

Bessel 関数の零点を標本点に用いた
補間法および数値積分法の研究

緒方 秀 教

博 士 論 文

Bessel 関数の零点を標本点に用いた
補間法および数値積分法の研究

緒 方 秀 教

東京大学大学院工学系研究科
物理工学専攻

目次

1 序論	1
2 Bessel 関数の零点を標本点に用いた補間公式	5
2.1 補間公式	5
2.2 帯状領域 $D(d)$ と関数族 $B(d, w)$	6
2.3 理論誤差解析	7
2.4 等間隔標本点をもつ補間公式 (Sinc 補間公式) との比較	10
3 Bessel 関数の零点を用いた数値積分公式 I (整数位数の場合)	12
3.1 対称積分に対する数値積分公式	12
3.1.1 公式と理論誤差解析	12
3.1.2 等間隔標本点をもつ数値積分公式 (台形公式) との比較	16
3.2 反対称積分に対する数値積分公式	17
3.2.1 位数 0 の場合	17
3.2.2 等間隔標本点をもつ反対称積分に対する数値積分公式との比較	23
3.2.3 一般の整数位数の場合	26
3.3 数値実験	32
3.3.1 対称積分の場合	32
3.3.2 反対称積分の場合	34
3.4 補題	35
3.4.1 対称積分公式の誤差の特性関数に関する補題	35
3.4.2 反対称積分公式の誤差の特性関数に関する補題	38
4 Bessel 関数の零点を用いた数値積分公式 II (実数位数の場合)	40
4.1 べき的特異性をもつ関数の積分に対する数値積分公式	40
4.2 理論誤差解析	43
4.3 数値実験	49
5 数値積分公式が厳密な積分値を与える場合	52
5.1 主要結果	52
5.2 証明	53
5.3 補題の証明	55

6	数値積分公式の応用 1	57
6.1	奇関数の半無限区間積分に対する数値積分公式	57
6.2	有限個標本点の Lagrange-Bessel 数値積分公式の誤差評価	61
6.3	(準)最適性	66
7	数値積分公式の応用 2 —Bessel 関数を含む振動積分の数値計算—	71
7.1	序論	71
7.2	Bessel 関数を含む振動積分に対する DE 型公式	72
7.3	理論誤差解析	78
7.4	公式の改良	86
7.5	補題	90
8	まとめ	92
	謝辞	94
	参考文献	95
I	Bessel 関数の絶対値の評価と、Bessel 関数を含む積分の計算	97
I.1	Bessel 関数の絶対値の評価に関する補題	97
I.2	Bessel 関数を含む積分の計算	100

第 1 章

序論

本研究では, Bessel 関数の標本点を零点にもつ補間公式および数値計算公式を構成し, 公式の性質 (誤差など) を理論・数値実験の両面から調べることを目標とする. またその応用として, Hankel 変換型積分の数値積分公式を構成し, その性質を理論・数値実験の両面から調べる.

はじめに, 研究の動機, すなわち, Bessel 関数の零点を標本点にもつ補間法および数値積分法の研究をはじめるといった動機について述べる.

数値積分公式の中で非常に有効なものの一つとして, 高橋・森の二重指数関数型積分公式 (double exponential formula, DE 公式)[27] が知られている. しかし, 従来この公式は Fourier 変換型積分

$$\int_0^{\infty} \hat{f}(x) \sin \omega x \, dx$$

などのような無限区間上での振動積分に対しては, 十分よい近似値を与えることが出来ないと考えられていた.

ところが, この Fourier 変換型積分に対しては, 1991 年画期的な数値積分法が大浦・森により考案された [13]. 従来の DE 公式, 大浦・森の DE 公式とも, 積分区間を $(-\infty, \infty)$ に変数変換した後, $(-\infty, \infty)$ 上の台形公式 $h \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kh)$ を適用する点では同じであるが, 変数変換が異なる. 従来の DE 公式は変数変換 $x = \varphi(t)$ として, “ $t \rightarrow \infty$ のとき, $\varphi'(t)$ が二重指数関数的に 0 に収束する” ものをとるのに対して, 大浦・森の DE 公式では台形公式の標本点間隔 h をパラメータに含むような変数変換 $x = \frac{\pi}{hw} \varphi(t)$ をとり, 関数 $\varphi(t)$ は “ $t \rightarrow -\infty$ のとき, $\varphi'(t)$ が二重指数関数的に 0 に収束し, $t \rightarrow \infty$ のとき, $\varphi(t)$ が t に二重指数関数的に近づく” ものをとる. このように変数変換をとることによって, 従来の DE 公式では, 二重指数関数的に減少する重みが被積分関数にかかり, 少ない標本点数で積分の近似値が計算でき, 大浦・森の公式では標本点が三角関数 $\sin \omega x$ の零点, つまり被積分関数の零点に二重指数関数的に近づくようになり, 少ない標本点数で積分の近似値が計算できるのである.

無限区間上での振動積分の典型例としては, Fourier 変換型積分以外に, Hankel 変換型積分, すなわち, Bessel 関数 $J_n (n = 0, 1, 2, \dots)$ を含むような積分

$$(1.1.1) \quad \int_0^{\infty} \hat{f}(x) J_n(x) \, dx$$

が知られており, 応用上重要である. しかし, 大浦・森の DE 公式をそのままこの積分に適用しても有効でない. Bessel 関数の零点は三角関数のように等間隔に並んでいるわけでは

ないからである。そこで、大浦・森の DE 式の基本的考え方「標本点が被積分関数の零点に二重指数関数的に近づくようにして、少ない標本点で積分値を計算する」に従い、変数変換として大浦・森の DE 式で用いたものと同じものを使うことを考える。このとき、基本となる数値積分公式としては、台形公式の代わりに、Bessel 関数の零点を標本点とする数値積分公式、より正確には、標本点が

$$(1.1.2) \quad \cdots < -\frac{h}{\pi} j_{nk} < \cdots < -\frac{h}{\pi} j_{n2} < -\frac{h}{\pi} j_{n1} < \frac{h}{\pi} j_{n1} < \frac{h}{\pi} j_{n2} < \cdots < \frac{h}{\pi} j_{nk} < \cdots$$

で与えられる数値積分公式が必要となることは容易に分かる。ここで、 $0 < j_{n1} < j_{n2} < \cdots < j_{nk} < \cdots$ は Bessel 関数 $J_n(x)$ の零点、 h は正のパラメータである。¹ かくして、Bessel 関数の零点 (正確には (1.1.2)) を標本点とする数値積分公式を構築することが求められるわけである。

本研究では、Bessel 関数の零点を標本点に持つ数値積分公式として、最も基本的な補間型数値積分公式タイプのものを考えることにする。すなわち、点列 (1.1.2) を標本点にもつ補間公式をはじめに構築して、その補間公式を項別積分することにより得られる数値積分公式を考える。

ところで、当初の目的である Bessel 関数を含む振動積分の数値計算の前に、Bessel 関数の零点を標本点にもつ数値積分公式自身の研究を進めていくうち、いくつかの興味ある事実が明らかになった。

変数変換型数値積分公式、とくに DE 式の基礎公式として用いられているのは、全無限区間積分に対する等間隔標本点の台形公式である：

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx \approx h \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kh).$$

この無限区間積分

$$(1.1.3) \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$$

に対して Bessel 関数の零点を標本点にもつ数値積分公式を導出したが、この公式の誤差は台形公式の誤差の平方根程度になってしまうことが判明した。そしてむしろ、符号関数 $\operatorname{sgn} x$ を含む次の積分

$$(1.1.4) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sgn} x f(x) dx = \left(\int_0^{\infty} - \int_{-\infty}^0 \right) f(x) dx,$$

もしくは、べき的特異性をもつ次の積分

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x|^{2\alpha-1} f(x) dx \quad (0 < \alpha < 1)$$

に対して、Bessel 関数の零点を標本点にもつ数値積分公式を構成すると、その精度が台形公式と同程度となることが判明した。

¹ パラメータ h は、公式の単位区間当たりの標本点密度の逆数を表わす。実際、 $j_{nk} \sim \pi(k+n/2-1/4)$ ($k \rightarrow \infty$) より、

$$\pm \frac{h}{\pi} j_{nk} \sim h \left(k + \frac{n}{2} - \frac{1}{4} \right) \quad (k \rightarrow \infty)$$

であり、標本点は漸近的に等間隔 h で分布するから、 $h = (\text{単位区間当たりの標本点密度})^{-1}$ である。

さらに、これらの数値積分公式に対して、公式が厳密な積分値を与えるような被積分関数のクラスが存在すること、および、被積分関数が急減少するという条件のもとで（準）最適であることが分かった。

また、上記の (1.1.3) より (1.1.4) に対して Bessel 関数の零点を標本点にもつ数値積分公式が高精度であることを反映して、大浦・森のアイデアを実現するには、もとの積分 (1.1.1) を (1.1.4) の形の積分に変数変換し、Bessel 関数の零点を標本点にもつ数値積分公式を適用しなければならないことが明らかになった。

本論文の構成はつぎのとおりである：

まず第2章で Bessel 関数の零点 (1.1.2) を標本点にもつ補間公式を導出する。この補間公式は、よく知られた Lagrange 補間公式の自然な拡張として得られることから、Lagrange-Bessel 補間公式と呼ぶ。続いて、この公式に対する理論誤差評価を行い、補間誤差が指数関数的減衰することを示す。

第3章では、つぎの2種類の積分：

$$\begin{aligned}\text{対称積分} : I_S(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx, \\ \text{反対称積分} : I_A(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sgn} x f(x) dx = \left(\int_0^{\infty} - \int_{-\infty}^0 \right) f(x) dx\end{aligned}$$

を考え、これらの積分に対して、第2章で得た Lagrange-Bessel 補間公式を形式的に項別積分することにより、整数位数 Bessel 関数 $J_n(x)$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) の零点を標本点に用いた数値積分公式 (Lagrange-Bessel 数値積分公式と呼ぶ) を導出する。さらに、理論誤差解析、数値実験の両面から各数値積分公式の誤差について調べる。対称積分、反対称積分いずれに対する数値積分公式も、積分誤差が指数関数的減衰するが、対称積分 $I_S(f)$ よりむしろ反対称積分 $I_A(f)$ に対する公式の方が誤差の減衰が速く、反対称積分の数値積分においては、Bessel 関数の零点を標本点に用いるとよいことが示される。

第4章では、非整数実数 $\nu > 0$ を位数とする Bessel 関数 $J_\nu(x)$ の零点 $0 < j_{\nu 1} < j_{\nu 2} < \dots < j_{\nu k} < \dots$ を標本点とする、すなわち、点列

$$\dots < -h \frac{j_{\nu k}}{\pi} < \dots < -h \frac{j_{\nu 2}}{\pi} < -h \frac{j_{\nu 1}}{\pi} < 0 < h \frac{j_{\nu 1}}{\pi} < h \frac{j_{\nu 2}}{\pi} < \dots < h \frac{j_{\nu k}}{\pi} < \dots$$

を標本点とする数値積分公式を導出する。この場合、べき的特異性を持つ積分

$$I_{\{\nu\}}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} |x|^{2(\nu)-1} f(x) dx$$

($\{\nu\}$ は ν の小数部分) を考える。なお、ここで得られる公式も Lagrange-Bessel 数値積分公式と呼ぶことにする。この公式に対し、理論誤差解析と数値実験により、積分誤差が指数関数的減衰することが示される。

第5章では、反対称積分、およびべき的特異性をもつ積分に対する Lagrange-Bessel 数値積分公式が厳密な積分値を与えるような被積分関数のクラスを明らかにする。

第6章では、反対称積分に対する Lagrange-Bessel 数値積分公式を奇関数の半無限区間積分の計算に応用する。反対称積分は、被積分関数 $f(x)$ の奇関数部分を $f_{\text{odd}}(x) = (1/2)[f(x) - f(-x)]$ として、

$$\int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sgn} x f(x) dx = 2 \int_0^{\infty} f_{\text{odd}}(x) dx$$

と表わされる。このことから、 $f(x)$ が奇関数の場合、半無限区間積分 $\int_0^{\infty} f(x) dx$ の計算には Lagrange-Bessel 数値積分公式が適していることが容易に分かる。ここでは、被積分関

数 $f(x)$ の減衰が遅い場合に、DE 変換により減衰を速くして計算の効率を上げる工夫も試みる。

続いて、標本点を有限個に打ち切った Lagrange-Bessel 数値積分公式の誤差を、被積分関数が一重または二重指数関数的減衰をするという条件下で評価する。その結果、とくに被積分関数が二重指数関数的減衰をする場合、標本点数を N とするとき誤差は $O[\exp(-cN/\log N)]$ のオーダーで減衰することが示される。さらに、同じ条件のもとで、反対称積分に対しては（有限個標本点の）Lagrange-Bessel 数値積分公式がほぼ最適であることを示す。

第7章では、本研究の当初の目標であった Hankel 変換型積分、すなわち、Bessel 関数を含む半無限区間上の振動積分

$$\int_0^{\infty} f(x) dx = \int_0^{\infty} \hat{f}(x) J_n(x) dx$$

の数値計算を試みる。本論文では、大浦・森が用いたものと同種の変数変換をもとの積分に施して、全無限区間上の反対称積分に変換し、それに反対称積分に対する Lagrange-Bessel 数値積分公式を適用する。

いくつかの例に対し数値積分公式の性能を数値的に調べ、また同時に、理論的に誤差評価を行う。被積分関数 $f(x) = \hat{f}(x) J_n(x)$ が整関数であるときは数値積分の精度がよいが、 $f(x)$ が正の実軸近傍に特異点を持つ場合は、数値積分の精度が悪くなることを明らかにする。後者の場合については、積分区間を分割して積分することにより、精度の改善がはかれることを示す。

第8章で本論文の総括を行う。

第 2 章

Bessel 関数の零点を標本点に用いた補間公式

この章では、はじめに Bessel 関数の零点を標本点に用いた補間公式を導出する。次に、補間公式の誤差解析を行い、実軸近傍で正則な関数に対しては補間公式がもとの関数に指数関数的に収束することを示す。

2.1 補間公式

はじめに、補間公式を導出する。具体的には、次の点列を標本点にもつ補間公式を導くことにする：

$$(2.1.1) \quad \dots, -h \frac{j_{\nu k}}{\pi}, \dots, -h \frac{j_{\nu 2}}{\pi}, -h \frac{j_{\nu 1}}{\pi}, h \frac{j_{\nu 1}}{\pi}, h \frac{j_{\nu 2}}{\pi}, \dots, h \frac{j_{\nu k}}{\pi}, \dots,$$

ここで h は正のパラメータ, ν は非負実数,

$$0 < j_{\nu 1} < j_{\nu 2} < \dots < j_{\nu k} < \dots$$

は位数 ν の第 1 種 Bessel 関数 $J_\nu(x)$ の零点である。

標本点が有限個の場合、関数 $f(x)$ に対する Lagrange 補間公式が下記の式で与えられることはよく知られている：

$$(2.1.2) \quad f(x) \approx L_N(f)(x) \equiv \sum_{k=1}^N f(a_k) \frac{W_N(x)}{W_N'(a_k)(x-a_k)}, \quad W_N(x) = \prod_{k=1}^N (x-a_k).$$

ここで a_1, a_2, \dots, a_N は標本点である。いま必要としているのは標本点が無限個の場合であるが、この場合にも上の式で標本点数 $N \rightarrow \infty$ とした極限と考えられる下記の補間公式が知られている [7]：

$$(2.1.3) \quad f(x) \approx L_\infty(f)(x) \equiv \sum_{k=1}^{\infty} f(a_k) \frac{W(x)}{W'(a_k)(x-a_k)},$$

ここで a_1, \dots, a_k, \dots は標本点, $W(x)$ は a_1, \dots, a_k, \dots を零点にもつ適当な整関数である。

いまの場合、標本点 a_k は (2.1.1) で与えられるから、 $W(x)$ として

$$W_N(x) \rightarrow W_B(x) = \prod_{k=1}^{\infty} \left[1 - \left(\frac{\pi x}{h j_{\nu k}} \right)^2 \right] = 2^\nu \Gamma(\nu + 1) \left(\frac{h}{\pi x} \right)^\nu J_\nu \left(\frac{\pi x}{h} \right)$$

ととることが出来、近似式

$$f(x) \approx \sum_{k=1}^{\infty} f \left(h \frac{j_{\nu k}}{\pi} \right) \frac{W_B'(x)}{W_B'(h j_{\nu k}/\pi)(x - h j_{\nu k}/\pi)} + \sum_{k=1}^{\infty} f \left(-h \frac{j_{\nu k}}{\pi} \right) \frac{W_B(x)}{W_B'(-h j_{\nu k}/\pi)(x + h j_{\nu k}/\pi)}$$

を得る。ここで、 $J'_\nu(x) = (\nu/x)J_\nu(x) - J_{\nu+1}(x)$, $(-x)^{-\nu}J_\nu(-x) = x^{-\nu}J_\nu(x)$ により $W_B' \left(\pm h \frac{j_{\nu k}}{\pi} \right) = \mp 2^\nu \Gamma(\nu + 1) \frac{\pi}{h} j_{\nu k}^{-\nu} J_{\nu+1}(j_{\nu k})$ となることに注意して、結局つぎの補間公式を得る：

$$(2.1.4) \quad \begin{aligned} f(x) &\approx L_B^{(\nu)}(f, h)(x) \\ &\equiv - \sum_{k=1}^{\infty} f \left(h \frac{j_{\nu k}}{\pi} \right) \frac{(h j_{\nu k}/(\pi x))^\nu J_\nu(\pi x/h)}{J_{\nu+1}(j_{\nu k})(\pi x/h - j_{\nu k})} \\ &\quad + \sum_{k=1}^{\infty} f \left(-h \frac{j_{\nu k}}{\pi} \right) \frac{(h j_{\nu k}/(\pi x))^\nu J_\nu(\pi x/h)}{J_{\nu+1}(j_{\nu k})(\pi x/h + j_{\nu k})} \end{aligned}$$

この公式を Lagrange-Bessel 補間公式と呼ぶことにする。

Bessel 関数の零点の性質

$$j_{\nu k} \sim \pi \left(k + \frac{\nu}{2} - \frac{1}{4} \right) \quad (k \rightarrow +\infty)$$

から、標本点は

$$h \frac{j_{\nu k}}{\pi} \sim h \left(k + \frac{\nu}{2} - \frac{1}{4} \right) \quad (k \rightarrow +\infty)$$

と、無限遠で等間隔 h で分布する、という性質を持つ。このことから、パラメータ h を「漸近的な」標本点間隔と呼ぶことにする。

2.2 帯状領域 $D(d)$ と関数族 $B(d, w)$

つぎに補間公式 (2.1.4) の誤差解析に移るが、その前に考察の対象とする関数のクラスを定義しておく。ここで定義する記号等は以降本論文全体にわたって使用する。

1°. ある正の定数 d に対し、 $D(d)$ を、実軸を中心とする幅 $2d$ の帯状領域とする：

$$D(d) = \{ z \in \mathbb{C} \mid |\operatorname{Im} z| < d \}.$$

2°. 領域 $D(d)$ 上で非負実数値をとる関数 $w(z)$ に対し、 $B(d, w)$ をつぎの条件 (a), (b), (c) を満たす関数 $f(z)$ からなる族とする：

(a) $f(z)$ は領域 $D(d)$ で正則である.

(b) 任意の c ($0 < c < d$) に対し,

$$\int_{-c}^c |f(x+iy)|w(x+iy) dy \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow \pm\infty).$$

(c) 任意の c ($0 \leq c < d$) に対し積分

$$\mathcal{N}(f, c, w) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} [|f(x+ic)|w(x+ic) + |f(x-ic)|w(x-ic)] dx$$

が存在し, さらに,

$$\mathcal{N}(f, d-0, w) \equiv \lim_{c \rightarrow d-0} \mathcal{N}(f, c, w)$$

が有限値である.

なお, $w(z) \equiv 1$ のとき, $B(d, w)$ を $B(d)$, $\mathcal{N}(f, d-0, w)$ を $\mathcal{N}(f, d-0)$ と略記する.

3°. 領域 $D(d)$ で定義された関数 $g(z)$ に対し, 実軸に平行な積分路 (図 2.1 参照)

$$\{x-ic \mid -\infty < x < +\infty\} \cup \{x+ic \mid +\infty > x > -\infty\}$$

($0 < c < d$) 上の積分を $\int_{\Gamma(c)} g(z) dz$ と書く:

$$\int_{\Gamma(c)} g(z) dz = \int_{-\infty}^{\infty} [g(x-ic) - g(x+ic)] dx.$$

また, この積分の $c \rightarrow d-0$ としたときの極限 (感覚的には, $D(d)$ の実軸に平行な境界に沿っての積分) を $\int_{\Gamma(d-0)} g(z) dz$ と書く:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma(d-0)} g(z) dz &= \lim_{c \rightarrow d-0} \int_{\Gamma(c)} g(z) dz \\ &= \lim_{c \rightarrow d-0} \int_{-\infty}^{\infty} [g(x-ic) - g(x+ic)] dx \end{aligned}$$

2.3 理論誤差解析

Lagrange-Bessel 補間公式 (2.1.4) の誤差はつぎのように評価される.

定理 2.3.1 $d > 0$ を定数, ν を非負実数とする. $f(z)$ が関数族 $B(d, |z|^{\nu+1/2})$ に属するとき, 任意の実数 x に対し, $f(x)$ の ν 位の Lagrange-Bessel 補間公式 (2.1.4) の誤差 $\Delta L_B^{(\nu)}(f, h)$ はつぎのように複素積分表示できる:

$$(2.3.1) \quad \Delta L_B^{(\nu)}(f, h)(x) \equiv f(x) - L_B^{(\nu)}(f, h)(x) = \frac{J_\nu(\pi x/h)}{2\pi i x^\nu} \int_{\Gamma(d-0)} \frac{z^\nu f(z) dz}{(z-x)J_\nu(\pi z/h)}.$$

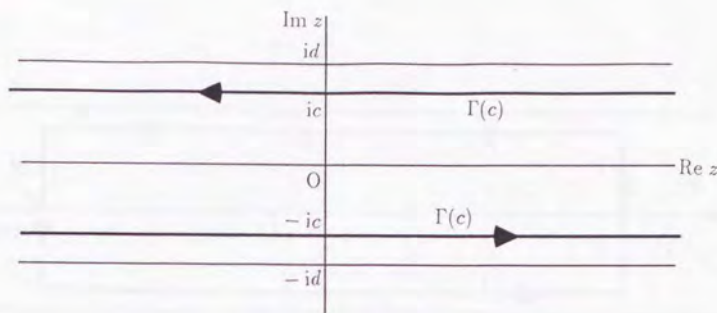


図 2.1 積分路 $\Gamma(c)$.

さらに、この誤差はつぎの不等式で評価される：

$$(2.3.2) \quad |\Delta L_B^{(\nu)}(f, h)(x)| \leq \frac{\pi^\nu \kappa_B^{(\nu)}(\pi(d-0)/h)}{2^{\nu+1/2} d \Gamma(\nu+1)} \mathcal{N}(f, d-0, |z|^{\nu+1/2}) h^{-\nu-1/2} \exp\left(-\frac{\pi d}{h}\right).$$

ここで、 $\kappa_B^{(\nu)}(M)$ は $M > 0$ で定義された Bessel 関数 $J_\nu(z)$ の評価に関する関数で、つぎの性質をもつ (補題 1.1.4 参照)：

$$(1) \text{ 単調減少, } (2) \kappa_B^{(\nu)}(M) < +\infty, \quad (3) \lim_{M \rightarrow \infty} \kappa_B^{(\nu)}(M) = 1.$$

□

上の定理より、Lagrange-Bessel 補間公式の誤差は漸近的な標本点間隔 h を小さくするにつれて、すなわち、単位長さ当たりの標本点数密度 $1/h$ を大きくするにつれて、

$$\text{誤差} = O[h^{-\nu-1/2} \exp(-\pi d/h)]$$

と指数関数的に減衰することが分かる。

(証明) ((2.3.1) の証明) 図 2.2 に描いたような積分路 $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4$ (ただし、 $0 < c < d$ 、また、 N_1, N_2 を正の整数とし、 $R_1 = h(N_1 + \nu/2 + 1/4)$ 、 $R_2 = h(N_2 + \nu/2 + 1/4)$ とする) に沿っての複素積分

$$\frac{J_\nu(\pi x/h)}{2\pi i x^\nu} \int_{\Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3 + \Gamma_4} \frac{z^\nu f(z) dz}{(z-x) J_\nu(\pi z/h)}$$

を考える。

N_1, N_2 を十分大きくとるとき、積分路の内部に存在する被積分関数の極は $z = x$ および $z = (h/\pi)j_{\nu k}$ ($k = 1, 2, \dots, N_1$)、 $z = -(h/\pi)j_{\nu k}$ ($k = 1, 2, \dots, N_2$) で与えられ、いずれも 1 位の極であるから、留数定理により、

$$\begin{aligned} \frac{J_\nu(\pi x/h)}{2\pi i x^\nu} \int_{\Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3 + \Gamma_4} \frac{z^\nu f(z) dz}{(z-x) J_\nu(\pi z/h)} &= f(x) + \sum_{k=1}^{N_1} f\left(h \frac{j_{\nu k}}{\pi} j_{\nu k}\right) \frac{(h j_{\nu k}/(\pi x))^\nu J_\nu(\pi x/h)}{J'_\nu(j_{\nu k})(j_{\nu k} - \pi x/h)} \\ &\quad - \sum_{k=1}^{N_2} f\left(-h \frac{j_{\nu k}}{\pi}\right) \frac{(-h j_{\nu k}/(\pi x))^\nu J_\nu(\pi x/h)}{J'_\nu(-j_{\nu k})(j_{\nu k} + \pi x/h)} \end{aligned}$$

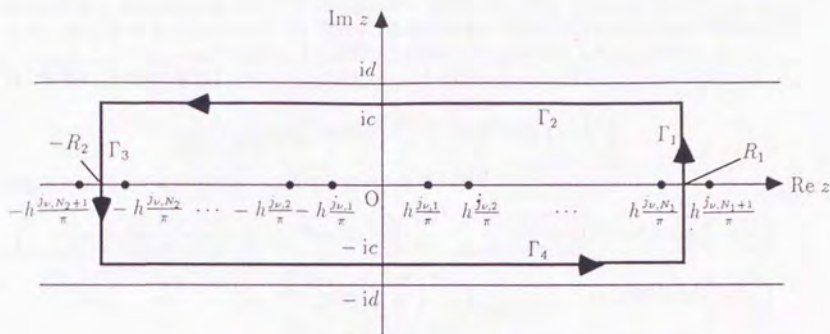


図 2.2 定理 2.3.1 の証明に用いる積分路 $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4$.

を得る。さらに、 $J'_\nu(x) = (\nu/x)J_\nu(x) - J_{\nu+1}(x)$ から導かれる $J'_\nu(j_{\nu k}) = -J_{\nu+1}(j_{\nu k}) \cdot (-j_{\nu k})^{-\nu} J'_\nu(-j_{\nu k}) = j_{\nu k}^{-\nu} J_{\nu+1}(j_{\nu k})$ に注意して、

$$\begin{aligned} \frac{J_\nu(\pi x/h)}{2\pi i x^\nu} \int_{\Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3 + \Gamma_4} \frac{z^\nu f(z) dz}{(z-x)J_\nu(\pi z/h)} &= f(x) + \sum_{k=1}^{N_1} f\left(h \frac{j_{\nu k}}{\pi}\right) \frac{(h j_{\nu k}/(\pi x))^\nu J_\nu(\pi x/h)}{J_{\nu+1}(j_{\nu k})(\pi x/h - j_{\nu k})} \\ &\quad - \sum_{k=1}^{N_2} f\left(-h \frac{j_{\nu k}}{\pi}\right) \frac{(h j_{\nu k}/(\pi x))^\nu J_\nu(\pi x/h)}{J_{\nu+1}(j_{\nu k})(j_{\nu k} + \pi x/h)} \end{aligned}$$

を得る。

ここで $N_1, N_2 \rightarrow \infty$ とすると、右辺は $\Delta L_B^{(\nu)}(f, h)(x)$ となるから、左辺の積分においてつぎの 2 つのこと：

(a) $N_1 \rightarrow \infty$ (すなわち $R_1 \rightarrow \infty$) のとき、 Γ_1 に沿っての積分が 0 に収束し、かつ、 $N_2 \rightarrow \infty$ (すなわち $R_2 \rightarrow \infty$) のとき、 Γ_3 に沿っての積分が 0 に収束すること；

(b) $N_1, N_2 \rightarrow \infty$ (すなわち $R_1, R_2 \rightarrow \infty$) のとき、 $\Gamma_2 + \Gamma_4$ に沿っての積分が存在すること；

が示されれば、

$$\begin{aligned} (2.3.3) \quad \Delta L_B^{(\nu)}(f, h)(x) &= \frac{J_\nu(\pi x/h)}{2\pi i x^\nu} \lim_{N_1, N_2 \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_2 + \Gamma_4} \frac{z^\nu f(z) dz}{(z-x)J_\nu(\pi z/h)} \\ &= \frac{J_\nu(\pi x/h)}{2\pi i x^\nu} \int_{\Gamma(c)} \frac{z^\nu f(z) dz}{(z-x)J_\nu(\pi z/h)} \end{aligned}$$

が得られ、 $c \rightarrow 0$ とすることにより式 (2.3.1) が得られる。

(a) を示す。1.1 節の補題 1.1.3 により、任意の $\varepsilon > 0$ に対し N_1 を十分大きくとれば、 $1/|J_\nu(\pi z/h)|$ が Γ_1 上で

$$\frac{1}{|J_\nu(\pi z/h)|} \leq (1+\varepsilon) \left(\frac{2\pi^2}{h}\right)^{1/2} |z|^{1/2}$$

と評価されるから、 Γ_1 に沿っての積分は

$$\left| \int_{\Gamma_1} \frac{z^\nu f(z) dz}{(z-x)J_\nu(\pi z/h)} \right| \leq (1+\varepsilon) \left(\frac{2\pi^2}{h}\right)^{1/2} \int_{-c}^c \frac{|R_1 + iy|^{\nu+1/2}}{|R_1 + iy| - |x|} |f(R_1 + iy)| dy$$

$$\leq (1+\varepsilon) \left(\frac{2\pi^2}{h} \right)^{1/2} \int_{-c}^c |R_1 + iy|^{\nu+1/2} |f(R_1 + iy)| dy$$

と抑えられる。\$B(d, w)\$ (\$w \equiv |z|^{n+1/2}\$) の定義における条件 (II) から、\$N_1 \rightarrow \infty\$ のとき (\$R_1 \rightarrow \infty\$ のとき)、最右辺 \$\rightarrow 0\$、したがって、\$\Gamma_1\$ に沿っての積分が 0 に収束することが分かる。同様に、\$N_2 \rightarrow \infty\$ のとき (\$R_2 \rightarrow \infty\$ のとき)、\$\Gamma_3\$ に沿っての積分が 0 に収束することも分かる。

(b) を示す。1.1 節の補題 I.1.4 より、\$1/|J_\nu(\pi z/h)|\$ が \$|\text{Im } z| = c\$ 上で

$$\frac{1}{|J_\nu(\pi z/h)|} \leq \kappa_B^{(\nu)}(\pi c/h) \left(\frac{2\pi^2}{h} \right)^{1/2} |z|^{1/2} \exp \left(-\frac{\pi c}{h} \right)$$

と評価されることが分かるから、つぎの一連の不等式を得る：

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_2+\Gamma_4} \left| \frac{z^\nu f(z) dz}{(z-x)J_\nu(\pi z/h)} \right| &\leq \kappa_B^{(\nu)}(\pi c/h) \left(\frac{2\pi^2}{h} \right)^{1/2} \int_{\Gamma_2+\Gamma_4} \frac{|z|^{\nu+1/2}}{|z-x|} |f(z)| |dz| \exp \left(-\frac{\pi c}{h} \right) \\ &\leq \frac{\kappa_B^{(\nu)}(\pi c/h)}{c} \left(\frac{2\pi^2}{h} \right)^{1/2} \int_{\Gamma_2+\Gamma_4} |z|^{\nu+1/2} |f(z)| |dz| \exp \left(-\frac{\pi c}{h} \right) \\ &\leq \frac{\kappa_B^{(\nu)}(\pi c/h)}{c} \left(\frac{2\pi^2}{h} \right)^{1/2} \mathcal{N}(f, c, |z|^{\nu+1/2}) \exp \left(-\frac{\pi c}{h} \right). \end{aligned}$$

これより、\$\Gamma_2 + \Gamma_4\$ に沿っての積分は \$N_1, N_2 \rightarrow \infty\$ (すなわち \$R_1, R_2 \rightarrow \infty\$) とするとき絶対収束することが分かる。したがって、\$N_1, N_2 \rightarrow \infty\$ (すなわち \$R_1, R_2 \rightarrow \infty\$) のとき、\$\Gamma_2 + \Gamma_4\$ に沿っての積分も存在する。

((2.3.1) の証明終わり)

((2.3.2) の証明) 式 (2.3.3)、および、(b) の証明で示した不等式より、

$$|\Delta I_B^{(\nu)}(f, h)(x)| \leq \frac{1}{2\pi} \left| \frac{J_\nu(\pi x/h)}{x^\nu} \right| \frac{\kappa_B^{(\nu)}(\pi c/h)}{c} \left(\frac{2\pi^2}{h} \right)^{1/2} \mathcal{N}(f, c, |z|^{\nu+1/2}) \exp \left(-\frac{\pi c}{h} \right)$$

が得られる。ここで、不等式 \$|J_\nu(x)| \leq (|x|/2)^\nu / \Gamma(\nu+1)\$ ([29], §3.31) より導かれる評価

$$\left| \frac{J_\nu(\pi x/h)}{x^\nu} \right| \leq \left(\frac{\pi^\nu}{2^\nu \Gamma(\nu+1)} \right) \frac{1}{h^\nu}$$

に注意すれば、\$c \rightarrow d \rightarrow 0\$ として、不等式 (2.3.2) が得られる。

((2.3.2) の証明終わり) ■

2.4 等間隔標本点をもつ補間公式 (Sinc 補間公式) との比較

ところで、Lagrange-Bessel 補間公式のように可算無限個の標本点を持つ補間公式としては、「Sinc 補間公式」と呼ばれる等間隔標本点の補間公式 [24]：

$$(2.4.1) \quad f(x) \approx L_{\text{Sinc}}(f, h)(x) \equiv \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kh) \frac{\sin[(\pi/h)(x - kh)]}{(\pi/h)(x - kh)}$$

が知られている。

実は、この公式も Lagrange-Bessel 補間公式と同様、従来の Lagrange 補間の自然な拡張として得ることが出来る。すなわち、公式 (2.1.2) において、\$W_N(x)\$ を標本点 \$kh\$ (\$k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\$) を零点にもつ関数

$$(2.4.2) \quad W_{\text{Sinc}}(x) = \sin \left(\frac{\pi x}{h} \right)$$

に置き換えれば、Sinc 補間公式 (2.4.1) を得る。

Sinc 補間公式 (2.4.1) の誤差評価に関しては、次の定理が知られている [24]。

定理 2.4.1 $d > 0$ を定数とする. $f(z)$ が関数族 $B(d)$ に属するとき, 任意の実数 x に対し, $f(x)$ の Sinc 補間公式 (2.4.1) の誤差 $\Delta L_{\text{Sinc}}(f, h)(x) = f(x) - L_{\text{Sinc}}(f, h)(x)$ はつぎのように複素積分表示できる:

$$(2.4.3) \Delta L_{\text{Sinc}}(f, h)(x) \equiv f(x) - L_{\text{Sinc}}(f, h)(x) = \frac{\sin(\pi x/h)}{2\pi i} \int_{\Gamma(d-0)} \frac{f(z) dz}{(z-x) \sin(\pi z/h)}.$$

さらに, この誤差はつぎの不等式で評価される:

$$(2.4.4) \quad |\Delta L_{\text{Sinc}}(f, h)(x)| \leq \frac{1}{\pi d} \mathcal{N}(f, d-0) \frac{e^{-\pi d/h}}{1 - e^{-2\pi d/h}}.$$

□

上の定理より, Sinc 補間の誤差は

$$\text{誤差} = O[\exp(-\pi d/h)]$$

である. これより, Lagrange-Bessel 補間は Sinc 補間とほぼ同程度の精度を達成していることが分かる.

第 3 章

Bessel 関数の零点を用いた数値積分公式 I (整数位数の場合)

この章では、次の 2 種類の積分に対し、整数位数 Bessel 関数の零点 $\pm h j_{nk}/\pi$ ($n = 0, 1, 2, \dots; k = 1, 2, \dots$) を標本点に持つ数値積分公式を導出し、それらの誤差を理論、数値実験の両面から調べる。

$$\text{対称積分} : I_S(f) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx,$$

$$\text{反対称積分} : I_A(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sgn} x f(x) dx = \left(\int_0^{\infty} - \int_{-\infty}^0 \right) f(x) dx$$

ここで、 $\operatorname{sgn} x$ は符号関数：

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} +1 & (x > 0), \\ -1 & (x < 0) \end{cases}$$

である。

3.1 対称積分に対する数値積分公式

3.1.1 公式と理論誤差解析

はじめに、対称積分

$$I_S(f) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$$

に対する補間型数値積分公式を導く。すなわち、Lagrange-Bessel 補間公式の両辺を区間 $(-\infty, +\infty)$ で積分することにより、対称積分に対する数値積分公式を導出する。

$n (= 0, 1, 2, \dots)$ 位の Lagrange-Bessel 補間公式

$$\begin{aligned} (3.1.1) \quad f(x) &\approx L_B^{(n)}(f, h)(x) \\ &= - \sum_{k=1}^{\infty} f\left(h \frac{j_{nk}}{\pi}\right) \frac{(h j_{nk}/(\pi x))^n J_n(\pi x/h)}{J_{n+1}(j_{nk})(\pi x/h - j_{nk})} \\ &\quad + \sum_{k=1}^{\infty} f\left(-h \frac{j_{nk}}{\pi}\right) \frac{(h j_{nk}/(\pi x))^n J_n(\pi x/h)}{J_{n+1}(j_{nk})(\pi x/h + j_{nk})} \end{aligned}$$

を全無限区間で積分し、形式的に項別積分を行う。付録 I.2 節で示すように

$$\text{p.v.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(h/(\pi x))^n J_n(\pi x/h)}{\pi x/h \mp j_{nk}} dx = \mp h H_n(j_{0k})$$

(p.v. $\int \dots$ は Cauchy の主値積分であり、 $H_n(x)$ は n 位の Struve 関数である [29]) であるから、対称積分 $I_S(f)$ に対するつぎの数値積分公式を得る：

$$\begin{aligned} (3.1.2) \quad I_S(f) &\approx Q_S^{(n)}(f, h) \\ &\equiv h \sum_{k=1}^{\infty} f\left(h \frac{j_{nk}}{\pi}\right) \frac{H_n(j_{nk})}{J_{n+1}(j_{nk})} + h \sum_{k=1}^{\infty} f\left(-h \frac{j_{nk}}{\pi}\right) \frac{H_n(j_{nk})}{J_{n+1}(j_{nk})}. \end{aligned}$$

この数値積分公式 $Q_S^{(n)}(f, h)$ を対称積分に対する n 位の Lagrange-Bessel 積分公式、あるいは簡単に、 n 位の対称積分公式と呼ぶことにする。

対称積分公式 (3.1.2) の誤差は、つぎの定理によって評価される：

定理 3.1.1 関数 $\Phi_S^{(n)}(z, h) (n = 0, 1, 2, \dots; h > 0)$ をつぎのように定義する：

$$(3.1.3) \quad \Phi_S^{(n)}(z, h) = \begin{cases} \pi \left(-i + \frac{H_n(\pi z/h)}{J_n(\pi z/h)} \right) & (0 \leq \arg z < \pi), \\ \pi \left(+i + \frac{H_n(\pi z/h)}{J_n(\pi z/h)} \right) & (-\pi \leq \arg z < 0) \end{cases}$$

(a) $B(d)$ に属する関数 $f(z)$ に対し、0 位の対称積分公式 $Q_S^{(0)}(f, h)$ の誤差は、つぎのように複素積分表示できる：

$$(3.1.4) \quad \Delta Q_S^{(0)}(f, h) \equiv I_S(f) - Q_S^{(0)}(f, h) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma(d-0)} f(z) \Phi_S^{(0)}(z, h) dz.$$

さらに、この誤差はつぎの不等式によって評価される：

$$(3.1.5) \quad |\Delta Q_S^{(0)}(f, h)| \leq \frac{2^{1/2}}{\pi^2 d^{1/2}} h^{1/2} \kappa_S^{(0)}(\pi(d-0)/h) \mathcal{N}(f, d-0) \exp\left(-\frac{\pi d}{h}\right).$$

(b) $n = 1, 2, \dots$ とする。 $B(d, |z|^{n-1/2})$ に属する関数 $f(z)$ に対し、対称積分に対する n 位の Lagrange-Bessel 積分公式 $Q_S^{(n)}(f, h)$ の誤差はつぎのように複素積分表示できる：

$$(3.1.6) \quad \Delta Q_S^{(n)}(f, h) \equiv I_S^{(n)}(f) - Q_S^{(n)}(f, h) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma(d-0)} f(z) \Phi_S^{(n)}(z, h) dz.$$

さらに、この誤差はつぎの不等式によって評価される：

$$\begin{aligned} (3.1.7) \quad |\Delta Q_S^{(n)}(f, h)| &\leq \frac{\sqrt{2} \pi^{n-2}}{(2n-1)!!} h^{-n+1/2} \kappa_S^{(n)}(\pi(d-0)/h) \mathcal{N}(f, d-0, |z|^{n-1/2}) \\ &\quad \times \exp\left(-\frac{\pi d}{h}\right). \end{aligned}$$

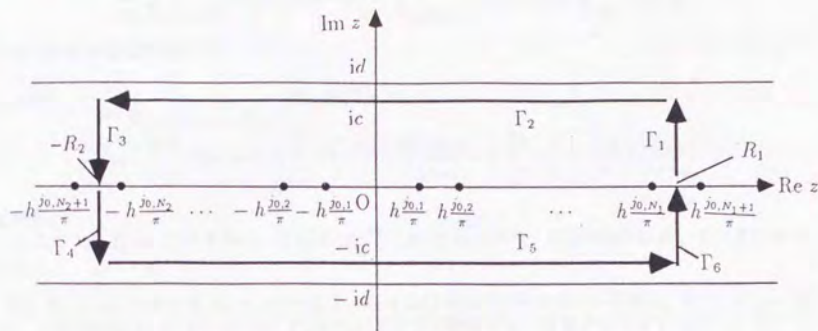


図 3.1 定理 3.1.1 の証明に用いる積分路 $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4, \Gamma_5, \Gamma_6$.

以上で $\kappa_S^{(n)}(M) (n = 0, 1, 2, \dots)$ は $M > 0$ で定義された $\Phi_S^{(n)}(z, \pi)$ の評価に関係する関数で、次の性質をもつ (補題 3.4.2 参照):

- (1) 単調減少, (2) $\kappa_S^{(n)}(M) < +\infty$, (3) $\lim_{M \rightarrow \infty} \kappa_S^{(n)}(M) = 1$.

□

(証明) (I) ((3.1.4) の証明) 図 3.1 に描いたような積分路 $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4, \Gamma_5, \Gamma_6$ (ただし, $0 < c < d$, また, N_1, N_2 を正の整数とし, $R_1 = h(N_1 + 1/4)$, $R_2 = h(N_2 + 1/4)$ とする) に沿った複素積分

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3 + \Gamma_4 + \Gamma_5 + \Gamma_6} f(z) \pi \frac{H_0(\pi z/h)}{J_0(\pi z/h)} dz$$

を考える.

N_1, N_2 を十分大きくとるとき, 積分路の内部に存在する被積分関数の極は $z = hj_{nk}/\pi$ ($k = 1, 2, \dots, N_1$), $z = -hj_{nk}/\pi$ ($k = 1, 2, \dots, N_2$), で与えられ, いずれも 1 位の極であるから, 留数定理により,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3 + \Gamma_4 + \Gamma_5 + \Gamma_6} f(z) \pi \frac{H_0(\pi z/h)}{J_0(\pi z/h)} dz \\ &= h \sum_{k=1}^{N_1} f\left(h \frac{j_{0k}}{\pi}\right) \frac{H_0(j_{0k})}{J_0(j_{0k})} + h \sum_{k=1}^{N_2} f\left(-h \frac{j_{0k}}{\pi}\right) \frac{H_0(j_{0k})}{J_0(j_{0k})} \end{aligned}$$

を得る. さらに, $J_0'(z) = -J_1(z)$ に注意して,

$$\begin{aligned} (3.1.8) \quad & \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3 + \Gamma_4 + \Gamma_5 + \Gamma_6} f(z) \pi \frac{H_0(\pi z/h)}{J_0(\pi z/h)} dz \\ &= -h \sum_{k=1}^{N_1} f\left(h \frac{j_{0k}}{\pi}\right) \frac{H_0(j_{0k})}{J_1(j_{0k})} - h \sum_{k=1}^{N_2} f\left(-h \frac{j_{0k}}{\pi}\right) \frac{H_0(j_{0k})}{J_1(j_{0k})} \end{aligned}$$

を得る. ここで, (3.1.8) の右辺および左辺のそれぞれに, Cauchy の積分定理から導かれる等式

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1+\Gamma_2+\Gamma_3} f(z) (-\pi i) dz + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_4+\Gamma_5+\Gamma_6} f(z) \pi i dz = \int_{-R_2}^{R_1} f(x) dx$$

の右辺および左辺を加えて,

$$(3.1.9) \quad \begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1+\Gamma_2+\Gamma_3+\Gamma_4+\Gamma_5+\Gamma_6} f(z) \Phi_S^{(0)}(z, h) dz \\ &= \int_{-R_2}^{R_1} f(x) dx - h \sum_{k=1}^{N_1} f\left(h \frac{j_{0k}}{\pi}\right) \frac{H_0(j_{0k})}{J_1(j_{0k})} - h \sum_{k=1}^{N_2} f\left(-h \frac{j_{0k}}{\pi}\right) \frac{H_0(j_{0k})}{J_1(j_{0k})} \end{aligned}$$

を得る.

ここで $N_1, N_2 \rightarrow \infty$ とすると, 右辺は $\Delta Q_S^{(0)}(f, h)$ となるから, 左辺の積分においてつぎの2つのこと:

(a) $N_1 \rightarrow \infty$ (すなわち $R_1 \rightarrow \infty$) のとき, $\Gamma_1 + \Gamma_6$ に沿っての積分が 0 に収束し, かつ, $N_2 \rightarrow \infty$ (すなわち $R_2 \rightarrow \infty$) のとき, $\Gamma_3 + \Gamma_4$ に沿っての積分が 0 に収束すること;

(b) $N_1, N_2 \rightarrow \infty$ (すなわち $R_1, R_2 \rightarrow \infty$) のとき, $\Gamma_2 + \Gamma_5$ に沿っての積分が存在すること;

が示されれば,

$$(3.1.10) \quad \begin{aligned} \Delta Q_S^{(0)}(f, h) &= \frac{1}{2\pi i} \lim_{N_1, N_2 \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_2+\Gamma_5} f(z) \Phi_S^{(0)}(z, h) dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma(c)} f(z) \Phi_S^{(0)}(z, h) dz \end{aligned}$$

が得られ, $c \rightarrow d \rightarrow 0$ とすることにより式 (3.1.4) が得られる.

(a) を示す. 補題 3.4.1 により, 任意の $\varepsilon > 0$ に対し N_1 を十分大きくとれば, $|\Phi_S^{(0)}(z, h)|$ が $\Gamma_1 + \Gamma_6$ 上で

$$|\Phi_S^{(0)}(z, h)| \leq (1 + \varepsilon) 2\pi$$

と評価されるから, $\Gamma_1 + \Gamma_6$ に沿っての積分は

$$\left| \int_{\Gamma_1+\Gamma_6} f(z) \Phi_S^{(0)}(z, h) dz \right| \leq (1 + \varepsilon) 2\pi \int_{-c}^c |f(R_1 + iy)| dy$$

と抑えられる. $B(d)$ の定義における条件 (II) から, $N_1 \rightarrow \infty$ のとき ($R_1 \rightarrow \infty$ のとき), 右辺 $\rightarrow 0$, したがって, $\Gamma_1 + \Gamma_6$ に沿っての積分が 0 に収束することが分かる. 同様にして, $N_2 \rightarrow \infty$ のとき ($R_2 \rightarrow \infty$ のとき), $\Gamma_3 + \Gamma_4$ に沿っての積分が 0 に収束することも分かる.

(b) を示す. 補題 3.4.2 により, $|\Phi_S^{(0)}(z, h)|$ が $|\operatorname{Im} z| = c$ 上で

$$|\Phi_S^{(0)}(z, h)| \leq \frac{1}{\pi} \left(\frac{8h}{c} \right)^{1/2} \kappa_S^{(0)}(\pi c/h) \exp \left(-\frac{\pi c}{h} \right)$$

と評価されることが分かるから, つぎの不等式を得る:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_2+\Gamma_5} |f(z) \Phi_S^{(0)}(z, h) dz| &\leq \frac{1}{\pi} \left(\frac{8h}{c} \right)^{1/2} \kappa_S^{(0)}(\pi c/h) \int_{\Gamma_2+\Gamma_5} |f(z)| |dz| \exp \left(-\frac{\pi c}{h} \right) \\ &\leq \frac{1}{\pi} \left(\frac{8h}{c} \right)^{1/2} \kappa_S^{(0)}(\pi c/h) 2\pi \mathcal{N}(f, c) \exp \left(-\frac{\pi c}{h} \right). \end{aligned}$$

これより, $\Gamma_2 + \Gamma_5$ に沿っての積分は $N_1, N_2 \rightarrow \infty$ (すなわち $R_1, R_2 \rightarrow \infty$) とするとき絶対収束することが分かる. したがって, $N_1, N_2 \rightarrow \infty$ (すなわち $R_1, R_2 \rightarrow \infty$) のとき, $\Gamma_2 + \Gamma_5$ に沿っての積分も存在する.

((3.1.4) の証明終わり)

((3.1.5) の証明) 式 (3.1.10), および, (b) の証明で示した不等式より,

$$|\Delta Q_S^{(0)}(f, h)| \leq \frac{1}{\pi^2} \left(\frac{2h}{c} \right)^{1/2} \kappa_S^{(0)}(\pi c/h) \mathcal{N}(f, c) \exp \left(-\frac{\pi c}{h} \right)$$

が得られるから, $c - d = 0$ とすればよい.

((3.1.5) の証明終わり)

(II) $n \geq 1$ の場合も (I) とほとんど同じようにして証明されるので省略する. ■

定理 3.1.1 により, 対称積分公式 (3.1.2) の誤差は漸近的な標本点間隔 h を小さくするにつれ, すなわち, 単位長さ当たりの標本点数密度 $1/h$ を大きくするにつれ, おおよそ

$$\text{誤差} = O \left[\exp \left(-\frac{\pi d}{h} \right) \right]$$

と指数関数的減衰することが分かる. また, この誤差評価は Lagrange-Bessel 補間公式に対する誤差評価とはほぼ同程度である. これは, 対称積分公式が Lagrange-Bessel 補間公式を積分して得られることから, ごく自然な結果である.

3.1.2 等間隔標本点をもつ数値積分公式 (台形公式) との比較

ところで, 対称積分に対する数値積分公式としては, 次の台形公式がよく知られている:

$$(3.1.11) \quad I_S(f) \approx Q_{\text{Trap.}}(f, h) \equiv h \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kh)$$

実はこの公式は前の章で述べた Sinc 補間公式 (2.4.1) を積分して得られる. したがって, 台形公式の誤差は Sinc 補間公式と同程度, すなわち,

$$\text{誤差} = O \left[\exp \left(-\frac{\pi d}{h} \right) \right]$$

となると予想するのが自然である. ところが, 台形公式に対する誤差評価は次のようになることが知られている [24]:

定理 3.1.2 d を正の定数とする. 関数族 $B(d)$ に属する関数 $f(z)$ に対し, 台形公式 (3.1.11) の誤差

$$\Delta Q_{\text{Trap.}}(f, h) = I_S(f) - Q_{\text{Trap.}}(f, h)$$

はつぎのように複素積分表示できる:

$$(3.1.12) \quad \Delta Q_{\text{Trap.}}(f, h) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx - Q_{\text{Trap.}}(f, h) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma(d)} f(z) \Phi_{\text{Trap.}}(z, h) dz,$$

ここで

$$(3.1.13) \quad \Phi_{\text{Trap.}}(z, h) = -i\pi \frac{\exp(\pm i\pi z/h)}{\sin(\pi z/h)} \quad (\pm \text{Im } z > 0).$$

である. さらにこの誤差はつぎの不等式で評価される:

$$(3.1.14) \quad |\Delta Q_{\text{Trap.}}(f, h)| \leq \mathcal{N}(f, d-0) \frac{\exp(-2\pi d/h)}{1 - \exp(-2\pi d/h)}.$$

□

上の定理より、台形公式の誤差は

$$\text{誤差} = O \left[\exp \left(-\frac{2\pi d}{h} \right) \right]$$

となる。すなわち、Sinc 補間公式を積分して得られる台形公式は、もとの Sinc 補間に対して桁数にして倍の精度を得ているという不思議な現象が起こっているのである。したがって、台形公式は Lagrange-Bessel 数値積分公式に対しても倍の精度があり、対称積分に対しては台形公式が精度の点で有利である。

なお、この不思議さの解明は 3.2.2 節で行う。

3.2 反対称積分に対する数値積分公式

3.2.1 位数 0 の場合

対称積分 $I_S(f) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ に対しては、台形公式 (3.1.11) が極めて精度が高く、Bessel 関数の零点を標本点に用いた数値積分公式、すなわち、Lagrange-Bessel 数値積分公式を用いる利点はないと考えられる。

そこで、この節ではどのような種類の積分に Bessel 関数の零点を標本点に用いた数値積分公式をつくると精度の高くなるかを考察する。

まず、台形公式と同程度の精度を持つ数値積分公式で、 $\pm h j_{0k}/\pi (k = 1, 2, \dots)$ を標本点にもつものを導出する。それには、台形公式の誤差の複素積分表示 (3.1.12) において、 $\sin(\pi z/h)$ を $J_0(\pi z/h)$ に、 $\exp(\pm i\pi z/h)$ を $H_0^{(1)}(\pi z/h)$ 、 $H_0^{(2)}(\pi z/h)$ に置き換えればよい、ただし、 $H_0^{(1)}$ 、 $H_0^{(2)}$ は 0 位の Hankel 関数である：

$$H_0^{(1)} = J_0 + iY_0, \quad H_0^{(2)} = J_0 - iY_0$$

(Y_0 は 0 位の第 2 種 Bessel 関数である)。すなわち、

$$(3.2.1) \quad \Phi_A^{(0)}(z, h) = \begin{cases} -i\pi \frac{H_0^{(1)}(\pi z/h)}{J_0(\pi z/h)} & (\operatorname{Im} z > 0), \\ +i\pi \frac{H_0^{(2)}(\pi z/h)}{J_0(\pi z/h)} & (\operatorname{Im} z < 0) \end{cases}$$

で定義される関数 $\Phi_A^{(0)}(z, h)$ を用いて、誤差の複素積分表示が

$$(3.2.2) \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma(d)} f(z) \Phi_A^{(0)}(z, h) dz$$

で与えられるような数値積分公式を求めるのである。

$\Phi_{\text{Trap}}(z, h)$ は台形公式の標本点 $hk (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ を特異点にもつが、 $\Phi_A^{(0)}(z, h)$ は $\pm h j_{0k}/\pi (k = 1, 2, \dots)$ を特異点にもつので、題意の数値積分公式は $\pm h j_{0k}/\pi (k = 1, 2, \dots)$ を標本点にもつ。さらに、Hankel 関数 $H_n^{(1)}(z)$ の漸近展開 ([29] §7.2)

$$H_0^{(1)}\left(\frac{\pi z}{h}\right) \sim \left(\frac{2h}{\pi^2 z}\right)^{1/2} \exp\left[+i\frac{\pi}{h}\left(z - \frac{h}{4}\right)\right] \quad (-\pi < \arg z < 2\pi)$$

$$H_0^{(2)}\left(\frac{\pi z}{h}\right) \sim \left(\frac{2h}{\pi^2 z}\right)^{1/2} \exp\left[-i\frac{\pi}{h}\left(z - \frac{h}{4}\right)\right] \quad (-2\pi < \arg z < \pi)$$

と $J_0 = (1/2)[H_0^{(1)} + H_0^{(2)}]$, $J_0(-z) = J_0(z)$ より, 全平面で

$$|\Phi^{(0)}(z, h)| \approx 2\pi \exp\left(-\frac{2\pi}{h}|\operatorname{Im} z|\right),$$

が成り立つから, 式 (3.2.2) の積分の絶対値は

$$(3.2.3) \quad \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma(d)} f(z) \Phi_A^{(0)}(z, h) dz \right| \lesssim \left\{ \int_{\Gamma(d)} |f(z)| |dz| \right\} \exp\left(-\frac{2\pi d}{h}\right),$$

と抑えられる. したがって, 題意の数値積分公式の誤差は台形公式の誤差と同程度の大きさである.

ところで, (3.2.2) 右辺の複素積分は, 後の定理 3.2.1 で示すように,

$$(3.2.4) \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma(d)} f(z) \Phi_A^{(0)}(z, h) dz = \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sgn} x f(x) dx - Q_A^{(0)}(f, h)$$

と変形される. ここで, $Q_A(f, h)$ は関数 $f(x)$ の反対称積分

$$I_A(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sgn} x f(x) dx = \int_0^{\infty} f(x) dx - \int_{-\infty}^0 f(x) dx$$

に対する数値積分公式である:

$$(3.2.5) \quad \begin{aligned} I_A(f) &\approx Q_A^{(0)}(f, h) \\ &\equiv h \sum_{k=1}^{\infty} f\left(h \frac{j_{0k}}{\pi}\right) \frac{2}{\pi j_{0k} (J_1(j_{0k}))^2} - h \sum_{k=1}^{\infty} f\left(-h \frac{j_{0k}}{\pi}\right) \frac{2}{\pi j_{0k} (J_1(j_{0k}))^2}. \end{aligned}$$

この数値積分公式 $Q_A^{(0)}(f, h)$ を, 反対称積分に対する 0 位の Lagrange-Bessel 積分公式, または, 0 位の反対称積分公式と呼ぶことにする.

公式 (3.2.5) の誤差は式 (3.2.4) のように複素積分表示することが出来る. この誤差は, 式 (3.2.3) で示したように, $O[\exp(-2\pi d/h)]$ で評価される.

注意 3.2.1 数値積分公式 (3.2.5) をここでは誤差の複素積分表示から出発して導出したが, 対称積分に対する Lagrange-Bessel 数値積分公式の場合と同様, Lagrange-Bessel 補間公式を項別積分して導出することも出来る.

厳密には, 公式 (3.2.5) の誤差はつぎのように評価される:

定理 3.2.1 $B(d)$ に属する関数 $f(z)$ に対し, 0 位の反対称積分公式 (3.2.5) の誤差はつぎのように複素積分表示できる:

$$(3.2.6) \quad \Delta Q_A^{(0)}(f, h) \equiv I_A^{(0)}(f) - Q_A^{(0)}(f, h) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma(d-0)} f(z) \Phi_A^{(0)}(z, h) dz,$$

ここで,

$$\Phi_A^{(0)}(z, h) = \begin{cases} -i\pi \frac{H_0^{(1)}(\pi z/h)}{J_0(\pi z/h)} & (0 \leq \arg z < \pi), \\ +i\pi \frac{H_0^{(2)}(\pi z/h)}{J_0(\pi z/h)} & (-\pi \leq \arg z < 0) \end{cases}$$

である。ただし、 $H_0^{(1)}(z), H_0^{(2)}(z)$ は 0 位の Hankel 関数 [29] であり、Hankel 関数の虚数部 $\pm Y_0(z)$ が正の実数値に対して実数値をとるような分枝をとる。¹

さらに、この誤差はつぎの不等式で評価される：

$$(3.2.7) \quad |\Delta Q_A^{(0)}(f, h)| \leq \kappa_A^{(0)}(\pi(d-0)/h) \mathcal{N}(f, d-0) \exp\left(-\frac{2\pi d}{h}\right).$$

ここで、 $\kappa_A^{(0)}(M)$ は $M > 0$ で定義された $\Phi_A^{(0)}(z, \pi)$ の評価に関係する関数で、つぎの性質をもつ (補題 3.4.4 参照)：

$$(1) \text{ 単調減少, } (2) \kappa_A^{(0)}(M) < +\infty, \quad (3) \lim_{M \rightarrow \infty} \kappa_A^{(0)}(M) = 1.$$

□

(定理 3.2.1 の証明) ((3.2.6) の証明) 証明は少々長いが、その流れは定理 3.1.1 の (3.1.4) の証明と同じであり、証明の第一段階は、定理 3.1.1 の証明のなかの等式 (3.1.9) に対応する等式 (3.2.10) を示すことである。Hankel 関数が多価であるために、この第一段階で少々面倒な計算を要する。

まず図 3.2 に描いたような積分路 $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ (ただし、 $0 < c < d$ 、また、 N_1, N_2 を十分大きな正の整数とし、 $R_1 = h(N_1 + 1/4)$ 、 $R_2 = h(N_2 + 1/4)$ とする) に沿っての複素積分

$$-\int_{\Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3} f(z) \frac{H_0^{(1)}(\pi z/h)}{2J_0(\pi z/h)} dz \quad \left(= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3} f(z) \Phi_A^{(0)}(z, h) dz \right)$$

を考える。ここで、被積分関数の正則性に注意して、積分路 $\Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3$ を図 3.2 に描いた半径 r (十分小さいとする) の小半円：

$$\gamma_k^+(r) = \{z \mid |z + (h/\pi)j_{0,k}| = r, \operatorname{Im} z > 0\} \quad (k = -N_2, -(N_2-1), \dots, -1),$$

$$\gamma_0^+(r) = \{z \mid |z| = r, \operatorname{Im} z > 0\},$$

$$\gamma_k^-(r) = \{z \mid |z - (h/\pi)j_{0,k}| = r, \operatorname{Im} z > 0\} \quad (k = 1, 2, \dots, N_1),$$

および、線分：

$$l_{-N_2-1}^+(r) = [-R_2, -(h/\pi)j_{0,N_2} - r],$$

$$l_k^+(r) = [-(h/\pi)j_{0,k} + r, -(h/\pi)j_{0,k-1} - r] \quad (k = -N_2, \dots, -2),$$

$$l_{-1}^+(r) = [-(h/\pi)j_{0,1} + r, -r]^2,$$

$$l_1^+(r) = [r, (h/\pi)j_{0,1} - r],$$

$$l_k^+(r) = [(h/\pi)j_{0,k-1} + r, (h/\pi)j_{0,k} - r] \quad (k = 2, \dots, N_1),$$

$$l_{N_1+1}^+(r) = [(h/\pi)j_{0,N_1} + r, R_1],$$

からなる積分路 $\Gamma^+(r)$ に変形する：

$$-\int_{\Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3} f(z) \frac{H_0^{(1)}(\pi z/h)}{2J_0(\pi z/h)} dz = -\int_{\Gamma^+(r)} f(z) \frac{H_0^{(1)}(\pi z/h)}{2J_0(\pi z/h)} dz.$$

いま、さらに、右辺を

$$-\int_{\Gamma^+(r)} f(z) \frac{H_0^{(1)}(\pi z/h)}{2J_0(\pi z/h)} dz = -\sum_{k=-N_2-1}^{-1} \int_{l_k^+(r)} f(z) \frac{H_0^{(1)}(\pi z/h)}{2J_0(\pi z/h)} dz - \sum_{k=1}^{N_1+1} \int_{l_k^+(r)} f(z) \frac{H_0^{(1)}(\pi z/h)}{2J_0(\pi z/h)} dz$$

¹Hankel 関数 $H_0^{(1)}(z), H_0^{(2)}(z)$ は、整関数である Bessel 関数 $J_0(z)$ と原点に対数特異点をもつ Neumann 関数 $Y_0(z)$ を用いて、 $H_0^{(1)}(z) = J_0(z) + iY_0(z)$ 、 $H_0^{(2)}(z) = J_0(z) - iY_0(z)$ と表されることが分かるように、無限多価関数である。したがって、その分枝を指定しなければその意味は確定しないことに注意。

²線分 $l_k^+(r)$ ($k = -N_2-1, -N_2, \dots, -1$) は、負の実軸に沿って複素平面を切ったときの切口の上岸で考える。

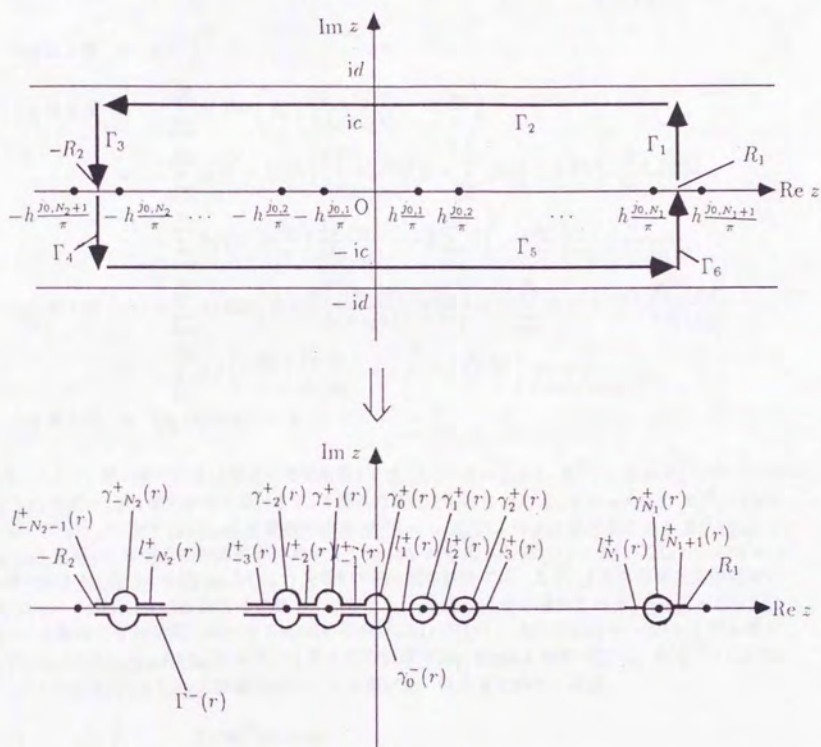


図 3.2 定理 3.2.1 の証明に用いる積分路 $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4, \Gamma_5, \Gamma_6$; γ_k^+ ($k = -N_2 - N_2 + 1, \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots, N_1$), l_k^+ ($k = -N_2 - 1, -N_2, \dots, -2, -1, 1, 2, \dots, N_1, N_1 + 1$), $\Gamma^-(r)$.

$$\begin{aligned}
& - \sum_{k=-N_2}^{-1} \int_{\gamma_k^+(r)} f(z) \frac{H_0^{(1)}(\pi z/h)}{2J_0(\pi z/h)} dz - \sum_{k=1}^{N_1} \int_{\gamma_k^+(r)} f(z) \frac{H_0^{(1)}(\pi z/h)}{2J_0(\pi z/h)} dz \\
& - \int_{\gamma_0^+(r)} f(z) \frac{H_0^{(1)}(\pi z/h)}{2J_0(\pi z/h)} dz
\end{aligned}$$

と分解し、 $r \downarrow 0$ とする。このとき右辺の各項の値を計算すると、

$$\lim_{r \downarrow 0} \text{第 1 項} = \text{p.v.} \int_0^{R_2} f(-x) \frac{H_0^{(1)}(-\pi x/h)}{2J_0(-\pi x/h)} dx = -\text{p.v.} \int_0^{R_2} f(-x) \frac{H_0^{(2)}(\pi x/h)}{2J_0(\pi x/h)} dx,$$

$$\lim_{r \downarrow 0} \text{第 2 項} = \text{p.v.} \int_0^{R_1} f(x) \frac{H_0^{(1)}(\pi x/h)}{2J_0(\pi x/h)} dx,$$

$$\begin{aligned}
\lim_{r \downarrow 0} \text{第 3 項} &= - \sum_{k=1}^{N_2} \pi i \operatorname{Res} \left(f(z) \frac{H_0^{(1)}(\pi z/h)}{2J_0(\pi z/h)}, -h \frac{j_{0k}}{\pi} \right) \\
&= - \sum_{k=1}^{N_2} i h f \left(-h \frac{j_{0k}}{\pi} \right) \frac{H_0^{(1)}(-j_{0k})}{2J_0'(-j_{0k})} = - \sum_{k=1}^{N_2} i h f \left(-h \frac{j_{0k}}{\pi} \right) \frac{-H_0^{(2)}(j_{0k})}{2J_1(j_{0k})} \\
&= - \sum_{k=1}^{N_2} h f \left(-h \frac{j_{0k}}{\pi} \right) \frac{Y_0(j_{0k})}{2J_1(j_{0k})} = -h \sum_{k=1}^{N_2} f \left(-h \frac{j_{0k}}{\pi} \right) \frac{1}{\pi j_{0k} (J_1(j_{0k}))^2},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{r \downarrow 0} \text{第 4 項} &= - \sum_{k=1}^{N_1} \pi i \operatorname{Res} \left(f(z) \frac{H_0^{(1)}(\pi z/h)}{2J_0(\pi z/h)}, h \frac{j_{0k}}{\pi} \right) = - \sum_{k=1}^{N_1} i h f \left(h \frac{j_{0k}}{\pi} \right) \frac{H_0^{(1)}(j_{0k})}{2J_0'(j_{0k})} \\
&= - \sum_{k=1}^{N_1} h f \left(h \frac{j_{0k}}{\pi} \right) \frac{Y_0(j_{0k})}{J_1(j_{0k})} = - \sum_{k=1}^{N_1} h f \left(h \frac{j_{0k}}{\pi} \right) \frac{1}{\pi j_{0k} (J_1(j_{0k}))^2},
\end{aligned}$$

$$\lim_{r \downarrow 0} \text{第 5 項} = \lim_{r \downarrow 0} O(r \log r) = 0$$

となる。ここで、第 1 項の計算 (2 番目の等式変形) では、 $J_0(-z) = J_0(z)$, $H_0^{(1)}(-z) (= H_0^{(1)}(e^{(\pi-0)i}z)) = -H_0^{(2)}(z)$ を用い; 第 3 項の計算では、まず、3 番目の等式変形において $J_0'(z) = -J_1(z)$, $H_0^{(1)}(-z) (= H_0^{(1)}(e^{(\pi-0)i}z)) = -H_0^{(2)}(z)$ Hankel 関数の定義 $H_0^{(2)}(z) = J_0(z) - iY_0(z)$ から導かれる $H_0^{(2)}(j_{0k}) = -iY_0(j_{0k})$ を用い、4 番目の等式変形において Lommel の等式 $J_0(z)Y_1(z) - J_1(z)Y_0(z) = -2/(\pi z)$ から導かれる $Y_0(j_{0k}) = 2/(\pi j_{0k} J_1(j_{0k}))$ を用い; 第 4 項の計算では、まず、3 番目の等式変形において $J_0'(z) = -J_1(z)$, Hankel 関数の定義 $H_0^{(1)}(z) = J_0(z) + iY_0(z)$ から導かれる $H_0^{(1)}(j_{0k}) = iY_0(j_{0k})$ を用い、4 番目の等式変形において Lommel の等式 $J_0(z)Y_1(z) - J_1(z)Y_0(z) = -2/(\pi z)$ から導かれる $Y_0(j_{0k}) = 2/(\pi j_{0k} J_1(j_{0k}))$ を用い; 第 5 項の計算では、Hankel 関数 $H_0^{(1)}(z)$ が $\gamma_0^{(+)}(r)$ 上で、 $H_0^{(1)}(z) = O(\log r)$ ($r \downarrow 0$) と評価されることを用いた。以上まとめて、結局、

$$\begin{aligned}
(3.2.8) \quad & \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3} f(z) \Phi_A^{(0)}(z, h) dz \\
&= -\text{p.v.} \int_0^{R_2} f(-x) \frac{H_0^{(2)}(\pi x/h)}{2J_0(\pi x/h)} dx + \text{p.v.} \int_0^{R_1} f(x) \frac{H_0^{(1)}(\pi x/h)}{2J_0(\pi x/h)} dx \\
&\quad - h \sum_{k=1}^{N_1} f \left(h \frac{j_{0k}}{\pi} \right) \frac{1}{\pi j_{0k} (J_1(j_{0k}))^2} + h \sum_{k=1}^{N_2} f \left(-h \frac{j_{0k}}{\pi} \right) \frac{1}{\pi j_{0k} (J_1(j_{0k}))^2}
\end{aligned}$$

を得る。

つぎに図 3.2 に描いたような積分路 $\Gamma_4, \Gamma_5, \Gamma_6$ に沿っての複素積分

$$\int_{\Gamma_4 + \Gamma_5 + \Gamma_6} f(z) \frac{H_0^{(2)}(\pi z/h)}{2J_0(\pi z/h)} dz \quad \left(= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_4 + \Gamma_5 + \Gamma_6} f(z) \Phi_A^{(0)}(z, h) dz \right)$$

を考える。積分路 $\Gamma_4 + \Gamma_5 + \Gamma_6$ を図 3.2 に描いた半径 r (十分小さいとする) の小半円および線分からなる積分路 $\Gamma^-(r)$ に変形し, さらに, $r \downarrow 0$ とし, (3.2.8) を得たのと同様の多少面倒な計算を行って,

$$(3.2.9) \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_4 + \Gamma_5 + \Gamma_6} f(z) \Phi_A^{(0)}(z, h) dz \\ = -\text{p.v.} \int_0^{R_2} f(-x) \frac{H_0^{(1)}(\pi x/h)}{2J_0(\pi x/h)} dx + \text{p.v.} \int_0^{R_1} f(x) \frac{H_0^{(2)}(\pi x/h)}{2J_0(\pi x/h)} dx \\ - h \sum_{k=1}^{N_1} f\left(h \frac{j_{0k}}{\pi}\right) \frac{1}{\pi j_{0k}(J_1(j_{0k}))^2} + h \sum_{k=1}^{N_2} f\left(-h \frac{j_{0k}}{\pi}\right) \frac{1}{\pi j_{0k}(J_1(j_{0k}))^2}$$

を得る。

最後に, (3.2.8) と (3.2.9) を足し合わせることで,

$$(3.2.10) \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3 + \Gamma_4 + \Gamma_5 + \Gamma_6} f(z) \Phi_A^{(0)}(z, h) dz \\ = \int_0^{R_1} f(x) dx - \int_0^{R_2} f(-x) dx - \\ - h \sum_{k=1}^{N_1} f\left(h \frac{j_{0k}}{\pi}\right) \frac{2}{\pi j_{0k}(J_1(j_{0k}))^2} + h \sum_{k=1}^{N_2} f\left(-h \frac{j_{0k}}{\pi}\right) \frac{2}{\pi j_{0k}(J_1(j_{0k}))^2}$$

を得る。これで, 証明の第一段階の目標である等式が得られたことになる。あとは, 定理 3.1.1 の証明とほとんど同じに進む。

式 (3.2.10) において $N_1, N_2 \rightarrow \infty$ とする。このとき, 右辺は $\Delta Q_A^{(0)}(f, h)$ となるから, 左辺の積分においてつぎの2つのこと

- (a) $N_1 \rightarrow \infty$ (すなわち $R_1 \rightarrow \infty$) のとき, $\Gamma_1 + \Gamma_6$ に沿っての積分が 0 に収束し, かつ, $N_2 \rightarrow \infty$ (すなわち $R_2 \rightarrow \infty$) のとき, $\Gamma_3 + \Gamma_4$ に沿っての積分が 0 に収束すること;
 - (b) $N_1, N_2 \rightarrow \infty$ (すなわち $R_1, R_2 \rightarrow \infty$) のとき, $\Gamma_2 + \Gamma_5$ に沿っての積分が存在すること;
- が示されれば,

$$(3.2.11) \quad \Delta Q_A^{(0)}(f, h) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{N_1, N_2 \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_2 + \Gamma_5} f(z) \Phi_A^{(0)}(z, h) dz \\ = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma(c)} f(z) \Phi_A^{(0)}(z, h) dz$$

が得られる。あとは, $c \rightarrow d \rightarrow 0$ とすることにより式 (3.2.6) が得られる。

(a) を示す。補題 3.4.3 により, 任意の $\varepsilon > 0$ に対し N_1 を十分大きくとれば, $|\Phi_A^{(0)}(z, h)|$ が $\Gamma_1 + \Gamma_6$ 上で

$$|\Phi_A^{(0)}(z, h)| \leq (1 + \varepsilon) 2\pi$$

と評価されるから, $\Gamma_1 + \Gamma_6$ に沿っての積分は

$$\left| \int_{\Gamma_1 + \Gamma_6} f(z) \Phi_A^{(0)}(z, h) dz \right| \leq (1 + \varepsilon) 2\pi \int_{-c}^c |f(R_1 + iy)| dy$$

と抑えられる。 $B(d)$ の定義における条件 (II) から, $N_1 \rightarrow \infty$ のとき ($R_1 \rightarrow \infty$ のとき), 右辺 $\rightarrow 0$, したがって, $\Gamma_1 + \Gamma_6$ に沿っての積分が 0 に収束することが分かる。同様にして, $N_2 \rightarrow \infty$ のとき ($R_2 \rightarrow \infty$ のとき), $\Gamma_3 + \Gamma_4$ に沿っての積分も 0 に収束することが分かる。

(b) を示す。補題 3.4.4 により, $|\Phi_A^{(0)}(z, h)|$ が $|\text{Im } z| = c$ 上で

$$|\Phi_A^{(0)}(z, h)| \leq \kappa_A^{(0)}(\pi c/h) 2\pi \exp\left(-\frac{2\pi c}{h}\right)$$

と評価されることが分かるから、つぎの不等式を得る：

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_2+\Gamma_5} |f(z)\Phi_A^{(0)}(z, h) dz| &\leq \kappa_A^{(0)}(\pi c/h) 2\pi \int_{\Gamma_2+\Gamma_5} |f(z)| |dz| \exp\left(-\frac{2\pi c}{h}\right) \\ &\leq \kappa_A^{(0)}(\pi c/h) 2\pi \mathcal{N}(f, c) \exp\left(-\frac{2\pi c}{h}\right). \end{aligned}$$

これより、 $\Gamma_2+\Gamma_5$ に沿っての積分は $N_1, N_2 \rightarrow \infty$ (すなわち $R_1, R_2 \rightarrow \infty$) とするとき絶対収束することが分かる。したがって、 $N_1, N_2 \rightarrow \infty$ (すなわち $R_1, R_2 \rightarrow \infty$) のとき、 $\Gamma_2+\Gamma_5$ に沿っての積分も存在する。 ((3.2.6) の証明終わり)

((3.2.7) の証明) 式 (3.2.11), および, (b) の証明で示した不等式より,

$$|\Delta Q_A^{(0)}(f, h)| \leq \kappa_A^{(0)}(\pi c/h) \mathcal{N}(f, c) \exp\left(-\frac{2\pi c}{h}\right)$$

が得られるから、 $c \rightarrow d \rightarrow 0$ とすればよい。

((3.2.7) の証明終わり) ■

3.2.2 等間隔標本点をもつ反対称積分に対する数値積分公式との比較

比較のため、対称積分に対する台形公式に対応する、等間隔標本点の数値積分公式：

$$(3.2.12) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sgn} x f(x) dx \approx h \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kh) \frac{2\operatorname{Si}(k\pi)}{\pi}.$$

について触れておく。ここで $\operatorname{Si}(x)$ は積分三角関数

$$\operatorname{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$$

である [1]。この数値積分公式は、Sinc 補間公式 (2.4.1) の両辺に $\operatorname{sgn} x$ を掛けて全無限区間で積分することにより得られる。ここでは積分公式 (3.2.12) を “Si 積分公式” と呼ぶことにする。

反対称積分に対する Lagrange-Bessel 積分公式 (3.2.5) および “Si 積分公式” (3.2.12) の誤差を比較すると次のようになる：

$$\begin{aligned} \text{Lagrange-Bessel} \\ \text{積分公式の誤差} &= O\left[\exp\left(-\frac{2\pi d}{h}\right)\right], \quad \text{Si 積分公式の誤差} = O\left[\exp\left(-\frac{\pi d}{h}\right)\right]. \end{aligned}$$

これより、反対称積分に対しては対称積分とは異なり、等間隔に標本点をとった積分公式はかえって精度が落ち、Lagrange-Bessel 積分公式の方が精度がよいことが分かる。

以上より、対称積分、反対称積分に対する各数値積分公式の誤差は、次の表のようにまとめられる：

表 3.1 対称積分、反対称積分に対する各数値積分公式の誤差評価（表中「等間隔標本点の積分公式」は、対称積分に対しては台形公式 (3.1.11) を、反対称積分に対しては Si 積分公式 (3.2.12) を指す）。

	対称積分	反対称積分
等間隔標本点の数値積分公式	$O\left[\exp\left(-\frac{2\pi d}{h}\right)\right]$	$O\left[\exp\left(-\frac{\pi d}{h}\right)\right]$
Lagrange-Bessel 数値積分公式	$O\left[\exp\left(-\frac{\pi d}{h}\right)\right]$	$O\left[\exp\left(-\frac{2\pi d}{h}\right)\right]$

これより、対称積分に対しては等間隔に標本点をとった数値積分公式（すなわち台形公式）、反対称積分に対しては Bessel 関数の零点を標本点にとった数値積分公式（すなわち Lagrange-Bessel 数値積分公式）を用いるのがよい、ということが言える。

ところで、3.1.2節において、Sinc 補間公式の誤差は $O[\exp(-\pi d/h)]$ であるのに対し、対称積分に対する台形公式の誤差は $O[\exp(-2\pi d/h)]$ であることを述べた。その一方、反対称積分に対する Si 積分公式の誤差は $O[\exp(-\pi d/h)]$ であった。すなわち、Sinc 補間公式から数値積分公式をつくった場合、反対称積分に対する数値積分公式はもとの補間公式と同程度の精度であるが、対称積分に対する数値積分公式は補間公式に対し桁数にして2倍の精度を得ている。

同様に、Lagrange-Bessel 補間公式から反対称積分に対する Lagrange-Bessel 数値積分公式をつくるときも、精度が倍に増えている。まず、Lagrange-Bessel 補間公式の誤差はおおよそ $O[\exp(-\pi d/h)]$ であった。これに対し、対称積分に対する Lagrange-Bessel 数値積分公式の誤差は $O[\exp(-\pi d/h)]$ 反対称積分に対する Lagrange-Bessel 数値積分公式の誤差は $O[\exp(-2\pi d/h)]$ である。補間公式を積分することにより数値積分公式が得られるのであるから、対称積分に対する数値積分公式の精度がもとの補間公式の精度と同程度であるのは自然な結果である。ところが、反対称積分に対する数値積分公式の誤差はもとの補間公式の誤差のはば自乗の大きさである、すなわち、反対称積分に対する数値積分公式は補間公式に対し桁数にして2倍の精度を得ているのである。

さらにこの現象は、直交多項式補間公式から Gauss 型数値積分公式をつくるときにも起こっている。 N 点直交多項式補間公式はたかだか $N-1$ 次の多項式に対して厳密な関数値を与えるが、この補間公式を積分して得られる N 点 Gauss 型数値積分公式はたかだか $2N-1$ 次の多項式に対して厳密な積分値を与える。

このように、ある種の補間公式を積分して数値積分公式をつくるとき、積分の重み関数を適当にとると（直交多項式補間の場合もとの直交多項式の重み関数、Sinc 補間の場合 1、Lagrange-Bessel 補間の場合 $\text{sgn } x$ ）、数値積分の精度はもとの補間の倍になっている。

このように補間から数値積分で精度が倍になる理由は、数値積分公式が同じ標本点をもつ Hermite 補間公式、すなわち、標本点上で関数とその一階導関数の真値を与える公式を積分しても得られるからである。Hermite 補間公式はもとの補間公式の倍の情報量を用い

るので、精度は当然倍になる。それを積分して得られる数値積分公式は Hermite 補間公式と同程度の精度になるので、結局もとの補間公式に比べて倍の精度を得ることになる。

まず Sinc 補間公式の場合で具体的に説明する。標本点 $kh(k=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ の Hermite 補間公式 $\mathcal{H}_{\text{Sinc}}(f, h)(x)$ は次のようになる：

$$f(x) \approx \mathcal{H}_{\text{Sinc}}(f, h)(x) \\ \equiv \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kh) \left\{ \frac{\sin[(\pi/h)(x-kh)]}{(\pi/h)(x-kh)} \right\}^2 + \sum_{k=-\infty}^{\infty} f'(kh) \frac{\sin^2[(\pi/h)(x-kh)]}{(\pi/h)^2(x-kh)}.$$

この両辺を x について全無限区間 $(-\infty, +\infty)$ で積分し、右辺については形式的に項別積分を行う：

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx \approx \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{H}_{\text{Sinc}}(f, h)(x) dx \\ = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kh) \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{\sin[(\pi/h)(x-kh)]}{(\pi/h)(x-kh)} \right\}^2 dx + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f'(kh) \frac{\sin^2[(\pi/h)(x-kh)]}{(\pi/h)^2(x-kh)} dx.$$

ここで右辺において、

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{\sin[(\pi/h)(x-kh)]}{(\pi/h)(x-kh)} \right\}^2 dx = \frac{h}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx = h, \\ \int_{-\infty}^{\infty} f'(kh) \frac{\sin^2[(\pi/h)(x-kh)]}{(\pi/h)^2(x-kh)} dx = \frac{h^2}{\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x} dx = 0$$

となるから³、結局台形公式

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx \approx h \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kh)$$

を得る。

誤差についてみると、まず Hermite 補間公式 $\mathcal{H}_{\text{Sinc}}(f, h)(x)$ の誤差は $O\left[\exp\left(-\frac{2\pi d}{h}\right)\right]$ である。これは、誤差の複素積分表示が

$$f(x) - \mathcal{H}_{\text{Sinc}}(f, h)(x) = \frac{\sin^2(\pi x/h)}{2\pi i} \int_{\Gamma(d)} \frac{f(z) dz}{(z-x) \sin^2(\pi z/h)}$$

で与えられることから容易に得られるが、Sinc 補間に対して倍の情報量を用いているから、精度が倍になることはごく自然である。そして、台形公式は Hermite 補間を積分して得られるので、その精度は Hermite 補間と同程度になり、結局 Sinc 補間の倍の精度が得られることになる。

³ 2 番目の積分において、 $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x} dx$ は Cauchy の主値をとることにする：

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{\sin^2 x}{x} dx = 0.$$

Lagrange-Bessel 補間公式の場合も同様である。この場合、標本点 $\pm h j_{0k}/\pi (k=1, 2, \dots)$ をもつ Hermite 補間公式は次のようになる：

$$\begin{aligned} f(x) &\approx \mathcal{H}_B^{(0)}(f, h)(x) \\ &\equiv \sum_{k=1}^{\infty} f\left(h \frac{j_{0k}}{\pi}\right) \frac{J_0(\pi x/h)^2}{J_1(j_{0k})^2(\pi x/h - j_{0k})^2} \left\{ 1 - \frac{1}{2j_{0k} \left(\frac{\pi x}{h} - j_{0k}\right)} \right\} \\ &\quad + \sum_{k=1}^{\infty} f\left(-h \frac{j_{0k}}{\pi}\right) \frac{J_0(\pi x/h)^2}{J_1(j_{0k})^2(\pi x/h + j_{0k})^2} \left\{ 1 + \frac{1}{2j_{0k} \left(\frac{\pi x}{h} + j_{0k}\right)} \right\} \\ &\quad + \sum_{k=1}^{\infty} f'\left(h \frac{j_{0k}}{\pi}\right) \frac{(h/\pi) J_0(\pi x/h)^2}{J_1(j_{0k})(\pi x/h - j_{0k})} \\ &\quad + \sum_{k=1}^{\infty} f'\left(-h \frac{j_{0k}}{\pi}\right) \frac{(h/\pi) J_0(\pi x/h)^2}{J_1(j_{0k})(\pi x/h + j_{0k})}. \end{aligned}$$

この両辺に $\operatorname{sgn} x$ を掛けて全無限区間 $(-\infty, +\infty)$ で積分し、右辺において形式的に項別積分を行うと、1.2節より

$$\int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sgn} x \frac{J_0(\pi x/h)^2}{(\pi x/h \mp j_{0k})^2} dx = \pm 4j_{0k} \frac{h}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{x J_0(x)^2}{(x^2 - j_{0k}^2)^2} dx = \pm \frac{2h}{\pi j_{0k}},$$

[4]Lemma 4. より

$$\int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sgn} x \frac{J_0(\pi x/h)^2}{\pi x/h \mp j_{0k}} dx = 2 \frac{h}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{x J_0(x)^2}{x^2 - j_{0k}^2} dx = 0$$

を用いて、結局 0 位の Lagrange-Bessel 数値積分公式

$$\int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sgn} x f(x) dx \approx h \sum_{k=1}^{\infty} f\left(h \frac{j_{0k}}{\pi}\right) \frac{2}{\pi j_{0k} J_1(j_{0k})^2} - h \sum_{k=1}^{\infty} f\left(-h \frac{j_{0k}}{\pi}\right) \frac{2}{\pi j_{0k} J_1(j_{0k})^2}$$

を得る。

誤差をみると、Hermite 補間 $\mathcal{H}_B^{(0)}(f, h)(x)$ の誤差は $O[\exp(-2\pi d/h)]$ 、であり、これを積分して得られる Lagrange-Bessel 数値積分公式の誤差もこれと同程度になり、結局 Lagrange-Bessel 補間公式の倍の精度を得ることになる。

3.2.3 一般の整数位数の場合

一般の $n(>0)$ 位の Lagrange-Bessel 補間公式から導出される積分公式について述べる。この場合の反対称積分に対する数値積分公式は少し複雑な形になり、つぎのようになる。

$$\begin{aligned}
 (3.2.13) I_A(f) &\approx Q_A^{(n)}(f, h) \\
 &\equiv h \sum_{k=1}^{\infty} f\left(h \frac{j_{nk}}{\pi}\right) \frac{2}{\pi j_{nk}(J_{n+1}(j_{nk}))^2} - h \sum_{k=1}^{\infty} f\left(-h \frac{j_{nk}}{\pi}\right) \frac{2}{\pi j_{nk}(J_{n+1}(j_{nk}))^2} \\
 &\quad + \sum_{\lambda=0}^{n-1} c_{\lambda}^{(n)} h^{2(\lambda+1)} f^{(2\lambda+1)}(0),
 \end{aligned}$$

ここで,

$$(3.2.14) \quad c_{\lambda}^{(n)} = \frac{\pi^{-2(\lambda+1)}}{(2\lambda+1)!} \sum_{m=0}^{n-\lambda-1} \frac{(n-m-1)!}{m!} 2^{n-2m} b_{n-\lambda-m-1}^{(n)},$$

$b_m^{(n)} (m=0, 1, 2, \dots)$ は, $1/J_n(x)$ を $x=0$ で Laurent 展開したときの係数である:

$$(3.2.15) \quad \frac{1}{J_n(x)} = \sum_{m=0}^{\infty} b_m^{(n)} x^{2m-n}.$$

数値積分公式 $Q_A^{(n)}(f, h)$ を反対称積分に対する n 位の Lagrange-Bessel 積分公式, あるいは簡単に, n 位の反対称積分公式と呼ぶことにする. $n=1, 2, 3$ の場合について $Q_A^{(n)}(f, h)$ を具体的に書き下すつぎのようになる:

$$\begin{aligned}
 (3.2.16) Q_A^{(1)}(f, h) &= h \sum_{k=1}^{\infty} f\left(h \frac{j_{1k}}{\pi}\right) \frac{2}{\pi j_{1k}(J_2(j_{1k}))^2} - h \sum_{k=1}^{\infty} f\left(-h \frac{j_{1k}}{\pi}\right) \frac{2}{\pi j_{1k}(J_2(j_{1k}))^2} \\
 &\quad + 4\left(\frac{h}{\pi}\right)^2 f'(0),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3.2.17) Q_A^{(2)}(f, h) &= h \sum_{k=1}^{\infty} f\left(h \frac{j_{2k}}{\pi}\right) \frac{2}{\pi j_{2k}(J_3(j_{2k}))^2} - h \sum_{k=1}^{\infty} f\left(-h \frac{j_{2k}}{\pi}\right) \frac{2}{\pi j_{2k}(J_3(j_{2k}))^2} \\
 &\quad + \frac{32}{3}\left(\frac{h}{\pi}\right)^2 f'(0) + \frac{16}{3}\left(\frac{h}{\pi}\right)^4 f^{(3)}(0),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3.2.18) Q_A^{(3)}(f, h) &= h \sum_{k=1}^{\infty} f\left(h \frac{j_{3k}}{\pi}\right) \frac{2}{\pi j_{3k}(J_4(j_{3k}))^2} - h \sum_{k=1}^{\infty} f\left(-h \frac{j_{3k}}{\pi}\right) \frac{2}{\pi j_{3k}(J_4(j_{3k}))^2} \\
 &\quad + \frac{99}{5}\left(\frac{h}{\pi}\right)^2 f'(0) + 24\left(\frac{h}{\pi}\right)^4 f^{(3)}(0) + \frac{32}{5}\left(\frac{h}{\pi}\right)^6 f^{(5)}(0).
 \end{aligned}$$

注意 3.2.2 n 位の反対称積分公式 (3.2.13) は, 単に Lagrange-Bessel 補間公式 (2.1.4) の両辺を積分するだけでは得られない. これは, 積分公式 (3.2.13) は $x=0$ における $f(x)$ の微分係数を含む一方, もとの補間公式 (2.1.4) は微分係数を含まないことから明らかである.

数値積分公式を得るには, 位数 0 の場合からの類推により, 誤差の複素積分表示の方が先につきの定理 3.2.2 の (3.2.20), (3.2.19) で与えられると決めておき, 次に (3.2.19) 右辺の積分を変形することにより, (積分) - (数値積分公式) の形の式を導出するのである.

n 位の反対称積分公式 (3.2.13) の誤差はつぎのように評価される:

定理 3.2.2 $n = 1, 2, \dots$ とする. $B(d)$ に属する関数 $f(z)$ に対し, 反対称積分に対する n 位の Lagrange-Bessel 積分公式 (3.2.13) の誤差はつぎのように複素積分表示できる:

$$(3.2.19) \quad \Delta Q_A^{(n)}(f, h) \equiv I_A(f) - Q_A^{(n)}(f, h) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma(d-0)} f(z) \Phi_A^{(n)}(z, h) dz,$$

ここで,

$$(3.2.20) \quad \Phi_A^{(n)}(z, h) = \begin{cases} -i\pi \frac{H_n^{(1)}(\pi z/h)}{J_n(\pi z/h)} & (0 \leq \arg z < \pi), \\ i\pi \frac{H_n^{(2)}(\pi z/h)}{J_n(\pi z/h)} & (-\pi \leq \arg z < 0) \end{cases}$$

である. ただし, $H_n^{(1)}(z), H_n^{(2)}(z)$ は n 位の Hankel 関数 [29] であり, Hankel 関数の虚数部 $\pm Y_n(z)$ が正の実数値に対して実数値をとるような分枝をとる.

さらに, この誤差はつぎの不等式により評価される:

$$(3.2.21) \quad |\Delta Q_A^{(n)}(f, h)| \leq \kappa_A^{(n)}(\pi(d-0)/h) \mathcal{N}(f, d-0) \exp\left(-\frac{2\pi d}{h}\right).$$

ここで, $\kappa_A^{(n)}(M)$ は $M > 0$ で定義された $\Phi_A^{(n)}(z, \pi)$ の評価に関係する関数で, つぎの性質をもつ:

$$(1) \text{ 単調減少, } (2) \kappa_A^{(n)}(M) < +\infty, \quad (3) \lim_{M \rightarrow \infty} \kappa_A^{(n)}(M) = 1.$$

□

(証明) はじめに図 3.2.3 の積分路 $\Gamma_1 + \Gamma_2 + \dots + \Gamma_6$ にそっての複素積分

$$(3.2.22) \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3 + \Gamma_4 + \Gamma_5 + \Gamma_6} f(z) \Phi_A^{(n)}(z, h) dz = - \int_{\Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3} f(z) \frac{H_n^{(1)}(\pi z/h)}{2J_n(\pi z/h)} dz \\ + \int_{\Gamma_4 + \Gamma_5 + \Gamma_6} f(z) \frac{H_n^{(2)}(\pi z/h)}{2J_n(\pi z/h)} dz$$

を考える.

$n = 0$ の場合の証明と同様にして, この積分は次のように変形できる:

$$(3.2.23) \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3 + \Gamma_4 + \Gamma_5 + \Gamma_6} f(z) \Phi_A^{(n)}(z, h) dz \\ = \int_0^{R_1} f(x) dx - \int_0^{R_2} f(-x) dx \\ - h \sum_{k=1}^{N_1} f\left(h \frac{j_{nk}}{\pi}\right) \frac{2}{\pi j_{nk}(j_{n+1}(j_{nk}))^2} + h \sum_{k=1}^{N_2} f\left(-h \frac{j_{nk}}{\pi}\right) \frac{2}{\pi j_{nk}(j_{n+1}(j_{nk}))^2} \\ + \lim_{r \downarrow 0} \left\{ - \int_{\gamma_0^+(r)} f(z) \frac{H_n^{(1)}(\pi z/h)}{2J_n(\pi z/h)} dz + \int_{\gamma_0^-(r)} f(z) \frac{H_n^{(2)}(\pi z/h)}{2J_n(\pi z/h)} dz \right\}.$$

ここで, $\gamma_0^-(r)$ は, 原点中心半径 r の円のうち下半平面に含まれる部分で定義される積分路である:

$$(3.2.24) \quad \gamma_0^-(r) = \{z \mid |z| = r, \operatorname{Im} z < 0\}.$$

右辺第 3 項はつぎのようにして計算できる. まず, $\gamma_0(r)$ を原点中心半径 r の円:

$$(3.2.25) \quad \gamma_0(r) = \{z \mid |z| = r\}$$

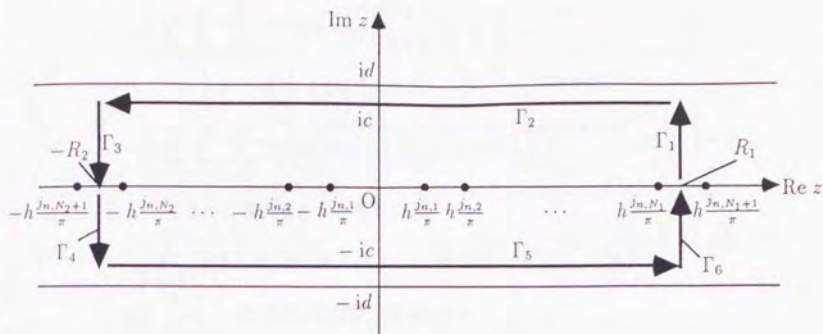


図 3.3 定理 3.2.2 の証明に用いる積分路 $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4, \Gamma_5, \Gamma_6$.

として、つぎの等式を得る：

$$\begin{aligned}
 (3.2.26) \quad & - \int_{\gamma_0^+(r)} f(z) \frac{H_n^{(1)}(\pi z/h)}{2J_n(\pi z/h)} dz + \int_{\gamma_0^-(r)} f(z) \frac{H_n^{(2)}(\pi z/h)}{2J_n(\pi z/h)} dz \\
 &= -\frac{1}{2} \int_{\gamma_0^+(r)} f(z) dz + \frac{1}{2} \int_{\gamma_0^-(r)} f(z) dz + \frac{i}{2} \int_{\gamma_0(r)} f(z) \frac{Y_n(\pi z/h)}{J_n(\pi z/h)} dz \\
 &= \int_{-r}^r f(x) dx - \frac{i}{2} \oint_{\gamma_0(r)} f(z) \frac{Y_n(\pi z/h)}{J_n(\pi z/h)} dz.
 \end{aligned}$$

ここで $r > 0$ とすると、右辺第 1 項は消えるから、右辺第 2 項が問題となる。まず、 $f(z), 1/J_n(\pi z/h), Y_n(\pi z/h)$ は $z=0$ 近傍でそれぞれ

$$f(z) = \sum_{l_1=0}^{\infty} \frac{f^{(l_1)}(0)}{l_1!} z^{l_1}, \quad \frac{1}{J_n(\pi z/h)} = \sum_{l_2=0}^{\infty} b_{l_2}^{(n)} \left(\frac{\pi z}{h}\right)^{2l_2-n},$$

$$\begin{aligned}
 (3.2.27) \quad Y_n\left(\frac{\pi z}{h}\right) &= \frac{2}{\pi} J_n\left(\frac{\pi z}{h}\right) \left[\gamma + \log\left(\frac{\pi z}{2h}\right) \right] \\
 &\quad - \frac{1}{\pi} \sum_{l_3=0}^{\infty} \frac{(-1)^{l_3}}{l_3!(n+l_3)!} \left(\frac{\pi z}{2h}\right)^{n+2l_3} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{l_3} + 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n+l_3}\right) \\
 &\quad - \frac{1}{\pi} \sum_{l_3=0}^{n-1} \frac{(n-l_3-1)!}{l_3!} \left(\frac{\pi z}{2h}\right)^{-n+2l_3}
 \end{aligned}$$

と展開されるから [29] ⁴、これらの積を展開することによって被積分関数は $z=0$ 近傍でつぎのように展開されることが分かる：

$$(3.2.28) \quad f(z) \frac{Y_n(\pi z/h)}{J_n(\pi z/h)}$$

⁴ γ は Euler の数 ($\gamma = 0.57721 \dots$)、(3.2.27) 右辺第 2 項で $\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{l_3} + 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n+l_3}\right)$ は $l_3 = 0$ のとき $(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n})$ で置き換える。

$$\begin{aligned}
&= \frac{2}{\pi} f(z) \left[\gamma + \log \left(\frac{\pi z}{2h} \right) \right] \\
&\quad - \frac{1}{\pi} \sum_{l_1=0}^{\infty} \sum_{l_2=0}^{\infty} \sum_{l_3=0}^{\infty} f^{(l_1)}(0) \frac{(-1)^{l_3} b_{l_2}^{(n)} 2^{n-2l_3}}{l_1! l_3! (n+l_3)!} \left(\frac{\pi z}{h} \right)^{2(l_2+l_3)} \\
&\quad \times \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{l_2} + 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n+l_2} \right) z^{l_1+2(l_2+l_3)} \\
&\quad - \frac{1}{\pi} \sum_{l_1=0}^{\infty} \sum_{l_2=0}^{\infty} \sum_{l_3=0}^{\infty} f^{(l_1)}(0) \frac{b_{l_2}^{(n)} 2^{n-2l_3} (n-l_3-1)!}{l_1! l_3!} \left(\frac{\pi}{h} \right)^{2(l_2+l_3)-n} z^{l_1+2(l_2+l_3-n)}.
\end{aligned}$$

この展開を用いて $r \downarrow 0$ のときの積分を評価すると,

$$\begin{aligned}
&-\frac{i}{2} \oint_{\gamma_0(r)} ((3.2.28) \text{ 右辺第 1 項}) dz = O(r \log r) \rightarrow 0 \quad (r \downarrow 0), \\
&\lim_{r \downarrow 0} -\frac{i}{2} \oint_{\gamma_0(r)} ((3.2.28) \text{ 右辺第 2 項}) dz = 0, \\
&-\frac{i}{2} \oint_{\gamma_0(r)} ((3.2.28) \text{ 右辺第 3 項}) \\
&= \pi \times \text{Res}((3.2.28) \text{ 右辺第 3 項}), 0) \\
&= - \sum_{\substack{l_1, l_2, l_3 \\ l_1+2(l_2+l_3)=2n-1}} f^{(l_1)}(0) \frac{b_{l_2}^{(n)} 2^{n-2l_3} (n-l_3-1)!}{l_1! l_3!} \left(\frac{\pi}{h} \right)^{2(l_2+l_3)-n} \\
&= - \sum_{\lambda=0}^{n-1} \frac{f^{(2\lambda+1)}(0)}{(2\lambda+1)!} \left(\frac{\pi}{h} \right)^{-(\lambda+1)} \sum_{l_3=0}^{n-\lambda-1} \frac{2^{n-2l_3} (n-l_3-1)!}{l_3!} b_{n-\lambda-l_3-1}^{(n)} \\
&= - \sum_{\lambda=0}^{n-1} c_{\lambda}^{(n)} h^{2(\lambda+1)} f^{(2\lambda+1)}(0)
\end{aligned}$$

となり,

$$(3.2.26) \text{ の最右辺第 2 項 } = - \sum_{\lambda=0}^{n-1} c_{\lambda}^{(n)} h^{2(\lambda+1)} f^{(2\lambda+1)}(0) \quad (r \downarrow 0)$$

となることが分かる.

以上より,

$$\begin{aligned}
(3.2.29) \quad &\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1+\Gamma_2+\Gamma_3+\Gamma_4+\Gamma_5+\Gamma_6} f(z) \Phi_{\Lambda}^{(n)}(z, h) dz \\
&= \int_0^{R_1} f(x) dx - \int_0^{R_2} f(-x) dx \\
&\quad - h \sum_{k=1}^{N_1} f\left(h \frac{j_{nk}}{\pi}\right) \frac{2}{\pi j_{nk} (j_{n+1}(j_{nk}))^2} + h \sum_{k=1}^{N_2} f\left(-h \frac{j_{nk}}{\pi}\right) \frac{2}{\pi j_{nk} (j_{n+1}(j_{nk}))^2} \\
&\quad - \sum_{\lambda=0}^{n-1} c_{\lambda}^{(n)} h^{2(\lambda+1)} f^{(2\lambda+1)}(0)
\end{aligned}$$

を得る.

(3.2.29) において $N_1, N_2 \rightarrow \infty$ とすると, 右辺は $\Delta Q_{\Lambda}^{(n)}(f, h)$ となる. 一方, 左辺においては, 位数 0 の場合と同様にして,

- (a) $N_1 \rightarrow \infty$ (すなわち $R_1 \rightarrow \infty$) のとき, $\Gamma_1 + \Gamma_6$ に沿っての積分が 0 に収束し, かつ, $N_2 \rightarrow \infty$ (すなわち $R_2 \rightarrow \infty$) のとき, $\Gamma_3 + \Gamma_4$ に沿っての積分が 0 に収束すること;

(b) $N_1, N_2 \rightarrow \infty$ (すなわち $R_1, R_2 \rightarrow \infty$) のとき, Γ_2, Γ_3 によっての積分が存在することを示すことが出来る。
よって,

$$(3.2.30) \quad \begin{aligned} \Delta Q_A^{(n)}(f, h) &= \lim_{N_1, N_2 \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_2 + \Gamma_3} f(z) \Phi_A^{(n)}(z, h) dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma(c)} f(z) \Phi_A^{(n)}(z, h) dz \end{aligned}$$

が得られる。あとは $c-d \rightarrow 0$ とすれば (3.2.19) が得られる。

後半の不等式 (3.2.21) の証明は, 0 位の反対称積分公式の場合と全く同様にして出来る。 ■

定理 3.2.2 から, n 位の反対称積分公式の誤差は, 漸近的な標本点間隔 h を小さくするにつれて

$$\text{誤差} = O \left[\exp \left(-\frac{2\pi d}{h} \right) \right]$$

と指数関数的に減衰することがわかる。これは 0 位の反対称積分公式と同じ誤差のオーダーである。

これまでは, $f(z)$ が帯状領域 $D(d)$ で正則な場合について誤差評価を行ってきたが, $f(z)$ が領域 $D(d)$ 内に有限個の極をもつような場合でも, 誤差評価が可能である。それがつぎの定理である。

定理 3.2.3 $f(z)$ は次の条件 (i), (ii), (iii) を満たすとする:

(a) $f(z)$ は $D(d)$ で有理形である。ただし, $D(d)$ における $f(z)$ の極は有限個で, いずれも 1 位の極とする (これらの極を b_1, b_2, \dots, b_M とする);

(b) $N(f, d-0) = \int_{\Gamma(d-0)} |f(z)| |dz| < \infty$;

(c) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \int_{-c}^c |f(x+iy)| dy = 0$ が任意の $c(0 < c < d)$ について成り立つ。

このとき, $n(=0, 1, 2, \dots)$ 位の反対称積分公式 (3.2.5), (3.2.13) の誤差はつぎのように複素積分表示できる:

$$(3.2.31) \quad \begin{aligned} \Delta Q_A^{(n)}(f, h) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma(d-0)} f(z) \Phi_A^{(n)}(z, h) dz \\ &\quad - \sum_{j=1}^M \text{Res}(f, b_j) \Phi_A^{(n)}(b_j, h), \end{aligned}$$

ここで $\Phi_A^{(n)}(z, h)$ は定理 3.2.1, 3.2.2 の中で定義されているものとし, $\text{Res}(f, b_j) (j=1, 2, \dots, M)$ は極 b_j における $f(z)$ の留数とする。さらにこの誤差は次の不等式で評価される:

$$(3.2.32) \quad \begin{aligned} |\Delta Q_A^{(n)}(f, h)| &\leq \kappa_A^{(n)}(\pi(d-0)/h) N(f, d-0) \exp \left(-\frac{2\pi d}{h} \right) \\ &\quad + 2\pi \sum_{j=1}^M |\text{Res}(f, b_j)| \kappa_A^{(n)}((\pi/h) |\text{Im } b_j|) \exp \left(-\frac{2\pi}{h} |\text{Im } b_j| \right). \end{aligned}$$

□

(証明) 定理 3.2.1, 3.2.2 と同様, 複素積分

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1+\Gamma_2+\Gamma_3+\Gamma_4+\Gamma_5+\Gamma_6} f(z) \Phi_A^{(n)}(z, h) dz$$

を考える. ただし, $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_6$ は図 3.2.3 に示されているような積分路とする (N_1, N_2 を正の整数として $R_1 = h(N_1 + n/2 + 1/4)$, $R_2 = h(N_2 + n/2 + 1/4)$ とする).

定理 3.2.2 の証明と同様にして,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1+\Gamma_2+\Gamma_3+\Gamma_4+\Gamma_5+\Gamma_6} f(z) \Phi_A^{(n)}(z, h) dz \\ &= \int_0^{R_1} f(x) dx - \int_0^{R_2} f(-x) dx \\ & \quad - h \sum_{k=1}^{N_1} f\left(h \frac{j_{nk}}{\pi}\right) \frac{2}{\pi j_{nk}(j_{n+1}(j_{nk}))^2} + h \sum_{k=1}^{N_2} f\left(-h \frac{j_{nk}}{\pi}\right) \frac{2}{\pi j_{nk}(j_{n+1}(j_{nk}))^2} \\ & \quad - \sum_{\lambda=0}^{n-1} c_{\lambda}^{(n)} h^{2(\lambda+1)} f^{(2\lambda+1)}(0) + \sum_{j=1}^M \text{Res}(f, b_j) \Phi_A(b_j, h) \end{aligned}$$

を得る. ただし, $n=0$ の場合は右辺第 5 項は 0 とおく. 今度は, 積分路の内部に $f(z)$ の極 b_1, b_2, \dots, b_M が存在するから, (3.2.33) 右辺第 6 項が新たに加わる.

この後の証明は, 定理 3.2.1 と全く同様である.

上の定理より, 反対称積分の誤差は

$$\text{誤差} = O\left[\exp\left(-\frac{2\pi}{h} \max_j |\text{Im } b_j|\right)\right]$$

となる. すなわち, 極が実軸から離れているほど, 数値積分の精度が高い.

3.3 数値実験

3.3.1 対称積分の場合

積分

$$(3.3.1) \quad I_S(f_1) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) dx, \quad f_1(x) = \exp(-\cosh x)$$

を, 対称積分公式 (3.1.2) および台形公式 (3.1.11) を適用して倍精度で計算し, 性能を比較した. 積分の真値は $I_S(f_1) = 0.84204\ 88764\ 81416\dots$ であり, $f_1 \in B(d)$, $d < \pi/2$ である.

図 3.4 のグラフに, 各積分公式の相対誤差の絶対値を $1/h$ に対してプロットした. 第 3.1 節の誤差解析の結果から, 対称積分公式, 台形公式ともに誤差は $1/h$ に対し

$$(3.3.2) \quad |\text{error}| = O[\exp(-c/h)]$$

(c は正の定数) の形で評価されるが, 係数 c の値を比べると, 対称積分公式に対する c の値は, 台形公式に対する c の値の半分の大きさである. したがって, $1/h$ に対し誤差を対数目盛でプロットすると両者の公式のグラフは一直線上に乗り, Lagrange-Bessel 積分公式の誤差に対する直線の傾きは台形公式の誤差に対する直線の傾きの半になることが理論的に予想される.

そこで図 3.4 のグラフから直線の傾きの値 c を調べ, その結果を表 3.2 にまとめた.

表 3.2 から, 対称積分公式に対する直線の傾きは, 台形公式に対する直線の傾きのおおよそ半分になっていることが, 実験的に示されている.

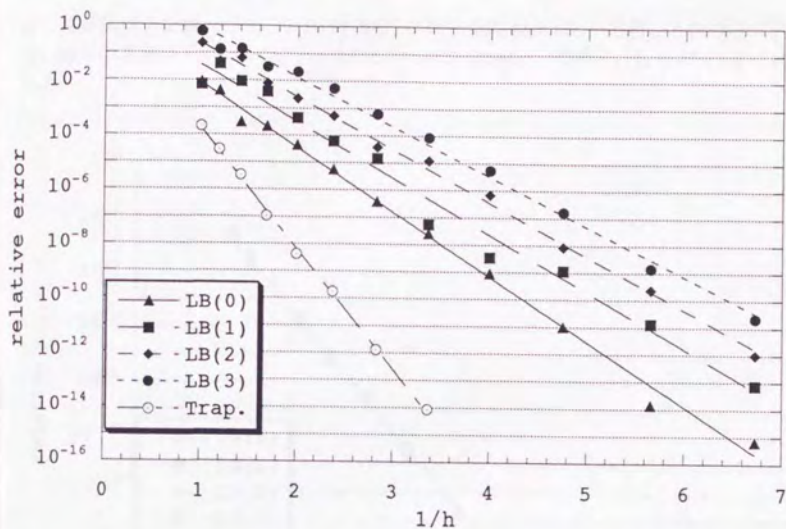


図 3.4 積分 (3.3.1) に対する $n(=0, 1, 2, 3)$ 位の対称積分公式と台形公式の誤差の振る舞いの比較 (凡例で “Trap.” は台形公式を, “LB(n)” ($n=0, 1, 2, 3$) は n 位の対称積分公式を指す).

表 3.2 数値実験から見積もった, 誤差評価 (3.3.2) における係数 c の値.

積分公式	台形公式	対称積分公式			
		$n=0$	$n=1$	$n=2$	$n=3$
直線の傾き	10.2	5.44	4.77	4.48	4.18

3.3.2 反対称積分の場合

積分

$$(3.3.3) \quad I_A(f_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sgn} x f_2(x) dx, \quad f_2(x) = \sinh x \exp(-\cosh x)$$

を、反対称積分公式 (3.2.5), (3.2.13) 及び Si 積分公式 (3.2.12) を適用して倍精度で計算した。積分の真値は $I_A(f_2) = 2e^{-1} = 0.735758882342885\dots$ であり、 $f_2 \in B(d)$, $d < \pi/2$ である。

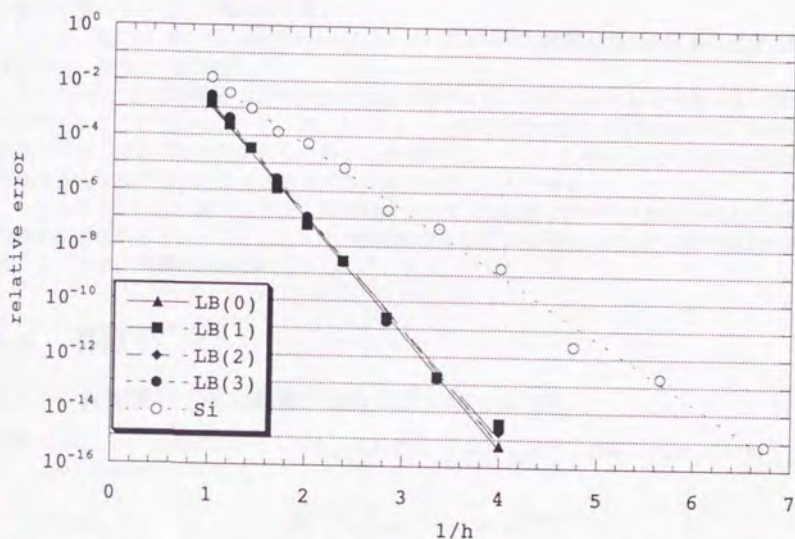


図 3.5 積分 (3.3.3) に対する $n=0, 1, 2, 3$ 位の反対称積分公式及び Si 積分公式の誤差の振る舞い (凡例で“LB(n)”($n=0, 1, 2, 3$) は n 位の反対称積分公式, “Si” は Si 積分公式を指す)。

図 3.5 のグラフに、位数 $n=0, 1, 2, 3$ の反対称積分公式及び Si 積分公式で計算したときの相対誤差を $1/h$ に対してプロットした。グラフから、反対称積分公式及び Si 積分公式の誤差は $1/h$ に対し

$$(3.3.4) \quad |\text{error}| = O[\exp(-c/h)]$$

(c は正の定数) と指数関数的に減衰していることが分かる。なお、異なる位数 n の反対称積分公式どうしでは振る舞いにあまり違いが見られない。

ところで、第 3.3.1 節で用いた関数 $f_1(z)$ と関数 $f_2(z)$ はともに整関数であり、各関数の絶対値の複素平面における振る舞いは同様である。したがって、関数 $f(z) = f_1(z)$ に対し定理 3.1.2 の仮定が満たされるような値 d の上限と、関数 $f(z) = f_2(z)$ に対し定理 3.2.1, 及び定理 3.2.2 の仮定が満たされるような値 d の上限はほぼ同じであると考えられる。よって、図 3.4 のグラフにおける台形公式の誤差の直線の傾きに対し、図 3.5 のグラフにおける

表 3.3 数値実験から見積もった、誤差評価 (3.3.4) における係数 c の値.

積分公式	Si 積分公式	反対称積分公式			
		$n = 0$	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$
直線の傾き	5.35	9.55	9.19	9.44	9.54

反対称積分公式の誤差の直線の傾きはほぼ同じ値に、Si 積分公式の誤差の直線の傾きはほぼ半分の値になることが期待される.

そこで、図 3.5 において、各位数 $n = 0, 1, 2, 3$ に対する反対称積分公式の誤差の直線の傾きを調べ、表 3.3 にまとめた.

表 3.3 から、反対称積分公式の誤差の直線の傾きはどの位数 n に対しても 9 ~ 9.5 程度の値であることが分かる. 一方、表 3.2 によると、台形公式の誤差の直線の傾きは 10 程度の値であり、両者の値はほぼ同じであることが分かる. 一方、Si 積分公式の誤差の直線の傾きは台形公式のそれのおおよそ $1/2$ の値であることも分かる.

これより 3.2.1, 3.2.3 節で述べた、反対称積分公式は対称積分に対する台形公式と同程度の精度を達成するということが、および、反対称積分公式は Si 積分公式に対し倍の精度を達成することが、実験的に確かめられたことになる.

3.4 補題

3.4.1 対称積分公式の誤差の特性関数に関する補題

補題 3.4.1 (a) 任意の $\varepsilon > 0$ に対し、正の整数 N を十分大きくとると、 $|\operatorname{Re} z| = \pi(N + 1/4)$ において、不等式

$$(3.4.1) \quad |\Phi_S^{(0)}(z, \pi)| \leq (1 + \varepsilon) 2\pi e^{-|\operatorname{Im} z|}$$

が成り立つ.

(b) $n = 1, 2, \dots$ とする. $\varepsilon > 0$ に対し、正の整数 N を十分大きくとると、 $|\operatorname{Re} z| = \pi(N + n/2 + 1/4)$ において、不等式

$$(3.4.2) \quad |\Phi_S^{(n)}(z, \pi)| \leq (1 + \varepsilon) \frac{\sqrt{8/\pi}}{(2n-1)!!} |z|^{n-1/2} e^{-|\operatorname{Im} z|}$$

が成り立つ.

□

(証明) (I) $|\Phi_S^{(0)}(-z, \pi)| = |-\Phi_S^{(0)}(z, \pi)| = |\Phi_S^{(0)}(z, \pi)|$ であるから、 $\operatorname{Re} z > 0$ の場合に不等式を示せば十分である. また、 $\varepsilon < 1$ としてよい.

実軸の負の部分を除いた範囲 ($|\arg z| < \pi$) で $z \rightarrow \infty$ とするときの $H_0(z)$ の漸近展開 ([29], §10.42) :

$$(3.4.3) \quad H_0(z) = Y_0(z) + \psi_0(z), \quad \psi_0(z) = \frac{2}{\pi z} + O(z^{-3})$$

を用いる。

まず, Struve 関数 $H_0(z)$ の漸近展開 (3.4.3) において, 任意の $\varepsilon > 0$ に対し, 正の整数 N を十分大きくとると, $\operatorname{Re} z = \pi(N + 1/4)$ において

$$|\psi_0(z)| \leq (1 + \varepsilon/2) \frac{2}{\pi|z|}$$

とできる。また, 補題 1.1.3 と, 後で証明する補題 3.4.3 より, N をさらに大きくとれば, $\operatorname{Re} z = \pi(N + 1/4)$ において,

$$\begin{aligned} \frac{1}{|J_n(z)|} &\leq (1 + \varepsilon/2) \sqrt{2\pi|z|} e^{-|\operatorname{Im} z|} \\ |\Phi_A^{(0)}(z, \pi)| &\leq (1 + \varepsilon/2) 2\pi e^{-2|\operatorname{Im} z|} \end{aligned}$$

が成り立つようにできる。さらに, $\operatorname{Re} z = \pi(N + 1/4)$ において, 不等式

$$(1 + \varepsilon/2) \sqrt{\frac{8}{\pi|z|}} \leq \varepsilon/2$$

の成立も要求する。このとき, $\Phi_S^{(0)}(z, \pi)$ が

$$(3.4.4) \quad \Phi_S^{(0)}(z, \pi) = \Phi_A^{(0)}(z, \pi) + \frac{\psi_0(z)}{J_0(z)}$$

と書けることに注意すれば, つぎの一連の不等式を得る:

$$\begin{aligned} |\Phi_S^{(0)}(z, \pi)| &\leq |\Phi_A^{(0)}(z, \pi)| + \left| \frac{\psi_0(z)}{J_0(z)} \right| \\ &\leq (1 + \varepsilon/2) 2\pi e^{-2|\operatorname{Im} z|} + (1 + \varepsilon/2)^2 \sqrt{\frac{8}{\pi|z|}} e^{-|\operatorname{Im} z|} \\ &\leq (1 + \varepsilon/2) \left\{ 2\pi + (1 + \varepsilon/2) \sqrt{\frac{8}{\pi|z|}} \right\} e^{-|\operatorname{Im} z|} \\ &\leq (1 + \varepsilon/2) (2\pi + \varepsilon/2) e^{-|\operatorname{Im} z|} \\ &\leq (1 + \varepsilon) 2\pi e^{-|\operatorname{Im} z|}. \end{aligned}$$

最後の不等式は示すべき不等式に他ならない。

(II) $n = 1, 2, \dots$ の場合は, 実軸の負の部分を除いた範囲 ($|\arg z| < \pi$) で $z \rightarrow \infty$ とするとき, Struve 関数 $H_n(z)$ の漸近展開 ([29], §10.42):

$$(3.4.5) \quad H_n = Y_n(z) + \psi_n(z), \quad \psi_n(z) = \frac{2z^{n-1}}{\pi(2n-1)!!} + O(z^{n-3})$$

が成り立つから, (I) と同様にして証明することが出来る。

補題 3.4.2 (a) 任意の $M > 0$ に対して, 定数 $\kappa_S^{(0)}(M)$ を

$$\kappa_S^{(0)}(M) = \sup_{|\operatorname{Im} z| \geq M} \frac{|\Phi_S^{(0)}(z, \pi)|}{\sqrt{8/(\pi M)} e^{-|\operatorname{Im} z|}}$$

と定義するとき,

$$(1) \kappa_S^{(0)}(M) < +\infty, \quad (2) \lim_{M \rightarrow \infty} \kappa_S^{(0)}(M) = 1$$

が成り立つ。

(b) $n = 1, 2, \dots$ とする. 任意の $M > 0$ に対し定数 $\kappa_S^{(n)}(M)$ を

$$(3.4.6) \quad \kappa_S^{(n)}(M) = \sup_{|\operatorname{Im} z| \geq M} \frac{|\Phi_S^{(n)}(z, \pi)|}{\frac{\sqrt{8/\pi}}{(2n-1)!!} |z|^{n-1/2} e^{-|\operatorname{Im} z|}}$$

で定義するとき,

$$(1) \kappa_S^{(n)}(M) \text{ は単調減少, } (2) \kappa_S^{(n)}(M) < +\infty, \quad (3) \lim_{M \rightarrow \infty} \kappa_S^{(n)}(M) = 1$$

が成り立つ.

□

(証明) (1) まず, $|\Phi_S^{(0)}(-z, \pi)| (= |-\Phi_S^{(0)}(z, \pi)|) = |\Phi_S^{(0)}(z, \pi)|$ であるから, $\kappa_S^{(0)}(M)$ の定義式において, \sup をとる範囲を $\operatorname{Re} z \geq 0$ に制限してよい:

$$\kappa_S^{(0)}(M) = \sup_{|\operatorname{Im} z| \geq M, \operatorname{Re} z \geq 0} \frac{|\Phi_S^{(0)}(z, \pi)|}{\sqrt{8/(\pi M)} e^{-|\operatorname{Im} z|}}.$$

また, 等式 (3.4.4) より, $\frac{\Phi_S^{(0)}(z, \pi)}{\sqrt{8/(\pi M)} e^{-|\operatorname{Im} z|}}$ はつぎのように変形できる:

$$(3.4.7) \quad \begin{aligned} \frac{\Phi_S^{(0)}(z, \pi)}{\sqrt{8/(\pi M)} e^{-|\operatorname{Im} z|}} &= \frac{\Phi_A^{(0)}(z, \pi)}{\sqrt{8/(\pi M)} e^{-|\operatorname{Im} z|}} + \frac{1}{\sqrt{8/(\pi M)} e^{-|\operatorname{Im} z|}} \frac{\psi_0(z)}{J_0(z)} \\ &= \frac{\Phi_A^{(0)}(z, \pi)}{\sqrt{8/(\pi M)} e^{-|\operatorname{Im} z|}} + \left\{ \frac{e^{|\operatorname{Im} z|}}{\sqrt{2\pi}|z|} / J_0(z) \right\} \left\{ \frac{\pi \sqrt{M|z|}}{2} \psi_0(z) \right\}. \end{aligned}$$

(1) を示す. まず, 等式 (3.4.7) より, 不等式

$$\kappa_S^{(0)}(M) \leq \sqrt{\frac{\pi^3}{2}} M^{1/2} e^{-M} \kappa_A^{(0)}(M) + \kappa_B^{(0)}(M) \sup_{|\operatorname{Im} z| \geq M, \operatorname{Re} z \geq 0} \left\{ \frac{\pi \sqrt{M|z|}}{2} |\psi_0(z)| \right\}$$

が得られる. ただし, $\kappa_A^{(0)}(M)$ は補題 3.4.4 において定義される関数である. この不等式において, 後で証明する補題 3.4.4, 補題 I.1.4, Struve 関数 $H_0(z)$ の漸近展開 (3.4.3) を用いれば, $\kappa_S^{(0)}(M) < +\infty$ すなわち (1) が成り立つことは明らかである.

次に (2) を示す. まず, 等式 (3.4.7), および, 不等式 $|\sup |f(z) + g(z)| - \sup |f(z)|| \leq \sup |g(z)|$ (ただし, $\sup |f(z)|, \sup |g(z)| < \infty$ とする) より,

$$\left| \kappa_S^{(0)}(M) - \sup_{|\operatorname{Im} z| \geq M, \operatorname{Re} z \geq 0} \left[\left\{ \frac{e^{|\operatorname{Im} z|}}{\sqrt{2\pi}|z|} / |J_0(z)| \right\} \left\{ \frac{\pi \sqrt{M|z|}}{2} |\psi_0(z)| \right\} \right] \right| \leq \sqrt{\frac{\pi^3}{2}} M^{1/2} e^{-M} \kappa_A^{(0)}(M)$$

が得られる. ここで, Struve 関数 $H_0(z)$ の漸近展開 (3.4.3), 補題 I.1.4 の証明における議論, 後で証明する補題 3.4.4 を用いれば,

$$\begin{aligned} \lim_{M \rightarrow \infty} \sup_{|\operatorname{Im} z| \geq M, \operatorname{Re} z \geq 0} &\left[\left\{ \frac{e^{|\operatorname{Im} z|}}{\sqrt{2\pi}|z|} / |J_0(z)| \right\} \left\{ \frac{\pi \sqrt{M|z|}}{2} |\psi_0(z)| \right\} \right] \\ &\geq \lim_{M \rightarrow \infty} \left\{ \frac{e^M}{\sqrt{2\pi M}} / |J_0(M)| \right\} \left\{ \frac{\pi M}{2} |\psi_0(M)| \right\} = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \lim_{M \rightarrow \infty} \sup_{|\operatorname{Im} z| \geq M, \operatorname{Re} z \geq 0} \left[\left\{ \frac{e^{|\operatorname{Im} z|}}{\sqrt{2\pi|z|}} / |J_0(z)| \right\} \left\{ \frac{\pi \sqrt{M|z|}}{2} |\psi_0(z)| \right\} \right] \\
& \leq \lim_{M \rightarrow \infty} \kappa_B^{(0)}(M) \lim_{M \rightarrow \infty} \sup_{|\operatorname{Im} z| \geq M, \operatorname{Re} z \geq 0} \left\{ \frac{\pi \sqrt{M|z|}}{2} |\psi_0(z)| \right\} = 1 \\
& \lim_{M \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{\pi^3}{2}} M^{1/2} e^{-M} \kappa_A^{(0)}(M) = 0
\end{aligned}$$

の成立が分かるから、 $\lim_{M \rightarrow \infty} \kappa_S^{(0)}(M) = 1$ すなわち (2) が成り立つ。

(II) $n = 1, 2, \dots$ の場合も Struve 関数 $H_n(z)$ の漸近展開を用いて、(i) と同様にして証明できる。

3.4.2 反対称積分公式の誤差の特性関数に関する補題

補題 3.4.3 $n = 0, 1, 2, \dots$ とする。任意の $\varepsilon > 0$ に対し、正の整数 N を十分大きくとると、 $|\operatorname{Re} z| = \pi(N + n/2 + 1/4)$ において、不等式

$$(3.4.8) \quad |\Phi_A^{(n)}(z, \pi)| \leq (1 + \varepsilon) 2\pi e^{-2|\operatorname{Im} z|}$$

が成り立つ。

(証明) $0 \leq \arg z < \pi$ の場合、および、 $-\pi \leq \arg z < 0$ の場合に、それぞれ、任意の $\varepsilon > 0$ に対し、正の整数 N を十分大きくとると、 $|\operatorname{Re} z| = \pi(N + n/2 + 1/4)$ において、不等式 (3.4.8) が成り立つことを示せばよい。

($0 \leq \arg z < \pi$ の場合) $\Phi_A^{(n)}(z, \pi) = -i\pi H_n^{(1)}(z)/J_n(z)$ であるから、補題 I.1.3 に注意すれば、Hankel 関数 $H_n^{(1)}(z)$ について、任意の $\varepsilon > 0$ に対し、正の整数 N を十分大きくとると、 $|\operatorname{Re} z| = \pi(N + n/2 + 1/4)$ において、不等式

$$|H_n^{(1)}(z)| \leq (1 + \varepsilon) \sqrt{\frac{2}{\pi|z|}} e^{-|\operatorname{Im} z|}$$

が成り立つことを示せばよいことが分かる。しかし、これは、Hankel 関数 $H_n^{(1)}(z)$ の漸近展開 ([29] §7.2) :

$$(3.4.9) \quad H_n^{(1)}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} e^{i(z - n\pi/2 - \pi/4)} \left[1 + O\left(\frac{1}{z}\right) \right] \quad (|z| \rightarrow \infty, -\pi < \arg z < 2\pi)$$

によれば、成立は明らかである。

($-\pi \leq \arg z < 0$ の場合) $\Phi_A^{(n)}(z, \pi) = i\pi H_n^{(2)}(z)/J_n(z)$ であるから、補題 I.1.3 に注意すれば、Hankel 関数 $H_n^{(2)}(z)$ について、任意の $\varepsilon > 0$ に対し、正の整数 N を十分大きくとると、 $|\operatorname{Re} z| = \pi(N + n/2 + 1/4)$ において、不等式

$$|H_n^{(2)}(z)| \leq (1 + \varepsilon) \sqrt{\frac{2}{\pi|z|}} e^{-|\operatorname{Im} z|}$$

が成り立つことを示せばよいことが分かる。しかし、これは、Hankel 関数 $H_n^{(2)}(z)$ の漸近展開 ([29] §7.2) :

$$(3.4.10) \quad H_n^{(2)}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} e^{-i(z - n\pi/2 - \pi/4)} \left[1 + O\left(\frac{1}{z}\right) \right] \quad (|z| \rightarrow \infty, -2\pi < \arg z < \pi)$$

によれば、成立は明らかである。

補題 3.4.4 $n = 0, 1, 2, \dots$ とする. 任意の $M > 0$ に対して, 定数 $\kappa_A^{(n)}(M)$ を

$$\kappa_A^{(n)}(M) = \sup_{|\operatorname{Im} z| \geq M} \frac{|\Phi_A^{(n)}(z, \pi)|}{2\pi e^{-2|\operatorname{Im} z|}}$$

と定義するとき,

$$(1) \kappa_A^{(n)}(M) \text{ は単調減少, } (2) \kappa_A^{(n)}(M) < +\infty, \quad (3) \lim_{M \rightarrow \infty} \kappa_A^{(n)}(M) = 1$$

が成り立つ.

□

(証明) (1) の $\kappa_A^{(n)}(M)$ の単調減少性は明らかである.

(2), (3) を証明するために, 定数 $\kappa_A^{(n)+}(M)$, $\kappa_A^{(n)-}(M)$ を

$$\kappa_A^{(n)+}(M) = \sup_{|\operatorname{Im} z| \geq M} \frac{|\Phi_A^{(n)}(z, \pi)|}{2\pi e^{-2|\operatorname{Im} z|}}, \quad \kappa_A^{(n)-}(M) = \sup_{|\operatorname{Im} z| \leq -M} \frac{|\Phi_A^{(n)}(z, \pi)|}{2\pi e^{-2|\operatorname{Im} z|}}$$

と定義する. このとき, つぎの 2 つのこと:

$$(a) \kappa_A^{(n)+}(M) < +\infty \text{ かつ } \lim_{M \rightarrow \infty} \kappa_A^{(n)+}(M) = 1; \quad (b) \kappa_A^{(n)-}(M) < +\infty \text{ かつ } \lim_{M \rightarrow \infty} \kappa_A^{(n)-}(M) = 1$$

が示されればよい.

(a) を示す. $\operatorname{Im} z > 0$ において $\Phi_A^{(n)}(z, \pi) = -i\pi H_n^{(1)}(z)/J_n(z)$ であるから,

$$\kappa_A^{(n)+}(M) = \sup_{|\operatorname{Im} z| \geq M} \left\{ \left(\frac{e^{|\operatorname{Im} z|}}{\sqrt{2\pi|z|}} \right) / |J_n(z)| \right\} \times \left\{ |H_n^{(1)}(z)| / \sqrt{\frac{2}{\pi|z|}} e^{-|\operatorname{Im} z|} \right\}$$

と書ける.

ここで, 補題 I.1.4 の証明における議論, および, Hankel 関数 $H_0^{(1)}(z)$ の漸近展開 (3.4.9) より, $M \rightarrow \infty$ とするとき, $\operatorname{Im} z \geq M$ において,

$$\frac{e^{|\operatorname{Im} z|}}{\sqrt{2\pi|z|}} / |J_n(z)| \rightarrow 1, \quad |H_n^{(1)}(z)| / \sqrt{\frac{2}{\pi|z|}} e^{-|\operatorname{Im} z|} \rightarrow 1$$

となることは明らかであるから, $\lim_{M \rightarrow \infty} \kappa_A^{(n)+}(M) = 1$ が成り立つことがわかる.

また, 任意の $M > 0$ に対して $\kappa_A^{(n)+}(M) < +\infty$ となることも容易にわかる. 実際,

$$\begin{aligned} \kappa_A^{(n)+}(M) &\leq \sup_{|\operatorname{Im} z| \geq M} \left\{ \frac{e^{|\operatorname{Im} z|}}{\sqrt{2\pi|z|}} / |J_n(z)| \right\} \times \sup_{|\operatorname{Im} z| \geq M} \left\{ |H_n^{(1)}(z)| / \sqrt{\frac{2}{\pi|z|}} e^{-|\operatorname{Im} z|} \right\} \\ &\leq \kappa_B^{(n)}(M) \sup_{|\operatorname{Im} z| \geq M} \left\{ |H_n^{(1)}(z)| / \sqrt{\frac{2}{\pi|z|}} e^{-|\operatorname{Im} z|} \right\} \end{aligned}$$

であるから,

$$\sup_{|\operatorname{Im} z| \geq M} \left\{ |H_n^{(1)}(z)| / \sqrt{\frac{2}{\pi|z|}} e^{-|\operatorname{Im} z|} \right\} < \infty$$

を示せばよいが, これは Hankel 関数 $H_n^{(1)}(z)$ の漸近展開 (3.4.9) より明らかである.

(b) を示す. $\operatorname{Im} z < 0$ において $\Phi_A^{(n)}(z, \pi) = i\pi H_n^{(2)}(z)/J_n(z)$ であることに注意すれば, (a) と同様に示される. ■

第 4 章

Bessel 関数の零点を用いた数値積分公式 II (実数位数の場合)

前章では、対称積分 $I_S(f) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$, 反対称積分 $I_A(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sgn} x f(x)dx$ に対し、Bessel 関数の零点を標本点にもつ数値積分公式、すなわち、Lagrange-Bessel 数値積分公式を導出し、とくに反対称積分に対し Lagrange-Bessel 数値積分公式が有効であることを示した。

この節では、一般の実数位数 Bessel 関数の零点を標本点に用いた場合の数値積分公式について考える。

4.1 べき的特異性をもつ関数の積分に対する数値積分公式

この章では、 ν を整数でない正の実数、位数 ν の第 1 種 Bessel 関数 $J_\nu(x)$ の零点を

$$0 < j_{\nu 1} < j_{\nu 2} < \cdots < j_{\nu k} < \cdots$$

として、

$$\cdots < -h \frac{j_{\nu k}}{\pi} < \cdots < -h \frac{j_{\nu 2}}{\pi} < -h \frac{j_{\nu 1}}{\pi} < 0 < h \frac{j_{\nu 1}}{\pi} < h \frac{j_{\nu 2}}{\pi} < \cdots < h \frac{j_{\nu k}}{\pi} < \cdots$$

を標本点とする数値積分公式をつくることにする。

第 3 章で反対称積分に対する Lagrange-Bessel 数値積分公式を導出したときと同様、誤差の複素積分表示から出発して数値積分公式を導出する。

まず、反対称積分の場合からの類推で、

$$(4.1.1) \quad \tilde{\Phi}_\nu(z, h) = \begin{cases} -i\pi \frac{H_\nu^{(1)}(\pi z/h)}{J_\nu(\pi z/h)} & (\operatorname{Im} z > 0), \\ +i\pi \frac{H_\nu^{(2)}(\pi z/h)}{J_\nu(\pi z/h)} & (\operatorname{Im} z < 0) \end{cases}$$

とおき、

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma(d)} f(z) \tilde{\Phi}_\nu(z, h) dz$$

を誤差の複素積分表示に持つような数値積分公式を考える．ところがこの場合，少し計算してみると分かるように，

$$\int_0^\infty f(x)dx - \cos(2\pi\nu) \int_0^\infty f(-x)dx + \sin(2\pi\nu)p.v. \int_0^\infty f(-x) \frac{Y_\nu(\pi x/h)}{J_\nu(\pi x/h)} dx$$

に対する数値積分公式が導出される．この公式は数値計算公式としての汎用性に乏しい．

そこで，式(4.1.1)を少し変形して，

$$(4.1.2) \quad \Phi_\nu(z, h) = \begin{cases} -i\pi z^{2\{\nu\}-1} \frac{H_\nu^{(1)}(\pi z/h)}{J_\nu(\pi z/h)} & (\operatorname{Im} z > 0), \\ +i\pi z^{2\{\nu\}-1} \frac{H_\nu^{(2)}(\pi z/h)}{J_\nu(\pi z/h)} & (\operatorname{Im} z < 0) \end{cases}$$

とおく．ここで $\{\nu\}$ は ν の小数部分である．そして，

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma(d)} f(z) \Phi_\nu(z, h) dz$$

を誤差の複素積分表示に持つような数値積分公式を考える．3.2.1節と同様にして複素積分を変形することにより，つぎの等式を得る：

$$(4.1.3) \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma(d)} f(z) \Phi_\nu(z, h) dz = \int_{-\infty}^\infty |x|^{2\{\nu\}-1} f(x) dx - Q_\nu(f, h).$$

ここで， $Q_\nu(f, h)$ はべき的特異性を持つ関数の積分

$$I_{\{\nu\}}(f) = \int_{-\infty}^\infty |x|^{2\{\nu\}-1} f(x) dx$$

に対する数値積分公式で，以下のように定義される：

$$(4.1.4) \quad \begin{aligned} I_{\{\nu\}}(f) &\approx Q_\nu(f, h) \\ &\equiv h \sum_{k=0}^\infty \left(h \frac{j_{\nu k}}{\pi}\right)^{2\{\nu\}-1} f\left(h \frac{j_{\nu k}}{\pi}\right) \frac{2}{\pi j_{\nu k} (J_{\nu+1}(j_{\nu k}))^2} \\ &\quad + h \sum_{k=0}^\infty \left(h \frac{j_{\nu k}}{\pi}\right)^{2\{\nu\}-1} f\left(-h \frac{j_{\nu k}}{\pi}\right) \frac{2}{\pi j_{\nu k} (J_{\nu+1}(j_{\nu k}))^2} \\ &\quad + \sum_{\lambda=0}^{[\nu]} d_\lambda^{(\nu)} h^{2(\lambda+\{\nu\})} f^{(2\lambda)}(0), \end{aligned}$$

ここで， $\{\nu\}$ は ν の小数部分，すなわち， $[\nu]$ を ν の整数部分 (ν を超えない最大の整数) として $\{\nu\} = \nu - [\nu]$ であり， $d_\lambda^{(\nu)}$ ($\lambda = 0, 1, \dots, [\nu]$) はつぎで定義される定数である：

$$(4.1.5) \quad d_\lambda^{(\nu)} = \frac{\pi^{-2(\lambda+\{\nu\})}}{(2\lambda)!} \sum_{m=0}^{[\nu]-\lambda} \frac{\Gamma(\nu-m)}{m!} 2^{\nu-2m} b_{[\nu]-\lambda-m}^{(\nu)},$$

ただし， $b_m^{(\nu)}$ ($m = 0, 1, 2, \dots$) は $x^\nu/J_\nu(x)$ を $x=0$ で Taylor 展開したときの係数である：

$$(4.1.6) \quad \frac{x^\nu}{J_\nu(x)} = \sum_{m=0}^\infty b_m^{(\nu)} x^{2m}.$$

数値積分公式 $I_\nu(f) \approx Q_\nu(f, h)$ に対する誤差が (4.1.3) 左辺の複素積分で表わされるのであるが, Hankel 関数の漸近公式から

$$|\Phi_\nu(z, h)| \approx 2\pi |z|^{2(\nu)-1} \exp\left(-\frac{2\pi}{h} |\operatorname{Im} z|\right)$$

となるので, 誤差はおおよそ

$$|I_\nu(f) - Q_\nu(f, h)| \lesssim \left\{ \int_{\Gamma(d)} |z|^{2(\nu)-1} |f(z)| |dz| \right\} \exp\left(-\frac{2\pi d}{h}\right)$$

と抑えられる. すなわち, 誤差が $O[\exp(-2\pi d/h)]$ のオーダーで評価され, 極めて精度の高い数値積分公式であると言える.

注意 4.1.1 とくに $\{\nu\} = 1/2$, すなわち, ν が半整数の場合, $2\{\nu\} - 1 = 0$ により積分 $I_{\{\nu\}}(f)$ は対称積分 $I_S(f) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ となり, 対称積分に対する数値積分公式が得られる:

$$\begin{aligned} (4.1.7) \quad I_S(f) &\approx Q_{n+1/2}(f, h) \\ &= h \sum_{k=1}^{\infty} f\left(h \frac{\xi_{nk}}{\pi}\right) [\xi_{nk} j_{n+1,k}(\xi_{nk})]^{-2} + h \sum_{k=1}^{\infty} f\left(-h \frac{\xi_{nk}}{\pi}\right) [\xi_{nk} j_{n+1,k}(\xi_{nk})]^{-2} \\ &\quad + \sum_{\lambda=0}^n \delta_\lambda^{(n)} h^{2\lambda+1} f^{(2\lambda)}(0). \end{aligned}$$

ここで, ξ_{nk} $0 < \xi_{n1} < \xi_{n2} < \dots < \xi_{nk} < \dots$ は球 Bessel 関数 $j_n(x) = \sqrt{\pi/(2x)} J_{n+1/2}(x)$ の零点, $\delta_\lambda^{(n)}$ は次により定まる定数である:

$$(4.1.8) \quad \delta_\lambda^{(n)} = \frac{\pi^{-2\lambda}}{(2\lambda)!} \sum_{m=0}^{n-\lambda} \frac{(2n-2m-1)!!}{2^m m!} \beta_{n-\lambda-m}^{(n)},$$

ただし, $\beta_m^{(n)} (m = 0, 1, 2, \dots)$ は $x^n/j_n(x)$ を $x = 0$ で Taylor 展開したときの係数である

$$(4.1.9) \quad \frac{x^n}{j_n(x)} = \sum_{m=0}^{\infty} \beta_m^{(n)} x^{2m}.$$

$n = 0, 1, 2, 3$ の場合について公式を具体的に書き下しておく:

$$(4.1.10) \quad Q_{1/2}(f, h) = h \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kh),$$

$$\begin{aligned} (4.1.11) \quad Q_{3/2}(f, h) &= h \sum_{k=1}^{\infty} f\left(h \frac{\xi_{1k}}{\pi}\right) [\xi_{1k} j_2(\xi_{1k})]^{-2} + h \sum_{k=1}^{\infty} f\left(-h \frac{\xi_{1k}}{\pi}\right) [\xi_{1k} j_2(\xi_{1k})]^{-2} \\ &\quad + \frac{9}{5} h f(0) + \frac{3}{2\pi^2} h^3 f''(0), \end{aligned}$$

$$(4.1.12) \quad Q_{5/2}(f, h) = h \sum_{k=1}^{\infty} f\left(h \frac{\xi_{2k}}{\pi}\right) [\xi_{2k} j_3(\xi_{2k})]^{-2} + h \sum_{k=1}^{\infty} f\left(-h \frac{\xi_{2k}}{\pi}\right) [\xi_{2k} j_3(\xi_{2k})]^{-2}$$

$$\begin{aligned}
(4.1.13) \quad Q_{7/2}(f, h) = & h \sum_{k=1}^{\infty} f\left(h \frac{\xi_{3k}}{\pi}\right) [\xi_{3k} j_4(\xi_{3k})]^{-2} + h \sum_{k=1}^{\infty} f\left(-h \frac{\xi_{3k}}{\pi}\right) [\xi_{3k} j_4(\xi_{3k})]^{-2} \\
& + \frac{125}{49} h f(0) + \frac{75}{15\pi^2} h^3 f''(0) + \frac{15}{8\pi^4} h^5 f^{(4)}(0), \\
& + \frac{37975}{11583} h f(0) + \frac{1225}{99\pi^2} h^3 f''(0) \\
& + \frac{245}{24\pi^4} h^5 f^{(4)}(0) + \frac{35}{16\pi^6} h^7 f^{(6)}(0).
\end{aligned}$$

$n=0$ の場合は台形公式 (3.1.11) と一致する.

注意 4.1.2 公式 (4.1.4) で $f(x) \rightarrow x f(x)$ の置き換えを行い, $\nu \rightarrow$ 整数とすると, 3.1節の反対称積分公式 (3.2.13) が得られることに注意する. まず, 左辺の積分は

$$I_{(\nu)}(f) \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} |x|^{-1} x f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sgn} x f(x) dx = I_{\Lambda}(f)$$

により反対称積分に移行する. 一方, 右辺においては,

$$\begin{aligned}
x f(x) \Big|_{x=0} &= 0, \\
\left(\frac{d}{dx} \right)^{2\lambda} x f(x) \Big|_{x=0} &= 2\lambda f^{(2\lambda+1)}(0) \quad (\lambda = 1, 2, \dots, n) \\
d_{\lambda}^{(\nu)} &\rightarrow \frac{\pi^{2\lambda}}{(2\lambda)!} \sum_{m=0}^{n-\lambda} \frac{(n-m-1)!}{m!} 2^{n-2m} b_{n-\lambda-m}^{(n)} \\
&= \frac{1}{2\lambda} c_{\lambda-1}^{(n)}
\end{aligned}$$

により,

$$\sum_{\lambda=0}^{[\nu]} d_{\lambda}^{(\nu)} h^{2(\lambda+\{\nu\})} f^{(2\lambda)}(0) \rightarrow \sum_{\lambda=1}^n \frac{1}{2\lambda} c_{\lambda-1}^{(n)} \cdot h^{2\lambda} \cdot 2\lambda f^{(2\lambda+1)}(0) = \sum_{\lambda=0}^{n-1} c_{\lambda}^{(n)} h^{2(\lambda+1)} f^{(2\lambda+1)}(0)$$

となるから,

$$Q_{\nu}(f, h) \rightarrow Q_{\Lambda}^{(n)}(f, h).$$

こうして, 反対称積分公式 (3.2.13) が得られることが確かめられる.

4.2 理論誤差解析

位数 ν の Lagrange-Bessel 積分公式 (4.1.4) に対する誤差は, 厳密にはつぎのように評価される:

定理 4.2.1 ν を整数でない正の実数とする. $B(d, |z|^{2(\nu)-1})$ に属する関数 $f(z)$ に対し, 位数 ν の Lagrange-Bessel 数値積分公式 (4.1.4) の誤差はつぎのように複素積分表示できる:

$$(4.2.1) \quad \Delta Q_{\nu}(f, h) \equiv I_{(\nu)}(f) - Q_{\nu}(f, h) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma(d-0)} f(z) \Phi_{\nu}(z, h) dz,$$

ここで

$$(4.2.2) \quad \Phi_\nu(z, h) = \begin{cases} -i\pi z^{2(\nu)-1} \frac{H_\nu^{(1)}(\pi z/h)}{J_\nu(\pi z/h)} & (0 \leq \arg z < \pi), \\ +i\pi z^{2(\nu)-1} \frac{H_\nu^{(2)}(\pi z/h)}{J_\nu(\pi z/h)} & (-\pi \leq \arg z < 0) \end{cases}$$

である。ただし、 $H_\nu^{(1)}(z), H_\nu^{(2)}(z)$ は位数 ν の Hankel 関数であり、Hankel 関数の実部 $J_\nu(z)$ 、虚部 $Y_\nu(z)$ が正の実数値に対して実数値をとるような分枝をとる。

さらにこの誤差はつぎの不等式で評価される：

$$(4.2.3) \quad |\Delta Q_\nu(f, h)| \leq \kappa_\nu(\pi(d-0)/h) \mathcal{N}(f, d-0, |z|^{2(\nu)-1}) \exp\left(-\frac{2\pi d}{h}\right),$$

ここで $\kappa_\nu(M)$ は $M > 0$ で定義された $\Phi_\nu(z, h)$ の評価に関する関数で、次の性質をもつ（補題 4.2.3 参照）：

$$(4.2.4) \quad (1) \text{ 単調減少}, \quad (2) \kappa_\nu(M) < +\infty, \quad (3) \lim_{M \rightarrow +\infty} \kappa_\nu(M) = 1.$$

□

(証明) 証明の筋道は、定理 3.2.2 のそれとはほぼ同様である。

図 4.1 の積分路 $\Gamma_1 + \Gamma_2 + \dots + \Gamma_6$ に沿った積分

$$(4.2.5) \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3 + \Gamma_4 + \Gamma_5 + \Gamma_6} f(z) \Phi_\nu(z, h) dz \\ = - \int_{\Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3} z^{2(\nu)-1} f(z) \frac{H_\nu^{(1)}(\pi z/h)}{2J_\nu(\pi z/h)} dz + \int_{\Gamma_4 + \Gamma_5 + \Gamma_6} z^{2(\nu)-1} f(z) \frac{H_\nu^{(2)}(\pi z/h)}{2J_\nu(\pi z/h)} dz$$

を考える。ただし、図 4.1 において $R_1 = h(N_1 + \nu/2 + 1/4)$, $R_2 = h(N_2 + \nu/2 + 1/4)$ (N_1, N_2 は十分大きい正の整数) とする。

定理 3.2.1 の証明と同様、積分路 $\Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3$ を、図 4.1 に描いた半径 r (十分小さいとする) の小半円：

$$\gamma_k^+(r) = \{z \mid |z + (h/\pi)j_{\nu|k}| = r, \operatorname{Im} z > 0\} \quad (k = -N_2, -(N_2-1), \dots, -1),$$

$$\gamma_0^+(r) = \{z \mid |z| = r, \operatorname{Im} z > 0\},$$

$$\gamma_k^+(r) = \{z \mid |z - (h/\pi)j_{\nu k}| = r, \operatorname{Im} z > 0\} \quad (k = 1, 2, \dots, N_1),$$

および、線分：

$$l_{-N_2-1}^+(r) = [-R_2, -(h/\pi)j_{\nu, N_2} - r],$$

$$l_k^+(r) = [-(h/\pi)j_{\nu|k}| + r, -(h/\pi)j_{\nu, |k|-1} - r] \quad (k = -N_2, \dots, -2),$$

$$l_1^+(r) = [-(h/\pi)j_{\nu, 1} + r, -r],$$

$$l_1^+(r) = [r, (h/\pi)j_{\nu 1} - r],$$

$$l_k^+(r) = [(h/\pi)j_{\nu, k-1} + r, (h/\pi)j_{\nu k} - r] \quad (k = 2, \dots, N_1),$$

$$l_{N_1+1}^+(r) = [(h/\pi)j_{\nu, N_1} + r, R_1],$$

からなる積分路 $\Gamma^+(r)$ に変形する：

$$(4.2.6) \quad - \int_{\Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3} z^{2(\nu)-1} f(z) \frac{H_\nu^{(1)}(\pi z/h)}{2J_\nu(\pi z/h)} dz$$

¹線分 $l_k^+(r)$ ($k = -N_2 - 1, -N_2, \dots, -1$) は、負の実軸に沿って複素平面を切ったときの切口の上岸で考える。

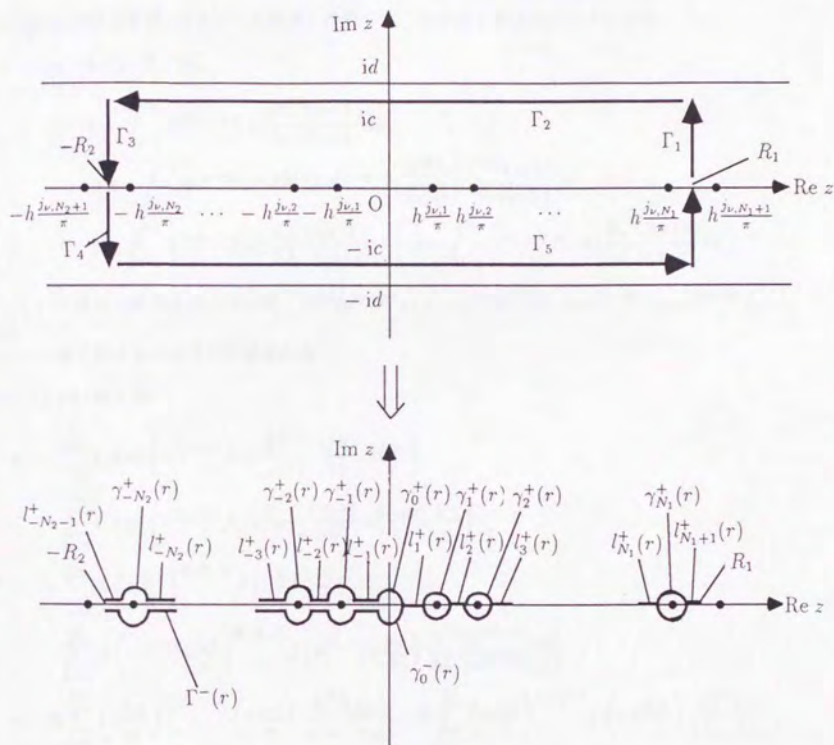


図 4.1 定理 4.2.1 の証明に用いる積分路 $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4, \Gamma_5, \Gamma_6$; $\gamma_k^+(r)$ ($k = -N_2, -N_2 + 1, \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots, N_1$), $l_k^+(r)$ ($k = -N_2 - 1, -N_2, \dots, -2, -1, 1, 2, \dots, N_1, N_1 + 1$), $\Gamma^-(r)$

$$\begin{aligned}
&= - \int_{\Gamma^+(r)} z^{2\{\nu\}-1} f(z) \frac{H_\nu^{(1)}(\pi z/h)}{2J_\nu(\pi z/h)} dz \\
&= - \sum_{\substack{k=-N_2 \\ k \neq 0}}^{N_1+1} \int_{\gamma_k^+(r)} z^{2\{\nu\}-1} f(z) \frac{H_\nu^{(1)}(\pi z/h)}{2J_\nu(\pi z/h)} dz - \sum_{\substack{k=-N_2 \\ k \neq 0}}^{N_1} \int_{\gamma_k^+(r)} z^{2\{\nu\}-1} f(z) \frac{H_\nu^{(1)}(\pi z/h)}{2J_\nu(\pi z/h)} dz \\
&\quad - \int_{\gamma_0^+(r)} z^{2\{\nu\}-1} f(z) \frac{H_\nu^{(1)}(\pi z/h)}{2J_\nu(\pi z/h)} dz.
\end{aligned}$$

この右辺を各項ごとに $r \downarrow 0$ とした極限を計算する。まず第 1 項は次のようになる：

$$\begin{aligned}
&\lim_{r \downarrow 0} ((4.2.6) \text{ 第 1 項}) \\
&= \text{p.v.} \int_0^{R_1} x^{2\{\nu\}-1} f(x) \frac{H_\nu^{(1)}(\pi x/h)}{2J_\nu(\pi x/h)} dx \\
&\quad + \text{p.v.} \int_0^{R_2} (e^{(\pi-0)i} x)^{2\{\nu\}-1} f(e^{(\pi-0)i} x) \frac{H_\nu^{(1)}(e^{(\pi-0)i} \pi x/h)}{2J_\nu(e^{(\pi-0)i} \pi x/h)} dx \\
&= \text{p.v.} \int_0^{R_1} x^{2\{\nu\}-1} f(x) \frac{H_\nu^{(1)}(\pi x/h)}{2J_\nu(\pi x/h)} dx + \text{p.v.} \int_0^{R_2} x^{2\{\nu\}-1} f(-x) \frac{H_\nu^{(2)}(\pi x/h)}{2J_\nu(\pi x/h)} dx,
\end{aligned}$$

ただし、2 番目の等号変形において、 $H_\nu^{(1)}(e^{(\pi-0)i} z) = -e^{i\pi\nu} H_\nu^{(2)}(z)$ 、 $J_\nu(e^{(\pi-0)i} z) = e^{(\pi-0)i} J_\nu(z)$ を用いた。

次に、第 2 項は次のように評価される：

$$\begin{aligned}
&\lim_{r \downarrow 0} ((4.2.6) \text{ 第 2 項}) \\
&= - \sum_{k=1}^{N_1} \pi i \text{Res} \left(z^{2\{\nu\}-1} f(z) \frac{H_\nu^{(1)}(\pi z/h)}{J_\nu(\pi z/h)}, h \frac{j_{\nu k}}{\pi} \right) \\
&\quad - \sum_{k=1}^{N_2} \pi i \text{Res} \left(z^{2\{\nu\}-1} f(z) \frac{H_\nu^{(1)}(\pi z/h)}{J_\nu(\pi z/h)}, e^{(\pi-0)i} h \frac{j_{\nu k}}{\pi} \right) \\
&= - \sum_{k=1}^{N_1} i h \left(h \frac{j_{\nu k}}{\pi} \right)^{2\{\nu\}-1} f \left(h \frac{j_{\nu k}}{\pi} \right) \frac{H_\nu^{(1)}(j_{\nu k})}{2J_\nu'(j_{\nu k})} \\
&\quad - \sum_{k=1}^{N_2} i h \left(e^{(\pi-0)i} h \frac{j_{\nu k}}{\pi} \right)^{2\{\nu\}-1} f \left(e^{(\pi-0)i} h \frac{j_{\nu k}}{\pi} \right) \frac{H_\nu^{(1)}(e^{(\pi-0)i} j_{\nu k})}{2J_\nu'(e^{(\pi-0)i} j_{\nu k})} \\
&= i h \sum_{k=1}^{N_1} \left(h \frac{j_{\nu k}}{\pi} \right)^{2\{\nu\}-1} f \left(h \frac{j_{\nu k}}{\pi} \right) \frac{H_\nu^{(1)}(j_{\nu k})}{2J_{\nu+1}(j_{\nu k})} - i h \sum_{k=1}^{N_2} \left(h \frac{j_{\nu k}}{\pi} \right)^{2\{\nu\}-1} f \left(-h \frac{j_{\nu k}}{\pi} \right) \frac{H_\nu^{(2)}(j_{\nu k})}{2J_{\nu+1}(j_{\nu k})} \\
&= -h \sum_{k=1}^{N_1} \left(h \frac{j_{\nu k}}{\pi} \right)^{2\{\nu\}-1} f \left(h \frac{j_{\nu k}}{\pi} \right) \frac{Y_\nu(j_{\nu k})}{J_{\nu+1}(j_{\nu k})} - h \sum_{k=1}^{N_2} \left(h \frac{j_{\nu k}}{\pi} \right)^{2\{\nu\}-1} f \left(-h \frac{j_{\nu k}}{\pi} \right) \frac{Y_\nu(j_{\nu k})}{J_{\nu+1}(j_{\nu k})} \\
&= -h \sum_{k=1}^{N_1} \left(h \frac{j_{\nu k}}{\pi} \right)^{2\{\nu\}-1} f \left(h \frac{j_{\nu k}}{\pi} \right) \frac{1}{\pi j_{\nu k} (J_{\nu+1}(j_{\nu k}))^2} \\
&\quad - h \sum_{k=1}^{N_2} \left(h \frac{j_{\nu k}}{\pi} \right)^{2\{\nu\}-1} f \left(-h \frac{j_{\nu k}}{\pi} \right) \frac{1}{\pi j_{\nu k} (J_{\nu+1}(j_{\nu k}))^2}.
\end{aligned}$$

ここで、3 番目の等号変形において Hankel 関数の定義 $H_\nu^{(1)}(z) = J_\nu(z) + iY_\nu(z)$ 、 $H_\nu^{(2)}(z) = J_\nu(z) - iY_\nu(z)$ 、と $H_\nu^{(1)}(e^{(\pi-0)i} z) = -e^{-i\pi\nu} H_\nu^{(2)}(z)$ から導かれる $H_\nu^{(1)}(j_{\nu k}) = iY_\nu(j_{\nu k})$ 、 $H_\nu^{(1)}(e^{(\pi-0)i} j_{\nu k}) = 4$

番目の等号変形において Lommel の等式 $J_\nu(z)Y_{\nu+1}(z) - J_{\nu+1}(z)Y_\nu(z) = -2/(\pi z)$ から導かれる $Y_\nu(j_{\nu k}) = 2/(\pi j_{\nu k} J_{\nu+1}(j_{\nu k}))$ を用いた。

最後に第3項は、 $H_\nu^{(1)} = \text{icosec } \pi\nu (e^{-i\pi\nu} J_\nu - J_{-\nu})$ を用いて、

$$\begin{aligned} \lim_{r \downarrow 0} ((4.2.6) \text{ 第3項}) \\ &= -\frac{i}{2} \text{cosec } \pi\nu \times \lim_{r \downarrow 0} \left(e^{-i\pi\nu} \int_{\gamma_0^+(r)} z^{2(\nu)-1} f(z) dz - \int_{\gamma_0^-(r)} z^{2(\nu)-1} f(z) \frac{J_{-\nu}(\pi z/h)}{J_\nu(\pi z/h)} dz \right) \\ &= \frac{i}{2} \text{cosec } \pi\nu \times \lim_{r \downarrow 0} \int_{\gamma_0^+(r)} z^{2(\nu)-1} f(z) \frac{J_{-\nu}(\pi z/h)}{J_\nu(\pi z/h)} dz \end{aligned}$$

と評価できる。

以上まとめ、結局

$$\begin{aligned} (4.2.7) \quad & \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3} f(z) \Phi_\nu(z, h) dz \\ &= \text{p.v.} \int_0^{R_1} x^{2(\nu)-1} f(x) \frac{H_\nu^{(1)}(\pi x/h)}{2J_\nu(\pi x/h)} dx + \text{p.v.} \int_0^{R_2} x^{2(\nu)-1} f(-x) \frac{H_\nu^{(2)}(\pi x/h)}{2J_\nu(\pi x/h)} dx \\ &\quad - h \sum_{k=1}^{N_1} \left(h \frac{j_{\nu k}}{\pi} \right)^{2(\nu)-1} f\left(h \frac{j_{\nu k}}{\pi}\right) \frac{1}{\pi j_{\nu k} (J_{\nu+1}(j_{\nu k}))^2} \\ &\quad - h \sum_{k=1}^{N_1} \left(h \frac{j_{\nu k}}{\pi} \right)^{2(\nu)-1} f\left(-h \frac{j_{\nu k}}{\pi}\right) \frac{1}{\pi j_{\nu k} (J_{\nu+1}(j_{\nu k}))^2} \\ &\quad + \frac{i}{2} \text{cosec } \pi\nu \times \lim_{r \downarrow 0} \int_{\gamma_0^+(r)} z^{2(\nu)-1} f(z) \frac{J_{-\nu}(\pi z/h)}{J_\nu(\pi z/h)} dz \end{aligned}$$

を得る。

(4.2.5) 右辺第2項についても第1項と同様の変形を行い、 $r \downarrow 0$ とすることにより、つぎの式を得る：

$$\begin{aligned} (4.2.8) \quad & \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_4 + \Gamma_5 + \Gamma_6} f(z) \Phi_\nu(z, h) dz \\ &= \text{p.v.} \int_0^{R_1} x^{2(\nu)-1} f(x) \frac{H_\nu^{(2)}(\pi x/h)}{2J_\nu(\pi x/h)} dx + \text{p.v.} \int_0^{R_2} x^{2(\nu)-1} f(-x) \frac{H_\nu^{(1)}(\pi x/h)}{2J_\nu(\pi x/h)} dx \\ &\quad - h \sum_{k=1}^{N_1} \left(h \frac{j_{\nu k}}{\pi} \right)^{2(\nu)-1} f\left(h \frac{j_{\nu k}}{\pi}\right) \frac{1}{\pi j_{\nu k} (J_{\nu+1}(j_{\nu k}))^2} \\ &\quad - h \sum_{k=1}^{N_1} \left(h \frac{j_{\nu k}}{\pi} \right)^{2(\nu)-1} f\left(-h \frac{j_{\nu k}}{\pi}\right) \frac{1}{\pi j_{\nu k} (J_{\nu+1}(j_{\nu k}))^2} \\ &\quad + \frac{i}{2} \text{cosec } \pi\nu \times \lim_{r \downarrow 0} \int_{\gamma_0^-(r)} f(z) \frac{J_{-\nu}(\pi z/h)}{J_\nu(\pi z/h)} dz, \end{aligned}$$

ただし $\gamma_0^-(r)$ は半円：

$$\{z \mid |z| = r, \quad \text{Im } z < 0\}$$

である。

最後に (4.2.7), (4.2.8) を寄せ集めて、

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3 + \Gamma_4 + \Gamma_5 + \Gamma_6} f(z) \Phi_\nu(z, h) dz \\ &= \int_0^{R_1} x^{2(\nu)-1} f(x) dx + \int_0^{R_2} x^{2(\nu)-1} f(-x) dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -h \sum_{k=1}^{N_1} \left(h \frac{j_{\nu k}}{\pi}\right)^{2\{\nu\}-1} f\left(h \frac{j_{\nu k}}{\pi}\right) \frac{2}{\pi j_{\nu k} (J_{\nu+1}(j_{\nu k}))^2} \\
& -h \sum_{k=1}^{N_2} \left(h \frac{j_{\nu k}}{\pi}\right)^{2\{\nu\}-1} f\left(h \frac{j_{\nu k}}{\pi}\right) \frac{2}{\pi j_{\nu k} (J_{\nu+1}(j_{\nu k}))^2} \\
& + \frac{i}{2} \operatorname{cosec} \pi \nu \times \lim_{r \rightarrow 0} \oint_{\gamma_0(r)} z^{2\{\nu\}-1} f(z) \frac{J_{-\nu}(\pi z/h)}{J_{\nu}(\pi z/h)} dz.
\end{aligned}$$

を得る。ただし、 $\gamma_0(r)$ は原点中心、半径 r の反時計周りの円からなる積分路である。

右辺第5項の積分が問題となるが、これは $f(z)J_{-\nu}(\pi z/h)/J_{\nu}(\pi z/h)$ が $z=0$ 近傍で

$$\begin{aligned}
& z^{2\{\nu\}-1} f(z) \frac{J_{-\nu}(\pi z/h)}{J_{\nu}(\pi z/h)} \\
& = z^{2\{\nu\}-1} \left\{ \sum_{l_1=0}^{\infty} \frac{f^{(l_1)}(0)}{l_1!} z^{l_1} \right\} \left\{ \frac{\sin \pi \nu}{\pi} \sum_{l_2=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\nu-l_2)}{l_2!} \left(\frac{\pi z}{2h}\right)^{2l_2-\nu} \right\} \left\{ \sum_{l_3=0}^{\infty} b_{l_3}^{(\nu)} \left(\frac{\pi z}{h}\right)^{2l_3-\nu} \right\} \\
& = \frac{\sin \pi \nu}{\pi} \sum_{l_1=0}^{\infty} \sum_{l_2=0}^{\infty} \sum_{l_3=0}^{\infty} \frac{f^{(l_1)}(0)}{l_1!} \frac{\Gamma(\nu-l_2)}{l_2!} 2^{\nu-2l_2} b_{l_3}^{(\nu)} \left(\frac{h}{\pi}\right)^{2(\nu-l_2-l_3)} z^{l_1+2l_2+2l_3-2\{\nu\}-1}
\end{aligned}$$

と展開できることに注意すれば、

$$\begin{aligned}
& \frac{i}{2} \operatorname{cosec} \pi \nu \times \lim_{r \rightarrow 0} \oint_{\gamma_0(r)} f(z) \frac{J_{-\nu}(\pi z/h)}{J_{\nu}(\pi z/h)} dz \\
& = -\pi \operatorname{cosec} \pi \nu \operatorname{Res} \left(f(z) \frac{J_{-\nu}(\pi z/h)}{J_{\nu}(\pi z/h)}, 0 \right) \\
& = - \sum_{\substack{l_1, l_2, l_3 \\ l_1+2l_2+2l_3=2\{\nu\}}} \frac{f^{(l_1)}(0)}{l_1!} \frac{\Gamma(\nu-l_2)}{l_2!} 2^{\nu-2l_2} b_{l_3}^{(\nu)} \left(\frac{h}{\pi}\right)^{2(\nu-l_2-l_3)} \\
& = - \sum_{\lambda=0}^{[\nu]} \frac{f^{(2\lambda)}(0)}{(2\lambda)!} \left(\frac{h}{\pi}\right)^{2(\lambda+\{\nu\})} \sum_{l_2=0}^{[\nu]-\lambda} \frac{\Gamma(\nu-l_2)}{l_2!} 2^{\nu-2l_2} b_{[\nu]-\lambda-l_2}^{(\nu)} \\
& = - \sum_{\lambda=0}^{[\nu]} d_{\lambda}^{(\nu)} h^{2(\lambda+\{\nu\})} f^{(2\lambda)}(0)
\end{aligned}$$

と計算される。

ゆえに、結局つぎの等式を得る：

$$\begin{aligned}
(4.2.9) \quad & \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1+\Gamma_2+\Gamma_3+\Gamma_4+\Gamma_5+\Gamma_6} f(z) \Phi_{\nu}(z, h) dz \\
& = \int_{-R_2}^{-R_1} |x|^{2\{\nu\}-1} f(x) dx - h \sum_{k=1}^{N_1} \left(h \frac{j_{\nu k}}{\pi}\right)^{2\{\nu\}-1} f\left(h \frac{j_{\nu k}}{\pi}\right) \frac{2}{\pi j_{\nu k} (J_{\nu+1}(j_{\nu k}))^2} \\
& - h \sum_{k=1}^{N_2} \left(h \frac{j_{\nu k}}{\pi}\right)^{2\{\nu\}-1} f\left(-h \frac{j_{\nu k}}{\pi}\right) \frac{2}{\pi j_{\nu k} (J_{\nu+1}(j_{\nu k}))^2} - \sum_{\lambda=0}^{[\nu]} d_{\lambda}^{(\nu)} h^{2(\lambda+\{\nu\})} f^{(2\lambda)}(0).
\end{aligned}$$

式(4.2.9)において $N_1 \rightarrow +\infty$ (すなわち $R_1 \rightarrow +\infty$)、 $N_2 \rightarrow +\infty$ (すなわち $R_2 \rightarrow +\infty$) の極限をとる、このとき右辺は数値積分誤差 $\Delta Q_{\nu}(f, h)$ に移行する。一方、左辺の積分においては、つぎの2つのこと

- (a) $N_1 \rightarrow \infty$ (すなわち $R_1 \rightarrow \infty$) のとき、 $\Gamma_1 + \Gamma_6$ に沿っての積分が 0 に収束し、 $N_2 \rightarrow \infty$ (すなわち $R_2 \rightarrow \infty$) のとき、 $\Gamma_3 + \Gamma_4$ に沿っての積分が 0 に収束する。

(b) $N_1, N_2 \rightarrow \infty$ (すなわち $R_1, R_2 \rightarrow \infty$) のとき, $\Gamma_2 + \Gamma_5$ に沿っての積分が存在する.

を示さなければならないが, これはつぎの2つの補題 4.2.2, 4.2.3 を用いれば, 定理 3.2.1 の証明と同様にして示すことが出来る:

補題 4.2.2 ν を整数でない正の実数とする. 任意の $\varepsilon > 0$ に対し正の整数 N を十分大きくとると, $|\operatorname{Re} z| = \pi(N + \nu/2 + 1/4)$ において

$$|\Phi_\nu(z, \pi)| \leq (1 + \varepsilon) 2\pi |z|^{2(\nu)-1} e^{-2|\operatorname{Im} z|}$$

が成り立つ.

□

補題 4.2.3 ν を整数でない正の実数とする. 任意の $M > 0$ に対して, 定数 $\kappa_\nu(M)$ を

$$\kappa_\nu(M) = \sup_{|\operatorname{Im} z| \geq M} \frac{|\Phi_\nu(z, \pi)|}{2\pi |z|^{2(\nu)-1} e^{-2|\operatorname{Im} z|}}$$

と定義するとき,

$$(1) \kappa_\nu^{(n)}(M) \text{ は単調減少}, \quad (2) \kappa_\nu^{(n)}(M) < +\infty, \quad (3) \lim_{M \rightarrow \infty} \kappa_\nu^{(n)}(M) = 1$$

が成り立つ.

□

(証明は前章の補題 3.4.3, 3.4.4 と同様にして示せるので省略.)

よって,

$$(4.2.10) \quad \Delta Q_\nu(f, h) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma(c)} f(z) \Phi_\nu(z, h) dz$$

を得, $c \rightarrow d=0$ として式 (4.2.1) を得る.

また, 定理 3.2.1 の証明と同様にして, 不等式

$$|\Delta Q_\nu(f, h)| \leq \kappa_\nu(\pi c/h) \mathcal{N}(f, c, |z|^{2(\nu)-1}) \exp\left(-\frac{\pi c}{h}\right)$$

を得るから, $c \rightarrow d=0$ として不等式 (4.2.3) を得る.

■

4.3 数値実験

つぎの2つのべき的特異性をもつ積分を Lagrange-Bessel 数値積分公式 (4.1.4) で計算し, 公式の性能を調べた:

$$(4.3.1) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} |x|^{-\pi/4} \exp(-\cosh x) dx = 3.45000 \ 39204 \ 0051 \dots,$$

$$(4.3.2) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} |x|^{-0.99} \exp(-\cosh x) dx = 73.57206 \ 67381 \ 855 \dots.$$

(4.3.1) に対しては $\{\nu\} = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{8}$, (4.3.2) に対しては $\{\nu\} = 0.005$ と置けばよい. また, いずれの被積分関数も $B(d, |z|^{2(\nu)-1})$ ($d < \frac{\pi}{2}$) に属している.

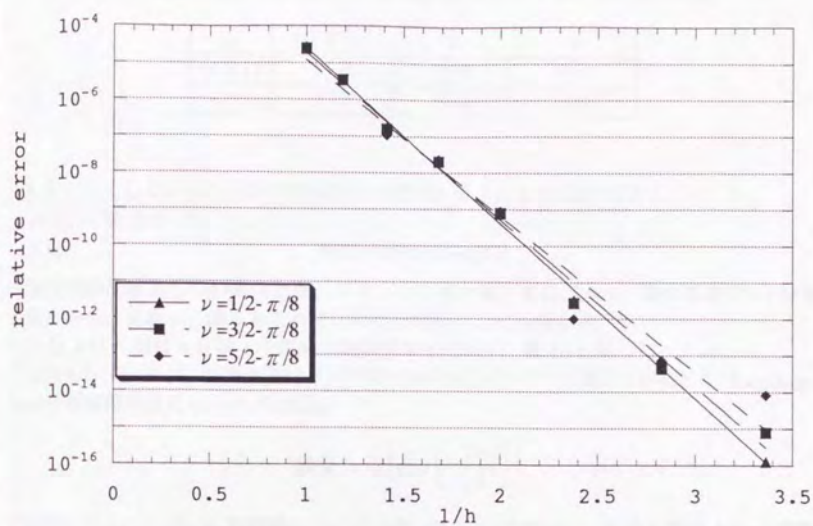


図 4.2 積分 (4.3.1) に対する Lagrange-Bessel 数値積分公式 (4.1.4) の誤差の振る舞い.

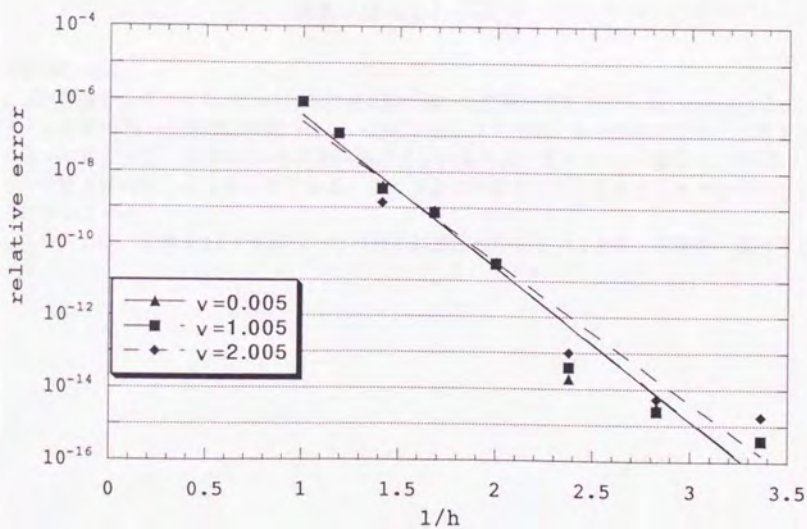


図 4.3 積分 (4.3.2) に対する Lagrange-Bessel 数値積分公式 (4.1.4) の誤差の振る舞い.

表 4.1 数値実験から見積もった誤差評価 (4.3.3) における係数 c の値.

$[\nu]$	0	1	2
(4.3.1)	11.0	10.5	9.83
(4.3.2)	9.72	9.69	8.94

h を小さくしていったときの相対誤差の変化を図 4.2, 4.3 に載せてある.
いずれも誤差が

$$(4.3.3) \quad \text{誤差} = O[\exp(-c/h)]$$

で指数関数的減衰していることが, グラフから分かる. また, ($\{\nu\}$ 一定のままで) ν の値を変えても, 係数 c の値にあまり変化は見られないことも分かる.

式 (4.3.3) における係数 c の値を実験結果から求めて, 表 4.1 に記した.

定理 4.2.1 によれば, 被積分関数 $f(z)$ が関数族 $B(d, |z|^{2(\nu)-1})$ に属しているとき, Lagrange-Bessel 数値積分公式 (4.1.4) の誤差は

$$\text{誤差} = O \left[\exp \left(-\frac{2\pi d}{h} \right) \right]$$

で評価される. 一方, 反対称積分公式 (3.2.5), (3.2.13) の誤差は, 被積分関数 $f(z)$ が関数族 $B(d)$ に属しているとき, 同じオーダー

$$\text{誤差} = O \left[\exp \left(-\frac{2\pi d}{h} \right) \right]$$

で評価される.

反対称積分公式 (3.2.5), (3.2.13) の数値実験で用いた被積分関数 $f(z) = \sinh z \exp(-\cosh z)$ と, この節で用いた被積分関数 $f(z) = \exp(-\cosh z)$ とでは, d の値はほぼ同じと考えられる. したがって, 定理 4.2.1 の誤差評価が正しいならば, 表 4.1 の c の値は 3.3.2 節表 3.3 の c の値とほぼ同じになるはずである. そこで 2 つの表を比べて見ると, まさにそのとおりになっている.

このことは, 定理 4.2.1 で見積もった理論的誤差評価が正しいことを, 実験的に裏付けている.

第 5 章

数値積分公式が厳密な積分値を与える場合

この章では、反対称積分 $I_A(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sgn} x f(x) dx$, べきの特異性をもつ積分 $I_{\{\nu\}}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} |x|^{2\{\nu\}-1} f(x) dx$ に対して Lagrange-Bessel 数値積分公式が厳密な積分値を与えるような被積分関数のクラスについて議論する.

5.1 主要結果

定理 5.1.1 関数 $f(z)$ は次の条件 (a), (b) を満たすとする:

(a) 積分 $I_A(f)$ が存在する.

(b) $f(z)$ は指数型 A の整関数である, すなわち, 任意の $\epsilon > 0$ に対し正の定数 C_ϵ が存在し

$$(5.1.1) \quad |f(z)| \leq C_\epsilon e^{(A+\epsilon)|z|}$$

が成立する.

このとき, $h < 2\pi/A$ に対し $I_A(f) = Q_A^{(n)}(f, h)$ が成立する. □

定理 5.1.2 ν は整数でない正の実数とする. 関数 $f(z)$ は次の条件 (a), (b) を満たすとする:

(a) 積分 $I_{\{\nu\}}(f)$ が存在する ($\{\nu\}$ は ν の小数部分).

(b) $f(z)$ は指数型 A の整関数である.

このとき $h < 2\pi/A$ に対し, $I_{\{\nu\}}(f) = Q_\nu(f, h)$ が成立する. □

次の節で, 定理の証明を与える.

実は, Grozev and Rahman[6] も定理 5.1.2 とほぼ同じ結果を与えている. 彼等はつぎの方針に沿って証明を行っている:

- (a) 定理 5.1.2 の仮定をみたす関数 $f(x)$ に対し, $\pm h j_{\nu k} / \pi (k = 1, 2, \dots)$ を標本点とする Hermite 補間公式 (標本点で $f(x)$ の真値を与え, かつその 1 階導関数が $f'(x)$ の真値を与えるような公式) がもとの関数 $f(x)$ に一致することを証明する.
- (b) 前項で得た等式 $f(x) = (f(x) \text{ に対する補間公式})$ の両辺を積分し, 等式 (積分の真値) = (数値積分公式) を導出する.
- (c) 前項で補間公式を積分する際, 無限和の項別積分を行うことになるが, それが正当であることを証明する.

これに対し本論文における証明は, 数値積分公式 $Q_\nu(f, h)$ の誤差評価に用いた誤差の複素積分表示 (4.2.1)

$$I_{\{\nu\}}(f) - Q_\nu(f, h) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma(d=0)} f(z) \Phi_\nu(z, h) dz$$

を利用し, 複素積分を評価して右辺 = 0 を導くという方法をとっている. この証明法は上の Grozev and Rahman の証明に比べると簡明で, 見通しのよいものとなっている.

5.2 証明

ここでは, 定理 5.1.2, すなわち, べきの特異性を持つ積分の場合のみ証明する. 定理 5.1.1 の証明もほぼ同様に出来る.

(定理 5.1.2 の証明) まず, つぎの等式に注意する:

$$(5.2.1) \quad \lim_{\rho \rightarrow 0^+} \left(\int_{\rho}^{R_1} + \int_{-R_2}^{-\rho} \right) |x|^{2\{\nu\}-1} f(x) dx - Q_\nu(f, h, N_1, N_2) \\ = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3 + \Gamma_4 + \Gamma_5 + \Gamma_6} f(z) \Phi_\nu(z, h) dz,$$

ここで, N_1, N_2 は正の整数, $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_6$ は図 5.2 に示した積分路 (ただし, $R_1 = h(N_1 + \nu/2 + 1/4)$, $R_2 = h(N_2 + \nu/2 + 1/4)$ とする),

$$(5.2.2) \quad Q_\nu(f, h, N_1, N_2) \\ = h \sum_{k=1}^{N_1} \left(h \frac{j_{\nu k}}{\pi} \right)^{2\{\nu\}-1} f \left(h \frac{j_{\nu k}}{\pi} \right) \frac{2}{\pi j_{\nu k} (J_{\nu+1}(j_{\nu k}))^2} \\ + h \sum_{k=1}^{N_2} \left(h \frac{j_{\nu k}}{\pi} \right)^{2\{\nu\}-1} f \left(-h \frac{j_{\nu k}}{\pi} \right) \frac{2}{\pi j_{\nu k} (J_{\nu+1}(j_{\nu k}))^2} + \sum_{\lambda=0}^{[\nu]} d_\lambda^{(\nu)} h^{2(\lambda+\{\nu\})} f^{(2\lambda)}(0)$$

である.

つぎに, (5.2.1) 右辺の積分の大きさを評価したいが, そのためには, $|f(z)|, |\Phi_\nu(z, h)|$ の複素平面上での振る舞いについて知る必要がある.

$f(z)$ に対しては次の補題が成立する:

補題 5.2.1 関数 $f(z)$ は定理 5.1.2 の仮定を満たすとする. このとき, 任意の $\delta > 0$ に対し $\lim_{x \rightarrow +\infty} g_\delta(x) = 0$ なる関数 $g_\delta(x)$ が存在し,

$$(5.2.3) \quad |z^{2\{\nu\}-1} f(z)| \leq g_\delta(|z|) e^{(A+\delta)|\operatorname{Im} z|}$$

が成り立つ.

□

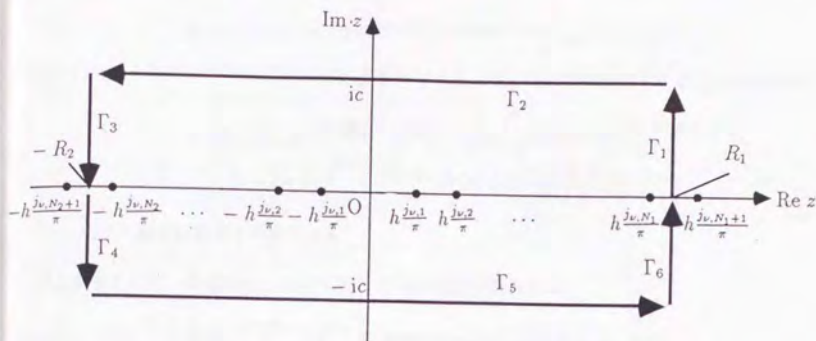


図 5.1 定理 5.1.2 の証明のための積分路 $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4, \Gamma_5, \Gamma_6$.

証明は後に与える.

続いて, $\Phi_\nu(z, h)$ に対しては, 補題 4.2.2, 4.2.3 より, つぎの 2 つの不等式が成り立つ:

(a) 任意の $\epsilon > 0$ に対し十分 N_1, N_2 を大きくとれば, $z \in \Gamma_1, \Gamma_3, \Gamma_4, \Gamma_6$ に対し,

$$(5.2.4) \quad |\Phi_\nu(z, h)| \leq (1 + \epsilon) 2\pi |z|^{2(\nu)-1} \exp\left(-\frac{2\pi}{h} |\operatorname{Im} z|\right).$$

(b) $z \in \Gamma_2, \Gamma_5$ に対して,

$$(5.2.5) \quad |\Phi_\nu(z, h)| \leq 2\pi \kappa_\nu(\pi c/h) |z|^{2(\nu)-1} \exp\left(-\frac{2\pi}{h} |\operatorname{Im} z|\right).$$

ここで $\kappa_\nu(M)$ は $M > 0$ で定義され, 次の (1), (2), (3) をみたす関数である:

$$(1) \kappa_\nu(M) \text{ は単調減少, } (2) \kappa_\nu(M) < +\infty, \quad (3) \lim_{M \rightarrow +\infty} \kappa_\nu(M) = 1.$$

$\Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_6 + \Gamma_1, \Gamma_3 + \Gamma_4$ 上の積分をそれぞれ評価する.

[Γ_2, Γ_5 上の積分の評価]

補題 5.2.1 と不等式 (5.2.5) を用いる.

任意の $\epsilon > 0$ に対し Γ_2, Γ_5 を十分遠くに遠ざけ,

$$|g_\delta(|z|)| \leq \epsilon, \quad \kappa_\nu((\pi/h)|\operatorname{Im} z|) \leq 1 + \epsilon \quad \text{on } \Gamma_2, \Gamma_5$$

が成り立つようにする. ここで $\delta > 0$ は $A + \delta < 2\pi/h$ となるようにとる. このとき (5.2.3), (5.2.5) により, Γ_2 上の積分は次のように評価される:

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_2} f(z) \Phi_\nu(z, h) dz \right| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_2} 2\pi \epsilon (1 + \epsilon) e^{(A+\delta-2\pi/h)c} |dz| \\ &\leq \epsilon (1 + \epsilon) (R_1 + R_2) e^{(A+\delta-2\pi/h)c}. \end{aligned}$$

Γ_5 上の積分の評価も同様である.

[$\Gamma_6 + \Gamma_1, \Gamma_3 + \Gamma_4$ 上の積分の評価]

補題 5.2.1 と不等式 (5.2.4) を用いる.

N_1, N_2 を十分大きくとり, $\Gamma_1, \Gamma_3, \Gamma_4, \Gamma_6$ 上で

$$|\Phi_\nu(z, h)| \leq (1 + \epsilon) 2\pi |z|^{2\{\nu\}-1} e^{-(2\pi/h)|\operatorname{Im} z|}, \quad |g_\epsilon(|z|)| \leq \epsilon$$

が成り立つようにとる. このとき (5.2.3), (5.2.4) により, $\Gamma_6 + \Gamma_1$ 上の積分は次のように評価される:

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_6 + \Gamma_1} f(z) \Phi_\nu(z, h) dz \right| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-c}^c 2\pi \epsilon (1 + \epsilon) e^{(A+\delta-2\pi/h)|y|} dy \\ &\leq (1 + \epsilon) \int_{-\infty}^{\infty} e^{(A+\delta-2\pi/h)c} dy \leq \frac{\epsilon(1 + \epsilon)}{2\pi/h - A - \delta}. \end{aligned}$$

$\Gamma_3 + \Gamma_4$ 上の積分の評価も同様である.

以上をまとめて, 積分誤差 (5.2.1) に対して次の評価が得られる:

$$\begin{aligned} (5.2.6) \quad \left| \lim_{\rho \rightarrow 0^+} \left(\int_{\rho}^{R_1} + \int_{-R_2}^{-\rho} \right) |x|^{2\{\nu\}-1} f(x) dx - Q_\nu(f, h, N_1, N_2) \right| \\ \leq 2\epsilon(1 + \epsilon)(R_1 + R_2) e^{(A+\delta-2\pi/h)c} + \frac{2\epsilon(1 + \epsilon)}{2\pi/h - A - \delta}. \end{aligned}$$

ここで (5.2.6) においてさらに $c \rightarrow \infty$ とし, その後 $N_1, N_2 \rightarrow \infty$ (つまり $R_1, R_2 \rightarrow \infty$) とすることにより,

$$|I_A(f) - Q_\nu(f, h)| \leq \frac{2\epsilon(1 + \epsilon)}{2\pi/h - A - \delta}.$$

が得られる.

$\epsilon > 0$ は任意にとれる, したがって右辺はいくらでも小さくできるから, $I_A(f) = Q_\nu(f, h)$ が結論される.

■

5.3 補題の証明

この節では, 5.2 節の証明で用いられた補題 5.2.1 の証明を行う.

この証明はよく知られた Phragmén-Lindelöf の定理¹ の応用問題である.

まず, 次の二つの補題を用意する. いずれも Phragmén-Lindelöf の定理のちょっとした変形である. 証明も本来の Phragmén-Lindelöf の定理と全く同様にして出来る (ので省略).

補題 5.3.1 領域 D を

$$D = \{ re^{i\theta} \mid r > \rho, \quad \theta_1 < \theta < \theta_2 \}$$

により定義する. ここで, ρ, θ_1, θ_2 は $\rho > 0, \quad \theta_2 > \theta_1$ なる定数とする.

関数 $F(z)$ は次の条件を満たすとする:

- (i) $F(z)$ は D で正則, \overline{D} で連続.
- (ii) 境界 ∂D 上で $|F(z)| \leq M$ が成立.
- (iii) D において全偏角について一様に $F(z) = O(e^{r^\beta})$ ($\beta < \alpha$) が成り立つ. ただし, α は $\pi/\alpha = \theta_2 - \theta_1$ により定まる定数とする.

¹例えば [28] を参照すること.

このとき、領域 D 全体に渡って $|F(z)| \leq M$ が成立する。 □

補題 5.3.2 D は補題 5.3.1 と同じ領域とする。

関数 $F(z)$ は次の条件を満たすとする：

(a) $F(z)$ は D で正則、 \overline{D} で連続かつ有界。

(b) $r \rightarrow +\infty$ のとき $F(re^{i\theta_1}), F(re^{i\theta_2}) \rightarrow a$ 。

このとき、領域 D において全偏角について一様に $F(z) \rightarrow a$ ($z \rightarrow \infty$) が成り立つ。 □

上の二つの補題から直ちに次の補題が導かれる。この補題が補題 5.2.1 の証明に用いられる。

補題 5.3.3 領域 D は補題 5.3.1 と同じ領域とする。ただし、 $\alpha > 1$ (すなわち、中心角 $\pi/\alpha < \pi$) とすることにする。

関数 $F(z)$ は次の条件を満たすとする：

(a) $F(z)$ は D で正則、指数型、 \overline{D} で連続。

(b) $r \rightarrow +\infty$ のとき $F(re^{i\theta_1}), F(re^{i\theta_2}) \rightarrow a$ 。

このとき領域 D において全偏角について一様に $F(z) \rightarrow a$ ($z \rightarrow \infty$) が成り立つ。 □

(証明) 仮定から補題 5.3.1 により $F(z)$ は \overline{D} で有界。よって、補題 5.3.2 により \overline{D} において全偏角について一様に $F(z) \rightarrow a$ ($z \rightarrow \infty$) がいえる。 ■

ここで補題 5.2.1 の証明に入る。

領域 D_1 を、第 1 象限から原点近傍 $|z| \leq \rho$ を除いた領域とする。そして D_1 上で関数 $F_1(z)$ を

$$F_1(z) = z^{2(\nu)-1} f(z) e^{i(A+\delta)z}$$

により定義する。これは領域 D_1 で正則、指数型である。

さらに、積分 $\int_{-\infty}^{\infty} |x|^{2(\nu)-1} f(x) dx$ が存在することから、後に示すように、

$$(5.3.1) \quad |x|^{2(\nu)-1} f(x) \rightarrow 0 \quad \text{as } x \rightarrow \pm\infty$$

が言えるから、正の実軸上で $\lim_{x \rightarrow +\infty} F_1(x) = 0$ となる。

また虚軸上では、 $f(z)$ が指数型 A であることに注意して、

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} |F_1(iy)| = \lim_{y \rightarrow +\infty} |y|^{2(\nu)-1} |f(iy)| e^{-(A+\delta)y} = 0$$

がいえる。

以上から補題 5.3.3 を適用することが出来、 $\lim_{x \rightarrow +\infty} g_{\delta,1}(x) = 0$ なる関数 $g_{\delta,1}(x)$ が存在して、 D_1 において

$$|F_1(z)| \leq g_{\delta,1}(|z|)$$

すなわち、

$$|z|^{2(\nu)-1} |f(z)| \leq g_{\delta,1}(|z|) e^{(A+\delta)|\operatorname{Im} z|}$$

が成り立つ。他の象限でも同様の評価が出来るので、補題 5.2.1 が証明できた。

最後に、(5.3.1) の証明が残されているが、これは次の補題から直ちに分かる：

補題 5.3.4 ([5], 2.2). $F(z)$ は次の条件を満たすとする：

(a) $F(z)$ は右半平面 $\operatorname{Re} z > 0$ で正則、指数型。

(b) 積分 $\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_1^R F(x) dx$ が存在する。

このとき $F(x) \rightarrow 0$ as $x \rightarrow +\infty$ が成り立つ。 □

(補題 5.2.1 の証明終わり)

第 6 章

数値積分公式の応用 1

この章では、Lagrange-Bessel 数値積分公式の応用として、奇関数の半無限区間積分を計算することを考える。第 3 章で扱った反対称積分は、被積分関数 $f(x)$ の奇関数部分 $f_{\text{odd}}(x) = (1/2)[f(x) - f(-x)]$ を用いて $I_A(f) = 2 \int_0^\infty f_{\text{odd}}(x) dx$ と表わされる。したがって、反対称積分に対する Lagrange-Bessel 数値積分公式は奇関数の半無限区間積分のための数値積分公式であるとも言える。

ここでは、DE 型変数変換を用いて、少ない標本点数で Lagrange-Bessel 数値積分公式の無限和を打ち切って、効率よく積分計算を行うことを試みる。さらに、この数値積分公式が（準）最適性を満たすことを示す。

6.1 奇関数の半無限区間積分に対する数値積分公式

第 3 章で対称積分 $I_S(f) = \int_{-\infty}^\infty f(x) dx$ 、反対称積分 $I_A(f) = \int_{-\infty}^\infty \text{sgn } x f(x) dx$ 、に対し Bessel 関数の零点を標本点に用いた数値積分公式、すなわち、Lagrange-Bessel 数値積分公式をつくった。ところで、この 2 種類の積分はつぎのように表現することも出来る：

$$f(x) \text{ の偶関数部分 } f_{\text{even}}(x) = \frac{1}{2}[f(x) + f(-x)],$$

$$f(x) \text{ の奇関数部分 } f_{\text{odd}}(x) = \frac{1}{2}[f(x) - f(-x)],$$

とおくと、

$$(6.1.1) \quad I_S(f) = 2 \int_0^\infty f_{\text{even}}(x) dx,$$

$$(6.1.2) \quad I_A(f) = 2 \int_0^\infty f_{\text{odd}}(x) dx.$$

すなわち、対称積分は被積分関数の偶関数部分を、反対称積分は奇関数部分を抽出して積分しているのである。

したがって、第 3 章の議論から、Lagrange-Bessel 数値積分公式 (3.2.5) は奇関数 $f(x)$ の半無限区間積分 $\int_0^\infty f(x) dx$ に適しているといえる。具体的にはつぎの公式で数値積分できる：

$f(x)$ が奇関数であるとき

$$(6.1.3) \quad \int_0^{\infty} f(x) dx \approx h \sum_{k=1}^{\infty} f\left(h \frac{j_{0k}}{\pi}\right) \frac{2}{\pi j_{0k} (J_1(j_{0k}))^2}$$

一方、上の積分 (6.1.3) を台形公式を用いて計算しようとする、全無限区間 $(-\infty, +\infty)$ を半無限区間 $(0, +\infty)$ に写像する適当な変数変換 $x = \varphi(t)$ を用いてもとの積分を対称積分に変数変換してから、台形公式を適用しなければならない：

$$(6.1.4) \quad \int_0^{\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt \approx h \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(\varphi(kh)) \varphi'(kh).$$

奇関数

$$f_1(x) = \sinh x \exp(-\cosh x)$$

に対し、積分 $\int_0^{\infty} f_1(x) dx = e^{-1}$ 上の 2 つの公式 (6.1.3), (6.1.4) を用いて計算し、両者の性能を比較した。公式 (6.1.4) の場合、関数 $f_1(x)$ が $x \rightarrow +\infty$ で二重指数関数的に減衰することから、変数変換 $x = \varphi(t)$ として

$$\varphi(t) = \frac{t}{1 - \exp(-\sinh t)}$$

を用いた。この関数は

$$\varphi(t) \simeq t + t \exp\left(-\frac{1}{2} \exp t\right) \quad (t \rightarrow +\infty)$$

$$\varphi'(t) \simeq \frac{1}{2} |t| \exp\left(|t| - \frac{1}{2} \exp |t|\right) \quad (t \rightarrow -\infty)$$

を満たすので、被積分関数 $f_1(\varphi(t)) \varphi'(t)$ は $t \rightarrow \pm\infty$ で二重指数関数的に減衰する。

数値積分公式 (6.1.3), (6.1.4) の「刻み幅」 h を小さくしていったときの各公式の誤差の減衰の仕方を調べ、結果を図 6.1 に示した。

公式 (6.1.3), (6.1.4) はいずれも無限和を含んでいるが、数値計算の際は、打ち切り誤差 \approx 離散化誤差 となるように無限和を打ち切る。

図 6.1 から、同程度の精度を達成するのに、Lagrange-Bessel 数値積分公式を用いた公式 (6.1.3) は台形公式を用いた (6.1.4) のほぼ半分の標本点数ですませていることが分かる。これは、公式 (6.1.3), すなわち、Lagrange-Bessel 数値積分公式を用いる場合、関係式 (6.1.2) を利用して、半無限区間 $(0, +\infty)$ 上で数値積分すればよく、その一方で、公式 (6.1.4), すなわち、台形公式を用いる場合は、変数変換により両無限区間 $(-\infty, +\infty)$ 上の対称積分に変換して、両無限区間全体にわたって数値積分しなければならないからである。

上の例では奇関数 $f(x)$ が無限遠で二重指数関数的に減衰する場合を扱ったが、 $f(x)$ の減衰の速度が遅い場合は、無限区間積分に対する DE 公式と同様に、変数変換によって被積分関数が二重指数関数的に減衰するようにしてから、Lagrange-Bessel 数値積分公式を適用する。

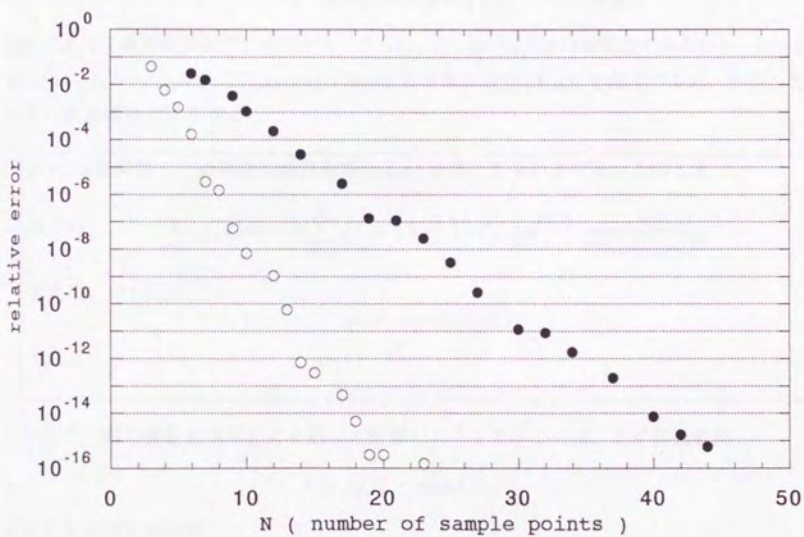


図 6.1 奇関数 $f_1(x) = \sinh x \exp(-\cosh x)$ に対する数値積分公式 (6.1.3), (6.1.4) の誤差の振る舞い (○: 公式 (6.1.3) の誤差, ●: 公式 (6.1.4) の誤差)。

$f(x)$ を奇関数で

$$(6.1.5) \quad f(x) = O[|x|^{-\alpha-1}] \quad (x \rightarrow \pm\infty)$$

なるものとする。このとき、積分 $\int_0^\infty f(x)dx$ に変数変換

$$x = \varphi_1(t) = \sinh(\sinh t)$$

を施すと、積分は

$$(6.1.6) \quad \int_0^\infty f(x)dx = \int_0^\infty f(\varphi_1(t))\varphi_1'(t)dt$$

と変換されるが、右辺の被積分関数は

$$\begin{aligned} f(\varphi_1(t))\varphi_1'(t) &= f(\sinh(2 \sinh t)) \cdot 2 \cosh t \cdot \cosh(2 \sinh t) \\ &= O[\exp(|t| - \alpha \exp |t|)] \quad (t \rightarrow \pm\infty) \end{aligned}$$

と無限遠で二重指数関数的に減衰する。さらに、 $f(\varphi_1(t))\varphi_1'(t)$ は奇関数であるから、(6.1.6) 右辺 $\left(= \frac{1}{2} I_A(f(\varphi_1)\varphi_1')\right)$ に Lagrange-Bessel 数値積分公式 (3.2.5) を適用できる。かくして、つぎの数値積分公式を得る：

$f(x)$ は奇関数で、無限遠で減衰条件 (6.1.5) を満たすものとする。このとき、

$$(6.1.7) \quad \int_0^\infty f(x)dx \approx h \sum_{k=0}^\infty f\left(\varphi_1\left(h \frac{j_{0k}}{\pi}\right)\right) \varphi_1'\left(h \frac{j_{0k}}{\pi}\right) \frac{1}{\pi j_{0k} (J_1(j_{0k}))^2}$$

である、ただし、

$$\varphi_1(t) = \sinh(\sinh t)$$

である。

一方で、同じ積分を台形公式を用いて計算しようとするならば、まず変数変換

$$x = \varphi_2(t) = \exp(\sinh t)$$

により全無限区間積分

$$\int_{-\infty}^\infty f(\varphi_2(t))\varphi_2'(t)dt$$

に変換してから台形公式を適用することになる：

$$(6.1.8) \quad \int_0^\infty f(x)dx \approx h \sum_{k=-\infty}^\infty f(\varphi_2(kh))\varphi_2'(kh).$$

これは、半無限区間積分に対する DE 公式に他ならない。

奇関数

$$f_2(x) = \frac{x}{(1+x^2)^2}.$$

に対し、積分 $\int_0^\infty f(x)dx$ を数値積分公式 (6.1.7)、(6.1.8) を用いて計算し、両者の公式の性能を比較した。この場合も、無限和は(打ち切り誤差) \approx (離散化誤差) となるよう打ち切っ

た. 各公式において, 刻み幅 h を小さくしていったときの各公式の誤差の変化を, 用いた標本点数 N に対してプロットした. その結果を図 6.2 に示した. グラフよりおおむね, 公式 (6.1.7), すなわち, Lagrange-Bessel 数値積分公式を用いたほうが, 少ない標本点数で計算出来ることがいえる.

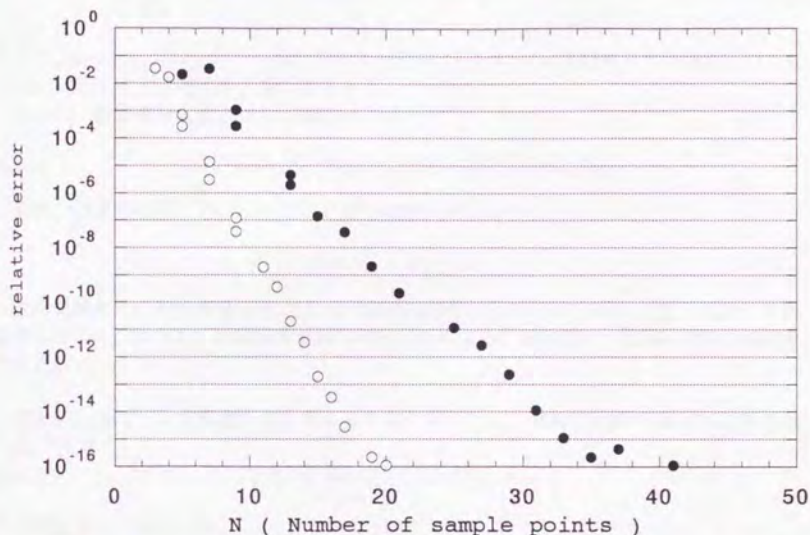


図 6.2 $f_2(x) = x/(1+x^2)^2$ に対する公式 (6.1.7), (6.1.8) の誤差の振る舞い (o: 公式 (6.1.3) の誤差, •: 公式 (6.1.4) の誤差).

6.2 有限個標本点の Lagrange-Bessel 数値積分公式の誤差評価

つぎに, 6.1 節で得た数値積分公式の誤差評価を行う.

6.1 節の 2 番目の数値例では, もとの積分に DE 型変数変換を施して, 被積分関数が無限遠で二重指数関数的減衰するような奇関数の半無限区間積分 (= 反対称積分 $\times 1/2$) に直してから Lagrange-Bessel 数値積分公式 (3.2.5) を適用し, 少ない標本点数で無限和を打ち切るようにした. したがって, ここでは被積分関数 $f(x)$ が一重または二重指数関数的減衰をするという条件のもとで, Lagrange-Bessel 数値積分公式 (3.2.5), (3.2.13), 及び (4.1.4) で無限和を有限和に打ち切った公式の誤差を, 実際に用いられた標本点数 N に対して評価することにする.

はじめに、反対称積分に対する Lagrange-Bessel 数値積分公式 (3.2.13) で無限和を有限和に打ち切った公式をつぎのように記すことにする：

$$(6.2.1) \quad Q_A^{(n)}(f, h, N_1, N_2) \\ \equiv h \sum_{k=1}^{N_1} f\left(h \frac{j_{nk}}{\pi}\right) \frac{2}{\pi j_{nk} (j_{n+1}(j_{nk}))^2} - h \sum_{k=1}^{N_2} f\left(-h \frac{j_{nk}}{\pi}\right) \frac{2}{\pi j_{nk} (j_{n+1}(j_{nk}))^2} \\ + \sum_{\lambda=0}^{n-1} c_\lambda^{(n)} h^{2(\lambda+1)} f^{(2\lambda+1)}(0),$$

ここで、 $n = 0, 1, 2, \dots, N_1, N_2$ は正の整数、 $c_\lambda^{(n)}$ は (3.2.14) により定められる係数、ただし $n = 0$ の場合 (6.2.1) 右辺第 3 項は 0 とおく。

さらに、数値積分公式 (6.2.1) の誤差を

$$(6.2.2) \quad \Delta Q_A^{(n)}(f, h, N_1, N_2) = I_A(f) - Q_A^{(n)}(f, h, N_1, N_2).$$

とおき、公式で実際に用いられている標本点数を N とおく：

$$N = N_1 + N_2 + 2n.$$

有限個標本の数値積分公式 (6.2.1) の誤差を実際に用いられる標本点数 N に対して評価するために、次のような減衰度がある関数 $\omega(z)$ によって規定された被積分関数の空間を導入する：

関数 $\omega(z)$ を $D(d)$ で定義された零にならないものとし、関数空間 $H^\infty(D(d), \omega)$ を領域 $D(d)$ で正則で

$$(6.2.3) \quad \|f\| = \sup_{z \in D(d)} |f(z)/\omega(z)| < +\infty$$

なる関数 $f(z)$ 全体とする。

$f \in H^\infty(D(d), \omega)$ に対し、

$$(6.2.4) \quad |f(z)| \leq \|f\| |\omega(z)|, \quad z \in D(d)$$

が成り立つことにより、 $f(z)$ の $D(d)$ での振る舞いが $\omega(z)$ によって規定されていることが分かる。

以上の準備のもとで、数値積分公式 (6.2.1) の誤差はつぎの定理で評価される：

定理 6.2.1 (a) $\omega(z) \in B(d)$ は次の条件を満たすとする：

(SE) (一重指数関数的減衰条件) 任意の実数 x に対し、

$$\alpha_1 \exp(-(\beta|x|)^\rho) \leq |\omega(x)| \leq \alpha_2 \exp(-(\beta|x|)^\rho)$$

が成り立つ、ここで $\alpha_1, \alpha_2, \beta > 0$, $\rho \geq 1$ である。

このとき、 $f \in H^\infty(D(d), \omega)$ に対し数値積分公式 (6.2.2) の誤差はつぎの不等式で評価される：

$$(6.2.5) \quad |\Delta Q_A^{(n)}(f, h, N_1, N_2)| \leq C_{n,d,\omega}^{\text{SE}} \|f\| \exp\left(-(\pi d \beta N)^{\frac{\rho}{\rho+1}}\right).$$

ただし, $C_{n,d,\omega}^{SE}$ は $\omega(z)$, d, n にのみ依る正の定数, h, N_1, N_2 は次の関係式を満たすものとする:

$$(6.2.6) \quad N_1 = N_2, \quad h = \frac{(2\pi d)^{\frac{1}{p+1}}}{(\beta(N_1 + n/2 - 1/2))^{\frac{p}{p+1}}}.$$

(b) $\omega(z) \in B(d)$ は次の条件を満たすとする:

(DE) (二重指数関数的減衰条件) 任意の実数 x に対し,

$$\alpha_1 \exp(-\beta_1 \exp(\gamma|x|)) \leq |\omega(x)| \leq \alpha_2 \exp(-\beta_2 \exp(\gamma|x|))$$

が成り立つ. ここで $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma > 0$ である.

このとき, $f \in H^\infty(D(d), \omega)$ に対し数値積分公式 (6.2.2) の誤差はつぎの不等式で評価される:

$$(6.2.7) \quad |\Delta Q_A^{(n)}(f, h, N_1, N_2)| \leq C_{n,d,\omega}^{DE} \|f\| \exp\left(-\frac{\pi d \gamma N}{\log(\pi d \gamma N / \beta_2)}\right),$$

ただし, $C_{n,d,\omega}^{DE}$ は $\omega(z)$, d, n にのみ依る正の定数, h, N_1, N_2 は次の関係式を満たすものとする:

$$(6.2.8) \quad N_1 = N_2, \quad h = \frac{\log(2\pi d \gamma (N + n/2 - 1/2) / \beta_2)}{\gamma(N_1 + n/2 - 1/2)}.$$

□

(証明) まず, つぎの不等式に注意する:

$$(6.2.9) \quad |\Delta Q_A^{(n)}(f, h, N_1, N_2)| \leq |\Delta Q_A^{(n)}(f, h)| \\ + h \sum_{k=N_1+1}^{\infty} \left| f\left(h \frac{j_{nk}}{\pi}\right) \frac{2}{\pi j_{nk}(j_{n+1}(j_{nk}))^2} \right| \\ + h \sum_{k=N_2+1}^{\infty} \left| f\left(-h \frac{j_{nk}}{\pi}\right) \frac{2}{\pi j_{nk}(j_{n+1}(j_{nk}))^2} \right|.$$

右辺第1項が積分を(無限個標本点の) Lagrange-Bessel 数値積分公式で近似した際の「離散化誤差」, 右辺第2, 3項が無限和を有限和に打ち切った際の「打ち切り誤差」である.

離散化誤差は, すでに定理 3.2.1, 3.2.2 によって評価されている. $|f(z)| \leq \|f\| |\omega(z)|$ より $\mathcal{N}(f, d-0) \leq \|f\| \mathcal{N}(\omega, d-0)$ であることに注意して,

$$|\Delta Q_A^{(n)}(f, h)| \leq \|f\| \kappa_A^{(n)}(\pi(d-0)/h) \mathcal{N}(\omega, d-0) \exp\left(-\frac{2\pi d}{h}\right)$$

を得る.

打ち切り誤差の評価は, 関数 $f(x)$ の実軸上での減衰条件, すなわち, 関数 $\omega(z)$ に対する条件 (SE) または (DE) を用いてできる.

(I) $\omega(x)$ が条件 (SE) を満たす場合: まず, $Y_n(z) \sim J_{n+1}(z)$ ($|z| \rightarrow \infty$, $|\arg z| < \pi$) が知られているから, $2/(\pi j_{nk}(j_{n+1}(j_{nk}))^2) = Y_n(j_{nk})/J_{n+1}(j_{nk}) - 1$ ($k \rightarrow \infty$), したがって,

$$W_n \equiv \sup_k \left| \frac{2}{\pi j_{nk}(j_{n+1}(j_{nk}))^2} \right| < +\infty$$

であることに注意する。さらに、 $j_{nk} \sim \pi \left(k + \frac{n}{2} - \frac{1}{4} \right) \quad (k \rightarrow \infty)$ から、十分大きい k に対し

$$h \frac{j_{nk}}{\pi} > h \left(k + \frac{n}{2} - \frac{1}{2} \right)$$

が成り立つ。

したがって、条件 (SE) と $|f(x)| \leq \|f\| |\omega(x)|$ を用いてつぎの不等式を得る：

$$\begin{aligned} & h \sum_{k=N_1+1}^{\infty} \left| f \left(h \frac{j_{nk}}{\pi} \right) \frac{2}{\pi j_{nk} (J_{n+1}(j_{nk}))^2} \right| \\ & \leq \alpha_2 W_n \|f\| h \sum_{k=N_1+1}^{\infty} \exp \left(- \left(\beta h \left(k + \frac{n}{2} - \frac{1}{2} \right) \right)^\rho \right) \\ & \leq \alpha_2 W_n \|f\| h \sum_{k=N_1+1}^{\infty} \left(\frac{\beta h (k + n/2 - 1/2)}{\beta h (N_1 + n/2 - 1/2)} \right)^{\rho-1} \exp \left(- \left(\beta h \left(k + \frac{n}{2} - \frac{1}{2} \right) \right)^\rho \right) \\ & \leq \alpha_2 W_n \|f\| \left(\beta h \left(N_1 + \frac{n}{2} - \frac{1}{2} \right) \right)^{-\rho+1} h \int_{N_1+n/2-1/2}^{\infty} (\beta h x)^{\rho-1} \exp(-(\beta h x)^\rho) dx \\ & = \|f\| \frac{\alpha_2 W_n}{\beta^\rho} \left(h \left(N_1 + \frac{n}{2} - \frac{1}{2} \right) \right)^{-\rho+1} \exp \left(- \left(\beta h \left(N_1 + \frac{n}{2} - \frac{1}{2} \right) \right)^\rho \right). \end{aligned}$$

(6.2.9) 右辺第 4 項についても、同様の評価が成り立つ。

以上よりつぎの不等式を得る：

$$\begin{aligned} (6.2.10) \quad & |\Delta Q_A^{(n)}(f, h, N_1, N_2)| \\ & \leq \|f\| |\kappa_A^{(n)}(\pi(d-0)/h) \mathcal{N}(\omega, d-0) \exp \left(-\frac{2\pi d}{h} \right)| \\ & \quad + \|f\| \frac{\alpha_2 W_n}{\beta^\rho} \left(h \left(N_1 + \frac{n}{2} - \frac{1}{2} \right) \right)^{-\rho+1} \exp \left(- \left(\beta h \left(N_1 + \frac{n}{2} - \frac{1}{2} \right) \right)^\rho \right) \\ & \quad + \|f\| \frac{\alpha_2 W_n}{\beta^\rho} \left(h \left(N_2 + \frac{n}{2} - \frac{1}{2} \right) \right)^{-\rho+1} \exp \left(- \left(\beta h \left(N_2 + \frac{n}{2} - \frac{1}{2} \right) \right)^\rho \right). \end{aligned}$$

ここでつぎのことに注意する： N_1, N_2 を固定したまま h を小さくすると、(6.2.10) 右辺第 1 項、すなわち、離散化誤差は小さくなる。一方で、右辺第 3, 4 項、すなわち、打ち切り誤差は大きくなる。逆に、 h を大きくすると、打ち切り誤差は小さくなる一方で、離散化誤差は大きくなる。

これより、 N_1, N_2 を固定したとき、

離散化誤差 \approx 打ち切り誤差

となるように h をとれば、(6.2.10) 右辺全体、すなわち、全誤差がほぼ最小になると考えられる。したがって、

$$\frac{2\pi d}{h} = \left(\beta h \left(N_1 + \frac{n}{2} - \frac{1}{2} \right) \right)^\rho = \left(\beta h \left(N_2 + \frac{n}{2} - \frac{1}{2} \right) \right)^\rho,$$

すなわち、

$$N_1 = N_2, \quad h = \frac{(2\pi d)^{\frac{1}{\rho+1}}}{(\beta(N_1 + n/2 - 1/2))^{\frac{\rho}{\rho+1}}}$$

とすればよいことが分かる。

これを (6.2.10) 右辺に代入して、

$$(6.2.11) \quad |\Delta Q_A^{(n)}(f, h, N_1, N_2)|$$

$$\begin{aligned}
&\leq \|f\| \left\{ \kappa_A^{(n)} (\pi(d-0)/h) \mathcal{N}(\omega, d-0) + 2 \frac{\alpha_2 W_n}{\beta^\rho} \left(\frac{2\pi d}{\beta^\rho} \left(N_1 + \frac{n}{2} - \frac{1}{2} \right) \right)^{-\frac{\rho-1}{\rho+1}} \right\} \\
&\quad \times \exp \left(- \left(2\pi d \beta \left(N_1 + \frac{n}{2} - \frac{1}{2} \right) \right)^{\frac{\rho}{\rho+1}} \right) \\
&\leq C_{n,d,\omega}^{\text{SE}} \|f\| \exp \left(-(\pi d \beta N)^{\frac{\rho}{\rho+1}} \right)
\end{aligned}$$

を得る

(II) $\omega(z)$ が条件 (DE) を満たす場合: (I) の場合と同様にして, 打ち切り誤差に関してつぎの評価を得る:

$$\begin{aligned}
&h \sum_{k=N_1+1}^{\infty} \left| f \left(h \frac{j_{nk}}{\pi} \right) \frac{2}{\pi j_{nk} (j_{n+1}(j_{nk}))^2} \right| \\
&\leq \alpha_2 W_n \|f\| h \sum_{k=N_1+1}^{\infty} \exp \left(-\beta_2 \exp \left(\gamma h \left(k + \frac{n}{2} - \frac{1}{2} \right) \right) \right) \\
&\leq \alpha_2 W_n \|f\| h \exp \left(-\gamma h \left(N_1 + \frac{n}{2} - \frac{1}{2} \right) \right) \\
&\quad \times \sum_{k=N_1+1}^{\infty} \exp \left(\gamma h \left(k + \frac{n}{2} - \frac{1}{2} \right) \right) \exp \left(-\beta_2 \exp \left(\gamma h \left(k + \frac{n}{2} - \frac{1}{2} \right) \right) \right) \\
&\leq \alpha_2 W_n \|f\| h \exp \left(-\gamma h \left(N_1 + \frac{n}{2} - \frac{1}{2} \right) \right) \int_{N_1+n/2-1/2}^{\infty} \exp(\gamma h x) \exp(-\beta_2 \exp(\gamma h x)) dx \\
&\leq \|f\| \frac{\alpha_2 W_n}{\beta_2 \gamma} \exp \left(-\gamma h \left(N_1 + \frac{n}{2} - \frac{1}{2} \right) \right) \exp \left(-\beta_2 \exp \left(\gamma h \left(N_1 + \frac{n}{2} - \frac{1}{2} \right) \right) \right).
\end{aligned}$$

よって, つぎの不等式を得る:

$$\begin{aligned}
(6.2.12) \quad &|\Delta Q_A^{(n)}(f, h, N_1, N_2)| \\
&\leq \|f\| \kappa_A^{(n)} (\pi(d-0)/h) \mathcal{N}(\omega, d-0) \exp \left(-\frac{2\pi d}{h} \right) \\
&\quad + \|f\| \frac{\alpha_2 W_n}{\beta_2 \gamma} \exp \left(-\gamma h \left(N_1 + \frac{n}{2} - \frac{1}{2} \right) \right) \exp \left(-\beta_2 \exp \left(\gamma h \left(N_1 + \frac{n}{2} - \frac{1}{2} \right) \right) \right) \\
&\quad + \|f\| \frac{\alpha_2 W_n}{\beta_2 \gamma} \exp \left(-\gamma h \left(N_2 + \frac{n}{2} - \frac{1}{2} \right) \right) \exp \left(-\beta_2 \exp \left(\gamma h \left(N_2 + \frac{n}{2} - \frac{1}{2} \right) \right) \right).
\end{aligned}$$

右辺第1項が離散化誤差, 第2, 3項が打ち切り誤差に相当する.

(I) と同様, 離散化誤差 \approx 打ち切り誤差とする:

$$\frac{2\pi d}{h} = \beta_2 \exp \left(\gamma h \left(N_1 + \frac{n}{2} - \frac{1}{2} \right) \right) = \beta_2 \exp \left(\gamma h \left(N_2 + \frac{n}{2} - \frac{1}{2} \right) \right).$$

これより, $N_1 = N_2$,

$$\begin{aligned}
h &= \frac{\log \left(\frac{2\pi d}{\beta_2} \cdot \frac{1}{h} \right)}{\gamma(N_1 + n/2 - 1/2)} \\
&= \frac{\log \left(\frac{2\pi d}{\beta_2} \cdot \gamma \left(N_1 + \frac{n}{2} - \frac{1}{2} \right) \right) - \log \log \left(\frac{2\pi d}{\beta_2} \cdot \frac{1}{h} \right)}{\gamma(N_1 + n/2 - 1/2)} \\
&= \frac{\log(2\pi d \gamma(N_1 + n/2 - 1/2)/\beta_2)}{\gamma(N_1 + n/2 - 1/2)} - \frac{\log \log(2\pi d \gamma(N_1 + n/2 - 1/2)/\beta_2)}{\gamma(N_1 + n/2 - 1/2)} + \dots
\end{aligned}$$

を得るので、右辺の展開の第1項をとって、

$$h = \frac{\log(2\pi d\gamma(N_1 + n/2 - 1/2)/\beta_2)}{\gamma(N_1 + n/2 - 1/2)}$$

とする。

これを (6.2.12) 右辺に代入して、

$$\begin{aligned} & |\Delta Q_A^{(n)}(f, h, N_1, N_2)| \\ & \leq \|f\| \left\{ \kappa_A^{(n)}(\pi(d-0)/h) N(\omega, d-0) + \frac{\alpha W_n \log(2\pi d\gamma(N_1 + n/2 - 1/2)/\beta_2)}{\pi d\gamma^2(N_1 + n/2 - 1/2)} \right\} \\ & \quad \times \exp\left(-\frac{2\pi d\gamma(N_1 + n/2 - 1/2)}{\log(2\pi d\gamma(N_1 + n/2 - 1/2)/\beta_2)}\right) \\ & \leq C_{n,d,\omega}^{\text{DE}} \|f\| \exp\left(-\frac{\pi d\gamma N}{\log(\pi d\gamma N/\beta_2)}\right) \end{aligned}$$

を得る。

6.3 (準) 最適性

6.2節では、反対称積分に対する有限個標本点の Lagrange-Bessel 数値積分公式の理論誤差評価を与えた。この節ではさらに、同公式が反対称積分に対してほぼ最適な公式であることを示す。

なお、簡単のため、(6.2.1) で $N_1 = N_2$ とおいた公式

$$(6.3.1) \quad I_A(f) \approx Q_A^{(n)}(f, h, N_1, N_1)$$

について考えることにする。

はじめに、議論に必要な記号の定義をしておく。ここで導入される記号は [26] で用いられているものと同じである。

(i) 関数空間 $H^\infty(D(d), \omega)$ における積分公式 $I_A(f) \approx Q_A^{(n)}(f, h, N_1, N_1)$ の誤差ノルムを $\mathcal{E}_{n,h,N,A}^{\text{LB}}(H^\infty(D(d), \omega))$ とする：

$$\mathcal{E}_{n,h,N,A}^{\text{LB}}(H^\infty(D(d), \omega)) = \sup_{\|f\| \leq 1} |\Delta Q_A^{(n)}(f, h, N_1, N_1)|.$$

(ii) 反対称積分 $I_A(f)$ に対する N 点数値積分公式の一般形として、

$$I_A(f) \approx \sum_{j=1}^l \sum_{k=0}^{m_j-1} b_{jk} f^{(k)}(a_j), \quad m_1 + \cdots + m_l = N, \quad 1 \leq l \leq N$$

という形のものを考える。そして、それらの $H^\infty(D(d), \omega)$ における誤差ノルムの下限を $\mathcal{E}_{N,A}^{\text{inf}}(H^\infty(D(d), \omega))$ とする：

$$\begin{aligned} (6.3.2) \quad \mathcal{E}_{N,A}^{\text{inf}}(H^\infty(D(d), \omega)) \\ = \inf_{1 \leq l \leq N} \inf_{\substack{m_1, m_2, \dots, m_l \\ m_1 + m_2 + \cdots + m_l = N}} \inf_{a_j} \inf_{b_{jk}} \sup_{\|f\| \leq 1} \left| I_A(f) - \sum_{j=1}^l \sum_{k=0}^{m_j-1} b_{jk} f^{(k)}(a_j) \right|. \end{aligned}$$

以上の準備のもとで、公式 (6.3.1) の準最適性が次の定理で示される：

定理 6.3.1 (1) $\omega(z) \in B(d)$ が定理 6.2.1 の条件 (SE) を満たす場合、次の不等式が成立する：

$$(6.3.3) \quad \begin{aligned} C_{d,\omega}^{\text{SE}'} N^{\frac{1}{\rho+1}} \exp \left(- \left(\left(\frac{2}{\rho+1} \right)^{\frac{1}{\rho}} 2\pi d \beta N \right)^{\frac{\rho}{\rho+1}} \right) \\ \leq \mathcal{E}_{N,A}^{\text{inf}}(H^\infty(D(d), \omega)) \\ \leq \mathcal{E}_{h,n,N,A}^{\text{LB}}(H^\infty(D(d), \omega)) \leq C_{n,d,\omega}^{\text{SE}} \exp \left(-(\pi d \beta N)^{\frac{\rho}{\rho+1}} \right), \end{aligned}$$

ただし、 $C_{d,\omega}^{\text{SE}}$ は $d, \omega(z)$ のみによる正の定数、 $C_{n,d,\omega}^{\text{SE}'}$ は $n, d, \omega(z)$ のみによる正の定数、 h, N_1 は次の関係式を満たすものとする：

$$h = \frac{(2\pi d)^{\frac{1}{\rho+1}}}{(\beta(N_1 + n/2 - 1/2))^{\frac{\rho}{\rho+1}}}.$$

(2) $\omega(z) \in B(d)$ が定理 6.2.1 の条件 (DE) を満たす場合、次の不等式が成立する：

$$\begin{aligned} C_{d,\omega}^{\text{DE}'} \log N \exp \left(- \frac{2\pi d \gamma N}{\log(\pi d \gamma N / \beta_1)} \right) \\ \leq \mathcal{E}_{N,A}^{\text{inf}}(H^\infty(D(d), \omega)) \\ \leq \mathcal{E}_{h,n,N,A}^{\text{LB}}(H^\infty(D(d), \omega)) \leq C_{n,d,\omega}^{\text{DE}} \exp \left(- \frac{\pi d \gamma N}{\log(\pi d \gamma N / \beta_2)} \right), \end{aligned}$$

ただし、 $C_{d,\omega}^{\text{DE}}$ は $d, \omega(z)$ にのみ依る正の定数、 $C_{n,d,\omega}^{\text{DE}'}$ は $n, d, \omega(z)$ にのみ依る正の定数、 h, N_1 は次の関係式を満たすものとする：

$$h = \frac{\log(2\pi d \gamma (N_1 + n/2 - 1/2) / \beta_2)}{\gamma(N_1 + n/2 - 1/2)}.$$

□

上の定理から、 $\mathcal{E}_{h,n,N,A}^{\text{LB}}(H^\infty(D(d), \omega)) \approx \mathcal{E}_{N,A}^{\text{inf}}(H^\infty(D(d), \omega))$ 、すなわち、反対称積分に対しては Lagrange-Bessel 数値積分公式が (準) 最適であることがいえる。

(定理 6.3.1 の証明) 不等式 (6.3.3), (6.3.4) のうち、2 番目の不等号は自明、3 番目の不等号は定理 6.2.1 からすぐ分かる。したがって、1 番目の不等号、すなわち、下からの評価のみ示せばよい。

はじめに、

$$\sup_{\|f\| \leq 1} \left| I_A(f) - \sum_{j=1}^l \sum_{k=0}^{m_j-1} b_{jk} f^{(k)}(a_j) \right|$$

の値を見積もらなければならないが、これは次のように考える。まず、 $H^\infty(D(d), \omega)$ の部分空間 $F_0(\{a_j\}, \{m_j\})$ をつぎのように定義する：

$$\begin{aligned} F_0(\{a_j\}, \{m_j\}) \\ = \left\{ f \in H^\infty(D(d), \omega) \mid \|f\| \leq 1; \quad f^{(k)}(a_j) = 0, \quad k = 0, 1, \dots, m_j - 1, j = 1, 2, \dots, l \right\}. \end{aligned}$$

$f \in F_0(\{a_j\}, \{m_j\})$ に対しては $\sum_j \sum_k c_{jk} f^{(k)}(a_j) = 0$ となるので,

$$(6.3.4) \quad \sup_{\|f\| \leq 1} \left| I_A(f) - \sum_{j=1}^l \sum_{k=0}^{m_j-1} b_{jk} f^{(k)}(a_j) \right| \geq \sup_{f \in F_0(\{a_j\}, \{m_j\})} |I_A(f)|$$

が成り立つ。よって、(6.3.4) の右辺の値を下から評価すればよい。

さらに (6.3.4) 右辺を変形する。まず、次の関数を導入する：

$$B_N(z; b, D(d)) = \prod_{j=1}^N \frac{T(z) - T(b_j)}{1 - \overline{T(b_j)} T(z)}, \quad z \in \mathcal{D}_d,$$

ここで

$$b = (b_1, b_2, \dots, b_N), \quad b_1, b_2, \dots, b_N \in D(d),$$

$$T(z) = \tanh\left(\frac{\pi z}{4d}\right)$$

である。関数 $B_N(z; b, D(d))$ は「変換された Blaschke 積」と呼ばれ、変換された Blaschke 積は次の性質を満たすことが知られている [26]：

(a) $B_N(z; b, D(d))$ は $D(d)$ で正則。

(b) $B_N(z; b, D(d))$ の $D(d)$ における零点は b_1, b_2, \dots, b_N 。

(c) $z \in D(d)$ に対して $|B_N(z; b, D(d))| < 1$, $z \in \partial D(d)$ に対して $|B_N(z; b, D(d))| = 1$ 。

変換された Blaschke 積を用いると関数族 $F_0(\{a_j\}, \{m_j\})$ は次のように表わされる：

$$F_0(\{a_j\}, \{m_j\}) = \{g(z) B_N(z; a, \mathcal{D}_d) \mid g \in H^\infty(D(d), \omega), \quad \|g\| \leq 1\},$$

ここで $a = (a_1, \dots, a_1, a_2, \dots, a_2, \dots, a_l, \dots, a_l)$ である (各 a_j ($j = 1, 2, \dots, l$) は m_j 回ずつ現われる)。したがって、

$$\sup_{\|f\| \leq 1} \left| I_A(f) - \sum_{j=1}^l \sum_{k=0}^{m_j-1} b_{jk} f^{(k)}(a_j) \right| \geq \sup_{\|g\| \leq 1} |I_A(g B_N(\cdot; a, D(d)))|$$

を得る。

$$s(z) = T(z) \overline{B_N(\bar{z}; a, D(d))} \omega(z)$$

とおくと $s \in H^\infty(D(d), \omega)$, $\|s\| \leq 1$ であるから、

$$(6.3.5) \quad \begin{aligned} & \sup_{\|g\| \leq 1} |I_A(g B_N(\cdot; a, D(d)))| \\ & \geq |I_A(s B_N(\cdot; a, D(d)))| \\ & = \int_{-\infty}^{\infty} |T(x)| |B_N(x; a, D(d))|^2 |\omega(x)| dx \\ & = \sup_{0 < R < \infty} 2R \int_{-R}^R |T(x)| |B_N(x; a, D(d))|^2 |\omega(x)| \frac{dx}{2R}. \end{aligned}$$

$\int_{-R}^R \frac{dx}{2R} = 1$ であるから、Jensen の不等式により、

$$(6.3.5) \text{ 右辺} \geq \sup_{0 < R < \infty} 2R \exp \left(\int_{-R}^R \log (|T(x)| |B_N(x; a, D(d))|^2 |\omega(x)|) \frac{dx}{2R} \right) \\ \geq 2R \exp \left(\frac{1}{2R} \int_{-R}^R \log |T(x)| dx + \frac{1}{R} \int_{-R}^R \log |B_N(x; a, D(d))| dx \right. \\ \left. + \frac{1}{2R} \int_{-R}^R \log |\omega(x)| dx \right)$$

を得る.

ここで,

$$\int_{-R}^R \log |T(x)| dx \geq \int_{-\infty}^{\infty} \log \left| \tanh \left(\frac{\pi x}{4d} \right) \right| dx = -\pi d,$$

また [11] により

$$\begin{aligned} \frac{1}{R} \int_{-R}^R \log |B_N(x; a, D(d))| dx &= \frac{1}{R} \sum_{j=1}^l m_j \int_{-R}^R \log \left| \frac{T(x) - T(a_j)}{1 - \overline{T(a_j)} T(x)} \right| dx \\ &= \frac{4d}{\pi R} \sum_{j=1}^l m_j \int_{-T(R)}^{T(R)} \log \left| \frac{\xi - T(a_j)}{1 - \overline{T(a_j)} \xi} \right| \frac{d\xi}{1 - \xi^2} \\ &\geq \frac{4d}{\pi R} \sum_{j=1}^l m_j \left(-\frac{\pi^2}{4} \right) = -\frac{\pi d N}{R} \end{aligned}$$

であるから, 結局,

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{N,A}^{\inf}(\mathbf{H}^{\infty}(D(d), \omega)) &\geq \sup_{0 < R < \infty} 2Re^{-\frac{\pi d}{2R}} \exp \left(-\frac{\pi d N}{R} + \frac{1}{2R} \int_{-R}^R \log |\omega(x)| dx \right) \\ &\geq 2Re^{-\frac{\pi d}{2R}} \exp \left(-\frac{\pi d N}{R} + \frac{1}{2R} \int_{-R}^R \log |\omega(x)| dx \right) \end{aligned}$$

を得る.

あとは $\omega(z)$ が (SE), (DE) 各条件を満たす場合について, $\frac{1}{2R} \int_{-R}^R \log |\omega(x)| dx$ の値を見積もればよいが, これは簡単である.

$|\omega(x)|$ が条件 (SE) を満たす場合]

$$\frac{1}{2R} \int_{-R}^R \log |\omega(x)| dx \geq \frac{1}{2R} \int_{-R}^R (\log \alpha_1 - \beta^{\rho} |x|^{\rho}) dx = \log \alpha_1 - \frac{\beta^{\rho} R^{\rho}}{\rho + 1}$$

であるから,

$$\mathcal{E}_{N,A}^{\inf}(\mathbf{H}(D(d), \omega)) \geq 2Re^{-\frac{\pi d}{2R}} \exp \left(-\frac{\pi d N}{R} - \frac{\beta^{\rho} R^{\rho}}{\rho + 1} \right).$$

R を

$$\frac{\pi d N}{R} = \frac{\beta^{\rho} R^{\rho}}{\rho + 1},$$

すなわち,

$$R = \left(\frac{\pi d (\rho + 1)}{\beta^{\rho}} N \right)^{1/(\rho+1)}$$

ととることにより,

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{N,A}^{\inf}(\mathbf{H}(D(d), \omega)) &\geq 2 \left(\frac{\pi d (\rho + 1)}{\beta^{\rho}} N \right)^{\frac{1}{\rho+1}} \exp \left(-\frac{1}{2} \left(\frac{(\pi d \beta)^{\rho}}{\rho + 1} \right)^{\frac{1}{\rho}} N^{-\frac{1}{\rho}} \right) \exp \left(-\left(\left(\frac{2}{\rho + 1} \right)^{1/\rho} 2\pi d \beta N \right)^{\frac{\rho}{\rho+1}} \right) \\ &\geq C_{d,\omega}^{\text{SE}} N^{\frac{1}{\rho+1}} \exp \left(-\left(\left(\frac{2}{\rho + 1} \right)^{1/\rho} 2\pi d \beta N \right)^{\frac{\rho}{\rho+1}} \right) \end{aligned}$$

を得る.

$[\omega(x)$ が条件 (DE) を満たす場合]

$$\frac{1}{2R} \int_{-R}^R \log |\omega(x)| dx \geq \frac{1}{2R} \int_{-R}^R (\log \alpha_1 - \beta_1 e^{\gamma|x|}) dx \geq \log \alpha_1 - \frac{\beta_1}{\gamma R} e^{\gamma R}$$

であるから,

$$\mathcal{E}_{N,A}^{\text{inf}}(\mathbf{H}^\infty(D(d), \omega)) \geq 2Re^{-\frac{\pi d}{2R}} \exp\left(-\frac{\pi d N}{R} - \frac{\beta_1}{\gamma R} e^{\gamma R}\right).$$

R を

$$\frac{\pi d N}{R} = \frac{\beta_1 e^{\gamma R}}{\gamma R},$$

すなわち,

$$R = \frac{1}{\gamma} \log\left(\frac{\pi d \gamma N}{\beta_1}\right)$$

ととることにより,

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{N,A}^{\text{inf}}(\mathbf{H}^\infty(D(d), \omega)) &\geq \frac{2}{\gamma} \log\left(\frac{\pi d \gamma}{\beta_1} N\right) \exp\left(-\frac{\pi d \gamma / 2}{\log(\pi d \gamma N / \beta_1)}\right) \exp\left(-\frac{2\pi d \gamma N}{\log(\pi d \gamma N / \beta_1)}\right) \\ &\geq C_{d,\omega}^{\text{DE}'} \log N \exp\left(-\frac{2\pi d \gamma N}{\log(\pi d \gamma N / \beta_1)}\right) \end{aligned}$$

を得る. ■

第 7 章

数値積分公式の応用 2 —Bessel 関数を含む振動積分の数値計算—

この章では, Lagrange-Bessel 数値積分公式の応用として, Hankel 変換型積分, すなわち, Bessel 関数を含む振動積分に対する数値積分公式を構成し, その精度について議論する.

7.1 序論

DE 公式は有限または無限区間上の定積分に対する高精度の数値積分公式としてよく知られている. ところがこの公式が苦手とする積分が存在する. それは減衰の遅い振動関数の無限区間積分であり, 例えば Fourier 変換型積分

$$(7.1.1) \quad \int_0^{\infty} \hat{f}(x) \sin xy dx,$$

Hankel 変換型積分

$$(7.1.2) \quad \int_0^{\infty} (xy)^{1/2} \hat{f}(x) J_{\nu}(xy) dx,$$

など積分変換によく現われる. そしてこれらの積分は科学技術計算の分野においても大変重要である.

このような積分に対しては, 数列の加速法を応用した計算法 [16], [17], [18], [20], [21], [22] などが考えられてきた. ところが Fourier 変換型積分 (7.1.1) に対しては, 1991 年, 大浦・森によって画期的な方法が提案された [13]. 次に挙げる大浦・森の DE 公式がそれである:

$$(7.1.3) \quad \int_0^{\infty} f(x) dx \approx \pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{\pi}{h} \varphi_F(kh)\right) \varphi_F'(kh)$$

ここで h は正のパラメータ,

$$(7.1.4) \quad \varphi_F(t) = \frac{t}{1 - \exp(-2\pi \sinh t)}$$

である¹.

¹[13] では $\varphi_F(t)$ として $\varphi_F(t) = \frac{t}{1 - \exp(-6 \sinh t)}$ をとっている.

この公式は、もとの積分 $\int_0^\infty f(x)dx$ にパラメータ h を含む変数変換 $x = (\pi/h)\varphi_F(t)$ を施して全無限区間上の積分

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\pi}{h} f\left(\frac{\pi}{h}\varphi_F(t)\right) \varphi_F'(t) dt$$

に変換した後、 h を刻み幅とする台形公式

$$(7.1.5) \quad \int_{-\infty}^{\infty} g(t) dt \approx h \sum_{k=-\infty}^{\infty} g(kh) \quad \left(g(t) = \frac{\pi}{h} f\left(\frac{\pi}{h}\varphi_F(t)\right) \varphi_F'(t) \right)$$

を適用して得られる。

$\varphi_F(t)$ は無限遠で次の性質を満たす：

$$(7.1.6) \quad \varphi_F(t) \simeq t + t \exp(-\pi \exp t), \quad t \rightarrow +\infty,$$

$$(7.1.7) \quad \varphi_F'(t) \simeq \pi |t| \exp(|t| - \pi \exp |t|), \quad t \rightarrow -\infty.$$

したがって、正の無限遠で公式(7.1.3)の標本点 $(\pi/h)\varphi_F(kh)$ は二重指数関数的に $(\pi/h) \cdot kh = k\pi$ 、すなわち被積分関数の零点に接近し、負の無限遠で $\varphi_F'(t)$ は二重指数関数的に 0 に減衰する。よって、少ない標本点数で台形公式の無限和を打ち切ることが出来、積分の近似値を効率よく計算出来る。

従来の DE 公式は変数変換により関数値自体を二重指数関数的に減衰させていたが、大浦・森は、Fourier 積分(7.1.1)では被積分関数が周期的に値が 0 になることに着目し、積分公式の標本点を関数の零点に近づけるように工夫したのである。これが大浦・森の DE 公式の成功の秘訣である。

大浦・森の公式自体は Hankel 変換型積分(7.1.2)には適用不可能である。この場合、被積分関数の零点、すなわち、Bessel 関数 $J_n(x)$ の零点は厳密に等間隔に分布していないため、大浦・森の DE 公式を直接適用しても、標本点が零点に二重指数関数に近づかず、積分公式の無限和を打ち切ることが出来ないのである。

ところが、前章で述べた、Lagrange-Bessel 数値積分公式を応用すれば、Hankel 変換型積分(7.1.2)の数値計算が可能になると考えられる。大浦・森のアイデアを振り返ってみると、変数変換 $x = (\pi/h)\varphi_F(t)$ で無限遠で二重指数関数的に $\varphi_F(t) \sim t$ となるようなものと台形公式を組み合わせることによって、標本点が被積分関数の零点に近づくようにしているのであった。ここで注意すべきことは、台形公式(7.1.5)の標本点 kh ($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$) は同時に三角関数 $\sin(\pi x/h)$ の零点でもあることである。したがって、積分(7.1.2)の数値積分公式を求めるには、その基礎公式として、台形公式の代わりに Lagrange-Bessel 数値積分公式、すなわち、Bessel 関数の零点を標本点にもつ数値積分公式をとればよいと、自然に考えられる。

7.2 Bessel 関数を含む振動積分に対する DE 型公式

ここでは次の形の積分を考えることにする：

$$(7.2.1) \quad I^+(f) = \int_0^\infty f(x) dx, \quad \text{十分大きい整数 } k \text{ に対し } f(j_{nk}) = 0.$$

ここで $0 < j_{n1} < j_{n2} < \dots < j_{nk} < \dots$ は $n(=0, 1, 2, \dots)$ 位の第 1 種 Bessel 関数 $J_n(x)$ の零点である。

この積分に大浦・森の DE 公式と同様の変数変換を施した後で、整数位数の Lagrange-Bessel 数値積分公式を適用することにより積分の近似値を計算する。ところで、整数位数の Lagrange-Bessel 数値積分公式には対称積分に対する公式（対称積分公式）、反対称積分に対する公式（反対称積分公式）の 2 種類が存在する。したがって、Hankel 変換型積分の数値計算には、(1) 対称積分公式に基づく方法、(2) 反対称積分公式に基づく方法の 2 つが考えられる：

(a) (対称積分公式に基づく方法)

(i) 積分 (7.2.1) に大浦・森の DE 公式と同じ変数変換 $x = \frac{\pi}{h} \varphi_F(t)$ を施す：

$$I^+(f) = \frac{\pi}{h} \int_{-\infty}^{\infty} f\left(\frac{\pi}{h} \varphi_F(t)\right) \varphi_F'(t) dt.$$

(ii) 対称積分に対する Lagrange-Bessel 数値積分公式 (3.1.2) を適用する：

$$\begin{aligned} (7.2.2) \quad I^+(f) &\approx Q_{HS}^{(0)}(f, h) \\ &\equiv \pi \sum_{k=1}^{\infty} f\left(\frac{\pi}{h} \varphi_F\left(h \frac{j_{nk}}{\pi}\right)\right) \varphi_F'\left(h \frac{j_{nk}}{\pi}\right) \frac{H_n(j_{nk})}{J_{n+1}(j_{nk})} \\ &\quad + \pi \sum_{k=1}^{\infty} f\left(-\frac{\pi}{h} \varphi_F\left(h \frac{j_{nk}}{\pi}\right)\right) \varphi_F'\left(-h \frac{j_{nk}}{\pi}\right) \frac{H_n(j_{nk})}{J_{n+1}(j_{nk})}. \end{aligned}$$

(b) (反対称積分公式に基づく方法)

(i) 積分 (7.2.1) に変数変換

$$(7.2.3) \quad x = \frac{\pi}{h} \varphi_H(t),$$

$$(7.2.4) \quad \varphi_H(t) = t \tanh\left(\frac{\pi}{2} \sinh t\right)$$

を施す²：

$$\begin{aligned} I^+(f) &= \frac{\pi}{h} \int_0^{\infty} f\left(\frac{\pi}{h} \varphi_H(t)\right) \varphi_H'(t) dt \\ &= \frac{\pi}{2h} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sgn} t f\left(\frac{\pi}{h} \varphi_H(t)\right) \varphi_H'(t) dt. \end{aligned}$$

(ii) 反対称積分に対する Lagrange-Bessel 数値積分公式 (3.2.13) を適用する：

$$\begin{aligned} (7.2.5) \quad I^+(f) &\approx Q_H^{(n)}(f, h) \\ &\equiv \pi \sum_{k=1}^{\infty} f\left(\frac{\pi}{h} \varphi_H\left(h \frac{j_{nk}}{\pi}\right)\right) \varphi_H'\left(h \frac{j_{nk}}{\pi}\right) \frac{2}{\pi j_{nk}(J_{n+1}(j_{nk}))^2} \\ &\quad + \sum_{\lambda=0}^{n-1} c_{\lambda}^{(n)} h^{2\lambda+1} \left[\left(\frac{d}{dt}\right)^{2\lambda+1} \left\{ f\left(\frac{\pi}{h} \varphi_H(t)\right) \varphi_H'(t) \right\} \right]_{t=0}, \end{aligned}$$

ここで $\varphi_H(t)$ は (7.2.4) で与えられる関数、 $c_{\lambda}^{(n)}$ は (3.2.14) で与えられる係数である。ただし、 $n=0$ の場合 (7.2.5) 右辺第 2 項は 0 とおく。

² 関数 $\varphi_H(t)$ が偶関数であることから、被積分関数 $f\left(\frac{\pi}{h} \varphi_H(t)\right) \varphi_H'(t)$ は奇関数であることに注意。

積分

(7.2.6)

$$I^+(f_1) = 1, \quad f_1(x) = J_0(x).$$

の近似値を2つの方法(7.2.2), (7.2.5)で計算し, これらの公式の性能を比較した. 図7.2にその結果を載せた.

図7.2をみると, 反対称積分公式に基づく方法のみ振動積分の計算に成功していることが分かる. 反対称積分公式に基づく方法(7.2.5)の誤差は $1/h$ に対し指数関数的に減衰しているが, 対称積分公式に基づく方法(7.2.5)の誤差はほとんど減衰していない.

反対称積分公式に基づく方法が成功して対称積分公式に基づく方法が失敗する理由は, 第3章で述べたように, 反対称積分公式は対称積分公式に対し桁数にして倍の精度をもつことである.

詳しくは, 誤差の複素積分表示を見てみると分かる. まず, 反対称積分公式に基づく方法(7.2.5)の誤差は, 次のように複素積分表示出来る:

$$\begin{aligned} I^+(f) - Q_H^{(0)}(f, h) \\ = \frac{1}{4hi} \int_{\Gamma(d)} f\left(\frac{\pi}{h} \varphi_H(w)\right) \varphi_H'(w) \Phi_A^{(0)}(w, h) dw. \end{aligned}$$

ここで,

$$|\Phi_A^{(0)}(w, h)| \approx 2\pi \exp\left(-\frac{2\pi}{h} |\operatorname{Im} w|\right),$$

いまの場合 $f(z) = J_0(z)$ であるから,

$$\begin{aligned} \left| f\left(\frac{\pi}{h} \varphi_H(w)\right) \right| &= \left| J_0\left(\frac{\pi}{h} \varphi_H(w)\right) \right| \\ &\approx \left| \left(\frac{2h}{\pi^2 \varphi_H(w)}\right)^{1/2} \cos\left[\frac{\pi}{h} \left(\varphi_H(w) - \frac{h}{4}\right)\right] \right| \\ &\approx \left(\frac{h}{2\pi^2 |\varphi_H(w)|}\right)^{1/2} \exp\left(\frac{\pi}{h} |\operatorname{Im} \varphi_H(w)|\right) \end{aligned}$$

であるが, $\operatorname{Re} w$ が十分大きいとき $\varphi_H(w) \approx w$ であるから,

$$\left| f\left(\frac{\pi}{h} \varphi_H(w)\right) \right| \approx \left(\frac{h}{2\pi^2 |w|}\right)^{1/2} \exp\left(\frac{\pi}{h} |\operatorname{Im} w|\right),$$

$$\varphi_H'(w) \approx 1,$$

したがって誤差の複素積分表示における被積分関数の絶対値は,

$$\left| f\left(\frac{\pi}{h} \varphi_H(w)\right) \varphi_H'(w) \Phi_A^{(0)}(w, h) \right| \approx \left(\frac{2h}{|w|}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{\pi}{h} |\operatorname{Im} w|\right)$$

と虚軸に沿って指数関数的に減衰する. $f((\pi/h)|\varphi_H(w)|)$ はおよそ $\exp((\pi/h)|\operatorname{Im} w|)$ の大きさと, 虚軸に沿って指数関数的に増大するが, $\Phi_A^{(0)}(w, h)$ はそれより速く $\exp(-(2\pi/h)|\operatorname{Im} w|)$ の大きさと指数関数的に減衰しているからである. これより, 誤差評価

$$(\text{誤差}) = O[\exp(-c/h)]$$

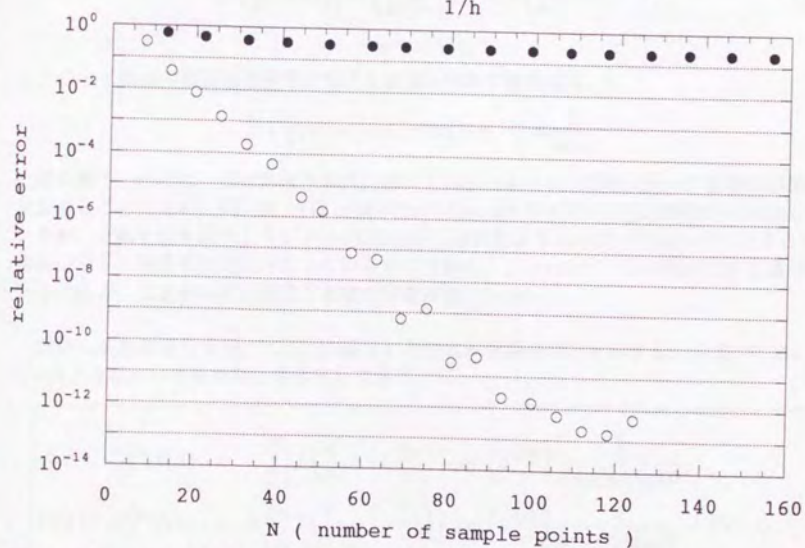
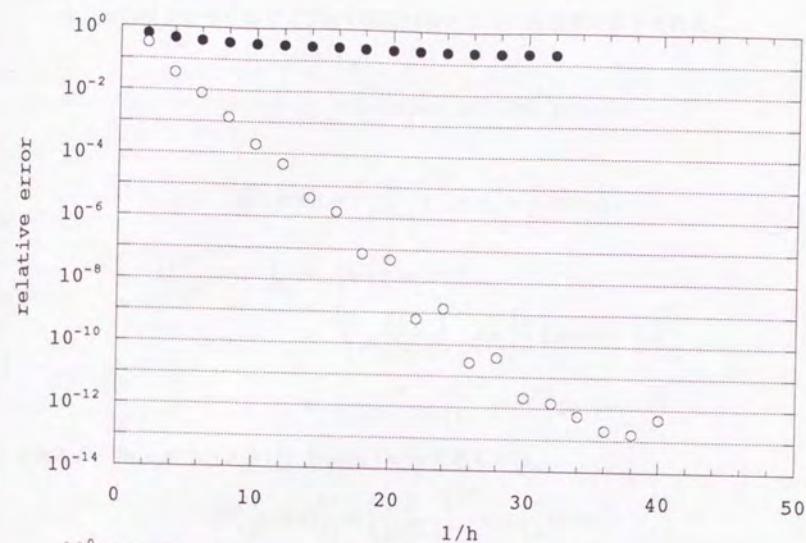


図 7.1 積分 (7.2.6) に対する数値積分公式 (7.2.2), (7.2.5) の誤差の振る舞い (●: 対称積分に基づく方法の誤差, ○: 反対称積分に基づく方法の誤差).

が得られる.

一方, 対称積分公式に基づく方法の誤差は次のように複素積分表示される:

$$\begin{aligned} I^+(f) - Q_{\text{HS}}^{(0)}(f, h) \\ = \frac{1}{2hi} \int_{\Gamma(d)} f\left(\frac{\pi}{h} \varphi_F(w)\right) \varphi_F'(w) \Phi_S^{(0)}(w, h) dw. \end{aligned}$$

ここで,

$$|\Phi_S^{(0)}(w, h)| \approx \left(\frac{8h}{\pi^2|w|}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{\pi}{h}|\text{Im } w|\right),$$

$$\begin{aligned} \left|f\left(\frac{\pi}{h} \varphi_F(w)\right)\right| &= \left|J_0\left(\frac{\pi}{h} \varphi_F(w)\right)\right| \\ &\approx \left|\left(\frac{2h}{\pi^2 \varphi_F(w)}\right)^{1/2} \cos\left[\frac{\pi}{h}\left(\varphi_F(w) - \frac{h}{4}\right)\right]\right| \\ &\approx \left(\frac{h}{2\pi^2|\varphi_F(w)|}\right)^{1/2} \exp\left(\frac{\pi}{h}|\text{Im } \varphi_F(w)|\right) \end{aligned}$$

であるが, $\text{Re } w$ が十分大きいとき $\varphi_F(w) \approx w$ であるから,

$$\begin{aligned} \left|f\left(\frac{\pi}{h} \varphi_F(w)\right)\right| &\approx \left(\frac{h}{2\pi^2|w|}\right)^{1/2} \exp\left(\frac{\pi}{h}|\text{Im } w|\right), \\ \varphi_F'(w) &\approx 1. \end{aligned}$$

したがって誤差の複素積分表示における被積分関数の絶対値は,

$$\left|f\left(\frac{\pi}{h} \varphi_F(w)\right) \varphi_F'(w) \Phi_S^{(0)}(w, h)\right| \approx \frac{4h}{\pi|w|}$$

と振る舞う. 今度は, 反対称積分公式に基づく方法のように, 虚軸に沿って指数関数的に減衰することはない. $\Phi_S^{(0)}(w, h)$ は $\exp(-(2\pi/h)|\text{Im } w|)$ の大きさに指数関数的に減衰しているが, それを打ち消すように $f((\pi/h)|\varphi_H(w))$ はおよそ $\exp((\pi/h)|\text{Im } w|)$ の大きさで, 虚軸に沿って指数関数的に増大しているからである. したがって, 対称積分公式に基づく方法の場合, 指数関数的に減衰する誤差評価が得られない.

以降は反対称積分公式 (7.2.5) に基づく方法のみ考察することにする. 公式 (7.2.5) を $n = 0, 1, 2$ について具体的に書き下しておく:

$$(7.2.7) \quad Q_H^{(0)}(f, h) = \pi \sum_{k=1}^{\infty} f\left(\frac{\pi}{h} \varphi_H\left(h \frac{j_{0k}}{\pi}\right)\right) \varphi_H'\left(h \frac{j_{0k}}{\pi}\right) \frac{2}{\pi j_{0k}(J_1(j_{0k}))^2},$$

$$(7.2.8) \quad Q_H^{(1)}(f, h) = \pi \sum_{k=1}^{\infty} f\left(\frac{\pi}{h} \varphi_H\left(h \frac{j_{1k}}{\pi}\right)\right) \varphi_H'\left(h \frac{j_{1k}}{\pi}\right) \frac{2}{\pi j_{1k}(J_2(j_{0k}))^2} + 2hf(a),$$

$$\begin{aligned} (7.2.9) \quad Q_H^{(2)}(f, h) &= \pi \sum_{k=1}^{\infty} f\left(\frac{\pi}{h} \varphi_H\left(h \frac{j_{2k}}{\pi}\right)\right) \varphi_H'\left(h \frac{j_{2k}}{\pi}\right) \frac{2}{\pi j_{2k}(J_3(j_{2k}))^2} \\ &\quad + \frac{16}{3}h \left[\left(1 - \frac{\pi^2}{2}\right) \left(\frac{h}{\pi}\right)^2 + 1 \right] f(a) + 8h^2 f'(a). \end{aligned}$$

積分

$$(7.2.10) \quad I^+(f_2) = K_0(1), \quad f_2(x) = \frac{x J_0(x)}{x^2 + 1}$$

($K_0(x)$ は 0 位の第 2 種変形 Bessel 関数) の近似値を前節で得た公式 (7.2.5) を用いて計算し、誤差の振る舞いを積分 (7.2.6) の場合と比較した。

公式 (7.2.5) の無限和は、はじめに微小な正数 ϵ_{trunc} を与えておき、

$$(7.2.11) \quad \left| f\left(\frac{\pi}{h} \varphi_H\left(h \frac{j_{nk}}{\pi}\right)\right) \varphi_H'\left(h \frac{j_{nk}}{\pi}\right) \frac{2/(\pi j_{nk})}{(J_{n+1}(j_{nk}))^2} \right| \leq \epsilon_{\text{trunc}}$$

となったところで和を打ち切って計算した。ここでは $\epsilon_{\text{trunc}} = 10^{-15}$ と置いた。

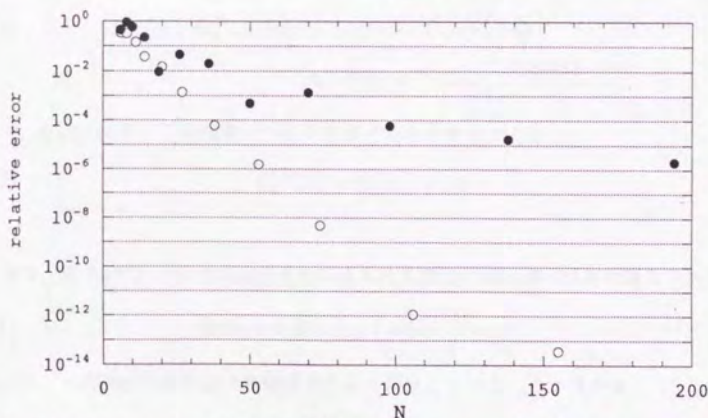
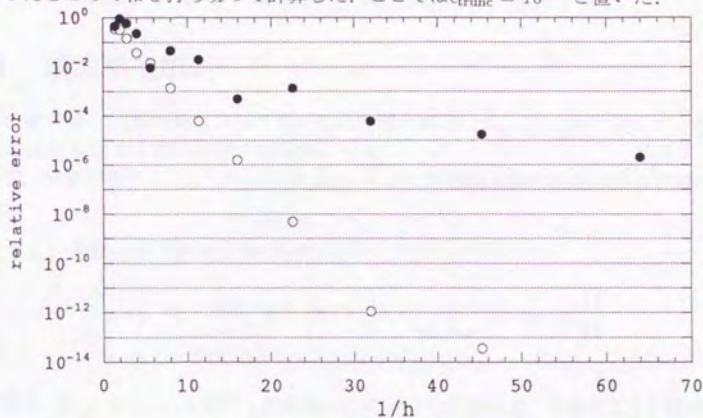


図 7.2 積分 (7.2.6), (7.2.10) に対する数値積分公式 (7.2.7) の誤差の振る舞い (○: (7.2.6) に対する誤差, ●: (7.2.10) に対する誤差)。

図 7.2 は、パラメータ h を $h = 2^{-1/2}, 2^{-1}, 2^{-3/2}, \dots$ と小さくしていったときの公式 (7.2.7)

の相対誤差の変化をプロットしたグラフである。グラフにおいて、 N は実際に計算に用いた標本点数である。

積分 (7.2.6) に対しては、公式 (7.2.7) はうまく働いていることが分かる。更に、数値誤差が単位長さ当たりの標本点数密度 $1/h$ に対し指数関数的に減衰していることが、グラフから読み取れる。

一方、積分 (7.2.10) に対しては、(7.2.6) ほど公式 (7.2.7) はうまく働いていないことが分かる。そして、誤差の振る舞いは、(7.2.6) の場合のような指数関数的減衰より緩やかな減衰の仕方を示している。

何故 2 つの積分 (7.2.6), (7.2.10) の間で、数値積分の精度にこのような違いが現われるか？ 次の節の誤差解析で、この疑問に対して答えを与えることにする。

7.3 理論誤差解析

この節では、7.2 節の数値実験で用いられた積分例 (7.2.6), (7.2.10) に対して、数値積分公式 (7.2.5) に対する誤差評価を理論的に行う。

まず、前者の場合： $f(x) = f_1(x) = J_0(x)$ に対する理論的誤差評価は次の定理のようになる：

定理 7.3.1 定数 μ_1 をつぎのように定義する：

$$(7.3.1) \quad \mu_1 = \sup_{0 < c < \pi/2} \min \left\{ \pi c, \pi \left[2c - \sup_{|\operatorname{Im} u| = c} |\operatorname{Im} \varphi_H(u)| \right] \right\} \\ (= 0.88185 \dots).$$

このとき、 $f_1(x) = J_0(x)$ に対する数値積分公式 (7.2.5) の誤差は、つぎのように評価される：

$$(7.3.2) \quad |I^+(f_1) - Q_H^{(0)}(f_1, h)| \leq C_1(h) h^{-3/2} \exp\left(-\frac{\mu_1}{h}\right) \\ \approx C_1(h) h^{-3/2} \exp\left(-\frac{0.88185 \dots}{h}\right).$$

ここで、 $C_1(h)$ は $h > 0$ の関数でつぎの性質をみたすものである：

$$(7.3.3) \quad C_1^{(n)}(h) = O(1), \quad h \downarrow 0.$$

□

一方で、図 7.2 で示された実験結果から得られる誤差の振る舞いは次の通りである：

$$(7.3.4) \quad \text{誤差} \approx \text{定数} \times \exp\left(-\frac{0.87016 \dots}{h}\right).$$

これより、上の理論誤差評価は実験結果とよく符合していることが分かる。

(定理 7.3.1 の証明)

振動積分 $I^+(f_1)$ に対する数値積分公式は、もとの積分を

$$(7.3.5) \quad I^+(f_1) = \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sgn} t \cdot \frac{\pi}{2h} f_1\left(\frac{\pi}{h} \varphi_H(t)\right) \varphi_H'(t) dt$$

と変数変換して公式(3.2.13)を適用して得られるから、(3.2.13)に対する誤差評価の定理3.2.2がそのまま適用できるように、一見思える。ところが、変数変換後の被積分関数 $\frac{\pi}{2h} f_1 \left(\frac{\pi}{h} \varphi_H(w) \right) \varphi_H'(w)$ は定理3.2.2の条件、すなわち、ある $d > 0$ に対し関数族 $B(d)$ に属するという条件を満たさない。したがって、関数 $f_1(x)$ に対しては別途に誤差解析を行う必要がある。

まず、次の等式が成立することに注意する：

$$\begin{aligned} (7.3.6) \quad & \int_0^{(\pi/h)\varphi_H(R)} f_1(x) dx - Q_H^{(0)}(f_1, h, N) \\ &= \int_{-R}^R \operatorname{sgn} t \cdot \frac{\pi}{2h} f_1 \left(\frac{\pi}{h} \varphi_H(t) \right) dt - Q_A^{(0)} \left(\frac{\pi}{2h} f_1 \left(\frac{\pi}{h} \varphi_H \right) \varphi_H', h, N, N \right) \\ &= \frac{1}{4hi} \int_{\Gamma_1 + \Gamma_2 + \dots + \Gamma_8} f_1 \left(\frac{\pi}{h} \varphi_H(w) \right) \varphi_H'(w) \Phi_A^{(0)}(w, h) dw. \end{aligned}$$

ここで、 N は正の整数、 $R = h(N + 1/4)$,

$$Q_H^{(0)}(f, h, N) = \pi \sum_{k=1}^N f \left(\frac{\pi}{h} \varphi_H \left(h \frac{j_{nk}}{\pi} \right) \right) \varphi_H' \left(h \frac{j_{nk}}{\pi} \right) \frac{2}{\pi j_{0k} (J_1(j_{0k}))^2},$$

$\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_8$ はつぎで定義される積分路である (図 7.3 参照)：

$$(7.3.7) \quad \begin{cases} \Gamma_1 : & R + is, \quad 0 \leq s \leq c, \\ \Gamma_2 : & t + ic, \quad R \geq t \geq 0, \\ \Gamma_3 : & t + ic, \quad 0 \geq t \geq -R, \\ \Gamma_4 : & -R + is, \quad c \geq s \geq 0, \\ \Gamma_5 : & -R + is, \quad 0 \geq s \geq -c, \\ \Gamma_6 : & t - ic, \quad -R \leq t \leq 0, \\ \Gamma_7 : & t - ic, \quad 0 \leq t \leq R, \\ \Gamma_8 : & R + is, \quad -c \leq s \leq 0. \end{cases}$$

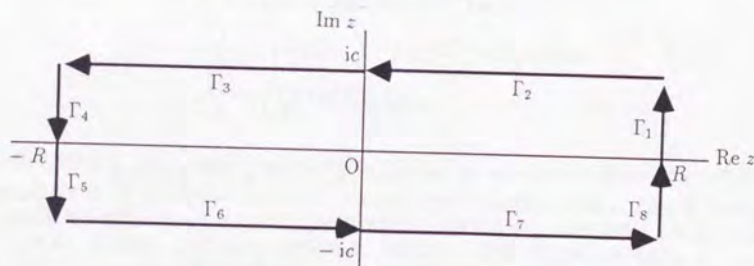


図 7.3 定理 7.3.1 の証明に用いる積分路 $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_8$.

(7.3.6) において $N \rightarrow \infty$ の極限をとったものは、積分(7.2.6)に対する数値積分誤差の複素積分表示に他ならない。したがって、右辺の積分の大きさを評価し、 $N \rightarrow \infty$ の極限をとることによって、(7.2.6)に対する誤差評価が得られる。

(i) $[\Gamma_1$ 上の積分の評価]

$f_1((\pi/h)\varphi_H(w))$ に関して、付録の補題 I.1.1 から、 $w \neq 0, |\operatorname{Im} w| < \pi/2$ のとき

$$(7.3.8) \quad \left| f_1 \left(\frac{\pi}{h} \varphi_H(w) \right) \right| \leq \beta_0 \left(\frac{h}{2\pi^2 |\varphi_H(w)|} \right)^{1/2} \exp \left(\frac{\pi}{h} |\operatorname{Im} \varphi_H(w)| \right)$$

が成り立つが, 7.5節の (7.5.1), (7.5.4) より, 任意の $\epsilon > 0$ に対し N を十分大きくとれば (すなわち R を十分大きくとれば), Γ_1 上で

$$(7.3.9) \quad |\varphi_H(w)| \geq (1+\epsilon)^{-1}R, \quad |\operatorname{Im} \varphi_H(w)| \leq (1+\epsilon)c + \epsilon$$

とすることが出来るから, Γ_1 上で次の不等式が成り立つ:

$$(7.3.10) \quad \left| f_1 \left(\frac{\pi}{h} \varphi_H(w) \right) \right| \leq \beta_0 \left(\frac{h}{2\pi^2 R} \right)^{1/2} (1+\epsilon)^{1/2} \exp \left(\frac{\pi}{h} [c(1+\epsilon) + \epsilon] \right).$$

一方, 3.4.2節の補題 3.4.3 と 7.5節の式 (7.5.6) から, 任意の $\epsilon > 0$ に対し N を十分大きくとれば, Γ_1 上で次の不等式が成り立つ:

$$(7.3.11) \quad |\varphi'_H(w)| \leq 1 + \epsilon, \quad |\Phi_A^{(0)}(w, h)| \leq (1+\epsilon)2\pi.$$

(7.3.10), (7.3.11) から次の評価が得られる:

$$(7.3.12) \quad \left| \int_{\Gamma_1} f_1 \left(\frac{\pi}{h} \varphi_H(w) \right) \varphi'_H(w) \Phi_A^{(n)}(w, h) dw \right| \\ \leq \beta_0 \left(\frac{2h}{R} \right)^{1/2} c(1+\epsilon)^{5/2} \exp \left(\frac{\pi}{h} [c(1+\epsilon) + \epsilon] \right) = O(N^{-1/2}).$$

$\Gamma_4, \Gamma_5, \Gamma_8$ 上の積分についても, 同様の評価が得られる.

(ii) $[\Gamma_2$ 上の積分の評価]

はじめに Γ_2 上の積分を次のように分解する:

$$(7.3.13) \quad \int_{\Gamma_2} f_1 \left(\frac{\pi}{h} \varphi_H(w) \right) \varphi'_H(w) \Phi_A^{(0)}(w, h) dw \\ = \int_{\Gamma_2} f_1 \left(\frac{\pi}{h} \varphi_H(w) \right) [\varphi'_H(w) - 1] \Phi_A^{(0)}(w, h) dw \\ + \int_{\Gamma_2} \left[f_1 \left(\frac{\pi}{h} \varphi_H(w) \right) - f_1 \left(\frac{\pi w}{h} \right) \right] \Phi_A^{(0)}(w, h) dw \\ + \int_{\Gamma_2} f_1 \left(\frac{\pi w}{h} \right) \Phi_A^{(0)}(w, h) dw.$$

左辺の絶対値積分 $\int_{\Gamma_2} \left| f_1 \left(\frac{\pi}{h} \varphi_H(w) \right) \varphi'_H(w) \Phi_A^{(0)}(w, h) \right| |dw|$ は, $R \rightarrow +\infty$ の極限において有限値で上から押さえることが出来ない. ところが, (7.3.13) 右辺のように積分を分割しておくと, 右辺第 1, 2 項は被積分関数が $\operatorname{Re} w \rightarrow +\infty$ で二重指数関数的に減衰するから, 絶対値積分 (の $R \rightarrow +\infty$ における極限) を有限値で押さえることが出来る. 第 3 項は, 被積分関数が上半平面 $\operatorname{Im} w > 0$ で正則であるから, Cauchy の積分定理を用いて簡単に値の評価を行うことが出来る.

[(7.3.13) 右辺第 1 項の評価]

補題 3.4.4 から, Γ_2 上で

$$(7.3.14) \quad |\Phi_A^{(0)}(w, h)| \leq 2\pi \kappa_A^{(0)}(\pi c/h) \exp \left(-\frac{2\pi c}{h} \right)$$

が成り立つ.

一方, $|f_1((\pi/h)\varphi_H(w))|$ に対する評価は次のようにして出来る:

$$(7.3.15) \quad \lambda(c) = \sup_{|\operatorname{Im} w|=c} |\operatorname{Im} \varphi_H(w)|$$

とおくと³, $w \in \Gamma_2$ に対し $|\operatorname{Im} \varphi_H(w)| \leq \lambda(c)$ となる. よって, 補題 1.1.2 から, Γ_2 上で

$$(7.3.16) \quad \left| f_1 \left(\frac{\pi}{h} \varphi_H(w) \right) \right| \leq \sup_{|\operatorname{Im} z| \leq \lambda(c)} \left| J_0 \left(\frac{\pi z}{h} \right) \right| \leq \beta_0 \left(\frac{h}{2\pi^2 \lambda(c)} \right)^{1/2} \exp \left(\frac{\pi}{h} \lambda(c) \right)$$

が成り立つ.

したがって, (7.3.13) 右辺第 1 項に対し次の不等式が得られる:

$$(7.3.17) \quad \left| \int_{\Gamma_2} f_1 \left(\frac{\pi}{h} \varphi_H(w) \right) [\varphi'_H(w) - 1] \Phi_A^{(0)}(w, h) dw \right| \\ \leq \beta_0 \kappa_A^{(0)}(\pi c/h) \left(\frac{2h}{\lambda(c)} \right)^{1/2} \left\{ \int_0^\infty |\varphi'_H(t+ic) - 1| dt \right\} \exp \left(-\frac{\pi}{h} [2c - \lambda(c)] \right),$$

ここで, 7.5 節の (7.5.7) から,

$$(7.3.18) \quad |\varphi'_H(t+ic) - 1| \lesssim \pi t \exp \left(t - \frac{\pi}{2} \cos c \exp t \right) \quad (t \rightarrow +\infty),$$

すなわち, $|\varphi'_H(t+ic) - 1|$ は $t \rightarrow +\infty$ で二重指数関数的に減衰することから $\int_0^\infty |\varphi'_H(t+ic) - 1| dt < \infty$ となることに注意.

[(7.3.13) 右辺第 2 項の評価]

はじめに, 次の不等式が成り立つことに注意:

$$(7.3.19) \quad \left| f_1 \left(\frac{\pi}{h} \varphi_H(w) \right) - f_1 \left(\frac{\pi w}{h} \right) \right| \left(= \left| J_0 \left(\frac{\pi}{h} \varphi_H(w) \right) - J_0 \left(\frac{\pi w}{h} \right) \right| \right) \\ \leq \frac{\pi}{h} \left\{ \max_{z \in l(w)} \left| J_0' \left(\frac{\pi z}{h} \right) \right| \right\} |\varphi_H(w) - w| \\ \leq \frac{\pi}{h} \left\{ \max_{z \in l(w)} \left| J_1 \left(\frac{\pi z}{h} \right) \right| \right\} |\varphi_H(w) - w|$$

ここで, $l(w)$ は 2 点 $w, \varphi_H(w)$ を結ぶ線分である. また, $J_\nu'(z) = (\nu/z) J_\nu(z) - J_{\nu+1}(z)$ より $J_0'(z) = -J_1(z)$ となることを用いた.

ところで, 各 $w \in \Gamma_2$ に対し線分 $l(w)$ は帯状領域 $\{z \in \mathbb{C} \mid |\operatorname{Im} z| \leq \max\{c, \lambda(c)\}\}$ ($\lambda(c)$ は (7.3.15) で定義されている数) に含まれるから, 各 $w \in \Gamma_2$ に対し, 補題 1.1.2 の (1.1.6) より

$$(7.3.20) \quad \max_{z \in l(w)} \left| J_{n+1} \left(\frac{\pi z}{h} \right) \right| \leq \frac{\beta_{n+1}}{\pi} \left(\frac{h}{2c} \right)^{1/2} \max \left\{ \exp \left(\frac{\pi c}{h} \right), \exp \left(\frac{\pi}{h} \lambda(c) \right) \right\}$$

が成り立つ.

したがって, (7.3.14) も用いて, 次の不等式が得られる:

$$(7.3.21) \quad \left| \int_{\Gamma_2} \left[f_1 \left(\frac{\pi}{h} \varphi_H(w) \right) - f_1 \left(\frac{\pi w}{h} \right) \right] \Phi_A^{(0)}(w, h) dw \right| \\ \leq \beta_1 \left(\frac{2\pi^2}{ch} \right)^{1/2} \kappa_A^{(0)}(\pi c/h) \left\{ \int_0^\infty |\varphi_H(t+ic) - (t+ic)| dt \right\} \\ \times \max \left\{ \exp \left(-\frac{\pi c}{h} \right), \exp \left(-\frac{\pi}{h} [2c - \lambda(c)] \right) \right\}.$$

³7.5 節の (7.5.3) から, $0 < c < \pi/2$ のとき $\operatorname{Im} \varphi_H(t \pm ic)$ は $-\infty < t < +\infty$ で連続, かつ, $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \varphi_H(t \pm ic) = \pm c \neq 0$ である. したがって, $0 < \lambda(c) = \sup_{|\operatorname{Im} w| = c} |\operatorname{Im} \varphi_H(w)| < +\infty$ が分かる.

ここで, 7.5節の (7.5.2) から

$$(7.3.22) \quad |\varphi_H(t+ic) - (t+ic)| \lesssim 2t \exp\left(-\frac{\pi}{2} \cos c \exp t\right) \quad (t \rightarrow +\infty),$$

すなわち, $|\varphi_H(t+ic) - (t+ic)|$ は $t \rightarrow +\infty$ で二重指数関数的に減衰するから, $\int_0^\infty |\varphi_H(t+ic) - (t+ic)| dt < \infty$ となることに注意.

[(7.3.13) 右辺第3項の評価]

$f_1(\pi w/h) \Phi_A^{(0)}(w, h)$ は上半平面 $\text{Im } w > 0$ で正則であるから, 積分 (7.3.13) 右辺第3項は次のように書き換えることが出来る:

$$(7.3.23) \quad \begin{aligned} & \int_{\Gamma_2} f_1\left(\frac{\pi w}{h}\right) \Phi_A^{(0)}(w, h) dw \\ &= \int_{C_R} f_1\left(\frac{\pi w}{h}\right) \Phi_A^{(0)}(w, h) dw - \int_c^{c+R} f_1\left(i\frac{\pi s}{h}\right) \Phi_A^{(0)}(is, h) i ds, \end{aligned}$$

ここで C_R は次の 1/4 円からなる積分路である:

$$(7.3.24) \quad C_R : ic + Re^{i\theta}, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}.$$

補題 1.1.2 から, $|\text{Im } w| \geq c$ のとき

$$\left| f_1\left(\frac{\pi w}{h}\right) \right| \leq \beta_0 \left(\frac{h}{2\pi^2 |w|} \right)^{1/2} \exp\left(\frac{\pi}{h} |\text{Im } w|\right)$$

が成り立ち, 補題 3.4.4 から, $|\text{Im } w| \geq c$ のとき

$$(7.3.25) \quad |\Phi_A^{(0)}(w, h)| \leq 2\pi \kappa_A^{(0)}(\pi c/h) \exp\left(-\frac{2\pi}{h} |\text{Im } w|\right)$$

が成り立つ. よって $|\text{Im } w| \geq c$ のとき

$$(7.3.26) \quad \left| f_1\left(\frac{\pi w}{h}\right) \Phi_A^{(0)}(w, h) \right| \leq \beta_0 \kappa_A^{(0)}(\pi c/h) \left(\frac{2h}{|w|}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{\pi}{h} |\text{Im } w|\right)$$

が成り立つ. したがって, (7.3.23) 右辺の各積分は次のように押さえられる:

$$(7.3.27) \quad \begin{aligned} & \left| \int_{C_R} f_1\left(\frac{\pi w}{h}\right) \Phi_A^{(0)}(w, h) dw \right| \\ & \leq \beta_0 \kappa_A^{(0)}(\pi c/h) e^{-\pi c/h} \left(\frac{2h}{R}\right)^{1/2} \int_0^{\pi/2} \exp\left(-\frac{\pi}{h} R \sin \theta\right) R d\theta \\ & \leq \beta_0 \kappa_A^{(0)}(\pi c/h) e^{-\pi c/h} \left(\frac{h^3}{2R}\right)^{1/2} = O(N^{-1/2}); \end{aligned}$$

$$(7.3.28) \quad \begin{aligned} \left| \int_c^{c+R} f_1\left(i\frac{\pi s}{h}\right) \Phi_A^{(0)}(is, h) i ds \right| & \leq \beta_0 \kappa_A^{(0)}(\pi c/h) \left(\frac{2h}{c}\right)^{1/2} \int_c^{c+R} \exp\left(-\frac{\pi}{h} s\right) ds \\ & \leq \beta_0 \kappa_A^{(0)}(\pi c/h) \left(\frac{2h^3}{\pi^2 c}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{\pi c}{h}\right). \end{aligned}$$

結局 (7.3.13) 右辺第3項に対する評価は、次のとおりになる：

$$(7.3.29) \quad \left| \int_{\Gamma_2} f_1 \left(\frac{\pi w}{h} \right) \Phi_A^{(n)}(w, h) dw \right| \leq \left(\frac{2h^3}{\pi^2 c} \right)^{1/2} \beta_n \kappa_A^{(n)}(\pi c/h) \exp \left(-\frac{\pi c}{h} \right) + O(N^{-1/2}).$$

(7.3.29), (7.3.17), (7.3.21) をまとめて, Γ_2 上の積分に対して次の評価を得る：

$$(7.3.30) \quad \left| \int_{\Gamma_2} f_1 \left(\frac{\pi}{h} \varphi_H(w) \right) \varphi_H'(w) \Phi_A^{(0)}(w, h) dw \right| \\ \leq C_{11}(c, h) h^{-1/2} \exp \left(-\frac{\pi}{h} [2c - \lambda(c)] \right) + C_{12}(c, h) h^{-1/2} \exp \left(-\frac{\pi c}{h} \right) \\ + O(N^{-1/2}),$$

ここで, $\lambda(c)$ は (7.3.15) で定義される数, $C_{11}(c, h), C_{12}(c, h)$ は $c(0 < c < \pi/2), h > 0$ の関数で

$$(7.3.31) \quad C_{11}(c, h), C_{12}(c, h) = O(1) \quad (h \rightarrow 0, c \text{ 固定}).$$

なるものである。

$\Gamma_3, \Gamma_6, \Gamma_7$ 上の積分も同様に評価される。

以上をまとめて, 次の不等式を得る：

$$(7.3.32) \quad \left| \int_0^{(\pi/h)\varphi_H(R)} f_1(x) dx - Q_H^{(0)}(f_1, h, N) \right| \\ \leq \pi C_{11}(c, h) h^{-3/2} \exp \left(-\frac{\pi}{h} [2c - \lambda(c)] \right) + \pi C_{12}(c, h) h^{-3/2} \exp \left(-\frac{\pi c}{h} \right) \\ + O(N^{-1/2}).$$

ここで, $N \rightarrow \infty$, すなわち $R \rightarrow \infty$ とすれば, 数値積分 $I^+(f_1) \approx Q_H^{(0)}(f_1, h)$ に対する誤差評価を得る：

$$(7.3.33) \quad \left| \int_0^\infty f_1(x) dx - Q_H^{(0)}(f_1, h) \right| \\ \leq \pi C_{11}(c, h) h^{-3/2} \exp \left(-\frac{\pi}{h} [2c - \lambda(c)] \right) + \pi C_{12}(c, h) h^{-3/2} \exp \left(-\frac{\pi c}{h} \right).$$

c は $0 < c < \pi/2$ の範囲で自由にとれるから, 上の不等式の右辺を出来るだけ小さくするように c をとることにする。よって,

$$(7.3.34) \quad \sup_{0 < c < \pi/2} \{ \pi [2c - \lambda(c)], \pi c \}$$

を達成するような c をとれば, 誤差評価式 (7.3.2) を得る。 ■

次に, 振動積分 $I^+(f_2)$ ($f_2(x) = xJ_0(x)/(x^2 + 1)$) に対する理論誤差評価は次の定理のようになる：

定理 7.3.2 $f_2(x) = xJ_0(x)/(x^2 + 1)$ に対する数値積分公式 (7.2.5) の誤差は, つぎのように評価される：

$$(7.3.35) \quad |I^+(f_2) - Q_H^{(0)}(f_2, h)| \leq C_2(h) \exp \left(-\frac{2\mu_2(h)}{\sqrt{h}} \right),$$

ここで $C_2(h)$ は n, h の関数で

$$(7.3.36) \quad C_2(h) = O(1) \quad (h \downarrow 0)$$

をみたすもの、 $\mu_2(h)$ は h の関数で

$$(7.3.37) \quad \lim_{h \downarrow 0} \mu_2(h) = 1$$

をみたすものである。

一方、数値実験の結果からは

$$(7.3.38) \quad |\text{誤差}| \approx \text{定数} \times \exp\left(-\frac{2.02 \cdots}{\sqrt{h}}\right)$$

が得られ、上の解析結果 (7.3.35) とよく符合している。

これは $f_1(x) = J_0(x)$ に対する数値積分誤差が「誤差 = $O[\exp(-\text{定数}/h)]$ 」であるのに比べると、誤差の減衰の仕方が遅い。定理 7.3.2 の証明を以下に記すが、はじめに、何故 $f_2(x)$ に対して誤差の減衰が遅くなるのかを、簡単に述べる。それは、 $f_2(z)$ が点 $z = \pm i$ に 1 位の極を持つからである。振動積分 $I^+(f_2)$ を数値計算する際、 $x = (\pi/h)\varphi_H(t)$ と変数変換したのであったが、そのとき極 $z = \pm i$ は点 $\varphi_H^{-1}(\pm ih/\pi)$ に写る (φ_H^{-1} はあとで定義する φ_H の逆写像)。この極は h を小さくすると実軸 $\text{Im } w = 0$ に接近するため、数値積分の精度が悪くなるのである。

(定理 7.3.2 の証明)

今度は、変数変換後の被積分関数 $f_2((\pi/h)\varphi_H(w))\varphi_H'(w)$ が $0 < d < \pi/2$ なる d に対し定理 3.2.3 の条件をみたすので、定理 3.2.3 をそのまま適用することが出来る。

$f_2(z)$ は $z = \pm i$ に 1 位の極を持つので、変数変換後の関数 $f_2((\pi/h)\varphi_H(w))\varphi_H'(w)$ は $\varphi_H(w) = \pm ih/\pi$ なる点 w に特異点を持つことになる。

図 7.4 は、 w 平面の直線群 $\text{Re } w = \text{定数}$ 及び半直線群 $\text{Re } w \geq 0, \text{Im } w = \text{定数}$ が写像 $z = \varphi_H(w)$ によって z 平面にどのように写されるかを示した図である。図から分かるように、 $d > 0$ を十分小さくすれば、写像 φ_H の領域 $D^+(d) = \{w \in \mathbb{C} \mid \text{Re } w \geq 0, |\text{Im } w| < d\}$ への制限 $\varphi_H: D^+(d) \rightarrow \varphi_H(D^+(d))$ は上への 1 対 1 写像になる。したがって、 $\varphi_H(D^+(d))$ から $D^+(d)$ へ逆写像 φ_H^{-1} を定義することが出来る。一方、 h が十分小さいとき、 $f_2(z)$ の極 $z = \pm ih/\pi$ は領域 $\varphi_H(D^+(d))$ に含まれることが、図 7.4 から分かる。

以上から、 $\varphi_H(-w) = \varphi_H(w)$ であることも考慮して、次のことがいえる： d, h が十分小さいとき、 w 平面の帯状領域 $D(d) = \{w \in \mathbb{C} \mid |\text{Im } w| < d\}$ の点 w で $\varphi_H(w) = ih/\pi$ を満たすものは $\pm \varphi_H^{-1}(ih/\pi)$ の 2 点のみ、 $\varphi_H(w) = -ih/\pi$ を満たす点 w は $\pm \varphi_H^{-1}(-ih/\pi)$ の 2 点のみである。

定理 3.2.2 を積分

$$(7.3.39) \quad \int_0^\infty f_2(x) dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty \text{sgn } t f_2\left(\frac{\pi}{h} \varphi_H(t)\right) \varphi_H'(t) dt$$

に適用して、まず、次の不等式を得る：

$$(7.3.40) \quad \left| \int_0^\infty f_2(x) dx - Q_H^{(0)}(f_2, h) \right| \leq \frac{\pi}{2h} \kappa_A^{(0)}(\pi(d-0)/h) \mathcal{N}'\left(f_2\left(\frac{\pi}{h} \varphi_H\right) \varphi_H', d-0\right) \exp\left(-\frac{2\pi d}{h}\right) + 2\pi |I_n(1)| \kappa_A^{(0)}((\pi/h)|\text{Im } \varphi_H^{-1}(ih/\pi)|) \exp\left(-\frac{2\pi}{h} |\text{Im } \varphi_H^{-1}(ih/\pi)|\right).$$

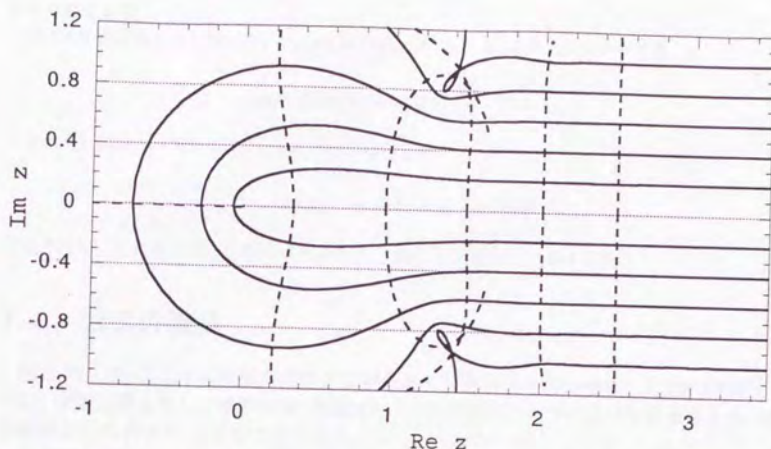


図 7.4 w 平面における直線群 $\operatorname{Re} w = 0, 0.5, 1.0, 1.5, 2.0, 2.5$; $\operatorname{Re} w \geq 0, \operatorname{Im} w = 0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0$ の写像 $z = \varphi_H(w)$ による像。実線は $\operatorname{Re} w = \text{一定}$ の像、破線は $\operatorname{Im} w = \text{一定}$ の像である。

ここで、(7.3.40) 右辺第 1 項の $\mathcal{N}(\dots)$ に関して不等式

$$\begin{aligned}
 (7.3.41) \quad & \mathcal{N}\left(f_2\left(\frac{\pi}{h}\varphi_H\right)\varphi_H', d=0\right) \\
 &= \frac{2h}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\varphi_H(t+id)| |J_0((\pi/h)\varphi_H(t+id))|}{|\varphi_H(t+id)^2 + h^2/\pi^2|} |\varphi_H'(t+id)| dt \\
 &\leq \frac{\beta_0 \sqrt{2h^3}}{\pi^2} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\varphi_H(t+id)|^{1/2} |\varphi_H'(t+id)|}{|\varphi_H(t+id)^2 + h^2/\pi^2|} dt \right\} \exp\left(\frac{\pi \lambda(d)}{h}\right)
 \end{aligned}$$

が成り立つ。 $\lambda(d)$ は (7.3.15) で定義される数、第 2 段から第 3 段への不等式の導出は補題 I.1.1 を用いた。

この (7.3.41) の右辺の積分は $h \rightarrow 0$ のとき

$$(7.3.42) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi_H(t+id)|^{-3/2} |\varphi_H'(t+id)| dt < +\infty$$

に近づくことに注意して、結局、次の誤差評価を得る：

$$\begin{aligned}
 (7.3.43) \quad & \left| \int_0^\infty f_2(x) dx - Q_H^{(0)}(f_2, h) \right| \\
 &\leq h^{1/2} C_3(d, h) \exp\left(-\frac{\pi}{h} [2d - \lambda(d)]\right) \\
 &\quad + 2\pi |I_0(1)| \kappa_A^{(0)}((\pi/h) |\operatorname{Im} \varphi_H^{-1}(ih/\pi)|) \exp\left(-\frac{2\pi}{h} |\operatorname{Im} \varphi_H^{-1}(ih/\pi)|\right),
 \end{aligned}$$

ここで、 $C(d, h)$ は d, h の関数で、

$$(7.3.44) \quad C_3(d, h) = O(1) \quad (h \rightarrow 0, d \text{ 固定})$$

なるものである。

(7.3.43) 右辺第2項において, $\varphi_H(w) \approx (\pi/2)w^2$ ($w \approx 0$) より, $h \approx 0$ のとき

$$\varphi_H^{-1}(\pm ih/\pi) \approx (1 \pm i) \frac{\sqrt{h}}{\pi} \quad (h \approx 0),$$

すなわち, $\mu_2(h) - 1(h=0)$ なる $\mu_2(h)$ が存在して

$$\operatorname{Im} \varphi_H^{-1}(\pm ih/\pi) = \pm \frac{1}{\pi} \mu_2(h) \sqrt{h}$$

が成り立つ。これを (7.3.43) 右辺に代入して, 求める不等式 (7.3.35) を得る。

7.4 公式の改良

積分 (7.2.10) のように被積分関数が実軸の近くに特異点を持つ場合, 7.3節で解析したように, 変数変換を施した後の被積分関数が $h \rightarrow 0$ で実軸に近づくような特異点をもつため, 数値積分公式 (7.2.5) の精度は悪くなる。

このような場合, 何らかの方法で特異点の位置を実軸から遠ざければ, 積分の精度が改良されると予想される。その具体策として次の方法が考えられる:

方法 7.4.1 積分を次のように2分割する:

$$(7.4.1) \quad \int_0^\infty f(x) dx = \int_0^a f(x) dx + \int_a^\infty f(x) dx.$$

(a) (7.4.1) の右辺第1項 $\int_0^a f(x) dx$ の近似値を従来の数値積分公式を用いて計算する (本論文では, DE 公式 [27] を用いた)。

(b) (7.4.1) の右辺第2項 $\int_a^\infty f(x) dx$ に変数変換

$$(7.4.2) \quad x = \frac{\pi}{h} \varphi_H(t; h, a), \quad \varphi_H(t; h, a) = t \tanh \left(\frac{\pi}{2} \sinh t \right) + \frac{ha}{\pi} \operatorname{sech} \left(\frac{\pi}{2} \sinh t \right)$$

を施し, 数値積分公式 (3.2.13) を適用して, $\int_a^\infty f(x) dx$ の近似値を計算する:

$$\begin{aligned} (7.4.3) \quad \int_a^\infty f(x) dx &= \frac{\pi}{2h} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sgn} t f \left(\frac{\pi}{h} \varphi_H(t; h, a) \right) \varphi_H'(t; h, a) dt \\ &\approx \pi \sum_{k=1}^{\infty} f \left(\frac{\pi}{h} \varphi_H \left(h \frac{j_{nk}}{\pi}; h, a \right) \right) \varphi_H' \left(h \frac{j_{nk}}{\pi}; h, a \right) \\ &\quad + \sum_{\lambda=0}^{n-1} c_\lambda^{(n)} h^{2\lambda+1} \frac{\partial^{2\lambda+1}}{\partial t^{2\lambda+1}} \left\{ f \left(\frac{\pi}{h} \varphi_H(t; h, a) \right) \varphi_H'(t; h, a) \right\} \Big|_{t=0}, \end{aligned}$$

ここで, $c_\lambda^{(n)}$ は (3.2.14) で定義される数, $n=0$ のとき (7.4.3) 右辺第2項は0とおくものとする。

ここで公式(7.4.3)を $n = 0, 1, 2$ の場合について、具体的に書き下しておく：

$$\begin{aligned}
 (n=0) \\
 (7.4.4) \quad \int_a^\infty f(x)dx &\approx \pi \sum_{k=1}^\infty f\left(\frac{\pi}{h} \varphi_H\left(h \frac{j_{0k}}{\pi}; h, a\right)\right) \varphi_H'\left(h \frac{j_{0k}}{\pi}; h, a\right) \frac{2}{\pi j_{0k}(J_1(j_{0k}))^2}, \\
 (n=1) \\
 (7.4.5) \quad \int_a^\infty f(x)dx &\approx \pi \sum_{k=1}^\infty f\left(\frac{\pi}{h} \varphi_H\left(h \frac{j_{1k}}{\pi}; h, a\right)\right) \varphi_H'\left(h \frac{j_{1k}}{\pi}; h, a\right) \frac{2}{\pi j_{1k}(J_2(j_{1k}))^2} \\
 &\quad + \left(2h - \frac{\pi}{4}ah^2\right)f(a), \\
 (n=2) \\
 (7.4.6) \quad \int_a^\infty f(x)dx &\approx \pi \sum_{k=1}^\infty f\left(\frac{\pi}{h} \varphi_H\left(h \frac{j_{2k}}{\pi}; h, a\right)\right) \varphi_H'\left(h \frac{j_{2k}}{\pi}; h, a\right) \frac{2}{\pi j_{2k}(J_3(j_{2k}))^2} \\
 &\quad + \left[\left(\frac{5}{6} - \frac{8}{3\pi^2}\right)ah^4 + \left(\frac{16}{3\pi^2} - \frac{8}{3}\right)h^3 - \frac{4}{3}ah^2 + \frac{16}{3}h\right]f(a) \\
 &\quad + 8h^2\left(1 - \frac{ah}{4}\right)^2 f'(a).
 \end{aligned}$$

積分(7.2.10)を上の方法7.4.1で計算し、公式(7.2.5)を直接適用するのに比べてどの程度改善されたか調べた。その結果を図7.5に示す。

グラフから積分(7.2.10)の場合、積分区間を分割する座標 a を $a=5$ 程度に大きくとればよい近似値を得ることが分かる。

次に、積分

$$(7.4.7) \quad \int_0^\infty \frac{J_n(x)}{(x^2+1)^{1/2}} dx \left(= I_{n/2}\left(\frac{1}{2}\right) K_{n/2}\left(\frac{1}{2}\right)\right),$$

$$(7.4.8) \quad \int_0^\infty x^{-1/2} J_n(x) dx \left(= 2^{-1/2} \frac{\Gamma(n/2+1/4)}{\Gamma(n/2+3/4)}\right),$$

$$(7.4.9) \quad \int_0^\infty \log x J_n(x) dx \left(= \psi\left(\frac{n+1}{2}\right) + \log 2\right),$$

($\psi(z)$ は di-Gamma 関数である： $\psi(z) = \Gamma'(z)/\Gamma(z)$ 。) に対し、方法7.4.1を用いて近似値を計算し、その性能を調べた。表7.1, 7.2, 7.3 にその結果を示す。

方法7.4.1は、(7.4.8)のような端点にべきの特異性をもつ積分、(7.4.9)のような対数特異性をもつ積分に対しても有効である。この場合、もとの積分に公式(7.2.5)を直接適用することは出来ないが、積分を(7.4.1)のように分割すれば、右辺第1項の有限区間積分 $\int_0^a f(x)dx$ にのみ特異性が存在する。これはDE公式を用いて計算することが出来る。積分(7.4.7), (7.4.8)に対しては公式(7.4.3)の無限和を $\varepsilon_{\text{trunc}} = 10^{-15}$ で打ち切り、積分(7.4.9)に対しては $\varepsilon_{\text{trunc}} = 10^{-14}$ で打ち切った：

積分(7.4.7), (7.4.8), (7.4.9)の場合いずれも、 $a=5$ 程度にとれば十分よい精度の結果が得られることが分かる。

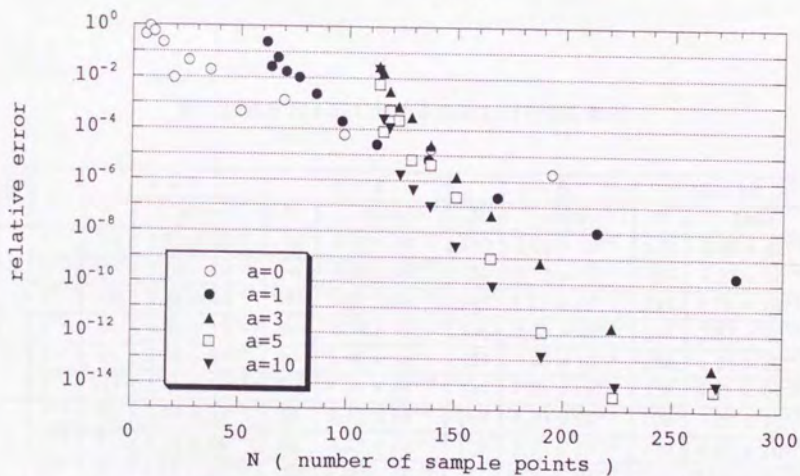
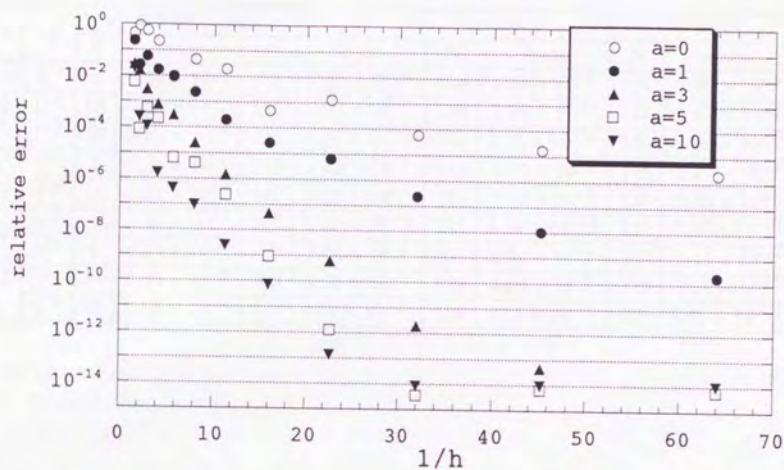


図 7.5 積分 (7.2.10) に対する積分 (7.2.10) とその改良版方法 7.4.1 との誤差の比較.

表 7.1 積分 (7.4.7) に対する積分 (7.2.10) とその改良版方法 7.4.1 との誤差の比較.

n	h	$a = 0$		$a = 3$		$a = 5$		$a = 10$	
		N	error	N	error	N	error	N	error
0	2^{-1}	8	4.23×10^{-2}	124	7.48×10^{-3}	124	4.41×10^{-5}	124	1.10×10^{-4}
	2^{-3}	26	2.90×10^{-3}	146	7.61×10^{-6}	146	1.85×10^{-6}	146	4.07×10^{-8}
	2^{-5}	98	2.10×10^{-5}	230	1.39×10^{-12}	231	7.34×10^{-15}	232	8.24×10^{-15}
1	2^{-1}	7	3.22×10^{-1}	116	4.42×10^{-3}	116	1.36×10^{-3}	116	1.17×10^{-3}
	2^{-3}	26	9.74×10^{-3}	137	1.61×10^{-5}	137	3.44×10^{-5}	138	9.22×10^{-9}
	2^{-5}	98	1.56×10^{-5}	222	7.26×10^{-13}	222	1.16×10^{-14}	223	7.55×10^{-15}
2	2^{-1}	7	6.15×10^{-1}	107	1.54×10^{-2}	107	2.37×10^{-4}	107	1.14×10^{-4}
	2^{-3}	25	3.38×10^{-3}	129	2.23×10^{-5}	129	4.04×10^{-6}	129	1.01×10^{-7}
	2^{-5}	97	4.56×10^{-6}	213	3.97×10^{-13}	214	1.18×10^{-14}	215	7.67×10^{-15}

表 7.2 積分 (7.4.8) に対する方法 7.4.1 の振る舞い.

n	h	$a = 1$		$a = 3$		$a = 5$		$a = 10$	
		N	error	N	error	N	error	N	error
0	2^{-1}	72	7.71×10^{-3}	72	4.13×10^{-3}	132	8.05×10^{-5}	132	1.67×10^{-4}
	2^{-3}	94	2.16×10^{-4}	94	2.50×10^{-5}	154	9.15×10^{-7}	155	7.27×10^{-8}
	2^{-5}	180	6.48×10^{-8}	181	6.20×10^{-12}	242	5.94×10^{-15}	243	8.70×10^{-15}
1	2^{-1}	64	6.33×10^{-2}	64	1.13×10^{-2}	116	2.39×10^{-3}	116	2.61×10^{-3}
	2^{-3}	86	1.58×10^{-4}	86	1.46×10^{-5}	138	1.36×10^{-5}	138	1.25×10^{-7}
	2^{-5}	172	5.44×10^{-9}	173	7.15×10^{-14}	226	1.59×10^{-14}	226	6.97×10^{-15}
2	2^{-1}	59	1.44×10^{-1}	59	9.42×10^{-3}	107	5.56×10^{-4}	107	1.25×10^{-3}
	2^{-3}	81	1.24×10^{-4}	81	8.47×10^{-5}	129	1.15×10^{-6}	130	2.25×10^{-7}
	2^{-5}	167	5.58×10^{-10}	169	4.16×10^{-14}	217	1.70×10^{-14}	218	7.00×10^{-15}

表 7.3 積分 (7.4.9) に対する方法 7.4.1 の振る舞い.

n	h	$a = 1$		$a = 3$		$a = 5$		$a = 10$	
		N	error	N	error	N	error	N	error
0	2^{-1}	60	2.93×10^{-1}	68	2.17×10^{-2}	124	4.45×10^{-3}	124	1.05×10^{-2}
	2^{-3}	82	8.41×10^{-4}	91	5.37×10^{-4}	147	1.07×10^{-4}	147	2.31×10^{-7}
	2^{-5}	171	6.92×10^{-8}	180	6.01×10^{-13}	237	2.11×10^{-13}	237	5.59×10^{-15}
1	2^{-1}	56	2.05×10^0	64	3.59×10^{-1}	116	1.16×10^{-1}	116	1.48×10^{-1}
	2^{-3}	78	2.57×10^{-2}	86	4.70×10^{-3}	138	1.25×10^{-3}	138	2.59×10^{-5}
	2^{-5}	166	5.97×10^{-8}	175	1.05×10^{-11}	227	7.61×10^{-13}	230	9.29×10^{-13}
2	2^{-1}	51	3.69×10^{-1}	59	5.85×10^{-2}	107	1.29×10^{-2}	107	2.34×10^{-2}
	2^{-3}	73	2.77×10^{-3}	82	9.15×10^{-4}	130	2.17×10^{-7}	130	1.64×10^{-7}
	2^{-5}	164	9.70×10^{-10}	172	3.88×10^{-14}	220	2.66×10^{-13}	220	1.55×10^{-13}

7.5 補題

はじめに, 関数 $\varphi_H(w) = w \tanh((\pi/2) \sinh w)$ に関する不等式で, 前節の証明で必要なものをここで列挙しておく. t, s を実数とする.

まず $\varphi(t+is)$ に関して, $\operatorname{Re} \sinh(t+is) = \sinh t \cos s$,

$$\sinh(|\operatorname{Re} z|) \leq \left\{ \begin{array}{l} |\sinh z| \\ |\cosh z| \end{array} \right\} \leq \cosh(\operatorname{Re} z)$$

に注意すると, 直ちに次の不等式が得られる: $t \neq 0, |s| \leq \pi/2$ のとき

$$(7.5.1) \quad |t+is| \tanh\left(\frac{\pi}{2} \sinh |t| \cos s\right) \leq |\varphi_H(t+is)| \leq |t+is| \coth\left(\frac{\pi}{2} \sinh |t| \cos s\right).$$

また,

$$\varphi_H(t+is) \mp (t+is) = (t+is) \frac{\exp(\mp(\pi/2) \sinh(t+is))}{\cosh((\pi/2) \sinh(t+is))}$$

より, 次の不等式が得られる: $t \neq 0, |s| < \pi/2$ のとき

$$(7.5.2) \quad |\varphi_H(t+is) \mp (t+is)| \leq |t+is| \frac{\exp(\mp(\pi/2) \sinh t \cos s)}{\sinh((\pi/2) \sinh |t| \cos s)}.$$

$\varphi_H(t+is)$ の虚部は, 簡単な計算により, 次のように表わされることが分かる:

$$(7.5.3) \quad \begin{aligned} & \operatorname{Im} \varphi_H(t+is) \\ &= \frac{s \sinh(\frac{\pi}{2} \sinh t \cos s) \cosh(\frac{\pi}{2} \sinh t \cos s) + t \sin(\frac{\pi}{2} \cosh t \sin s) \cos(\frac{\pi}{2} \cosh t \sin s)}{\sinh^2(\frac{\pi}{2} \sinh t \cos s) + \cosh^2(\frac{\pi}{2} \cosh t \sin s)}. \end{aligned}$$

式 (7.5.3) の右辺を評価することにより, 次の不等式が導かれる: $t \neq 0, |s| \leq \pi/2$ のとき

$$(7.5.4) \quad |\operatorname{Im} \varphi_H(t+is)| \leq |s| \coth\left(\frac{\pi}{2} \sinh |t| \cos s\right) + \frac{|t|/2}{\sinh^2(\frac{\pi}{2} \sinh t \cos s)}.$$

最後に, $\varphi_H(w)$ の導関数

$$(7.5.5) \quad \varphi_H'(w) = \tanh\left(\frac{\pi}{2} \sinh w\right) + \frac{(\pi/2)w \cosh w}{\cosh^2((\pi/2) \sinh w)}.$$

に関しては, 次の不等式が得られる: $t \neq 0, |s| \leq \pi/2$ のとき,

$$(7.5.6) \quad |\varphi_H'(t + is)| \leq \coth\left(\frac{\pi}{2} \sinh |t| \cos s\right) + \frac{(\pi/2)|t + is| \cosh t}{\sinh^2((\pi/2) \sinh t \cos s)}.$$

$$(7.5.7) \quad |\varphi_H'(t + is) - 1| \leq \frac{\exp(-(\pi/2) \sinh t \cos s)}{\sinh((\pi/2) \sinh |t| \cos s)} + \frac{(\pi/2)|t + is| \cosh t}{\sinh^2((\pi/2) \sinh t \cos s)}.$$

第 8 章

まとめ

本論文では、Fourier 変換型積分に対する大浦・森の DE 公式の研究をもとに、Hankel 変換型積分、すなわち、Bessel 関数を含む振動積分の数値計算公式を考案しようという動機のもとに、Bessel 関数の零点を標本点にもつ補間公式および数値積分公式を構成し、その性質を詳細に調べ、最後にそれらの公式の応用として、Hankel 変換型積分の数値計算を試みた。

本研究の主要結果は次のとおりである。

- (a) Bessel 関数の零点を標本点にもつ補間公式「Lagrange-Bessel 補間公式」を考案し、その理論誤差解析を行い、補間誤差が標本点数密度に対し指数関数的に減衰することを示した。
- (b) 補間公式をもとに対称積分 $I_S(f) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ 、および反対称積分 $I_A(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sgn} x f(x)dx$ に対する数値積分公式、「Lagrange-Bessel 積分公式」を導出し、理論誤差解析により、それらの誤差は標本点数密度に対し指数関数的に減衰することを示した。そしてとくに反対称積分に対する Lagrange-Bessel 積分公式は、対称積分に対する従来の台形公式と同程度の精度を達成することを理論的に示し、実験により確認した。
- (c) 位数が整数でない正の実数 ν である Bessel 関数 $J_\nu(x)$ の零点を標本点に用いて、べき的特異性をもつ積分 $I_{(\nu)}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} |x|^{2(\nu)-1} f(x)dx$ に対する数値積分公式を構成し、理論誤差解析を行い、それらの誤差は標本点数密度に対し指数関数的に減衰することを示し、さらに、数値実験からそれを確認した。
- (d) 反対称積分 $I_A(f)$ 、べき的特異性をもつ積分 $I_{(\nu)}(f)$ に対し、Lagrange-Bessel 数値積分公式が厳密な積分値を与えるような関数のクラスを明らかにした。
- (e) (i) 反対称積分に対する Lagrange-Bessel 数値積分公式の応用として、奇関数の半無限区間積分の数値計算が効率よく行えることを示した。また、被積分関数の減衰が遅い場合は DE 変換を用いて減衰を速くすることにより、従来の DE 公式より少ない標本点数で数値積分を行うことが出来ることを示した。
(ii) これに関連して、反対称積分に対する有限個標本点の Lagrange-Bessel 数値積分公式の誤差評価を行い、(有限個標本点の) Lagrange-Bessel 数値積分公式がほぼ最適であることも示した。

- (f) 本研究の当初の動機であった Hankel 変換型積分の数値計算に、反対称積分に対する Lagrange-Bessel 数値積分公式を応用し、いくつかの例について数値実験を行い、理論誤差解析を行った。その結果 Hankel 変換型積分の計算が高精度で出来ることが分かった。ただし、被積分関数が正の実軸近傍に特異点をもつ場合は、積分区間を分割するという工夫が必要である。

今後の課題として、つぎのことが挙げられる：

- (a) 3.2.2節において、直交多項式補間から Gauss 型数値積分公式をつくる場合、Sinc 補間から台形公式をつくる場合、Lagrange-Bessel 補間から反対称積分に対する Lagrange-Bessel 数値積分公式をつくる場合、数値積分公式はもとの補間公式に比べて倍の精度を得ていることを説明した。この現象は数学的にどういう形で一般化出来るか、すなわち、どのような補間公式からどのような積分に対して数値積分公式を導出すると、精度が倍増するか？これを解明することが課題として残されている。
- (b) 第7章でとりあげた Bessel 関数を含む振動積分の数値計算について、精度がもっとよくなるような変数変換のとり方はないか、ということも課題としてあげられる。被積分関数が積分区間の近傍に特異点を持つような場合、7.4節では積分区間を分割することにより精度の改善を試みたが、変数変換をうまく選ぶことにより、特異点の存在による精度の低下を回避することも期待出来る。

謝辞

東京大学大学院工学系研究科杉原正顕助教授、森正武教授には、長年にわたり研究生生活で数多くの御指導、叱咤激励を頂きました。また、東京大学大学院工学系研究科降旗大介助手、大浦拓哉氏、岡野大氏、その他研究室のみなさまには、貴重な御助言、計算機使用に際しての御指導を頂きました。ここに感謝します。

参考文献

- [1] Abramowitz, M. and Stegun, I. A., *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*, John Wiley and Sons, New York, 1964.
- [2] Erdélyi, A. (ed.), *Tables of Integral Transforms, Vol. II*, McGraw-Hill, New York, 1954.
- [3] Ford, W. F. and Sidi, A., An algorithm for a generalization of the Richardson extrapolation process, *SIAM J. Numer. Anal.*, 24(1987), 1212-1232.
- [4] Frappier, C. and Olivier, P., A quadrature formula involving zeros of Bessel functions, *Math. Comput.*, 60(1993), 303-316.
- [5] Frappier, C. and Rahman, Q. I., Une formule de quadrature pour les fonctions entières de type exponentiel, *Ann. Sci. Math. Québec*, 10(1986), 17-26.
- [6] Grozev, G. R. and Rahman, Q. I., A quadrature formula with zeros of Bessel functions as nodes, *Math. Comp.*, 64(1995), 715-725.
- [7] Levin, B. Ja., *Distribution of Zeros of Entire Functions* (English translation), by Boas, R., P., Danskin, J., M., Goodspeed, F., M., Korevaar, J., Shields, A., L. and Thielman, H., P., American Mathematical Society, Providence, 1964.
- [8] Levin, D., Development of non-linear transformations for improving convergence of sequences, *Internat. J. Comput. Math.*, B3(1973), 371-388.
- [9] Longman, I. M., Note on a method for computing infinite integrals of oscillatory functions, *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 52(1956), 764-768.
- [10] Longman, I. M., Numerical Laplace transform inversion of a function arising in viscoelasticity, *J. Comput. Phys.*, 10(1972), 224-231.
- [11] Newman, D. J., Quadrature formulae for H^p functions, *Math. Z.*, 166(1979), 111-115.
- [12] 緒方秀教, 杉原正顯, Bessel 関数の零点を標本点にもつ補間及び数値積分公式, 日本応用数理学会論文誌, 6(1996), 39-66.
- [13] Ooura, T. and Mori, M., The double exponential formula for oscillatory functions over the half infinite interval, *J. Comput. Appl. Math.*, 38(1991), 353-360.
- [14] Sidi, A., Some properties of a generalization of the Richardson extrapolation process, *J. Inst. Math. Appl.*, 24(1979), 327-346.

- [15] Sidi, A., Analysis of convergence of the T-transformation for power series, *Math. Comput.*, 35(1980), 851-874.
- [16] Sidi, A., Extrapolation methods for oscillatory infinite integrals, *J. Inst. Maths. Applies.*, 26(1980), 1-20.
- [17] Levin, D. and Sidi, A., Two new classes of non-linear transformation for accelerating the convergence of infinite integrals and series, *Appl. Math. Comp.*, 9(1981), 175-215.
- [18] Sidi, A., The numerical evaluation of very oscillatory infinite integrals by extrapolation, *Math. Comput.*, 38(1982), 517-529.
- [19] Sidi, A., An algorithm for a special case of a generalization of the Richardson extrapolation process, *Numer. Math.*, 38(1982), 299-307.
- [20] Sidi, A., Extrapolation methods for divergent oscillatory infinite integrals that are defined in the sense of summability, *J. Comput. Appl. Math.*, 17(1987), 105-114.
- [21] Sidi, A., A user-friendly extrapolation method for oscillatory infinite integrals, *Math. Comput.*, 51(1988), 249-266.
- [22] Sidi, A., On rates of acceleration of extrapolation methods for oscillatory infinite integrals, *BIT*, 30(1990), 347-357.
- [23] Stenger, F., Numerical methods based on Whittaker Cardinal, or Sinc functions, *SIAM Rev.*, 23(1981), 165-224.
- [24] Stenger, F., *Numerical Methods Based on Sinc and Analytic Functions*, Springer-Verlag, New York, 1993.
- [25] Sugihara, M., A class of functions for which the trapezoidal rule gives the exact value of the integral over the infinite interval, *J. Comput. Appl. Math.*, 20(1987), 387-392.
- [26] Sugihara, M., Optimality of the double exponential formulas —Functional analysis approach—, to appear.
- [27] Takahasi, H. and Mori, M., Double exponential formula for numerical integration, *Publ. RIMS, Kyoto Univ.*, 9(1974), 121-141.
- [28] Titchmarsh, *The Theory of Functions*, 2nd. ed., Oxford Univ. Press, 1939.
- [29] Watson, G., N., *A Treatise on the Theory of Bessel Functions*, 2nd ed., Cambridge Univ. Press, London, 1944.

付録第 I 章

Bessel 関数の絶対値の評価と, Bessel 関数を含む積分の計算

I.1 Bessel 関数の絶対値の評価に関する補題

この節の前半では, 第 7 章で用いる $|J_n(z)|$ の評価に関する補題を与え, 後半では, 第 2 章で用いる $1/|J_\nu(z)|$ の評価に関する補題を与える.

補題 I.1.1 $n = 0, 1, 2, \dots$ に対し,

$$(I.1.1) \quad \beta_n \equiv \sup_{z \in \mathbb{C}} \sqrt{2\pi|z|} e^{-|\operatorname{Im} z|} |J_n(z)| < +\infty,$$

すなわち, 定数 $\beta_n > 0$ が存在して, 任意の複素数 $z \neq 0$ に対し

$$(I.1.2) \quad |J_n(z)| \leq \beta_n \frac{e^{|\operatorname{Im} z|}}{\sqrt{2\pi|z|}}$$

が成り立つ. □

(証明) $|J_n(-z)| = |(-1)^n J_n(z)| = |J_n(z)|$ であるから, $\operatorname{Re} z \geq 0$ の場合に証明すれば十分である.

実軸の負の部分を除いた範囲 ($|\arg z| < \pi$) で $z \rightarrow \infty$ としたときの $J_n(z)$ の漸近展開

$$(I.1.3) \quad J_n(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi z}} \left[e^{i(z - n\pi/2 - \pi/4)} \{1 + \phi_n^{(1)}(z)\} + e^{-i(z - n\pi/2 - \pi/4)} \{1 + \phi_n^{(2)}(z)\} \right],$$

$$\phi_n^{(1)}(z) = O(z^{-1}), \quad \phi_n^{(2)}(z) = O(z^{-1})$$

を用いる.

任意の $\epsilon > 0$ に対し $R > 0$ を十分大きくとると, $\operatorname{Re} z \geq 0, |z| > R$ において, $|\phi_n^{(1)}(z)|, |\phi_n^{(2)}(z)| \leq \epsilon, e^{-2|\operatorname{Im} z|} \leq \epsilon$ とすることができる. よって, (I.1.3) を用いて, $\operatorname{Re} z \geq 0, |z| > R$ において,

$$(I.1.4) \quad \begin{aligned} |J_n(z)| &\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi|z|}} \left\{ e^{-(\operatorname{Im} z)} (1 + \epsilon) + e^{(\operatorname{Im} z)} (1 + \epsilon) \right\} \\ &\leq \frac{e^{|\operatorname{Im} z|}}{\sqrt{2\pi|z|}} (1 + \epsilon) (1 + e^{-2|\operatorname{Im} z|}) \leq \frac{e^{|\operatorname{Im} z|}}{\sqrt{2\pi|z|}} (1 + \epsilon)^2, \end{aligned}$$

すなわち,

$$(I.1.5) \quad \sup_{\operatorname{Re} z \geq 0, |z| > R} \left\{ \sqrt{2\pi|z|} e^{-|\operatorname{Im} z|} |J_n(z)| \right\} \leq (1+\epsilon)^2 < +\infty$$

が成立する.

一方, $\operatorname{Re} z \geq 0, |z| \leq R$ においては明らかに $\sup \left\{ \sqrt{2\pi|z|} e^{-|\operatorname{Im} z|} |J_n(z)| \right\} < +\infty$ が成立する.

以上から, $\sup_{\operatorname{Re} z \geq 0} \left\{ \sqrt{2\pi|z|} e^{-|\operatorname{Im} z|} |J_n(z)| \right\} < +\infty$ がいえる, 証明が完了する. ■

補題 I.1.2 $M > 0$ を任意の定数とする. $n = 0, 1, 2, \dots$ に対し,

$$(I.1.6) \quad \sup_{|\operatorname{Im} z| \leq M} |J_n(z)| \leq \beta_n \frac{e^M}{\sqrt{2\pi M}}$$

が成り立つ.

□

(証明) $J_n(z)$ は全平面で正則であるから, 最大値の原理により, 任意の定数 $R > 0$ に対し

$$(I.1.7) \quad \max_{|\operatorname{Re} z| \leq R, |\operatorname{Im} z| \leq M} |J_n(z)| = \max \left\{ \max_{|\operatorname{Re} z| = R, |\operatorname{Im} z| \leq M} |J_n(z)|, \max_{|\operatorname{Re} z| \leq R, |\operatorname{Im} z| = M} |J_n(z)| \right\}$$

が成り立つ.

ところが, 補題 I.1.1 により,

$$(I.1.8) \quad \max_{|\operatorname{Re} z| = R, |\operatorname{Im} z| \leq M} |J_n(z)| \leq \beta_n \frac{e^M}{\sqrt{2\pi R}} \rightarrow 0 \quad R \rightarrow +\infty$$

となるから, R を十分大きくとれば,

$$(I.1.9) \quad \max_{|\operatorname{Re} z| \leq R, |\operatorname{Im} z| \leq M} |J_n(z)| = \max_{|\operatorname{Re} z| \leq R, |\operatorname{Im} z| = M} |J_n(z)| \leq \beta_n \frac{e^M}{\sqrt{2\pi M}}$$

が成り立つ. R は任意に大きくできるから, $R \rightarrow +\infty$ として, 題意の不等式を得る. ■

補題 I.1.3 任意の $\varepsilon > 0$ に対し, 正の整数 N を十分大きくとると, $|\operatorname{Re} z| = \pi(N + \nu/2 + 1/4)$ において, 不等式

$$(I.1.10) \quad \frac{1}{|J_\nu(z)|} \leq (1+\varepsilon) \sqrt{2\pi|z|} e^{-|\operatorname{Im} z|}$$

が成り立つ.

□

(証明) $|J_\nu(e^{\pm i\pi/2} z)| = |e^{\pm i\nu\pi/2} J_\nu(z)| = |J_\nu(z)|$ であるから, $\operatorname{Re} z > 0$ の場合に不等式を示せば十分である.

実軸の負の部分を除いた範囲 ($|\arg z| < \pi$) で $z \rightarrow \infty$ とするときの $J_\nu(z)$ の漸近展開 ([29], §7.2):

$$(I.1.11) \quad J_\nu(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi z}} \left[e^{i(z - \nu\pi/2 - \pi/4)} \{1 + \phi_\nu^{(1)}(z)\} + e^{-i(z - \nu\pi/2 - \pi/4)} \{1 + \phi_\nu^{(2)}(z)\} \right]$$

$$\phi_\nu^{(1)}(z) = O(z^{-1}), \quad \phi_\nu^{(2)}(z) = O(z^{-1})$$

を用いる.

Bessel 関数 $J_\nu(z)$ の漸近展開 (I.1.11) において, 任意の $\varepsilon > 0$ に対し, 正の整数 N を十分大きくとると, $\operatorname{Re} z = \pi(N + \nu/2 + 1/4)$ において

$$|\phi_\nu^{(1)}(z)| \leq \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}, \quad |\phi_\nu^{(2)}(z)| \leq \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}$$

とできることに注意すれば、 $\operatorname{Re} z = \pi(N + n/2 + 1/4)$ において $|J_\nu(z)|$ が次のように評価される
ことがわかる：

$$\begin{aligned} |J_\nu(z)| &\geq \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi z}} \left[(-1)^N e^{-\operatorname{Im} z} \{1 + \phi_\nu^{(1)}(z)\} + (-1)^N e^{\operatorname{Im} z} \{1 + \phi_\nu^{(2)}(z)\} \right] \right| \\ &\geq \frac{1}{\sqrt{2\pi|z|}} \left[e^{-\operatorname{Im} z} \{1 - |\phi_\nu^{(1)}(z)|\} + e^{\operatorname{Im} z} \{1 - |\phi_\nu^{(2)}(z)|\} \right] \\ &\geq \frac{1}{\sqrt{2\pi|z|}} \left[e^{-\operatorname{Im} z} \frac{1}{1+\varepsilon} + e^{\operatorname{Im} z} \frac{1}{1+\varepsilon} \right] \\ &\geq \frac{1}{\sqrt{2\pi|z|}} e^{|\operatorname{Im} z|} \frac{1}{1+\varepsilon}. \end{aligned}$$

最後の不等式は示すべき不等式に他ならない。

補題 I.1.4 任意の $M > 0$ に対して、定数 $\kappa_B^{(\nu)}(M)$ を

$$\kappa_B^{(\nu)}(M) = \sup_{|\operatorname{Im} z| \geq M} \left\{ \frac{e^{|\operatorname{Im} z|}}{\sqrt{2\pi|z|}} \middle/ |J_\nu(z)| \right\}$$

と定義するとき、

$$(1) \kappa_B^{(\nu)}(M) \text{ は単調減少}, \quad (2) \kappa_B^{(\nu)}(M) < +\infty, \quad (3) \lim_{M \rightarrow \infty} \kappa_B^{(\nu)}(M) = 1$$

が成り立つ。

上の補題で定義された $\kappa_B^{(\nu)}(\cdot)$ を用いると、次の不等式が成り立つことが分かる： $M > 0$ を任意の定数として、 $|\operatorname{Im} z| \geq M$ のとき

$$(I.1.12) \quad \frac{1}{|J_\nu(z)|} \leq \kappa_B^{(\nu)}(M) \sqrt{2\pi|z|} e^{-|\operatorname{Im} z|}$$

が成り立つ。

(証明) (1) の $\kappa_B^{(\nu)}(M)$ の単調減少性は明らかであるから、(2)、(3) を証明すればよい。

まず、 $|J_\nu(-z)| = |(-1)^\nu J_\nu(z)| = |J_\nu(z)|$ であるから、 $\kappa_B^{(\nu)}(M)$ の定義式において、 \sup をとる範囲を $\operatorname{Re} z \geq 0$ に制限してよい：

$$\kappa_B^{(\nu)}(M) = \sup_{|\operatorname{Im} z| \geq M, \operatorname{Re} z \geq 0} \left\{ \frac{e^{|\operatorname{Im} z|}}{\sqrt{2\pi|z|}} \middle/ |J_\nu(z)| \right\}.$$

この $\kappa_B^{(\nu)}(M)$ の表式、および、Bessel 関数 $J_\nu(z)$ の漸近展開 (I.1.11) より、(3) $\lim_{M \rightarrow \infty} \kappa_B^{(\nu)}(M) = 1$ が成り立つことは明らかである。

また、(2) $\kappa_B^{(\nu)}(M) < +\infty$ も容易にわかる。実際、 $J_\nu(z)$ の漸近展開 (I.1.11) より、十分大きな R に対して、 $|z| > R$ 、 $|\operatorname{Im} z| \geq M$ 、 $\operatorname{Re} z \geq 0$ において

$$\frac{e^{|\operatorname{Im} z|}}{\sqrt{2\pi|z|}} \middle/ |J_\nu(z)| \approx 1$$

が成り立ち、一方、 $|z| \leq R$ 、 $|\operatorname{Im} z| \geq M$ 、 $\operatorname{Re} z \geq 0$ においては、 $J_\nu(z)$ は実軸上にはか零点をもちないことから、

$$\sup \left\{ \frac{e^{|\operatorname{Im} z|}}{\sqrt{2\pi|z|}} \middle/ |J_\nu(z)| \right\} < +\infty$$

が成り立つ。

I.2 Bessel 関数を含む積分の計算

この節では, Chapter 3 で用いたいいくつかの積分に関する等式の証明を与える.

$$(I.2.1) \quad \text{p.v.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(h/(\pi x))^n J_n(\pi x/h)}{\pi x/h \mp j_{nk}} dx = \mp h H_n(j_{nk})$$

(計算) 実軸上で定義された関数 $f(x)$ の Hilbert 変換を $\mathcal{H}[f(x)](y)$ と書く:

$$(I.2.2) \quad \mathcal{H}[f(x)](y) \equiv \frac{1}{\pi} \text{p.v.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x-y} dx.$$

このとき, 求めるべき積分の値は, Hilbert 変換を用いて

$$h \mathcal{H}[x^{-n} J_n(x)](j_{nk})$$

と書ける. [2] によれば,

$$(I.2.3) \quad \mathcal{H}[x^{-n} J_n(x)](y) = -\text{sgn } y |y|^{-n} H_n(|y|)$$

で与えられることが分かるから, 結局 (I.2.1) を得る.

$$(I.2.4) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \text{sgn } x \frac{J_0(\pi x/h)^2}{(\pi x/h \mp j_{nk})^2} dx = \pm \frac{2h}{\pi j_{0k}}$$

(計算)

$$(I.2.5) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \text{sgn } x \frac{J_0(\pi x/h)^2}{(\pi x/h \mp j_{nk})^2} dx = \pm 4j_{0k} \frac{h}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{x J_0(x)}{(x^2 - j_{0k}^2)^2} dx$$

であるから, 右辺の積分を計算すればよい.

複素積分

$$I = \int_C \frac{z J_0(z) H_0^{(1)}(z)}{(z^2 - j_{0k}^2)^2} dz$$

を考える. ここで C は図 I.1 で示されたような積分路である. ただし, 図中 C_ϵ^\pm は中心 $\pm j_{nk}$, 半径 ϵ の半円 ($\epsilon > 0$ は十分小さくとる), C_ϵ^0 は原点中心, 半径 ϵ の半円, C_R は原点中心, 半径 R の半円である ($R > 0$ は十分大きくとる).

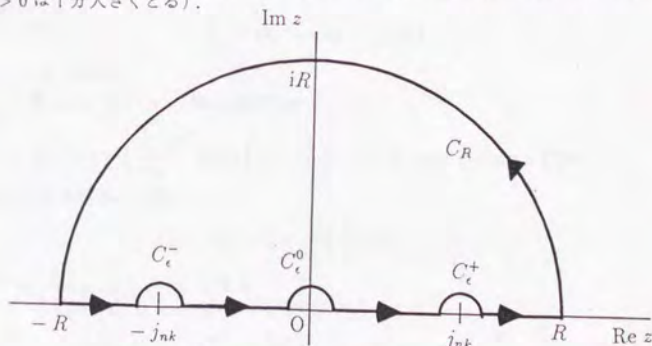


図 I.1 (I.2.5) の証明に用いられる積分路 C .

まず、被積分関数 $zJ_0(z)H_0^{(1)}(z)/(z^2-j_{0k}^2)^2$ は上半平面で正則であるから、Cauchy の積分定理により $I=0$ である。

一方、積分は次のように変形できる：

$$\begin{aligned}
 (1.2.6) \quad 0 = I &= \left(\int_{\epsilon}^{j_{0k}-\epsilon} + \int_{j_{0k}+\epsilon}^R \right) \left[\frac{xJ_0(x)H_0^{(1)}(x)}{(x^2-j_{0k}^2)^2} + \frac{(-x)J_0(-x)H_0^{(1)}(xe^{i\pi})}{(x^2-j_{0k}^2)^2} \right] dx \\
 &\quad + \int_{C_{\epsilon}^+} + \int_{C_{\epsilon}^0} + \int_{C_{\epsilon}^-} + \int_{C_R} \\
 &\quad (H_0^{(1)}(xe^{i\pi}) = -H_0^{(2)}(x), J_0(-x) = J_0(x) \text{ により }) \\
 &= 2 \left(\int_{\epsilon}^{j_{0k}-\epsilon} + \int_{j_{0k}+\epsilon}^R \right) \frac{xJ_0(x)^2}{(x^2-j_{0k}^2)^2} dx \\
 &\quad + \int_{C_{\epsilon}^+} + \int_{C_{\epsilon}^0} + \int_{C_{\epsilon}^-} + \int_{C_R}.
 \end{aligned}$$

ここでまず、

$$\begin{aligned}
 \lim_{\epsilon \downarrow 0} \int_{C_{\epsilon}^+} &= -i\pi \operatorname{Res} \left(\frac{zJ_0(z)H_0^{(1)}(z)}{(z^2-j_{0k}^2)^2}, j_{0k} \right) \\
 &= -\frac{i\pi}{4j_{0k}} J_0'(j_{0k})H_0^{(1)}(j_{0k}) = -\frac{\pi}{4j_{0k}} J_1(j_{0k})Y_0(j_{0k}) \\
 &= -\frac{1}{2j_{0k}^2}, \\
 \lim_{\epsilon \downarrow 0} \int_{C_{\epsilon}^-} &= -i\pi \operatorname{Res} \left(\frac{zJ_0(z)H_0^{(1)}(z)}{(z^2-j_{0k}^2)^2}, e^{i\pi}j_{0k} \right) \\
 &= -\frac{i\pi}{4j_{0k}} J_0'(-j_{0k})H_0^{(1)}(e^{i\pi}j_{0k}) = -\frac{i\pi}{4j_{0k}} J_1(j_{0k})H_0^{(2)}(j_{0k}) \\
 &= -\frac{\pi}{4j_{0k}} J_1(j_{0k})Y_0(j_{0k}) = -\frac{1}{2j_{0k}^2}
 \end{aligned}$$

と計算される。ただし、第1式では $J_0' = -J_1$ と Lommel の等式 $J_{\nu}(z)Y_{\nu+1}(z) - J_{\nu+1}(z)Y_{\nu}(z) = -2/(\pi z)$ より導かれる $J_1(j_{0k})Y_0(j_{0k}) = 2/(\pi j_{0k})$ を用い、第2式ではさらに $J_1(-z) = -J_1(z)$, $H_0^{(1)}(e^{i\pi}z) = -H_0^{(2)}(z)$ を用いた。

$\int_{C_{\epsilon}^0}$ に関しては、 C_{ϵ}^0 上で $|H_0^{(1)}(z)| = O(\log|z|)(\epsilon \downarrow 0)$ であることから、

$$\int_{C_{\epsilon}^0} = O(\epsilon^2 \log \epsilon) \quad (\epsilon \downarrow 0)$$

と評価され、 $\epsilon \downarrow 0$ で消える。

最後に \int_{C_R} に関して、 $H_0^{(1)}(z)$ の漸近展開公式

$$H_0^{(1)}(z) \sim \left(\frac{2}{\pi z} \right)^{1/2} \exp i \left(z - \frac{\pi}{4} \right) \quad (|z| \rightarrow \infty, -\pi < \arg z < 2\pi)$$

と補題 I.1.1 から上半平面で一樣に

$$|J_0(z)H_0^{(1)}(z)| \leq \frac{\beta_0}{\pi|z|} \left[1 + O\left(\frac{1}{|z|} \right) \right]$$

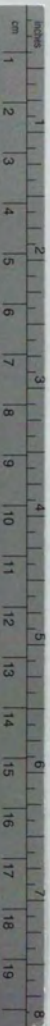
が成り立つから、 $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} = 0$ を得る。

以上により、(1.2.5) で $\epsilon \downarrow 0, R \rightarrow \infty$ とすることにより、

$$\int_0^{\infty} \frac{xJ_0(x)^2}{(x^2-j_{0k}^2)^2} dx = \frac{1}{2j_{0k}^2}$$

を得る。





Kodak Color Control Patches

© Kodak, 2007 TM Kodak

Blue Cyan Green Yellow Red Magenta White 3/Color Black



Kodak Gray Scale



© Kodak, 2007 TM Kodak

A 1 2 3 4 5 6 M 8 9 10 11 12 13 14 15 B 17 18 19

