに地盤の熱伝導率 λ_s および温度差 ΔT を用いることによって、壁熱貫流率 K'_W は、

$$K'_W = \frac{K_W H}{\lambda_s} \quad (4.96)$$

によって、また、地盤以外の壁熱抵抗、床熱抵抗、特徴長さは、

$$R'_W = \frac{R_W \lambda_s}{H} \quad (4.97)$$

$$R'_F = \frac{R_F \lambda_s}{H} \quad (4.98)$$

$$B' = \frac{B}{H} \quad (4.99)$$

によって無次元化できる。床についても同様に、

$$K_F'' = \frac{K_F B}{\lambda_s} \quad (4.100)$$

$$R_W'' = \frac{R_W \lambda_s}{B} \quad (4.101)$$

$$R_F'' = \frac{R_F \lambda_s}{B} \quad (4.102)$$

$$H'' = \frac{H}{B} \quad (4.103)$$

によって無次元化できる。前節で壁全熱流、床 1/2 領域の全熱流と呼んでいるのは、実はこの無次元熱貫流率に等しい。無次元熱貫流率を、

$$K_W' = f(B', R_F', R_W') \quad (4.104)$$

$$K_F'' = f(H'', R_F'', R_W'') \quad (4.105)$$

と、それぞれ 3 個のパラメータで表現したときの関数を決定するのが本節の課題となる。

非定常応答については、地盤の熱拡散率 a_s を用いて、非定常特性をあらわすパラメータを、

$$\beta' = H \sqrt{\frac{s}{a_s}} \quad (4.106)$$

もしくは、

$$\beta'' = B \sqrt{\frac{s}{a_s}} \quad (4.107)$$

として無次元化すればよい。

4.4.3 簡易計算式

4.4.3.1 地下壁熱貫流率

地下壁の熱貫流率に地下室の幅は影響しないと従来されており [157] [73]、また、前節の 2 次元解析解による検討でもそれは裏付けられている。しかし、2 次元計算と異なり、3 次元計算を行った場合、水平方向の熱伝導に対して地下室平面寸法が影響し、 B が小さいほど 3 次元性が強くあらわれ熱貫流率は大きくなるはずである。図 4.29 はそれを示したもので、 $B' = B/H$ は 3 次元性を特徴づけるパラメータとして無視できないことがわかる。図中には ISO draft の式、

$$K_W' = \frac{2}{\pi} \left(1 + \frac{0.5 R_F'}{1 + R_F'} \right) \log \left(1 + \frac{1}{R_W'} \right) \quad (4.108)$$

による計算も示しているが、ISO draft の式は、 B による影響が考慮されていない上に、全体に値が 2 次元解析解より小さい。ISO draft の式は、不易層部分で断熱境界として計算した結果をベースにしておき、このために半無限体として扱っている本計算と数値が合わないものと思われる。

一方、地下壁熱貫流率に対する地下床の熱抵抗の影響は、従来の式では考慮されているものの、図 4.30 に示すように、床熱抵抗の影響はほとんど無視でき、この結果は、前節で 2 次元解析解に対して考察した結果と一致している。したがって、無次元地下壁熱貫流率は、

$$K_W' = f(B', R_W') \quad (4.109)$$

という 2 つのパラメータをもつ関数で表現できるはずである。そこで、2 次元解析解に対する近似式 (4.79) をもとに、 B' の影響を考慮して、以下の近似式を作成した。

$$K_W' = 0.7 \left(1 + \frac{0.08}{0.05 + B'} \right) \log \left(1 + \frac{1.5}{R_W'} \right) \quad (4.110)$$

図 4.29、図 4.30 にはこの近似式による結果も示している。精算値と近似式による推定値を比較したのが、図 4.31 である。RMSE(Root Mean Square Error) は、0.0554 となった。

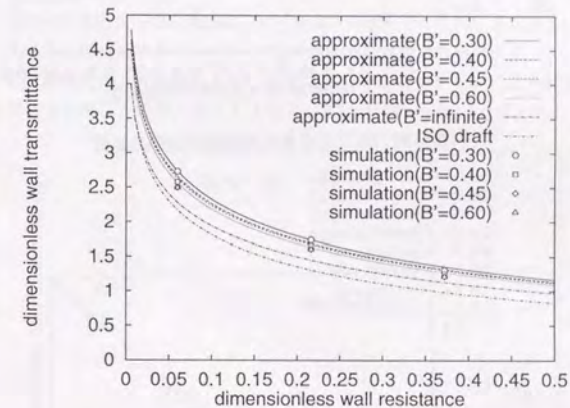


図 4.29 B' による無次元壁熱貫流率の比較

4.4.3.2 地下床熱貫流率

地下床の熱貫流率は、地下壁の熱貫流率に比べるとかなり複雑な挙動を示す。図 4.32 に地下室深さを変えたときの無次元床熱抵抗と無次元床熱貫流率の、また、図 4.33 に無次元壁熱抵抗を変えたときの無次元床熱抵抗と無次元床熱貫流率の関係を示す。ISO draft の式、

$$K_F'' = \frac{2}{2\pi + R_F'' + 0.5H''} \log \left(1 + \frac{2\pi}{R_F'' + 0.5H''} \right) \quad (4.111)$$

では床貫流率に壁抵抗は影響しないとしているが、図 4.33 に示すようにその影響は無視できない。

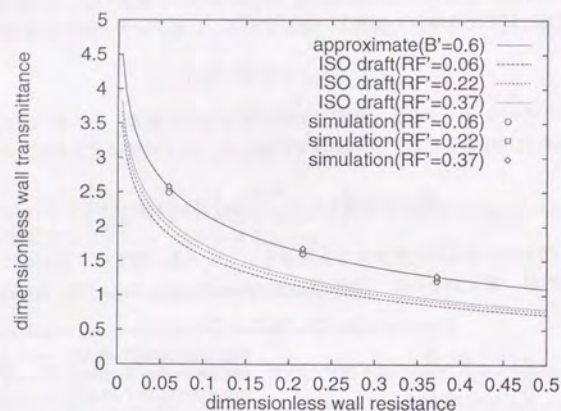
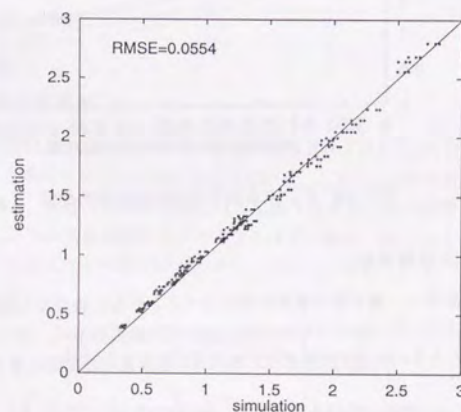
図 4.30 R_F' による無次元壁熱貫流率の比較

図 4.31 無次元壁熱貫流率の精算値と推定値の比較

2次元解析解から得た近似式(4.84), すなわち,

$$K_F'' = \frac{1}{\pi} \log \left(1 + \frac{1}{A} \right) \quad (4.112)$$

をもとに近似式を作成することを試みた。ただし,

$$A = (A_H^{0.7} + A_F^{0.7})^{\frac{1}{0.7}} \quad (4.113)$$

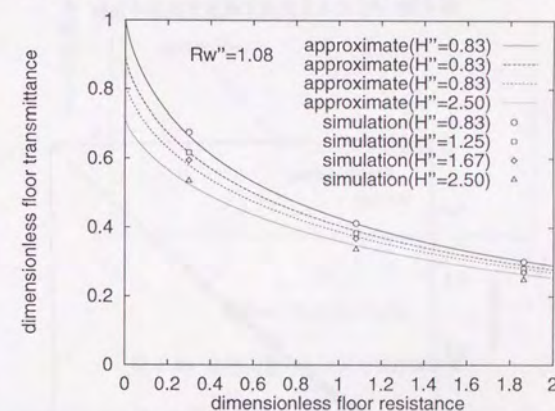
$$A_H = cH'^{0.88} \quad (4.114)$$

$$A_F = 0.24R_F'^{1.15} \quad (4.115)$$

である。cは、壁断熱仕様に関する係数であるが、最小2乗推定して,

$$c = 0.013 + \frac{0.06}{0.4 + R_W''} \quad (4.116)$$

とした。2次元の場合はcは、 $0.045 \leq c \leq 0.207$ の値をとったが、3次元シミュレーションをもとに当てはめた結果 $0.013 \leq c \leq 0.163$ の範囲の値をとる係数となった。図4.32、図4.33には上記近似式による推定値も示してある。シミュレーションによる精算値と近似式による推定値を比較したのが、図4.34である。RMSEは、0.0154となった。

図 4.32 H'' による無次元床熱貫流率の比較

4.4.3.3 非定常特性

非定常性を考えるとき、吸熱応答に関しては Laplace パラメータ s が大きくなるほどすなわち周期が短くなるほど地盤部分よりも、地下室壁・床などの影響が大きくなる。したがって、壁などを単なる熱抵抗と扱ってしまえば誤差が大きくなってしまふ。そこでこの

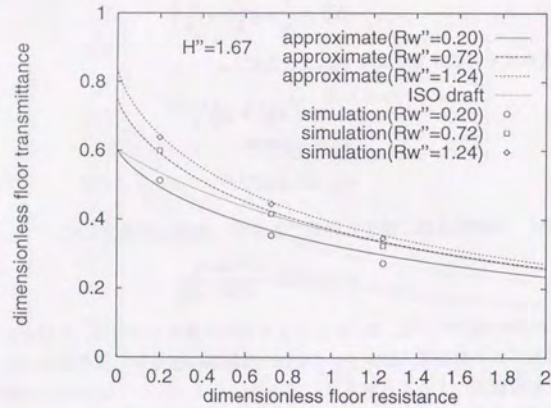
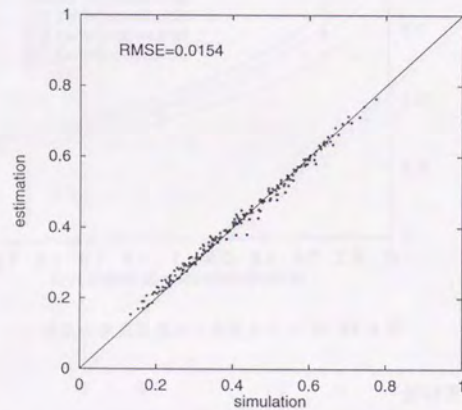
図 4.33 R_w'' による無次元床熱貫流率の比較

図 4.34 無次元床熱貫流率の精算値と推定値の比較

影響を除去するために、吸熱応答の場合、1次元半無限体の解析解 $G_A(s)$ と精算値 $G(s)$ との残差に着目してモデル化を行う。図 4.35 に示すように、1次元半無限体の解析解 $G_A(s)$ と精算値 $G(s)$ との残差は、貫流応答と同じ形となり扱いが容易になる。貫流応答の場合は $G_A(s)$ は常に 0 である。そこで、残差を更に熱貫流率(定常応答) $K = G(0)$ で規準化した $G_N(s) = (G(s) - G_A(s))/K$ を考え、熱応答 $G(s)$ を次のように表現する。

$$G(s) = G_A(s) + K G_N(s) \quad (4.117)$$

$G_A(s)$ は解析的に容易に計算できるので、熱貫流率 K と規準化残差応答 $G_N(s)$ に対する簡易計算式をそれぞれ求めればよいことになる。

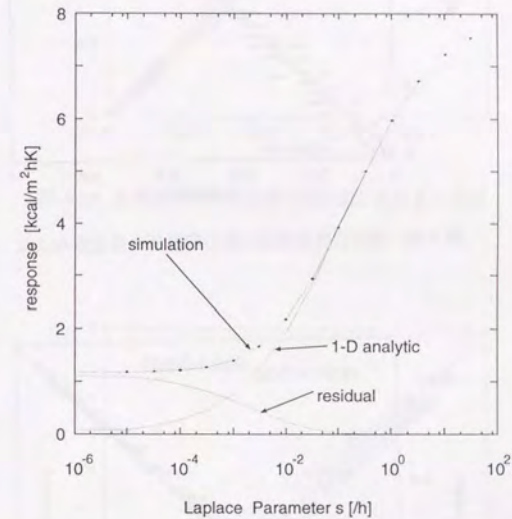


図 4.35 吸熱応答と 1 次元半無限解析解

ベクトル軌跡が対数螺旋 ($a^0 e^{i\theta}$, θ : 位相角, $i = \sqrt{-1}$) となる関数を選び最小 2 乗推定して下式の結果を得た。説明力の弱いパラメータは省いている。

$$G_{Nwt} = \exp(-0.42 R_w^{0.18} \beta^{0.85}) \quad (4.118)$$

$$G_{Nwa} = \exp(-1.1 R_w^{0.5} \beta^{0.85}) \quad (4.119)$$

$$G_{Nft} = \exp(-2.0 H^{0.6} R_F^{0.03} \beta^{0.9}) \quad (4.120)$$

$$G_{Nfa} = \exp(-1.4 R_F^{0.44} \beta^{0.74}) \quad (4.121)$$

以上の簡易計算式から得られる推定値と精算値を比較プロットしたものを図 4.36 から図 4.39 に示す。すべて、十分な精度で推定できていることがわかる。

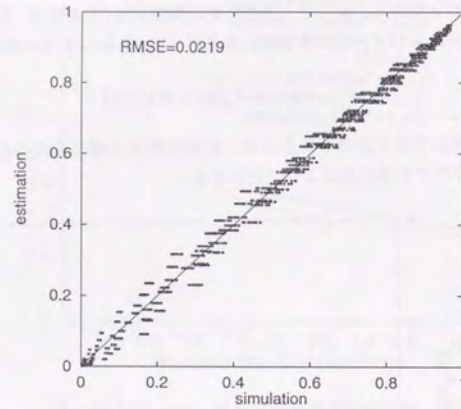


図 4.36 規準化壁熱貫流応答の精算値と推定値の比較

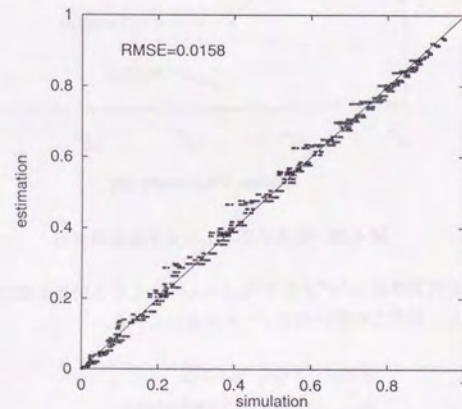


図 4.37 規準化壁吸熱残差応答の精算値と推定値の比較

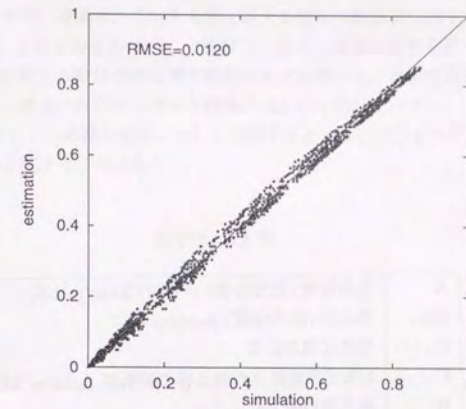


図 4.38 規準化床熱貫流応答の精算値と推定値の比較

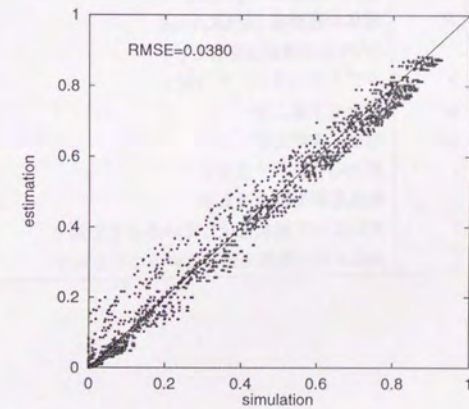


図 4.39 規準化床吸熱残差応答の精算値と推定値の比較

表 4.3 記号表

K	熱貫流率 (定常応答) $= G(0)$ [kcal/m ² hK]
$G(s)$	熱応答 (伝達関数) [kcal/m ² hK]
$G_N(s)$	規準化残差応答
$G_A(s)$	1次元半無限体の熱応答の解析解 [kcal/m ² hK]
W	地下室の幅 [m]
D	地下室の奥行き [m]
H	地下室の深さ [m]
B	室平面の特徴長さ [m] $= WD/2(W + D)$
λ_s	土壌の熱伝導率 [kcal/m ² hK]
a_s	土壌の熱拡散率 [m ² /h]
R	壁体の熱抵抗 [m ² hK/kcal] (内外表面熱抵抗を含む)
s	ラプラスパラメータ [/h]
W	壁を示す添え字
F	床を示す添え字
t	貫流応答を示す添え字
a	吸熱応答を示す添え字
$'$	H によって無次元化していることを示す
$''$	B によって無次元化していることを示す

4.5 まとめ

本章では、今までに提案されている地盤に接する壁体の熱損失に対する簡易計算法について概観した後、2次元解析解について検討し、更に、境界要素法を用いた3次元計算の結果から、地盤に接する壁体の熱応答の簡易計算式を導いた。本研究は基礎研究の段階にとどまっており、現実存在する様々な断熱仕様には対応していない。今後は既往の研究[73][95]で考慮されている部分断熱に対して検討するとともにドライエリア付き地下室に対しても適用範囲を広げる必要がある。