

積分方程式法を用いた高速三次元電磁応答計算コードの開発

宗包浩志^{*†}・歌田久司^{**}

Development of a Fast Three-dimensional Electromagnetic Induction Solver Based on the Integral Equation Method

Hiroshi MUNEKANE^{*} and Hisashi UTADA^{**}

Abstract

A fast solver for a three-dimensional induction problem is developed based on the integral equation method. The algorithm used in the solver is based on that of Avdeev *et al.* (1997), which utilized Iterative Dissipative Method (IDM) to ensure convergence of the resultant Neumann series. The algorithm is modified to solve resultant large and dense linear equations by the Krylov subspace method, instead of the Jacobi method. This modification enhances the efficiency of the solver up to twice. Several variants of the Krylov subspace methods are tested, and it is found that the BiCGSTAB 2 method is most efficient for the benchmark model of the COMMEMI project (Zhdanov *et al.*, 1997).

Key words : 3D induction solver, Integral equation, Iterative Dissipative Method, Krylov subspace

はじめに

MT (Magneto-Telluric) 法を用いて地下の比抵抗構造を推定する際には、構造の三次元性を正しく評価する必要がある。構造の三次元性の強い場所では観測される MT レスポンスは、Current channeling (e.g. Jiracek, 1990) などの三次元特有の影響を大きく受ける。このような場合、無理に二次元、二次元の解析を行うと誤った構造を推定してしまう可能性がある。従って、正確な構造を推定するためには、三次元解析を行うことが不可欠である。しかしながら、三次元構造に対する電磁応答の計算手法は未だに発展途上であり、決定版が存在しないのが現状である。

三次元構造に対する電磁応答の計算のアルゴリズムは大きく分けて三種類ある。すなわち有限差分法 (Mackie *et al.*, 1993, 1994 ; Smith, 1996a, b), 有限要素法 (Mogi, 1996 ; Zyserman and Santos, 2000), そして積分方程式法

(Wannamaker, 1991 ; Xiong and Tripp, 1995) である。それぞれのアルゴリズムには利点、欠点がある。有限差分法、有限要素法は解くべき線形方程式の係数行列が非常に疎であり、共役勾配法 (CG 法) などのクリロフ部分空間法が適用しやすいという利点をもつ。しかしながら空気層がモデリング領域に含まれていることから、係数行列の各要素の大きさのばらつきが著しい。このような場合、クリロフ部分空間法をそのまま適用しても収束が悪く、場合によっては発散してしまう。精度良く解くには前処理や、解が Maxwell 方程式を厳密に満たすように、強制的にポテンシャル場を差し引く、などの数値計算上の工夫が必要である (Mackie *et al.*, 1994)。一方、積分方程式法は、モデリング領域が背景の二次元構造と異なる電気伝導度をもつ電気伝導度異常領域に限られるために、空気層はモデリング領域に含まれない。従って係数行列の各要素の大きさのばらつきは有限差分法や有限要素法の場合に比べて小さく、本来クリロフ部分空間法に向いている。しかしながら、係数行列が一般的に密である上、密行列に適切な前処理があまりないため、特に電気伝導度異常のコントラストが大きい場合には適用は難しかった。一方、直接法によって線形方程式を解く場合はモデリング領域が大きくなると係数行列の次元が高くなり、計算時間やメモリの面から計算が著しく困難になるため、その適用範囲は従来電気伝導度

2001 年 8 月 16 日受付, 2001 年 10 月 15 日受理.

* 東京大学地震研究所火山噴火予知研究推進センター,

** 海半球観測研究センター,

† 現国土交通省国土地理院.

* Volcano Research Center,

** Ocean Hemisphere Research Center, Earthquake Research Institute, University of Tokyo.

† Now at Geographical Survey Institute, Ministry of Land, Infrastructure and Transport.

異常領域が小さい場合に限られていた。

最近 Avdeev *et al.* (1997) は, Iterative Dissipative Method (IDM) 法に基づく新しいアルゴリズムを提唱した。IDM 法は Fainberg and Singer (1980) において開発された方法であり, 電場および電気伝導度の代わりに新しい変数を導入することによって, 得られた積分方程式が逐次反復法 (Jacobi 法) によって必ず収束する形になっている。従って, IDM 法の係数行列はクリロフ部分空間法にも有利であることが期待される。そこで, 本研究ではまず Avdeev *et al.* (1997) に準拠した三次元電磁応答計算コードを作成することにし, その上でさらなる高速化をはかるために, Avdeev *et al.* (1997) では Jacobi 法によって解かれていた線形方程式を, クリロフ部分空間法を適用して解いた。その結果, Jacobi 法で反復するよりも計算時間を短縮することに成功した。

本論文では, まず第二章で IDM 法のアルゴリズムの概要をまとめる。次に第三章で, 三次元モデリングコードのテストのための標準モデルとなっている COMMEMI project (Zhdanov *et al.*, 1997) のモデルについて今回開発したコードを用いて電磁応答を計算する。さまざまなクリロフ部分空間法を適用した場合について, 反復回数や計算時間などを Jacobi 法などの他の解法と比較してクリロフ部分空間法の有効性を示すとともに, クリロフ部分空間法の中でもどの解法が適しているかを検証する。

Iterative Dissipative Method (IDM) 法のまとめ

まず, 点 \mathbf{r} での電場 $\mathbf{E}(\mathbf{r})$, 磁場 $\mathbf{H}(\mathbf{r})$, および電流密度 $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ が $\exp(i\omega t)$ (ω は角周波数) の時間依存性を持っていると仮定する。周波数領域においてマクスウェル方程式は以下のように書き表される。

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) = -i\omega\mu\mathbf{H}(\mathbf{r}) \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\rho}{\varepsilon} \quad (2)$$

$$\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}) = \zeta\mathbf{E}(\mathbf{r}) + \mathbf{j}_{src}(\mathbf{r}) \quad (3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H}(\mathbf{r}) = 0 \quad (4)$$

$$\zeta \equiv \sigma(\mathbf{r}) + i\omega\varepsilon \quad (5)$$

ただし ε は誘電率, μ は透磁率, ρ は電荷密度, σ は電気伝導度, ζ は変位電流を含めた一般化された電気伝導度, $\mathbf{j}_{src}(\mathbf{r})$ はソース電流である。 Q を背景の一次元成層構造に対するグリーンテンソル, そして $\mathbf{E}_n(\mathbf{r})$ を, ソース電流が背景の構造に対して作る電場であるとすると, ソース電流が任意の電気伝導度構造に対して作る電場 $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ は次のような積分方程式で表現される (Weidelt, 1975)

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_n(\mathbf{r}) + \int_A (\zeta - \zeta_0) Q \mathbf{E}(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \quad (6)$$

ただし, $\zeta_0(\mathbf{r})$ は背景の構造に対する一般化された電気伝導度であり, また $\int_A d\mathbf{r}'$ は電気伝導度異常が存在する領域全体における体積積分を表す。グリーンテンソル Q の具体的な計算方法は Appendix に示している。

式(6)を逐次反復法 (Jacobi 法) で解く場合, 対応する逐次近似級数 (Neumann 級数) が収束する条件は次のように与えられる (Zhdanov and Fang, 1997)。

$$|Q| |\delta\zeta| < 1 \quad (7)$$

ただし, $\delta\zeta \equiv (\zeta - \zeta_0)$ である。Avdeev *et al.* (1997) は式(6)を次のように変形して, この収束条件が常に成立するようにした。対応する積分方程式は次のように書き表せる:

$$\boldsymbol{\chi}(\mathbf{r}) = \boldsymbol{\chi}_0(\mathbf{r}) + \kappa \odot (R\boldsymbol{\chi}) \quad (8)$$

ただし,

$$R = \frac{\zeta - \zeta_0}{\zeta + \zeta_0} \quad (9)$$

$$\boldsymbol{\chi}_0 = \kappa \odot \left(\frac{\sqrt{Re\zeta_0}}{\zeta + \zeta_0} \mathbf{j}_s \right) \quad (10)$$

$$\mathbf{j}_s = (\zeta - \zeta_0) \mathbf{E}_n \quad (11)$$

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_n + \frac{1}{\zeta + \zeta_0} \left(2\sqrt{Re\zeta_0} \boldsymbol{\chi} - \mathbf{j}_s \right) \quad (12)$$

演算子 κ はベクトル $\boldsymbol{\eta}$ に対して次のように作用する。

$$(\kappa \odot \boldsymbol{\eta}) = \boldsymbol{\eta} + 2\sqrt{Re\zeta_0} \int Q \sqrt{Re\zeta_0} \boldsymbol{\eta} d\mathbf{r}' \quad (13)$$

$\bar{\zeta}_0$ は ζ_0 の共役複素数を表す。Pankratov *et al.* (1995) は地表での電磁場のエネルギーの流れが常に外向きであることを利用して, この積分方程式に対して収束条件

$$|\kappa| |R| < 1 \quad (14)$$

が常に満たされることを示した。従って式(8)を Jacobi 法で解く際の逐次近似級数は必ず収束する。

Avdeev *et al.* (1997) においては式(8)を Jacobi 法を用いて解いている。しかしながら, 反復法には Jacobi 法や Gauss-Seidel 法などのいわゆる定常反復法の他にも, 共役勾配 (CG) 法などに代表されるいわゆるクリロフ部分空間法がある (Barret *et al.*, 1994)。クリロフ部分空間法とは, n 回目の反復の更新ベクトルを線形方程式の初期残差ベクトルから構成されるクリロフ部分空間の中から選択するという方法であり, クリロフ部分空間の構成の仕方, またどのような原理で更新ベクトルを決定するかなどによって CG 法, BiCG 法, BiCGSTAB 法, BiCGSTAB2 法, GP-BiCG 法などの種類がある (藤野・張, 1996)。一般的にクリロフ部分空間法は Jacobi 法などの定常解法に比べて高速で, 特に係数行列が疎の場合に有効であると言われている。しかしながらその収束条件は必ずしも明らかでなく, 式(8)に適用した場合, Jacobi 法を用いた場合と異なり得られた級数が必ず収束するという保証は存在しない。その上, 式(8)の係数行列は密であるため, クリロフ部分空間法がそれほど有効でない可能性もある。そこで本研究では, 従来の Jacobi 法などの定常反復法といくつかのクリロフ部分空間法について, ある標準モデルに対して電磁応答の計算を行い, クリロフ部分空間法を用いた場合, 定常反復法に比べて収束回数や収束時間は短縮されるか, またいく

つかのクリロフ部分空間法の中でどれが最も優れているか、ということの評価した。

結 果

標準モデルとしては、COMMEMI (Comparison of Modeling Methods for Electromagnetic Induction Problems) project (Zhdanov *et al.*, 1997) において提案されたモデルを採用した。図1に用いたモデルを示す。このモデルに対して、周期10秒および100秒におけるMTレスポンスを計算した。収束基準は次に示す r_{norm} によった:

$$r_{norm} = \sqrt{\frac{|([\kappa \odot R] - I) \boldsymbol{\chi} - \boldsymbol{\chi}_0|^2}{|\boldsymbol{\chi}_0|^2}} \quad (15)$$

r_{norm} が 10^{-8} に達したときに収束したとみなし、反復を中

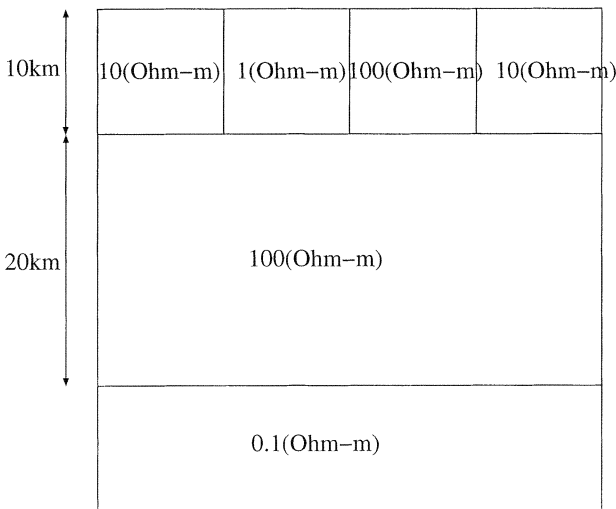
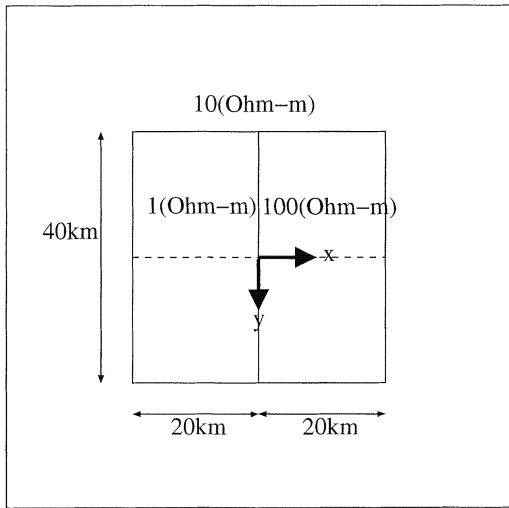


図1. COMMEMI project において提案されたベンチマークモデル。(上) 真上から見た図(下) $y=0$ における断面図。図中比抵抗の単位 Ohm-m は $\Omega \cdot m$ を表す。

止した。電気伝導度異常領域として、原点を中心とする $80 \text{ km} \times 80 \text{ km}$ の長方形内の深さ 10 km までの領域を取り、その領域を $80 \times 80 \times 5$ の直方体グリッドに区切った。その際必要とされたメモリーはすべて倍精度計算で 161 Mbytes であった。比較に用いた反復法は、定常反復法から Jacobi 法および準 Gauss-Seidel 法、またクリロフ部分空間法からは BiCGSTAB 法、BiCGSTAB2 法、GP-BiCG 法である。各解法の詳細については藤野・張 (1996) に詳しい。代表的なクリロフ部分空間法である CG 法および BiCG 法については、CG 法は係数行列がエルミートでないと適用できないのに対し、本研究の係数行列はそうではないこと、また BiCG 法は計算のために係数行列の転置を計算する必要があると繁雑となることや、収束の仕方が不規則であること (Barret *et al.*, 1994) などの理由で採用しなかった。準 Gauss-Seidel 法とは、本来の Gauss-Seidel 法では式(8)において iteration の結果求められた $\boldsymbol{\chi}$ の値を逐次更新するのに対し、本研究で開発したコードは、式(8)の計算を各層毎に FFT を用いた Convolution filter により一度に計算する (Avdeev *et al.*, 1997) 方式を採用しているため、値を逐次更新するのではなく層単位でまとめて更新するという方法である。

図2に、周期100秒の計算の際の各解法で必要な反復回数を示す。上の図が x 方向に平面波が入射した場合の反復回数、下の図が y 方向に入射した場合の反復回数を示す。どの解法を用いても収束条件は達成された。BiCGSTAB, BiCGSTAB2, GP-BiCG のいずれのクリロフ部分空間法も、Jacobi 法や準 Gauss-Seidel 法などの定常解法に比べて半分程度の反復回数で済むことが分かった。Table 1 に、反復計算に必要な時間を三回試行を行って測定した結果を示す。 x, y 方向の入射波に対して要した時間の和を示している。使用した CPU は Alpha 21164A (600 MHz) である。これを見ると、所要時間の面でも、クリロフ部分空間法を採用することにより Jacobi 法や準 Gauss-Seidel 法で必要とされる反復計算の時間の半分以下に押えられることが分かる。クリロフ部分空間法の中では、BiCGSTAB2 法および GP-BiCG 法が BiCGSTAB 法に比べて反復回数は一割ほど少なくなった。BiCGSTAB2 法および GP-BiCG 法は必要となる反復回数は全く同じであったが、必要とされる計算時間は BiCGSTAB2 法の方がわずかながら少なく済んだ。これは偶数回目の iteration における演算が BiCGSTAB2 法の方が少なくて済むからである (藤野・張, 1996)。ちなみに今回は Jacobi 法の方が準 Gauss-Seidel 法よりも収束が速かった。これは、準 Gauss-Seidel 法では得られた級数の収束性が成立しなくなる影響であると考えられる。

次に、本計算で得られた結果をこのモデル計算で基準とされる Wannamaker (1991) の結果と比較する。図3に、

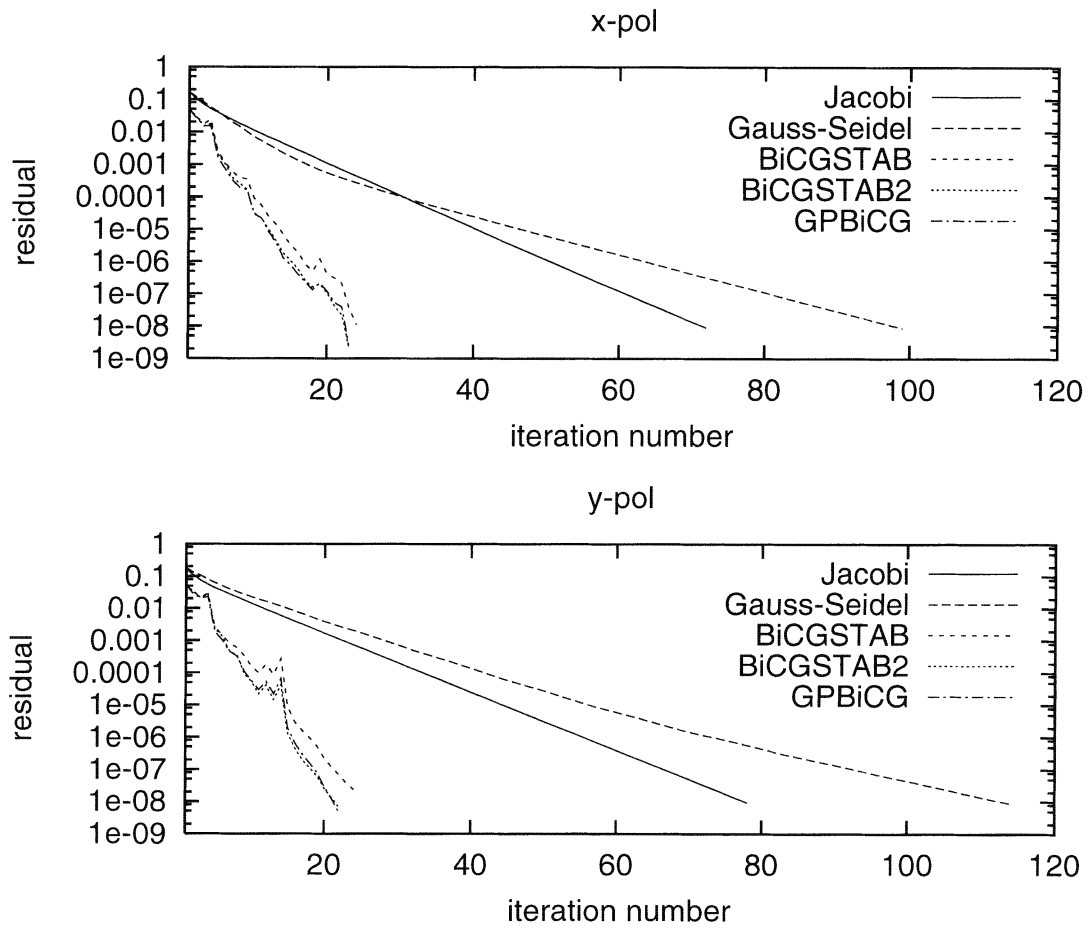


図 2. 周期 100 秒において各反復法において必要な反復回数. 横軸に反復回数, 縦軸に r_{norm} を示す. 上の図が x 方向に平面波が入射した場合, 下の図に y 方向に平面波が入射した場合を示す. BiCGSTAB, BiCGSTAB2, GP-BiCG などのクリロフ部分空間法を用いた場合, Jacobi 法や準 Gauss-Seidel 法などの定常解法を用いた場合に比べて半分程度の反復回数で収束することが分かる.

表 1. 反復計算に必要な時間. 3 回の試行の結果およびその平均を示した. x, y 方向の入射波に対して要した時間の和を示している. 単位は秒. BiCGSTAB, BiCGSTAB2, GP-BiCG などのクリロフ部分空間法を用いた場合, Jacobi 法や準 Gauss-Seidel 法を用いた場合に比べて半分程度の時間で収束することが分かる.

	解法				
	Jacobi	準 Gauss-Seidel	BiCGSTAB	BiCGSTAB2	GP-BiCG
Trial 1	1246	1589	421	386	403
Trial 2	1271	1817	482	413	422
Trial 3	1305	1826	497	434	462
Average	1274	1744	467	411	429

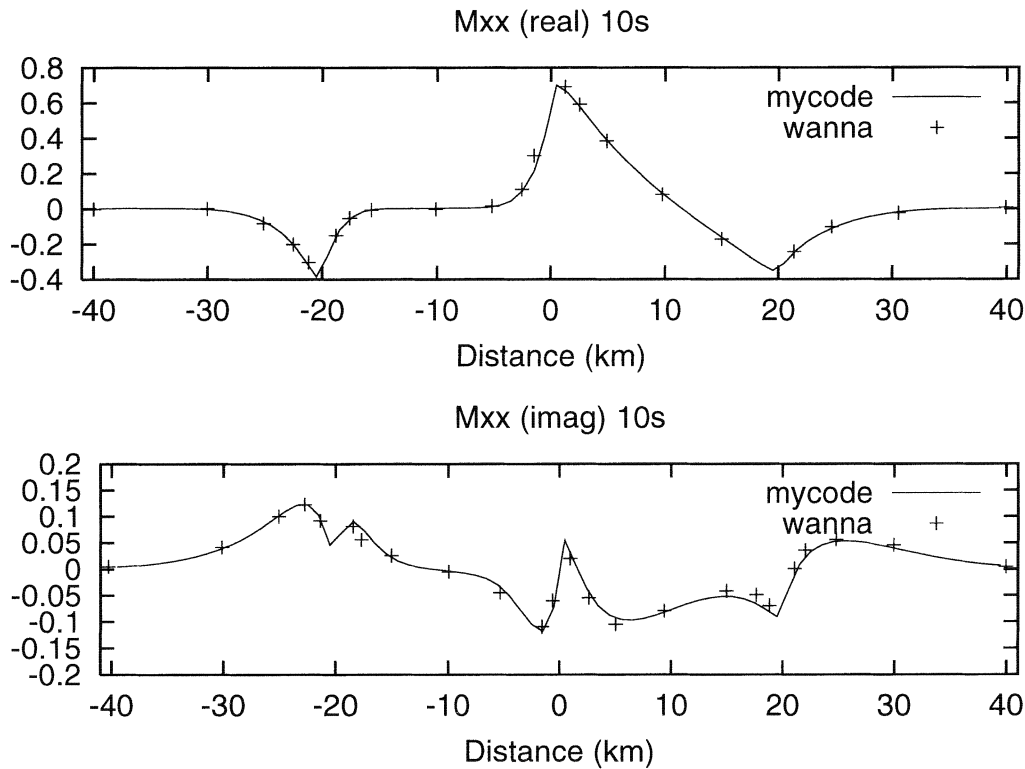


図 3. 図 1 のモデルに対する, $y=0$ の断面における地磁気変換関数の x 成分の計算結果. 周期 10 秒の結果を示す. 横軸に x 座標の値, 縦軸に地磁気変換関数の値を示す. 上の図が実部, 下の図が虚部を表す. 十字が Wannamaker (1991) で得られた結果, 実線が本研究で開発したコードによるもの. 両者は良い一致を示す.

周期 10 秒での $y=0$ の断面 (図 1 の点線) での地磁気変換関数の実部および虚部を表す. また, 図 4 に周期 100 秒での見掛け比抵抗および位相の xy および yx 成分を示す. どちらの図からも, 本計算での結果と Wannamaker (1991) との結果が良い一致を示すことが分かる.

まとめと今後の課題

本研究では, Avdeev *et al.* (1997) によって提案された IDM 法に基づく電磁応答計算アルゴリズムを改良し, 得られた線形方程式を Jacobi 法ではなくクリロフ部分空間法により解いた場合の振舞いについて調べた. クリロフ部分空間法を用いた場合は IDM 法の利点である, どのような比抵抗構造に対しても対応する級数が収束し, 原理的に解が求まるという利点は失われるが, モデル計算ではクリロフ部分空間法を用いても収束は達成され, また収束速度もほぼ二倍程度に改善されることが分かった. クリロフ部分空間法の中では, 収束回数, 計算時間の面でわずかに BiCGSTAB2 法が勝った.

ソースが一般に公開され, 良く三次元計算の際に用いられる Mackie *et al.* (1994) による差分法のコードが平面波入射の応答しか計算できないのに対し, 本研究で開発されたコードはあらゆるソースに対する応答を計算できるとい

う利点がある. ダイポールソースに対する応答が計算できると, Jacobian を相反定理により計算することが可能になるため, 三次元インバージョンの際に差分で Jacobian を計算する場合に比べて計算時間を大幅に短縮することが可能である. その上, 積分方程式法はモデリング領域が電気伝導度異常のある場所だけに限られるため, 先見的な情報により電気伝導度異常が存在する領域の広さを押えることにより高速に電磁応答を計算することが可能になる. 従って本研究で開発したコードは, 三次元インバージョンに組込む上で有利であると言える.

本研究では, 線形方程式を解く際前処理を用いなかった. これは前述の通り積分方程式法における係数行列は密であり適切な前処理行列が無いこと, また IDM 法を用いることで係数行列の性質が改善されると期待されることなどが理由である. しかし, 実際さまざまな前処理法を適用してどの程度改善が見られるのかテストすることは必要であろう. また, 例えば Habashy *et al.* (1993), Torres-Verdin and Habashy (1994) で示された Nonlinear scattering approximation のような, 式 (6) の近似解が前処理行列として利用できる可能性があり, さらに研究を進める必要がある.

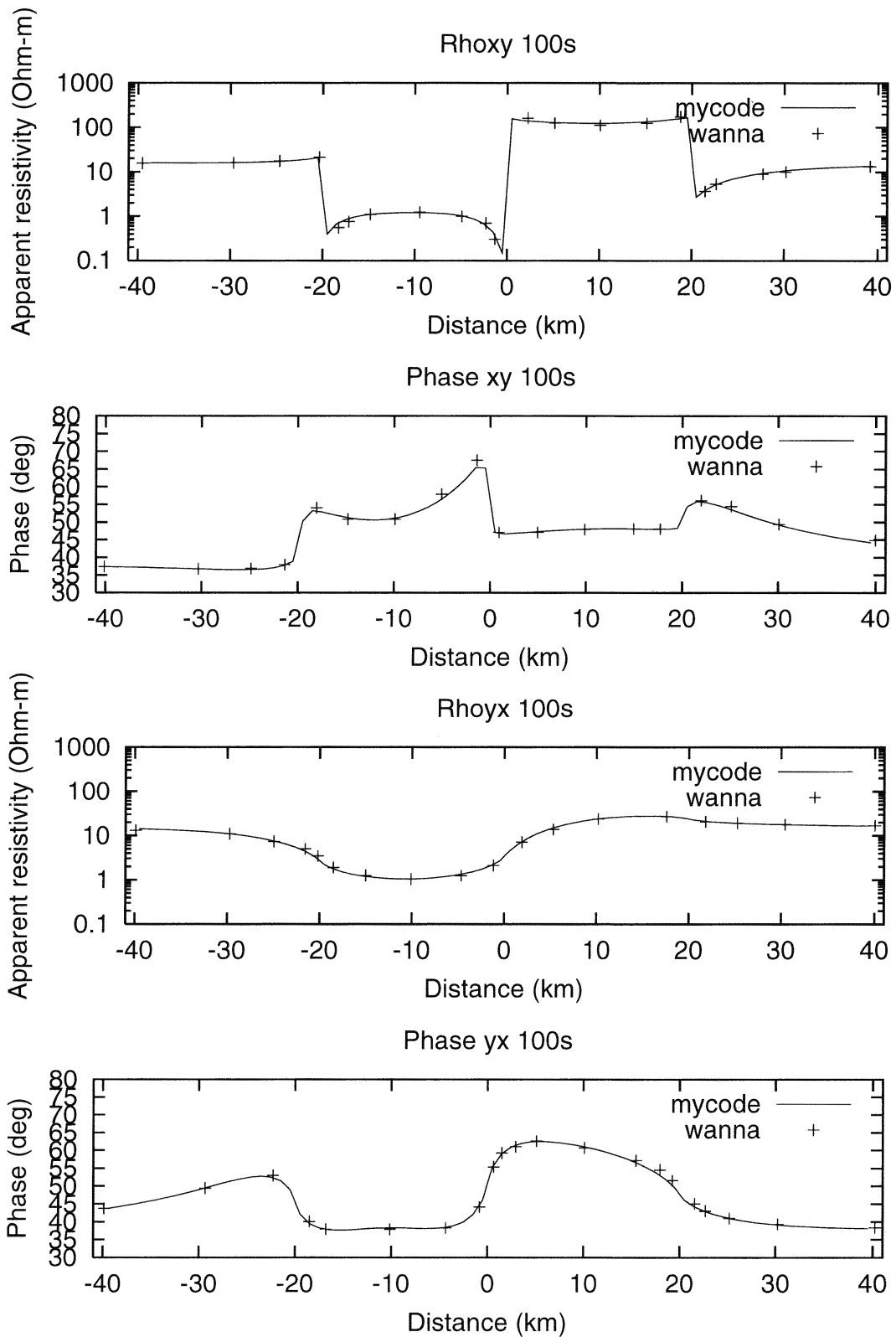


図 4. 図 1 のモデルに対する、 $y=0$ の断面におけるインピーダンステンソルの非対角成分の計算結果. 周期 100 秒の結果を示す. 横軸に x 座標の値, 縦軸には上から順に見掛け比抵抗の xy 成分, 位相の xy 成分, 見掛け比抵抗の yx 成分, 位相の yx 成分を示す. 記号は図 3 と同じ. 図中の単位 (Ohm-m) は $\Omega \cdot m$ を表す. 図 3 と同様, Wannamaker (1991) の結果と本研究の結果は良い一致を示す.

文 献

- Anderson, W.L., 1982, Fast Hankel transforms using related and lagged convolution, *ACM Trans. on Math. Software*, **8**, 344-368.
- Anderson, W.L., 1989, A hybrid fast Hankel transform algorithm for electromagnetic modeling, *Geophysics*, **54**, 263-266.
- Avdeev, D.B., A.V. Kuvshinov, O.V. Pankratov and G.A. Newman, 1997, High-performance three-dimensional electromagnetic modelling using modified Neumann series. Wide-band numerical solution and examples, *J. Geomag. Geoelectr.*, **49**, 1519-1539.
- Barret, R., M. Berry, T.F. Chan, J. Dammel, J.M. Donato, J. Dongarra, V. Eijkhout, R. Poso, C. Romine and H. Van der Vorst, 1994, Templates for the solution of linear systems : Building blocks for iterative methods, 2nd edition, SIAM.
- Chave, A.D., 1983, Numerical integration of related Hankel transforms by quadrature and continued fraction expansion, *Geophysics*, **48**, 1671-1686.
- Fainberg, E.B. and B. Sh. Singer, 1980, Electromagnetic induction in a nonuniform spherical model of the Earth, *Ann. Geophys.*, **36**, 127-134.
- 藤野清次・張 紹良, 1996, 反復法の数理, 朝倉書店, 140 頁.
- Habashy, T.M., R.W. Groom and B. Spies, 1993, Beyond the Born and Rytov approximations : A nonlinear approach to electromagnetic scattering, *J. Geophys. Res.*, **98**, 1759-1775.
- Jiracek, G.R., 1990, Near-surface and topographic distortions in electromagnetic induction, *Surv. in Geophys.*, **11**, 163-203.
- Mackie, R.L., T.R. Madden and P.E. Wannamaker, 1993, Three-dimensional magnetotelluric modeling using difference equations—Theory and comparisons to integral equation solutions, *Geophysics*, **58**, 215-226.
- Mackie, R.L., J.T. Smith and T.R. Madden, 1994, Three-dimensional electromagnetic modeling using finite difference equations : The magnetotelluric example, *Radio Science*, **29**, 923-935.
- Mogi, T., 1996, Three-dimensional modeling of magnetotelluric data using finite element method, *J. Appl. Geophys.*, **35**, 185-189.
- Pankratov, O.V., D.B. Avdeev and A.V. Kuvshinov, 1995, Electromagnetic field scattering in a heterogeneous earth : A solution to the forward problem, *Phys. Solid Earth*, **31**, 201-209.
- Smith, J. T., 1996a, Conservative modeling of 3-D electromagnetic fields, Part I : Properties and error analysis, *Geophysics*, **61**, 1308-1318.
- Smith, J. T., 1996b, Conservative modeling of 3-D electromagnetic fields, Part II : Biconjugate gradient solution and accelerator, *Geophysics*, **61**, 1319-1324.
- Torres-Verdin, C. and T.M. Habashy, 1994, Rapid 2.5-dimensional forward modeling and inversion via a new nonlinear scattering approximation, *Radio Science*, **29**, 1051-1079.
- Wannamaker, P.E., 1991, Advances in three-dimensional magnetotelluric modeling using integral equations, *Geophysics*, **56**, 1716-1728.
- Ward, S.H. and G.W. Hohmann, 1988, Electromagnetic theory for geophysical applications, in "Electromagnetic methods in applied geophysics", edited by Nabighian, M.N. eds, Society of Exploration Geophysicists, 183-311.
- Weaver, J.T., 1994, Mathematical methods for geoelectromagnetic induction, John Wiley & Sons, 316 pp.
- Weidelt, P., 1975, Electromagnetic induction in three-dimensional structures, *J. Geophys.*, **41**, 85-109.
- Xiong, Z. and A.C. Tripp, 1995, Electromagnetic scattering of large structures in layered earth using integral equations, *Radio Science*, **30**, 921-929.
- Zhdanov, M.S. and S. Fang, 1997, Quasi-linear series in three-dimensional electromagnetic modeling, *Radio Science*, **32**, 2167-2188.
- Zhdanov, M.S., I.M. Varentsov, J.T. Weaver, N.G. Golubev and V.A. Krylov, 1997, Methods for modeling electromagnetic fields—results from COMMEMI—the international project on the comparison of modeling methods for electromagnetic induction, *J. Appl. Geophys.*, **37**, 133-271.
- Zyserman, F.I. and J.E. Santos, 2000, Parallel finite element algorithm with domain decomposition for three-dimensional magnetotelluric modeling, *J. Appl. Geophys.*, **44**, 337-351.

Appendix

グリーンテンソルの計算法

ここでは簡単に水平成層構造大地におけるグリーンテンソルの計算方法をまとめる。一般に i 層目内部での電場および磁束密度は、ポロイダルポテンシャル Π 、およびトロイダルポテンシャル Γ を用いて次のように書き表すことができる (Weaver, 1994)。

$$\mathbf{E} = \nabla \times \nabla \times \Pi - i\omega \nabla \times \Gamma \quad (16)$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \nabla \times \Gamma + \mu\zeta \nabla \times \Pi \quad (17)$$

ただし、

$$\Pi = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \Pi_z \end{pmatrix} \quad (18)$$

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \Gamma_z \end{pmatrix} \quad (19)$$

である。これらのポテンシャルはヘルムホルツ方程式

$$\nabla^2 \Pi - i\omega\mu\zeta \Pi = 0 \quad (20)$$

$$\nabla^2 \Gamma - i\omega\mu\zeta \Gamma = 0 \quad (21)$$

を満たす。

層境界での Π と Γ の境界条件は、電場および磁場（磁束密度）の水平成分が層境界をはさんで連続であるという事実から導かれる。式 (16) および (17) を書き下してみると、電場および磁束密度の各成分は次のように書き表すことができる。

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} \partial_x \partial_z \Pi_z \\ \partial_y \partial_z \Pi_z \\ \partial_z^2 \Pi_z \end{pmatrix} - i\omega\mu\zeta \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \Pi_z \end{pmatrix} - i\omega \begin{pmatrix} \partial_y \Gamma_z \\ -\partial_x \Gamma_z \\ 0 \end{pmatrix} \quad (22)$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \partial_x \partial_z \Gamma_z \\ \partial_y \partial_z \Gamma_z \\ \partial_z^2 \Gamma_z \end{pmatrix} - i\omega\mu\zeta \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \Gamma_z \end{pmatrix} + \mu\zeta \begin{pmatrix} \partial_y \Pi_z \\ -\partial_x \Pi_z \\ 0 \end{pmatrix} \quad (23)$$

従って、電場の水平成分の連続性から $\partial_z \Pi_z$ および Γ_z が連続であること、また磁場（磁束密度）の水平成分の連続性から $\partial_z \Gamma_z$ および $\zeta \Pi_z$ が連続であることが言える。

次にヘルムホルツ方程式 (20) および (21) の一般解を波数領域で求める。例えば式 (20) の z 成分は、波数領域で次のように表現される。

$$\frac{d^2 \tilde{\Pi}_z}{dz^2} = \tilde{\gamma}^2 \tilde{\Pi}_z \quad (24)$$

$$\tilde{\gamma} = \sqrt{i\omega\mu\zeta + (k_x^2 + k_y^2)} \quad (25)$$

ここで、 $\tilde{\Pi}_z$ は Π_z の波数成分であり、次のように定義される：

$$\Pi_z \equiv \iint \tilde{\Pi}_z(z) \exp(i(k_x x + k_y y)) dk_x dk_y \quad (26)$$

ただし、 k_x および k_y はそれぞれ x , y 方向の波数を表す。式

(24) の一般解は次のように書き表される。

$$\tilde{\Pi}_z = A(k_x, k_y) \exp(\tilde{\gamma} z) + B(k_x, k_y) \exp(-\tilde{\gamma} z) \quad (27)$$

空間領域での Π_z 一般解は波数領域での一般解 $\tilde{\Pi}_z$ を逆フーリエ変換することによって次のように書き表すことができる。

$$\Pi_z = \iint (A(k_x, k_y) \exp(\tilde{\gamma} z) + B(k_x, k_y) \exp(-\tilde{\gamma} z)) \exp(i(k_x x + k_y y)) dk_x dk_y \quad (28)$$

係数 A および B は対称性より、 $\lambda = \sqrt{(k_x^2 + k_y^2)}$ のみの関数である。その場合、式 (28) は次のようにハンケル変換の形に書き表すことができる (Weaver, 1994)。

$$\Pi_z = \int (A(\lambda) \exp(\gamma z) + B(\lambda) \exp(-\gamma z)) \lambda J_0(\lambda r) d\lambda \quad (29)$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (30)$$

$$\gamma = \sqrt{i\omega\mu\zeta + \lambda^2} \quad (31)$$

ただし、 J_0 は 0 次のベッセル関数である。式 (21) の一般解も同様にして与えることができる。

次にダイポールが存在する層でのソース項を求める。波数領域においてダイポールが作る一次電場、一次磁束密度の z 成分 \tilde{E}_z^p 、 \tilde{B}_z^p はそれぞれのポテンシャルのソース項 $\tilde{\Pi}_z^p$ 、 $\tilde{\Gamma}_z^p$ を用いて次のように与えられる (式 (22), (23))。

$$\tilde{E}_z^p = \partial_z^2 \tilde{\Pi}_z^p - i\omega\mu\zeta \tilde{\Pi}_z^p \quad (32)$$

$$\tilde{B}_z^p = \partial_z^2 \tilde{\Gamma}_z^p - i\omega\mu\zeta \tilde{\Gamma}_z^p \quad (33)$$

この二成分に対しては、トロイダルポテンシャルによって作られる場とポロイダルポテンシャルによって作られる場が分離しているので、それぞれの成分を用いて両ポテンシャルのソース項を、ダイポールソースが作る一次場の z 成分 \tilde{E}_z^p 、 \tilde{B}_z^p を説明するように決めることができる (Ward and Hohmann, 1988)。単位強さの電流ダイポールソースを与えた時の一次電場、一次磁束密度の空間領域での値 \mathbf{E}^p 、 \mathbf{B}^p は Hertz vector \mathbf{S} を用いて次のように与えられる (Weaver, 1994)。

$$\mathbf{E}^p = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{S}) - \nabla^2 \mathbf{S} \quad (34)$$

$$\mathbf{B}^p = \mu\zeta \nabla \times \mathbf{S} \quad (35)$$

ただし、 \mathbf{S} の波数領域での値 $\tilde{\mathbf{S}}$ は、ダイポールの向きの単位ベクトルを \mathbf{x}_i として波数領域で次のように与えられる。

$$\tilde{\mathbf{S}} = S \mathbf{x}_i \quad (36)$$

$$S = \frac{\exp(-\tilde{\gamma}|z-w|)}{4\pi\zeta\tilde{\gamma}} \quad (37)$$

● z -dipole の場合

式 (34), (35) により一次電場、一次磁束密度はそれぞれ

$$\tilde{E}_z^p = \partial_z^2 S - i\omega\mu\zeta S \quad (38)$$

$$\tilde{B}_z^0 = 0 \quad (39)$$

と書き表すことができる。従って、波数領域で式(32), (33)と比較して

$$\tilde{\Pi}_z^0 = \tilde{S} = \frac{\exp(-\tilde{\gamma}|z-w|)}{4\pi\zeta\tilde{\gamma}} \quad (40)$$

$$\tilde{\Gamma}_z^0 = 0 \quad (41)$$

を得る。

●x-dipole の場合

式(34), (35)により一次電場、一次磁束密度はそれぞれ

$$E_z^0 = \partial_x \partial_z S \quad (42)$$

$$\tilde{B}_z^0 = -\mu\zeta\partial_y S \quad (43)$$

である。従って、波数領域で式(32), (33)と比較して

$$\tilde{\Pi}_z^0 = \frac{-ik_x t \exp(-\tilde{\gamma}|z-w|)}{4\pi\zeta(k_x^2 + k_y^2)} \quad (44)$$

$$\tilde{\Gamma}_z^0 = \frac{-ik_y \mu \exp(-\tilde{\gamma}|z-w|)}{4\pi\tilde{\gamma}(k_x^2 + k_y^2)} \quad (45)$$

を得る。ただし、 t は

$$t = \begin{cases} 1 & z-w \geq 0 \\ -1 & z-w < 0 \end{cases} \quad (46)$$

で与えられる。

●y-dipole の場合

x-dipole の場合のグリーンテンソル成分を時計回りに90度回転し、符号を入れ替えたものが y-dipole の場合のグリーンテンソル成分になるので省略。

ダイポールが存在する層でのグリーン関数のソース項が求まると、先に求めたポテンシャルの層境界での連続条件、また地表面、最下面でのポテンシャルの境界条件を用いて任意の地点でのグリーン関数を計算することができる (Weaver, 1994 : Appendix A)。数値計算によりグリーン関数を求める際に必要となるハンケル変換には Chave (1983) の直接積分法を用いた。この方法は、convolution filter を用いた Anderson (1982) の方法に比べて計算時間を要する代わりに誤差が予測できること、ならびにより条件の悪い関数に対して収束する利点を持つ。実際のコーディングでは Anderson (1989) の計算ルーチンを使用した。