

熱応力下の応力拡大係数簡便評価方法の開発と  
その円筒状構造物健全性評価への適用

飯 井 俊 行

①

学位論文

熱応力下の応力拡大係数  
簡便評価方法の開発と  
その円筒状構造物健全性評価への適用

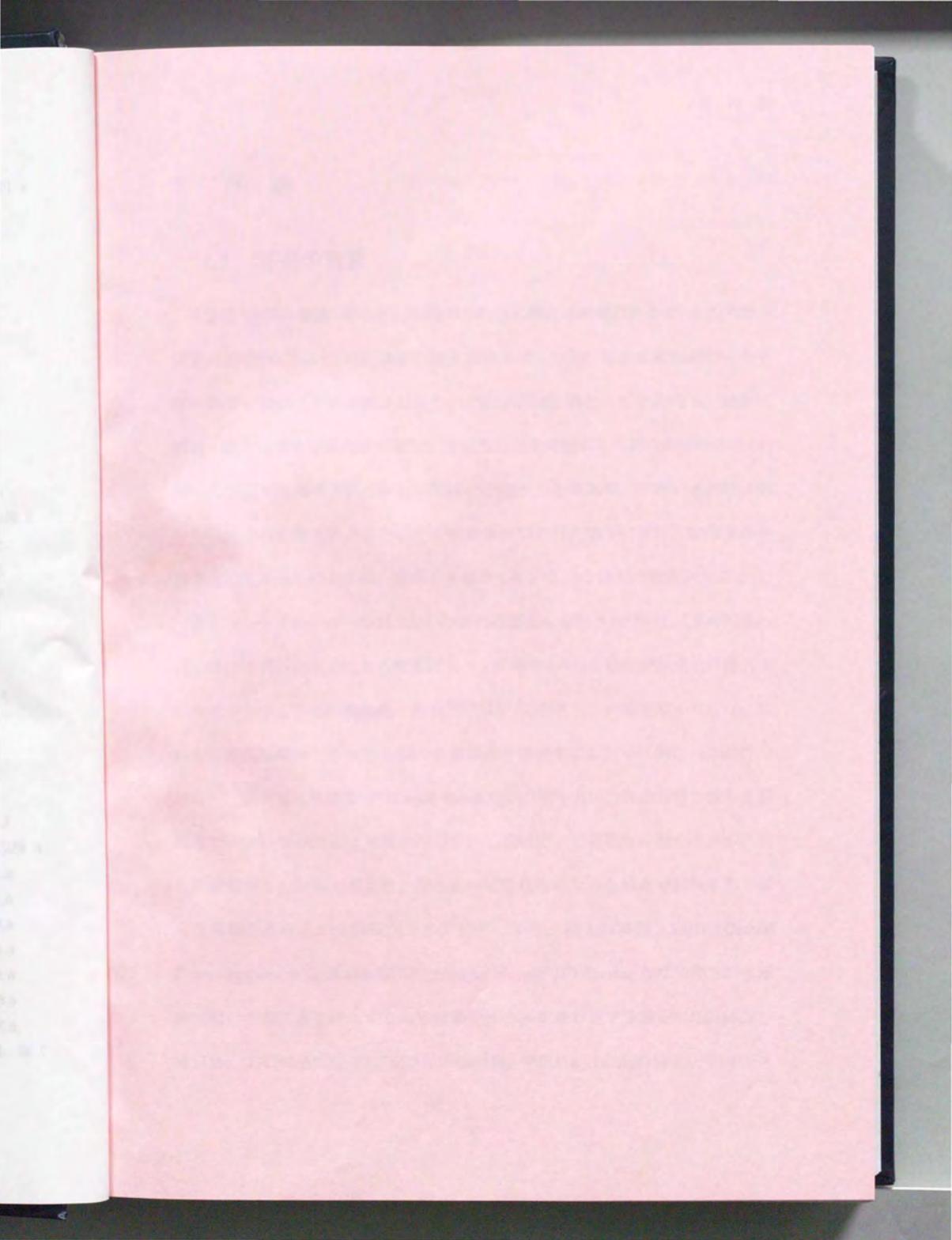
1996年12月

飯井俊行

## 目次

1 序論.....	1
1.1 研究の背景.....	1
1.2 本論文の目的と意義.....	6
1.3 本論文の構成.....	8
2 本研究に関連する基礎理論.....	14
2.1 緒言.....	14
2.2 線形破壊力学の基礎理論.....	15
2.2.1 応力拡大係数.....	15
2.2.2 コンプライアンスの概念.....	25
2.2.3 応力拡大係数の解析.....	28
2.3 連続体力学の基礎理論.....	44
2.3.1 Duhamelのアナロジ.....	44
2.3.2 円筒と弾性支持梁.....	49
2.3.3 弾性支持梁の基礎理論.....	54
2.3.4 過渡温度場解析.....	71
2.4 疲労き裂進展の破壊力学的解析の基礎.....	74
2.4.1 応力拡大係数による疲労き裂進展解析の歴史.....	74
2.4.2 疲労き裂進展則の特性.....	78
2.4.3 低サイクル疲労き裂進展.....	84
2.5 結言.....	92
3 片側き裂板の熱応力下応力拡大係数評価法の開発.....	102
3.1 緒言.....	102
3.2 有限要素解析による片側き裂板熱応力下K値.....	103
3.2.1 線形熱応力下のK値.....	105
3.2.2 一様熱応力下のK値.....	107
3.2.3 有限要素解析まとめ.....	109
3.3 片側き裂板の熱応力問題と変位境界問題.....	110
3.4 重み関数法による変位境界問題K値評価法開発.....	114
3.4.1 着眼点と考え方.....	115
3.4.2 変位境界問題の重み関数導出.....	120
3.4.3 変位境界問題の重み関数評価法の一般化.....	142
3.5 片側き裂板の熱応力下K値評価への適用.....	147
3.6 結言.....	152

4 円筒環状き裂の熱応力下応力拡大係数簡便評価式の導出.....	156
4.1 緒言.....	156
4.2 有限要素解析による円筒環状き裂熱応力下K値.....	157
4.2.1 線形熱応力下のK値.....	159
4.2.2 一様熱応力下のK値.....	163
4.2.3 有限要素解析まとめ.....	167
4.3 円筒環状き裂の熱応力下のK値計算法.....	168
4.3.1 着眼点と考え方.....	169
4.3.2 軸対称曲げを受ける円筒環状き裂のK値 簡便評価式.....	176
4.3.3 円筒環状き裂の熱応力下K値簡便評価式誘導.....	184
4.3.4 円筒の熱応力下のK値.....	193
4.3.5 任意位置の環状き裂のK値.....	200
4.4 結言.....	238
5 熱応力下応力拡大係数の基本特性.....	242
5.1 緒言.....	242
5.2 着眼点と考え方.....	243
5.3 構造がK値に及ぼす影響.....	246
5.3.1 片側き裂梁の $\phi$ .....	246
5.3.2 円筒環状き裂の $\phi$ .....	252
5.3.3 熱応力下K値基本特性.....	276
5.4 円筒環状き裂の熱応力下K値の上限.....	277
5.4.1 着眼点と考え方.....	277
5.4.2 関数 $\phi$ の上限値を与える構造.....	280
5.4.3 $(-M_r)$ の上限値を与える温度分布.....	284
5.4.4 円筒環状き裂熱応力下K値の上限値.....	286
5.5 結言.....	287
6 熱応力下疲労き裂進展評価等への適用の試み.....	292
6.1 緒言.....	292
6.2 過渡K値の上限値と最大値.....	294
6.3 疲労き裂進展解析への適用.....	312
6.4 疲労き裂停留評価への適用.....	320
6.5 規格配管の実用上の疲労き裂停留.....	326
6.6 軸力を同時に受ける問題への適用.....	331
6.7 結言.....	341
7 結論.....	344



## 1 序 論

### 1.1 研究の背景

構造物・材料の破壊・損傷という現象が社会に与える影響は大きく、その予測・評価の重要性についてはいまさら繰り返すまでもない。設計の最前線にいと常に破壊・損傷の予防的観点からその予測・評価に携わることになる。設計は破壊・損傷に関する評価法が確立していることを前提にして行うわけであるが、時にこれまでに解明されていない現象に出会うことがあり、戸惑いと同時に強い知的好奇心を覚える。また、その現象が解明された場合に設計・保守管理が改善される見通しがあれば、是非とも解決したいという強烈的な欲求が生じる。

著者にとってのその一つが、多くの研究機関より報告されている「厚肉円筒の内面環状き裂が熱応力による疲労により、肉厚の 1/3~1/2 程度で実用上停留しているとみなせる」との経験則であった<sup>11)~16)</sup>。ただし、正確を期すならば、これらの研究機関はこの疲労き裂の停留傾向を説明することが目的だったわけではなく、繰り返し熱衝撃 (Thermal Shock) 下の原子力圧力容器鋼材の疲労き裂進展データ取得のために実験を行っている過程で、千回程度の熱サイクルに対し非破壊検査の結果上有意なき裂進展が見られなくなった時点で試験を打ち切った経験を参考までに経験則として述べている。例えば英国 CEGB (Central Electricity Generating Board ; 現 NE : Nuclear Electric) の Skelton らは加熱された厚肉円筒の内面に水を注入するような熱サイクルを繰り返す実験を 1/2CrMoV、9Cr1Mo、12CrMoV などのフェライト系材料、SUS316、Inconel718 などのオース

テナイト系材料に対し行い、実験を行う上でき裂進展が肉厚の  $1/3 \sim 1/2$  程度でほぼ無視できるようになるとの観察結果を報告している<sup>1)1)2)</sup>が、中には肉厚の  $3/4$  までき裂が進展した例も報告している<sup>1)1)</sup>。一方、そのき裂進展速度( $da/dN$ )の評価については、熱応力が弾性域を超える場合にも弾性の応力拡大係数範囲  $\Delta K$  のべき乗にき裂進展速度が比例するという、いわゆる Paris 則にて安全側の評価ができることを報告している。この実験において定常熱応力が零であること、および Paris 則が成り立つことを考えるとき、図 1.1 に示すように熱サイクル中の最大 K 値  $K_{max}$  ( $= \Delta K$ ) は無次元き裂長さ  $a/W$  が大きくなるにつれ増加した後極大値を示し、その後減少していることになる。

この熱応力下の疲労き裂が停留傾向を示す現象は、これまで経験上知られているが、現状では十分に解明されていると言えない。例えば、この現象が K 値により説明できるとするならば、上のように K 値ははじめき裂長さが増すとともに増加し、その後極大値を示して減少することになるがこの点についての確認はなされておらず、またこのような性質を示す場合の過渡温度履歴、円筒形状、および極大値を示す理由などはいまだわかっていない。

しかし、この熱応力下き裂の停留傾向は、その理由が現状未解明にしても高温の圧力容器にオーステナイト系ステンレス材を使用する上で設計者に勇気を与えてくれる。例えば、 $650^{\circ}\text{C}$  クラス以上の高温圧力容器は、耐圧設計上要求されるクリープ強度の観点からオーステナイト系ステンレス材 (SUS316 など) で設計製作されることになる。ところがこの種の材料は降伏点が低く、1 回の起動 (昇温) により内面が圧縮降伏し、定常状態では発生した残留引張応力が原因

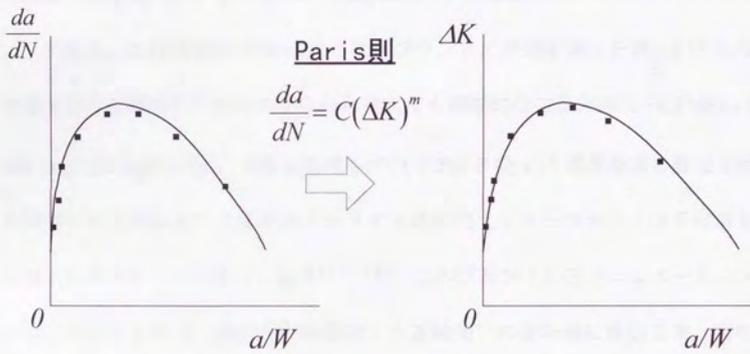


図 1.1 熱応力下疲労き裂進展速度とK値 (概念図)

となり内面にクリーブ割れが発生する。すなわち、き裂発生を防止する設計は実際上困難で、き裂の発生・存在を前提とした上で信頼性を確保していく設計（破壊制御設計）を行うことが必要になるが、熱応力下のき裂が停留傾向を示してくれるならばき裂の管理は行いやすい。

実例として有名なものとしては、世界初の超々臨界圧( USC : Ultra Super Critical )発電プラントである米国フィラデルフィア電力( PECO : Philadelphia Electric Company )エディストーン( Eddystone ) 1号機 325MW の圧力コンポーネントがある。これは 1950 年代に火力発電プラントの熱効率向上をねらいとして高蒸気条件を指向したもので、今から考えても画期的な主蒸気圧力 34.5 MPa ( 5 000 psig, 352 kgf/cm<sup>2</sup>g )、主蒸気温度 649°C ( 1 200°F ) という世界最高の蒸気条件を採用したことにより、従来のフェライト系に代えてオーステナイト系材料を圧力コンポーネントに使っており<sup>17)~19)</sup>、このプラントの圧力コンポーネントについては 22 年間 ( 累積運転時間約 13 万時間 ) の運転後に換装工事、経年コンポーネントの詳細な調査が PECO と日本の重電メーカーとの共同で実施された結果<sup>10)~12)</sup>、早い時期から亀甲状のき裂が発生し、き裂が存在する状態で運転を続けていたことがわかっている。これらの圧力コンポーネントの中には、クリープき裂進展に対しては十分すぎるほどの余裕を持ったものもあったことから、熱応力下のき裂が停留傾向を示すことが理論的に裏付けられていればコンポーネントの取り替えに至らなかったかもしれない。このような事例はエディストーンだけではないと考えられる。

以上、述べてきたように、熱応力下き裂が停留傾向を示すことが経験的事実として知られていながら、この事実が実際の機器の設計・保守に現在のところ活かされているとは言い難い。この理由について考えると、結局のところこの「熱応力下き裂が停留傾向を示す」という現象が理論的にきちんと説明できていない点に帰着するように思われる。もしこの現象が理論的に説明でき、どのような条件の組み合わせのもとにき裂が停留傾向を示すかが明らかになるならば、機器の合理的な設計・保守管理への活用が可能になる。

機器の長寿命化が強く求められている現在、また人件費が右肩上がりの高騰を続ける我が国において、人件費がその経費の大部分を占める機器の検査の合理化は、極めて切実な問題である。このような状況下、「熱応力下き裂が停留傾向を示す」現象につき理論的に説明を行うことは今後の機器設計・保守改善のブレークスルーの一つになると考えられる。

## 1.2 本論文の目的と意義

本研究においては、先に述べた機器の長寿命化への要望や保守管理費用の高騰という今後我が国が直面するであろう問題に対する合理的な対応、対策がますます必要になりつつあるという背景の下、「熱応力下き裂が停留傾向を示す」という経験的事実を理論的に解明し、これを機器のより合理的な設計・保守管理に結びつけるための基本的知見を得ることを目的とする。

ところで、現状にてこの経験的事実が解明されていない原因を考えると、この現象をそれによってほぼ記述、整理できるとされているパラメータである応力拡大係数（K値：stress intensity factor）の熱応力下基本特性の全貌が得られていないことがまずネックとなっていると思われる。K値そのものはどのようなものであれ、今や有限要素法をはじめとする数値解析により求めることが可能であるが、その必要にして十分な基本特性の全貌を知るためにはこのアプローチに要する労力はあまりにも大きく、現実的ではないことがその理由であつたらう。

そこで具体的には、本論文ではまず破壊力学の基本部材である片側き裂板、および圧力容器のき裂を扱うにあたっての基本となる円筒環状き裂の熱応力下K値基本特性の全貌を簡便にしかも実用上十分な精度でもって見ることができるK値評価法の開発を目指す。

続いて、開発したK値評価式を用いて熱応力下K値基本特性を検討・把握し、それを円筒環状き裂の熱応力下疲労き裂進展挙動評価に適用することにより、

目的である「熱応力下き裂が停留傾向を示す」現象の説明ができ、それが熱応力下における応力拡大係数の特性に大きく依存していることを明らかにする。また併せてこの疲労き裂挙動への適用を通じ、当該き裂の発生、存在を考慮した上での機器のより合理的な設計・保守管理への知見を得る。

これらを達成することにより、本研究の範囲では片側き裂板、円筒環状き裂に対してであるが、所用のK値を極めて容易に評価することが可能となり、従って疲労き裂進展評価などの健全性評価を直ちに行うことが可能となる。そしてこの結果、例えばき裂が停留傾向を示すためのガイドラインを引くといったようなことも容易にできるようになり、機器の合理的な保守管理基準の作成に貢献することが期待される。

以下、次節にて本論文の具体的な構成についてまとめる。

### 1.3 本論文の構成

第1章は「序論」であり、本研究の背景、目的・意義、およびその構成について述べる。

第2章「本研究に関連する基礎理論」では、線形破壊力学、連続体力学の基礎理論のうち、本研究を展開する上で必要となる事項をまとめる。また、本研究の出発点に関連し、さらに前半で得られたパラメータに関する研究結果の応用分野である疲労き裂進展問題に関する基礎的事項をまとめる。

第3章「片側き裂板の熱応力下応力拡大係数評価法の開発」では、材料力学の基本部材であること、および配管中のき裂に対するLBB評価で行われる板モデルへの置き換え<sup>13)</sup>(注:LBB評価では配管内面に生じた周方向未貫通き裂を平板中の半楕円表面き裂に置き換える場合がある)を念頭に置き、片側き裂板の熱応力下K値簡便評価式を導く。

具体的には、端部を長手方向に拘束された片側き裂板に幅方向に温度が一次元的に分布する場合における平均温度からの偏差によるK値を対象とする。このとき、重ね合わせの考え方と Duhamel のアナログを用いることにより、自由膨張時に生じる変位を打ち消す変位を端部に加える変位境界問題の解として求めることをまず明確にする。続いて、この解を求める一つの方法として重み関数法が考えられるが、その際必要となる当該問題に対する重み関数をコンプライアンスの概念を導入することにより、用い易く応用性のある連続関数として導くスマートな手法を開発し、これを用いて所用のK値を簡便に求めることが出

来る評価式を与える。

さらに一様変位・線形変位境界問題のK値を導いた重み関数により求め、その過去の文献の値との比較、また熱応力問題に適用したときの有限要素解析による値との比較を通じて、求めたK値評価式が広い範囲に渡って実用上十分な精度を持って解を与えるものになっていることを確認する。この過程で、所用のK値はアスペクト比  $H/W$  ( $H$ : 板の長さ、 $W$ : 板幅) の影響を強く受け、これは、軸力や曲げを受ける場合の片側き裂板とは異なり、熱応力下K値の基本特性であることを明らかにする。

第4章 「円筒環状き裂の熱応力下応力拡大係数簡便評価式の導出」にて、圧力容器のき裂を扱うにあたっての基本となる円筒環状き裂の熱応力下K値簡便評価式を導く。

具体的には端部を回転拘束された円筒に半径方向に温度が一次元的に分布する場合における平均温度からの偏差によるK値を対象とする。このとき、重ね合わせの考え方と Duhamel のアナログを用いることにより、円筒端部・き裂面上に軸対称曲げを生じさせる表面力を加える問題の解として求まることをまず明確にする。

続いて、基本となる薄肉円筒の軸対称曲げ問題を弾性支持梁問題として取り扱い、さらにコンプライアンスの概念を導入することにより、簡便、かつ円筒構造パラメータの影響が評価可能である円筒環状き裂の軸対称曲げ下K値評価式を導く。これを用いて円筒環状き裂の熱応力下K値を簡便に与えることが出来る評価式を与える。この簡便評価式の精度確認は、有限要素解析により求めた

K値と比較することにより行う。

この過程で、円筒環状き裂軸対称曲げ下K値が円筒断面アスペクト比  $H/W$  の影響を強く受けることを明らかにする。以上より、円筒環状き裂については片側き裂梁と類似の断面形状ではあるが、軸対称曲げ問題については弾性支持梁としての評価が必要であることを明らかにする。

第5章 「熱応力下応力拡大係数の基本特性」では、片側き裂梁、円筒環状き裂の熱応力下K値基本特性を、導いたK値評価式を用いて検討する。これによりK値がき裂が長さが増すとともに増加し、その後極大値を示して減少する場合の過渡温度履歴・構造形状、およびK値が極大値を示す理由を検討する。この過程で、片側き裂板、円筒環状き裂の熱応力下K値に共通する、K値が構造に依存する項と温度分布より定まる熱変形相当モーメント  $M_t$  に負号を付したものの積として求まることより、 $M_t =$  一定の条件のもとで所用のK値が構造に起因して極大値を示すことを明らかにする。

その後、検討の結果得られた円筒環状き裂熱応力下K値基本特性を用い、対象とする構造においてこれより大きな値となり得ないという意味でのK値の上限値を導く。これにより、過渡温度履歴やき裂長さを知ることなく、直ちに安全側の健全性評価を行うことを可能とする。

第6章 「熱応力下疲労き裂進展評価等への適用の試み」にて、第4章にて導いた円筒環状き裂熱応力下K値評価式、および第5章の成果である熱応力下K値の上限値を、熱応力下疲労き裂進展評価等へ適用することを試みる。これを通じて目的である「熱応力下き裂が停留傾向を示す」現象の説明ができ、それ

が熱応力下におけるK値の特性に大きく依存していることを明らかにする。

まず過渡温度場解析を種々の条件に対し実施し、第5章にて導いた熱応力下K値の上限値との比較を行うことにより、この上限値を健全性評価に用いることによりどの程度の安全裕度があるかについての検討を行う。次に第4章にて導いたK値評価式を用い、Paris 則、および定常熱応力は零であると仮定し、数例につき熱応力下疲労き裂進展解析を行う。この際、詳細の疲労き裂進展解析以外に、いくつかの簡便評価も試みる。

また、熱応力以外に軸力を同時に受ける円筒環状き裂のK値の基本特性についても試算を行い、この場合にき裂が長くなるにつれ極大値を示すための軸力の大きさに関する目安を得る。

以上により、当該き裂の発生、存在を考慮した上でのより合理的な設計、保守管理への知見を得る。

第7章 「結論」にて本論文のまとめを行う。

## 参考文献

- [ 1 ] Skelton, R. P. and Miles, L., Crack Propagation in Thick Cylinders of 1/2CrMoV Steel during thermal shock, *High Temp. Technol.*, Vol. 2-1, No. 1(1984), pp. 23-34.
- [ 2 ] Skelton, R. P. and Nix, K. J., Crack growth behaviour in austenitic and ferritic steels during thermal quenching from 550°C, *High Temp. Technol.*, Vol. 5-1, No. 1(1987), pp. 3-12.
- [ 3 ] 堀切・渡士・岩田、繰り返し熱過渡荷重を受ける円筒内表面環状き裂の進展挙動、機講論、 No. 910-71, Vol. B(1991), pp. 434-435.
- [ 4 ] Marsh, D. J., A thermal shock-fatigue study of Type 304 and 316 stainless steels, *UKAEA Northern Division Report*, ND-R-606(S) (1982).
- [ 5 ] Marsh, D. J., Fatigue crack initiation and propagation in stainless steels subjected to thermal cycling conditions, *Mech. Behav. Nucl. Appl. Stainl. Elevated Temp.*, (1982), pp. 113-121.
- [ 6 ] Marsh, D. J., A thermal shock-fatigue study of Type 304 and 316 stainless steels, *Fatigue of Eng. Mater. and Struct.*, Vol. 4, No. 2 (1981), pp.175-195.
- [ 7 ] Campbell, C. B., Franck, C. C. Sr. and Sphar, J. C., The Eddystone Superpressure Unit, ASME 56-A-156 (1956).
- [ 8 ] Trumpler, W. E. Jr., Fox, E. A., LeBroton, A. F. and Williamson, R. B., Development Associated With The Superpressure Turbine for Eddystone Station Unit No.1, ASME 59-A-288 (1959).
- [ 9 ] Harlow, J. H., Observations Regarding Eddystone No. 1 – First Year of Operation at 5000 PSI and 1150 F, *COMBUSTION*, JAN (1962), pp. 37- 47.

- [10] 角家、川本、中村、安藤、後藤、岩本、藤田、Argo, H. C. and DeLong, J. F.,  
エディストン1号機の主蒸気弁調査結果—タービンコンポーネントの保守  
管理への反映—、三菱重工技報、Vol. 21, No. 5 (1984), pp. 654-664.
- [11] DeLong, J. F., 石本、梶谷、中代、吉川、時政、渡辺、大友、本田、超高压  
高温プラントにおけるタービン止め弁/制御弁の損傷解析および材料評価、  
火力原子力発電、Vol. 35, No. 11 (1984), pp. 1249-1268.
- [12] DeLong, J. F., Siddall, W. F., Ellis, F. V., 大黒、増山、瀬戸口、エディスト  
ン1号機主蒸気系統高温耐圧部の信頼性評価、火力原子力発電、Vol. 35, No.  
11 (1984), pp. 1225-1248.
- [13] 矢川元基編、破壊力学、第1版(1988)、培風館、pp. 148-151.

(10)  
(11)  
(12)  
(13)  
(14)

THE HISTORY OF THE  
CITY OF BOSTON  
FROM THE FIRST SETTLEMENT  
TO THE PRESENT TIME  
BY NATHANIEL BENTLEY  
VOLUME I  
FROM THE FIRST SETTLEMENT  
TO THE YEAR 1700  
PUBLISHED BY  
J. B. ALLEN, 100 NASSAU ST.  
N. Y. 1908

## 2 本研究に関連する基礎理論

### 2.1 緒言

本章にて本研究を展開する上で基礎となる理論をまとめて説明する。

まず2.2節にてき裂を有する構造物の健全性評価の際に必要な線形破壊力学の基礎理論を説明する。はじめに本論文で一貫して破壊力学パラメータとして使用する応力拡大係数（K値）を説明する。続いて、第3章にて片側き裂梁、第4章にて円筒環状き裂のK値導出の際に用いるコンプライアンスの概念を説明する。その後、K値の一般的な計算方法の説明を行う。この中で、有限要素解析は第3、4章、重み関数法は第3章にて用いられる。

次に2.3節にて熱応力や円筒の変形問題を取り扱う際に用いた連続体力学の基礎理論をまとめる。まず、熱応力問題を扱うに必要な Duhamel のアナログについて説明した。これは第3、4章に共通して用いられる。次に第4章の基礎となる薄肉円筒の軸対称曲げ問題がその変形に関する支配方程式の類似性から弾性支持梁に置き換えることができることを示し、その後有限長弾性支持梁の曲げに関連する理論を説明する。さらに、第6章にて用いられる過渡温度場解析手法について説明する。

最後に2.4節にて第6章の疲労き裂進展解析の際に必要な基礎理論、および過去の研究の歴史的経緯について説明する。この説明の中で、非線形性が著しい疲労き裂進展の領域においても、簡易評価の観点からするとK値を用いた評価を行うことが妥当であることを説明する。

## 2.2 線形破壊力学の基礎理論

### 2.2.1 応力拡大係数

線形破壊力学は1957年にIrwin<sup>[14]</sup>により提唱されて以来活発な研究が行われ、新たな学問体系として完成しつつある。この方法は基本的に弾性解析に基づくパラメータ応力拡大係数（K値：stress intensity factor）により破壊条件が記述されるので、き裂先端近傍に生じる塑性域がき裂や他の部材寸法に比べて十分に小さい、いわゆる小規模降伏（small scale yielding）の範囲での破壊問題に対して有効である。小規模降伏範囲における破壊現象としては、脆性破壊の他に、疲労破壊および環境強度の問題等があり、実際にこの方面の破壊防止設計に対して線形破壊力学が応用されるようになってきている。

応力拡大係数は線形破壊力学における最も基本的なパラメータであり、すでに多くの研究成果が蓄積されている。近年応力拡大係数に関する解説書あるいはハンドブックなどが多数出版されているが<sup>[15]~[18]</sup>、本項ではParisとSih<sup>[19]</sup>の解説をベースに応力拡大係数の基本事項について要約して述べる。

## き裂の変形様式

き裂面は、き裂先端近傍における物体の自由表面であるから、その近傍の応力分布に最も強い影響を与える。他の遠方の境界あるいは外力は、き裂先端近傍の応力場に対して、その分布の強さにのみ影響し、分布形態には影響を与えない。き裂先端近傍の応力場は基本的な三つの型に分類することができ、その各々は図 2.1 に示す三つの変形モードに対応している。モード I は開き型ともよばれ、き裂面が互いに離れるような変形をする。モード II はせん断型ともよばれ、き裂面が互いに  $z$  軸（き裂先端に平行な軸）に対して直角に、すなわち  $x$  軸方向にすべるような変形をする。モード III はひきさき型ともよばれ、き裂面が互いに  $z$  軸に平行にすべるような変形をする。これらの三つの基本的な変形様式を適当に重ね合わせることにより、き裂先端近傍の任意の変位場および応力場を記述することができる。

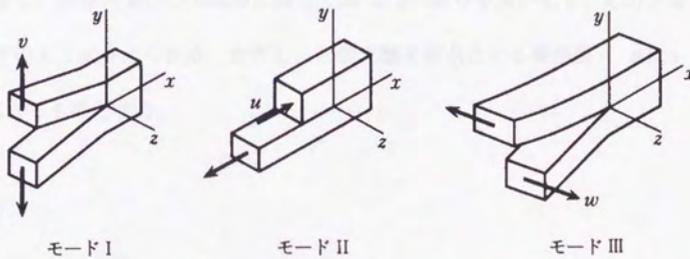


図 2.1 基本的な3つの変形様式

### き裂先端の応力—変位分布

Irwin は Westergaard の方法を用いて、図 2. 1 に示したそれぞれの変形様式に対する応力場および変位場を陽な形で導いている。モード I とモード II は弾性論の平面問題として解析することができ、き裂面に関してそれぞれ対称部分と反対称部分とに分けられる。モード III は純粋せん断あるいはねじり問題と考えることができる。座標および応力成分に関して図 2. 2 の記号を用いると、応力と変位は以下のように与えられる。ただし、き裂先端を原点とする極座標  $r$ 、 $\theta$  は  $x$ - $y$  面内にとるものとする。

モード I:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) & (2.1) \\ \sigma_y &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \\ \tau_{xy} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \\ \sigma_z &= \nu(\sigma_x + \sigma_y), \quad \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}u &= \frac{K_I}{G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 - 2\nu + \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) & (2.2) \\ v &= \frac{K_I}{G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} \left( 2 - 2\nu - \cos^2 \frac{\theta}{2} \right) \\ w &= 0\end{aligned}$$

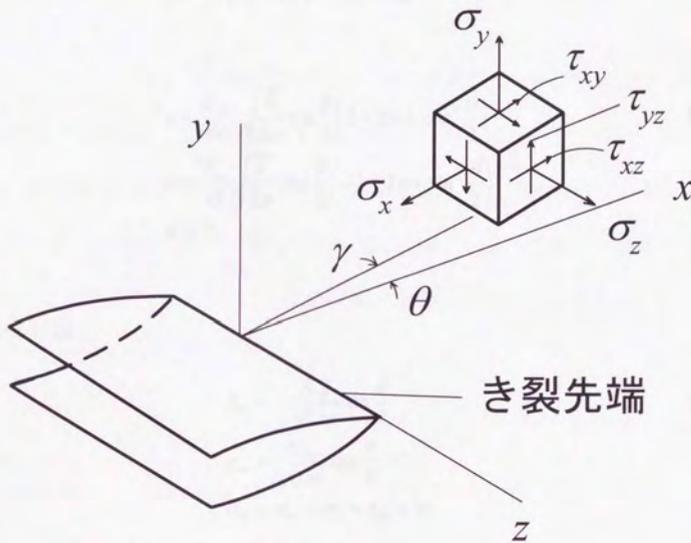


図 2.2 き裂先端近傍の座標、応力成分の定義

モード II :

$$\sigma_x = -\frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \left( 2 + \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right) \quad (2.3)$$

$$\sigma_y = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2}$$

$$\tau_{xy} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right)$$

$$\sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y), \quad \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$$

$$u = \frac{K_{II}}{G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} \left( 2 - 2\nu + \cos^2 \frac{\theta}{2} \right) \quad (2.4)$$

$$v = \frac{K_{II}}{G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos \frac{\theta}{2} \left( -1 + 2\nu + \sin^2 \frac{\theta}{2} \right)$$

$$w = 0$$

モード III :

$$\tau_{xz} = -\frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \quad (2.5)$$

$$\tau_{yz} = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2}$$

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = 0$$

$$w = \frac{K_{III}}{G} \sqrt{\frac{2r}{\pi}} \sin \frac{\theta}{2} \quad (2.6)$$

$$u = v = 0$$

式(2.1)~(2.4)は平面ひずみ (すなわち  $w=0$ ) の場合であるが、平面応力の場合には、これらの式において  $\sigma_z=0$  とおき、また変位を表す式中のポアソン比

$v$ を $w/(1+\nu)$ と置き換えることにより簡単に求められる。式(2.1)~(2.6)は $r$ に関する高次の項を無視することにより求められる。したがってこれらの式は、 $r$ がき裂長さ、リガメント長さなどの $x$ - $y$ 面内におけるこの構造の諸寸法に比べて十分に小さい場合により近似を与える。また、 $r$ が零に近づく極限ではこれらの式は厳密解となる。応力拡大係数はこれらの式中のパラメータ $K_I$ 、 $K_{II}$ 、 $K_{III}$ として定義される。

ところで、この応力拡大係数は座標 $r$ 、 $\theta$ には依存しない。すなわち、応力拡大係数はそれぞれの変形様式に対して応力場の強さには影響するが、分布の形には影響を与えない。式(2.1)~(2.6)を次元解析の立場から眺めてみると、弾性体の場合応力拡大係数は外力の大きさに比例し、またき裂を含む物体の寸法に依存していることがわかる。この寸法依存性は $K$ 値の特徴であり、この点について少し考えることにしよう。

## 破壊力学における相似則の特殊性

図 2.3(a)に示す部材について、切欠きの底に生じる最大応力 $\sigma_{\max}$ は、 $\alpha$ を応力集中係数とすると

$$\sigma_{\max} = \alpha\sigma \quad (2.7)$$

で与えられる。 $\alpha$ は図 2.3 (b)のように、寸法が $n$ 倍になった場合でも同じ値をとり、部材の形状・寸法の比のみによって決まる。他方、き裂の応力拡大係数 $K$ は、クラックを代表する寸法を $a$ とすると、

$$K = \beta\sigma\sqrt{a} \quad (2.8)$$

の形に書け、 $\beta$ は $\alpha$ と同じく寸法比のみによって定まる無次元の係数である。以上のことから、図の(a)と(b)に示す二つの相似形部材において、 $\sigma' = \sigma$ であるときに切欠底の応力は両部材で等しくなり、また一般に、各々の対応する点での応力とひずみは等しい。これに対し、図(b)に示す部材の $K$ 値は

$$K' = \beta\sigma'\sqrt{a'} = \beta\sigma'\sqrt{na} \quad (2.9)$$

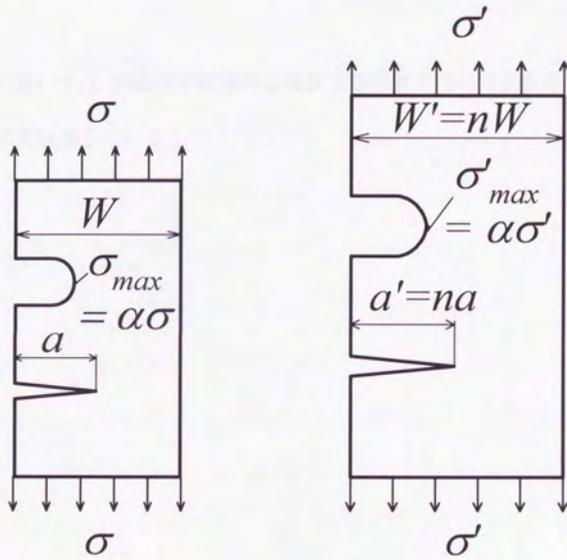
であるから、き裂先端の力学的環境が等しくなるためには、 $K = K'$ すなわち $\sigma' = \sigma/\sqrt{n}$ でなければならない。これをまとめて書けば、

$\sigma' = \sigma$ のとき、

$$\sigma'_{\max} = \sigma_{\max}, \quad K' = \sqrt{n}K \quad (2.10)$$

$\sigma' = \sigma/\sqrt{n}$ のとき、

$$\sigma'_{\max} = \sigma_{\max}/\sqrt{n}, \quad K' = K \quad (2.11)$$



$$K = \beta\sigma\sqrt{a}$$

(a) 基準の部材

$$K' = \beta\sigma'\sqrt{a'}$$

(b) 寸法が  $n$  倍の部材

図 2.3 相似部材の比較

となる。平均応力や最大応力によって力学的環境が決まる現象と、き裂先端の応力一ひずみ状態に支配される現象とでは、このように相似法則が違う。これがき裂に対して破壊力学的手法が必要な理由の一つでもある。高い公称応力のもとで小さなき裂に起きた現象は、大きなき裂では低い公称応力で起きるのである。

本論文においては、熱応力下配管内面環状き裂の健全性の寸法依存性についてを6.5節にて試算している。

## 2.2.2 コンプライアンスの概念

コンプライアンスはき裂を有する線形弾性体の変形能を表し、バネ定数の逆数の次元を持つ物理量である。微小変形の場合には、き裂を有する構造物に対し、集中荷重・モーメントと変形はコンプライアンスを介して一対一の対応関係にある。詳細は教科書に譲るとして、以下必要最小限の知識につきまとめた。

### 集中荷重・モーメントと変形の関係

説明をわかりやすくするために、図 2.4 に示す片側き裂梁の例でコンプライアンスを定義する。集中荷重  $P$ ・モーメント  $M$  に対するコンプライアンスを各々  $\lambda_P$ 、 $\lambda_M$  とし、 $P \cdot M$  による変形を各々  $u$ 、 $\theta$  とする。Maxwell の相反定理により、集中荷重  $P$  によるたわみ角  $\theta$  に対するコンプライアンス  $\lambda_{PM}$  と、集中モーメント  $M$  による変位  $u$  に対するコンプライアンス  $\lambda_{MP}$  は等しいことが保証されているので、以後これらを区別せずに  $\lambda_{PM}$  と書く。微小変形の場合には、

$$\begin{bmatrix} u \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_P & \lambda_{PM} \\ \lambda_{PM} & \lambda_M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P \\ M \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

ここで、き裂がない場合のコンプライアンスを添字 0 をつけ表し、き裂が入ることによるコンプライアンスの変化を  $\Delta\lambda$  で表すことにする。この場合にコンプライアンスは次のように表せる。

$$\lambda_P = \lambda_{P0} + \Delta\lambda_P \quad (2.13)$$

$$\lambda_{PM} = \lambda_{PM0} + \Delta\lambda_{PM} \quad (2.14)$$

$$\lambda_M = \lambda_{M0} + \Delta\lambda_M \quad (2.15)$$

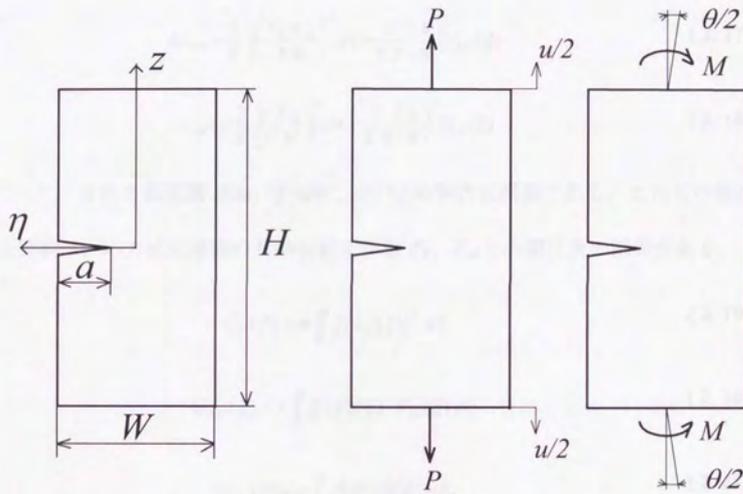


図 2.4 軸力と曲げを受ける片側き裂梁 (厚み  $B$ )

## コンプライアンスの計算方法

コンプライアンス、正確には、き裂が入ることによるコンプライアンスの増分は、K値がわかっているならば簡単に計算できる。

$$\Delta\lambda_P = \frac{2}{E} \int_A \left( \frac{K_P}{P} \right)^2 dA = \frac{2}{E \cdot B} G_P(\xi) \quad (2.16)$$

$$\Delta\lambda_{PM} = \frac{2}{E} \int_A \left( \frac{K_P K_M}{P M} \right)^2 dA = \frac{2}{E \cdot B} \left( \frac{6}{W} \right) G_{PM}(\xi) \quad (2.17)$$

$$\Delta\lambda_M = \frac{2}{E} \int_A \left( \frac{K_M}{M} \right)^2 dA = \frac{2}{E \cdot B} \left( \frac{6}{W} \right)^2 G_M(\xi) \quad (2.18)$$

ここに、 $A$  はき裂面積  $Bda$ 、 $\xi = a/W$ 、 $G$  は  $\xi$  の無次元関数である。これらの無次元関数は、応力拡大係数の有限幅補正係数  $F_P$ 、 $F_M$  との間に次の関係がある。

$$G_P(\xi) = \pi \int_0^\xi \{F_P(\xi)\}^2 d\xi \quad (2.19)$$

$$G_{PM}(\xi) = \pi \int_0^\xi \xi \cdot F_P(\xi) \cdot F_M(\xi) d\xi \quad (2.20)$$

$$G_M(\xi) = \pi \int_0^\xi \xi \{F_M(\xi)\}^2 d\xi \quad (2.21)$$

### 2.2.3 応力拡大係数の解析

一般に応力拡大係数の解析はき裂を含む弾性体の解析によって行われ、その方法には古典的な弾性論に基づく解析、転位の連続分布によるき裂モデルを用いる解析、選点法による解析、体積力法による解析、有限要素解析および境界要素解析等がある。2次元き裂などの比較的簡単な形状に関する応力拡大係数はすでに種々の方法で求められ、これがハンドブックの形にまとめられている<sup>115)</sup>~<sup>118)</sup>。しかし実際の3次元構造物への応用を考えると、解析は極めて複雑となり、個々の問題に対して有限要素解析を行いK値を求めざるをえない場合も多い。

本項ではまずK値解析に有効である、重ね合わせの原理について説明する。ついで、有限要素解析によりK値を求めるための代表的な手法について述べる。さらに、任意分布力を受けるき裂部材のK値解析に有効である重み関数法について述べる。

## 重ね合わせの原理

き裂面の変位様式（モード）が同じ場合には、異なる負荷系に対する応力拡大係数を単純に重ね合わせれば、所用のK値が得られる。ただし、モードが異なる場合には重ね合わせはできない。

図 2.5の中央き裂板を引っ張る場合(c)を考える<sup>120)</sup>。(c)の場合のき裂から十分に離れた場所での分布応力 $\sigma(x)$ は、き裂のない板を引っ張る(a)の場合の分布応力 $\sigma(x)$ に等しい（Saint-Venant の原理； Saint-Venant's Principle）。き裂がある(c)の場合は、き裂面上の局所分布応力 $\sigma(x)$ が解放される。き裂面にこの分布応力 $\sigma(x)$ を打ち消すように局所分布応力（ $-\sigma(x)$ ）を負荷した場合が(b)であり、き裂のない(a)の場合となる。重ね合わせの原理を適用すれば、(a)の場合のき裂とリガメントを含めた線上の応力分布は、(c)の場合と(d)の場合のき裂とリガメントを含めた線上の応力分布の和に等しい。ここでリガメントの応力分布は未知であるが、応力特異性だけを問題にすると(a)の場合に応力特異性はない。したがって、(c)の場合の応力特異性は(d)の場合の応力特異性に等しく（符号は逆）、前者のK値を $K_c$ 、後者を $K_d$ とすれば次式が成立する。

$$K_c = -K_d \quad (2.22)$$

なお、以上の議論ではき裂面の食い違いが許されるとして（すなわち負のK値が生じる）いるが、最終的状态がいくつかの解の重ね合わせとして得られるとき、最終的K値が正の値であれば意味のある正しい結果が得られることになる。

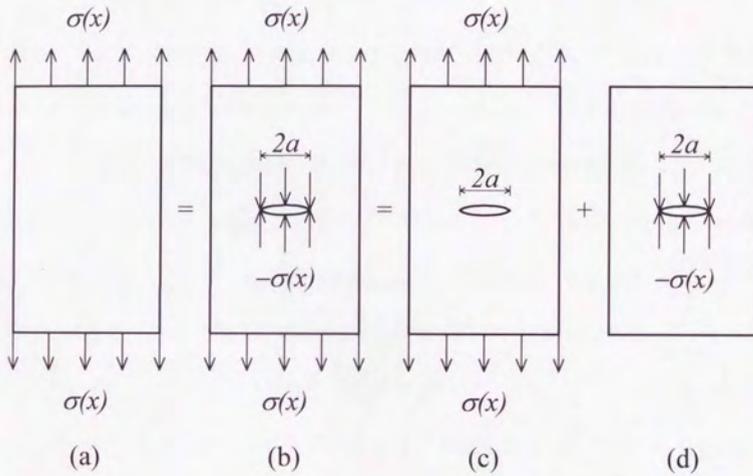


図 2.5 重ね合わせの原理の適用<sup>120)</sup>

この重ね合わせの原理は後述する有限要素解析でよく行われるように、端部に荷重をかける代わりに、等価なK値を与える、き裂が存在しないときき裂相当面に生じる荷重に対応する表面力を打ち消すような表面力をき裂面にかける解析を行い、変位法によってK値を評価する場合などに適用される。



## 有限要素解析

有限要素解析によってK値を求めるには以下のような方法等が提案されている。

直接法：変位法、応力法

エネルギー法：全エネルギー法、VCE法、J積分法

以下、本研究にて用いた直接法について説明する。ただし、き裂まわりの要素については特異要素を用いて計算しており、これについても項を設け説明する。

**a) 直接法** 有限要素解析の結果得られたき裂先端近傍の応力あるいは変位の値を直接式(2.1)~(2.6)に代入してK値を求めるもので、応力を用いるか変位を用いるかによってそれぞれ直接応力法と直接変位法とに分けられる。この場合、代入すべき応力あるいは変位の値はそれぞれ $\theta=0$ あるいは $\theta=\pi$ に対する値を用いる。一般に使用されている汎用の有限要素法のプログラムは節点変位を未知パラメータとする変位法のプログラムが多く、これから得られる結果は変位の方が応力よりも精度の点で信頼性が高い。したがって、これらの値を代入して得られるK値についても、変位に基づくものの方が応力に基づくものより精度が良い。そこで、本研究においても直接変位法によっている。

ところで直接法によりK値を求める際に一般の要素を用いた場合、有限要素解析によって求められた解がき裂先端近傍において式(2.1)~(2.6)で表されるような $r^{-1/2}$ のオーダーの特異性を表すことはできない。そのためにき裂先端近傍では応力と変位の精度はそれほど期待できず、その結果これから求められるK値の精度もあまりよいとはいえない。したがって、直接法によってK値を求め

る場合、以下に述べるような精度を改善するための工夫が行われている。

1. き裂先端からの距離  $r$  の異なる点で式(2.1)~(2.6)により  $K$  値を計算し、 $K$  と  $r$  の関係をプロットして  $r \rightarrow 0$  に外挿した点の  $K$  値をもってこのき裂の  $K$  値とする (外挿法)。
2. 変位分布として式(2.1)~(2.6)を用いる代わりに高次の項まで含めた式を考える方法 (2点変位法)。
3. き裂先端で  $r^{-1/2}$  の特異性を表現できる特異要素を使用する。

本研究ではこのうち、1、3項を採用している。以下、特異要素について説明する。

**b) Barsoum の特異要素** 2次元問題において普通の8節点アイソパラメトリック要素では図 2.6 (a)に示すように辺の midpoint に節点がある。この要素において節点1、8、4を1点に合体させるとともに節点5、7をそれぞれ辺の4分の1の位置へずらすことにより、 $r^{-1/2}$  と  $r^{-1}$  のひずみの特異性を同時に持つ要素をつくることができる。したがって、この要素は弾性体および加工硬化のない完全塑性体に応用できる。このアイソパラメトリック要素はプログラム段階では特別な工夫は必要とせず、データを準備する段階で図 2.6 (b)に示すように節点と座標を選ぶだけであるから、広く用いられている汎用プログラムをそのままの形で使用できる利点がある。なお3次元問題においては2次の形状関数を持つアイソパラメトリック要素に対して同様の操作を行えばよい。この要素の提案者の名をとって Barsoum の特異要素<sup>21)</sup>と称している。

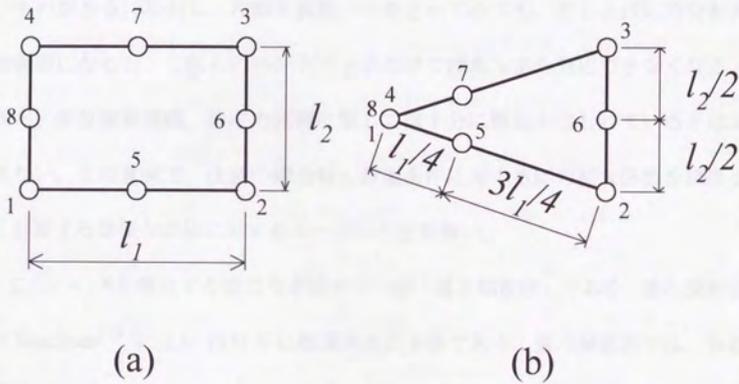


図 2.6 Barsoum の特異要素<sup>[21]</sup>

## 重み関数法

ここでは重み関数法の歴史的経緯と、第3章にて取り扱う変位境界問題の重み関数に関する基礎事項をまとめる。

a) 重み関数の歴史的経緯 現在までに計算された応力拡大係数の計算結果は有名なハンドブックにまとめられている。これらのハンドブックとして有名な物としては Tada<sup>16)</sup>ら、Rooke and Cartwright<sup>17)</sup>、Sih<sup>22)</sup>、Murakami<sup>18)</sup>らのものがある。しかし、片側き裂梁一つをとってみても、たとえば応力分布が非線形になると、これらのハンドブックだけではたちまち対応できなくなる。また、変位境界問題、熱応力問題に関しては十分に整理が行われているとは言えない。この意味で、任意の構造物・荷重条件に対する応力拡大係数を精度よく計算する簡便な方法に対するニーズは今なお強い。

このニーズを満足する強力な手法の一つが「重み関数法」である。重み関数法は Bueckner<sup>23)</sup>により 1970 年に提案された手法である。重み関数法では、ある構造物に対する重み関数を一度求めれば、その構造物に対し任意の荷重が負荷された時の応力拡大係数を求めることを可能にする優れた計算手法である。

一方、Rice<sup>24)</sup>はほぼ同時期に平面問題に対する重み関数を求める便利な手法を提案した。その後重み関数法は応力拡大係数を求めるための有力な手法として発展し、Sham ら<sup>25)</sup>が材料の異方性、変位境界問題・熱弾性問題などのすべての荷重条件、3種の破壊モードに対応した2次元問題に対する重み関数の計算法をまとめ、計算手法としての完成を見たとされている。ただ、重み関数は一つの構造に対し一つ存在すること、および個々の重み関数を求めることその

こと自身が労力のかかる仕事であるため、実用に耐えるデータが整備された形で提供されるまでには至っていない。たとえば、片側き裂梁の荷重境界問題に対する重み関数ですら、Cheng<sup>126)・127)</sup>らが提案したのは1988年になってからである。これでは重み関数法の強み、すなわち計算アルゴリズムに乗り易い点、が発揮されるとは言い難い。重み関数は定式化されてこそ、少なくともプログラム化されるアルゴリズムに展開されてこそ、その意義がある。この意味で重み関数法は実用面でまだまだ発展途上にあると言える。

**b) 変位境界問題への適用** さて、Bueckner、Rice が当初提案した形式は、荷重境界条件に対してのみ適用できるものであったが、Bueckner は1973年の段階で重み関数法が変位境界問題に対し拡張可能であることを指摘している<sup>128)</sup>ようである。これを片側き裂梁の問題に適用したのが、Bowie and Freese<sup>129)</sup>である。彼らは変位境界上の荷重が *a priori* にはわからぬにせよ、結果として求められる荷重がわかれば荷重境界問題に帰着する点に着目した。すなわち、Bueckner、Rice が位置のみの関数として扱っていた境界上の分布力・変位を、位置のみならずき裂長さの関数として扱ったのである。これにより、変位境界条件に対する重み関数が、一様変位境界問題に対し結果として得られる境界上の応力をき裂長さで微分した値、及び一様変位問題の応力拡大係数から求まることを導いた。現在までのところ片側き裂梁の変位境界問題重み関数は定式化されておらず、あるアスペクト比に対し図表の形で一様変位<sup>129)・130)</sup>、線形変位<sup>129)</sup>に対し示されている状況である。

さて、図 2.7 の問題について考える。図中“1”、“2”の構造物の形状は同一で、荷重条件のみが異なるとする。ここに荷重条件“1”、“2”に対応する荷重ベクトル  $T_i^{(1)}(x, y; a)$  と  $T_i^{(2)}(x, y; a)$  によりき裂先端に生じる挙動は、モード I の挙動のみであるとする。添字  $i$  は多数の荷重ベクトルの識別番号である。この荷重ベクトルに対応する変位を各々  $U_i^{(1)}(x, y; a)$  と  $U_i^{(2)}(x, y; a)$  とする。また、これらの荷重ベクトルの合計により求められる合ベクトルに対する応力拡大係数を各々  $K_i^{(1)}(a)$ 、 $K_i^{(2)}(a)$  とする。

このとき荷重条件“1”、“2”の間には、相反定理により次のような関係が一般的に成り立つ。

$$K_i^{(1)}(a)K_j^{(2)}(a) = \frac{E'}{2} \left\{ \int_{C_1} \left[ T_j^{(2)} \cdot \frac{\partial U_i^{(1)}}{\partial a} - \frac{\partial T_i^{(1)}}{\partial a} \cdot U_j^{(2)} \right] dS \right\} \quad (2.23)$$

ここに、 $E' = E$  (ヤング率) : 平面応力、 $E / (1 - \nu^2)$  : 平面ひずみ、 $\nu$  : ポアソン比、である。

もし条件の“1”を変位境界条件が与えられた場合に選ぶならば、 $\partial U_i^{(1)} / \partial a = 0$  であるので式(2.23)は簡単になる。この場合、条件“1”の変位境界条件は任意でよい。

$$K_i^{(1)}(a)K_j^{(2)}(a) = -\frac{E'}{2} \int_{C_1} \frac{\partial T_i^{(1)}}{\partial a} \cdot U_j^{(2)} dS \quad (2.24)$$

式(2.24)より、ある構造物に対し一つの変位境界問題に対し  $K_i^{(1)}(a)$  と  $\partial T_i^{(1)} / \partial a$  を求めることができれば、任意の変位境界条件に対する応力拡大係数  $K_i^{(2)}(a)$  を計算できることがわかる。すなわち、変位境界条件に対する重み関数  $w(x; a)$  を次のように定義できる。

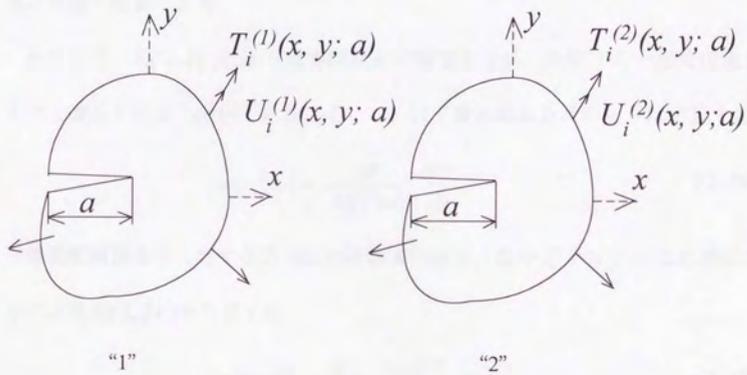


図 2.7 境界条件 “1” と “2”

$$K_i^{(2)}(a) = \int_{C_i} U_i^{(2)}(x, y; a) \cdot w(x, y; a) dS \quad (2.25)$$

補足説明をすると、式(2.25)の積分は境界上全域にわたり実行することを意味している。また、 $U_i^{(2)}(x, y; a)$  が  $i$  個の変位ベクトルを表しているので、これについては重ね合わせることを意味している。他方、条件"1"についてはある一つの変位  $U_i^{(1)}(x, y; a)$  に対し応力拡大係数  $K_i^{(1)}(a)$  が求まっていればよい、という点に注意が必要である。

ところで、式(2.25)により重み関数を定義できるが、条件"1"を一様変位境界条件に選ぶと何かと便利である。そこで、以下重み関数を次のように定義する。

$$w(x, y; a) = -\frac{E'}{2K_i^{(1)}(a)} \cdot \frac{\partial T_i^{(1)}}{\partial a} \quad (2.26)$$

一様変位境界条件に対する応力拡大係数  $K_i^{(1)}(a)$  は、条件"2"を"1"と同じに選ぶことにより式(2.24)から求まる。

$$\{K_i^{(1)}(a)\}^2 = -\frac{E'}{2} U_i^{(1)} \int_{C_i} \frac{\partial T_i^{(1)}}{\partial a} dS \quad (2.27)$$

なお、式(2.27)中の添字  $i$  はある特定の一様変位境界条件を示している。

式(2.26)、(2.27) は変位境界問題の重み関数を求める方法につき、重要な情報を与えてくれる。すなわち、

- 重み関数  $w(x, y; a)$  を変位境界問題に対し求めるためには、ある一様変位境界問題に対する境界上の表面力分布のき裂長さに対する微係数  $\partial T_i^{(1)} / \partial a$  を求めさえすればよい。

しかし、実はこれが厄介な問題なのである。なぜなら、一様変位境界問題の境界上の表面力分布を求めることは、問題を解くことに他ならないからである。二次元問題であれば、選点法・有限要素解析、三次元問題であれば有限要素解析などがこの問題を解くための手法として考えられる。しかし、計算する変位境界条件の数が少ないならば、わざわざ一様変位境界問題を解き、重み関数を求めるという手順を踏むことなく、直接与えられた変位境界問題をこれらの手法で解いた方が効率的である。そこにこれまで重み関数法がなかなか実用化されてこなかった問題点があるように思える。以下、第3章において変位境界問題に対する重み関数、そして結局は一様変位境界問題に対し  $\partial T_i^{(j)}/\partial a$  を求めるための明快な手順を導く。

**c) 基本式の導出** 最後に、重み関数法の基本式(2.23)を相反定理より導く。以下の議論はそのままモードIIに適用できるが、ここではモードIの変形様式について説明する。

図2.8の幾何学的に同一な形状"1"、および"2"を考える。表面力ベクトル  $T_i^{(j)}(x, y; a)$ 、および  $T_i^{(2)}(x, y; a)$  によりき裂先端近傍において生じる変形挙動は、モードIのみであるとする。対応する応力拡大係数、および変位ベクトルをそれぞれ  $K_I^{(1)}(a)$ 、 $U_I^{(1)}(x, y; a)$ 、および  $K_I^{(2)}(a)$ 、 $U_I^{(2)}(x, y; a)$  とする。また、 $C_a$  が  $\Delta a = 0$  の境界を表し、 $C_{\Delta a}$  がき裂表面  $\Delta a$  を表すとする。このとき、Betti-Rayleighの相反定理により

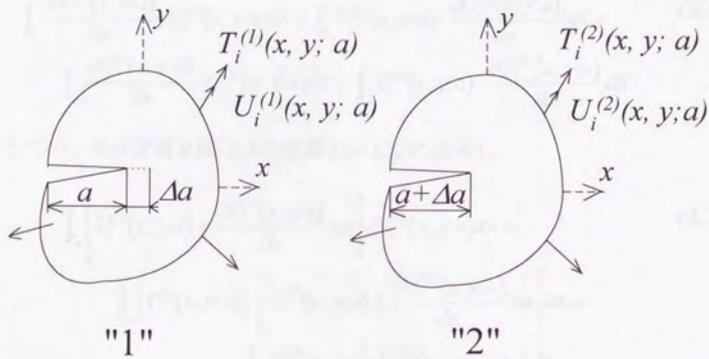


図 2.8 重み関数基本式の導出

$$\int_{C_a} T_i^{(2)}(x, y; a) \cdot U_i^{(1)}(x, y; a) dS = \int_{C_a} T_i^{(1)}(x, y; a) \cdot U_i^{(2)}(x, y; a) dS \quad (2.28)$$

が得られる。

さらに、 $C_a$ を固定して式(2.28)をき裂長さ  $a$  について偏微分することにより、次式が得られる。

$$\begin{aligned} \int_{C_a} \frac{\partial T_i^{(2)}(x, y; a)}{\partial a} \cdot U_i^{(1)}(x, y; a) dS + \int_{C_a} T_i^{(2)}(x, y; a) \cdot \frac{\partial U_i^{(1)}(x, y; a)}{\partial a} dS = \\ \int_{C_a} \frac{\partial T_i^{(1)}(x, y; a)}{\partial a} \cdot U_i^{(2)}(x, y; a) dS + \int_{C_a} T_i^{(1)}(x, y; a) \cdot \frac{\partial U_i^{(2)}(x, y; a)}{\partial a} dS \end{aligned} \quad (2.29)$$

ここで、相反定理を図 2.8の境界  $C_a + C_{\Delta a}$  に適用し、

$$\begin{aligned} \int_{C_a} \left[ T_i^{(2)}(x, y; a) + \frac{\partial T_i^{(2)}(x, y; a)}{\partial a} \Delta a \right] \cdot U_i^{(1)}(x, y; a) dS = \\ \int_{C_a} \left[ T_i^{(1)}(x, y; a) \right] \cdot \left[ U_i^{(2)}(x, y; a) + \frac{\partial U_i^{(2)}(x, y; a)}{\partial a} \Delta a \right] dS + \\ \int_{C_a} T_i^{(1)*}(x, y; a) \cdot U_i^{(2)}(x, y; a + \Delta a) dS \end{aligned} \quad (2.30)$$

ここで、 $T_i^{(1)*}(x, y; a)$ は形状"1"における  $\Delta a$  上における平衡力である。式(2.28)、

(2.29)より、式(2.30)は次のように変形できる。

$$\begin{aligned} \left\{ \int_{C_a} \frac{\partial T_i^{(1)}(a)}{\partial a} \cdot U_i^{(2)}(a) dS - \int_{C_a} T_i^{(2)}(a) \cdot \frac{\partial U_i^{(1)}(a)}{\partial a} dS \right\} \Delta a = \\ \int_{C_a} T_i^{(1)*}(a) \cdot U_i^{(2)}(a + \Delta a) dS \end{aligned} \quad (2.31)$$

$C_a$ 上では

$$T_i^{(1)*}(a) \cdot U_i^{(2)}(a + \Delta a) \approx - \left[ \frac{K_i^{(1)}(a)}{\sqrt{2\pi(x-a)}} \right] \left[ \frac{4K_i^{(2)}(a + \Delta a)}{\sqrt{(2\pi)E'}} \sqrt{a + \Delta a - x} \right] \quad (2.32)$$

ここに、ヤング率  $E' = E$  (平面応力)、 $E/(1-\nu^2)$  (平面ひずみ) であり、 $\nu$  はポアソン比である。式(2.32)を式(2.31)に代入し、 $\Delta a \rightarrow 0$  とすると所用の基本式が得られた。

$$K_I^{(1)}(a)K_I^{(2)}(a) = \frac{E'}{2} \left\{ \int_{S_0} \left[ T_i^{(2)} \cdot \frac{\partial U_i^{(1)}}{\partial a} - \frac{\partial T_i^{(2)}}{\partial a} \cdot U_i^{(1)} \right] dS \right\} \quad (2.33)$$

## 2.3 連続体力学の基礎理論

### 2.3.1 Duhamel のアナロジ

ここでは第4章にて環状き裂の熱応力下のK値簡便評価式を導出する際に用いる、Duhamel のアナロジについて説明する。

Duhamel のアナロジは Duhamel-Neumann のアナロジとも呼ばれ、非連成準静的熱弾性問題を、その熱ひずみによる変形と等価な変形を与える表面力・物体力の問題に置き換えるための理論である<sup>131)</sup>。本論文では以下 Duhamel のアナロジと称することにする。

Duhamel のアナロジ 正確に同じ形で図 2.9に示すような条件が与えられた二つの物体を考える。このときはつぎの関係が成り立つ。

$$u_i^{(I)}(x_1, x_2, x_3; t) = u_i^{(II)}(x_1, x_2, x_3; t) \quad (2.34)$$

$$\sigma_y^{(II)} = \sigma_y^{(I)} - B\theta^{(I)}\delta_y \quad (2.35)$$

以下、このアナロジを導く。

$$\overset{v}{T}_i^{(1)} \neq 0$$

$$X_i^{(1)}$$

$$\theta^{(1)} \neq 0$$

物体 I

$$\overset{v}{T}_i^{(II)} = \overset{v}{T}_i^{(I)} + B\theta^{(I)}v_i$$

$$X_i^{(II)} = X_i^{(I)} - B \frac{\partial \theta^{(I)}}{\partial x_i}$$

$$\theta^{(II)} \equiv 0$$

物体 II

図 2.9 Duhamel のアナロジ

**Duhamel のアナロジの導出** 非連成準静的理論において、応力とひずみは、適当な境界条件を用いて、次の式 (2.36)ないし(2.37)により各瞬間温度分布 $\theta(x_1, x_2, x_3)$ につき計算される。

$$e_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad i, j=1,2,3 \quad (2.36)$$

$$\rho \frac{Dv_i}{Dt} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + X_i \quad (2.37)$$

等方材料では

$$\sigma_{ij} = \lambda e_{\mu\mu} \delta_{ij} + 2G e_{ij} - B \delta_{ij} \theta \quad (2.38)$$

$$\sigma_{ij,j} + X_i = 0 \quad (2.39)$$

が成り立つ。ひずみ

$$e_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (2.40)$$

は適合条件

$$e_{ij,kl} + e_{kl,ij} - e_{j,l,ik} = 0 \quad (2.41)$$

を満足しなければならない。式(2.38)に対応して次式がある。

$$e_{ij} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \sigma_{\mu\mu} \delta_{ij} + \alpha \theta \delta_{ij}, \quad B = \frac{E\alpha}{1-2\nu} \quad (2.42)$$

まず、 $\sigma_{ij}=0$  のとき式(2.42)は

$$e_{ij} = \alpha \theta \delta_{ij} \quad (2.43)$$

となり、式(2.41)は

$$\theta_{,ki}\delta_{ij} + \theta_{,ij}\delta_{ki} - \theta_{,ji}\delta_{ik} - \theta_{,ik}\delta_{jl} = 0 \quad (2.44)$$

となる。この式は

$$\theta_{,ij} = 0, \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (2.45)$$

ならば満足される。この解は任意係数  $a_i$  を用いて

$$\theta = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 \quad (2.46)$$

となる。したがって  $\theta$  が空間座標  $x_1, x_2, x_3$  の 1 次関数であり、また境界の変位が拘束されなければ、応力を用いなくても適合条件を満足することができる。一般に任意の温度場について、熱膨張のみに対応するひずみ場(2.43)は適合ではなく、その場合には熱応力を考慮しなければならない。式(2.38)と(2.40)を(2.39)に代入すれば、一般化 Navier の方程式

$$Gu_{i,\mu\mu} + (\lambda + G)u_{\mu,\mu} + X_i - B\theta_{,i} = 0 \quad (2.47)$$

を得る。この式は境界条件が

$$u_i = f_i(x_1, x_2, x_3) \quad (2.48)$$

で与えられるとき、特に便利である。一方、境界上で力が与えられるとき、すなわち、

$$\overset{\vee}{T}_i = \sigma_{ij}v_j = g_i(x_1, x_2, x_3) \quad (2.49)$$

ならば、境界上で

$$v_j [\lambda u_{\mu,\mu}\delta_{ij} + Gu_{i,j} + Gu_{j,i} - B\delta_{ij}\theta] = g_i \quad (2.50)$$

が得られるはずである。ここに  $\nu_j$  は境界面上の外向き法線ベクトルの成分であり、 $g_i$  は与えられる。

式(2.47)ないし(2.50)を線形弾性理論の対応する方程式と比較すれば、温度変化  $\theta$  の影響は、Navier の方程式における物体力  $X_i$  を  $X_i - B\theta_i$  で置きかえ、また表面力  $g_i$  に対し  $g_i + B\nu_j\theta$  を代入するのと等価であることがわかる。このように、温度変化  $\theta$  により生じた変位  $u_1, u_2, u_3$  は、同じ形で全体の温度が一様な物体に、物体力  $(-B\theta_i)$  および面上に作用する法線力  $B\theta$  によって生じた変位と同様である。すなわち、Duhamel のアナログが導かれた。

### 2.3.2 円筒と弾性支持梁

ここでは軸対称荷重を受ける薄肉円筒の問題が、支配方程式のアナログより弾性支持梁問題に置き換えることができることを示すために、その支配方程式を導く<sup>132)</sup>。

図 2.10 に示す円筒シェルの微小要素を考え、平衡方程式を導く。まず対称性より、せん断力  $N_{x\varphi} = N_{\varphi x}$  がこの問題においては零となり、周方向力  $N_\varphi$  が周方向に一定となる。軸直角方向のせん断力成分についても、対称性より非零成分は  $Q_x$  だけとなる。次に図 2.10 の円筒シェル要素に作用する曲げモーメントを考えると、 $N_{x\varphi} = N_{\varphi x} = 0$  であり、 $M_\varphi$  が周方向に一定となる。このような対称性の条件を考慮するとき、6 個の平衡方程式のうちの 3 個は自動的に満足され、残りの 3 個について考えればよいことになる。すなわち、 $x$ 、 $z$  方向成分の荷重、および  $y$  軸に関する曲げモーメントに関するつりあいを考えればよい。外力は表面に垂直な成分のみであるとすると、平衡方程式は次式となる。

$$\frac{dN_x}{dx} R_m dx d\varphi = 0 \quad (2.51)$$

$$\frac{dQ_x}{dx} R_m dx d\varphi + N_\varphi dx d\varphi + Z R_m dx d\varphi = 0 \quad (2.52)$$

$$\frac{dM_x}{dx} R_m dx d\varphi - Q_x R_m d\varphi = 0 \quad (2.53)$$

ここに、 $R_m$  は平均半径である。

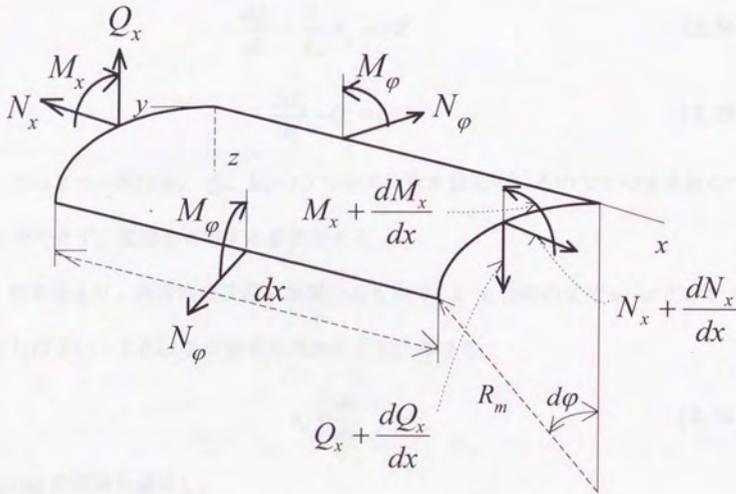


図 2.10 薄肉円筒の力のつりあい

式(2.51)は $N_x$ が一定であることを示しており、以下の議論では零とする。式(2.52)、(2.53)は次のようにまとめることができる。

$$\frac{dQ_x}{dx} + \frac{1}{R_m} N_\varphi = -Z \quad (2.54)$$

$$\frac{dM_x}{dx} - Q_x = 0 \quad (2.55)$$

この2つの式は $N_\varphi$ 、 $Q_x$ 、 $M_x$ の3つの未知数を含んでいるのでこのまま解くことができず、変位を考慮する必要がある。

対称性より、周方向の変位 $v$ が零であるので、 $x$ 、 $z$ 方向の変位 $u$ 、 $w$ だけを考えればよい。これによりひずみは次のように書ける。

$$\varepsilon_x = \frac{du}{dx} \quad (2.56)$$

Hookeの法則を適用し、

$$N_x = \frac{EW}{1-\nu^2} (\varepsilon_x + \nu\varepsilon_z) = \frac{EW}{1-\nu^2} \left( \frac{du}{dx} - \nu \frac{w}{R_m} \right) = 0 \quad (2.57)$$

$$N_\varphi = \frac{EW}{1-\nu^2} (\varepsilon_\varphi + \nu\varepsilon_x) = \frac{EW}{1-\nu^2} \left( -\frac{w}{R_m} + \nu \frac{du}{dx} \right) \quad (2.58)$$

ここに、 $W$ は肉厚である。

式(2.57)、(2.58)より、次の関係を得る。

$$\frac{du}{dx} = \nu \frac{w}{R_m} \quad (2.59)$$

$$N_\varphi = -\frac{EWw}{R_m} \quad (2.60)$$

曲げモーメントについて考えると、対称性より周方向の曲率変化がなく、 $x$  方向の曲率は $(-d^2w/dx^2)$ である。板と同様の式を用い、次の関係を得る。

$$M_\varphi = \nu M_x \quad (2.61)$$

$$M_x = -D \frac{d^2w}{dx^2} \quad (2.62)$$

ここに、 $D$ はシェルの曲げ剛性である。

$$D = \frac{EW^3}{12(1-\nu^2)} \quad (2.63)$$

式(2.54)、(2.55)から $Q_x$ を消去し次式を得る。

$$\frac{d^2M_x}{dx^2} + \frac{1}{R_m} N_\varphi = -Z \quad (2.64)$$

式(2.60)~(2.62)の関係を用い、円筒シェルの軸対称変形に関する支配方程式が得られた。

$$\frac{d^2}{dx^2} \left( D \frac{d^2w}{dx^2} \right) + \frac{EW}{R_m^2} w = Z \quad (2.65)$$

円筒シェルの肉厚 $W$ が一定である最も単純な場合には、式(2.65)は次のように書き直せる。

$$D \frac{d^4w}{dx^4} + \frac{EW}{R_m^2} w = Z \quad (2.66)$$

ここで次のような定数 $\beta$ を用いることにすると、

$$\beta^4 = \frac{EW}{4R_m^2 D} = \frac{3(1-\nu^2)}{R_m^2 W^2} \quad (2.67)$$

次の弾性支持梁と類似の支配方程式が得られた。

$$\frac{d^4 w}{dx^4} + 4\beta^4 w = \frac{Z}{D} \quad (2.68)$$

### 2.3.3 弾性支持梁の基礎理論

ここでは第4章にて環状き裂の熱応力下のK値簡便評価式を導出する際に用いる、弾性支持梁の基礎理論について説明する。また、基本となる荷重条件に対する有限長弾性支持梁の基本解をハンドブック形式で図として添付した。

本論文で弾性支持梁という場合、これは梁がその任意の位置においてたわみに比例する反力を弾性床から受ける場合を指す。このような仮定は1867年にWinkler<sup>33)</sup>により導入され、1888年にZimmermann<sup>34)</sup>が鉄道線路の解析に用いて以来、土木・建築の分野で広く用いられてきた仮定である。機械屋にとってはあまりなじみのない仮定であるが、あまり意識することなく薄肉円筒の解析に用いられてきている<sup>32)</sup>。ここでは、この分野では名高いHetényiの著書<sup>35)</sup>に従い、説明を行う。

#### 弾性支持梁の基礎方程式の誘導と一般解法

まず、弾性支持梁の支配方程式である、たわみ曲線の微分方程式を求める。

弾性床によって全長にわたり支持されており、その縦軸線、すなわち各横断面の図心を結ぶ線、に垂直に働く力を受ける図2.11のような真直梁を考える。この与えられた荷重によって梁はたわみ、支持体に連続して分布する反力を生じ、任意の点におけるその強さ  $p$  が、その点における梁のたわみに比例するという基本的な仮定をする。すなわち、 $y$  を梁のたわみとすると、 $p = ky$  が成り立つとする。反力は垂直、かつ梁のたわみと反対方向に生じ、たわみが下方向（正）に向かう場合には支持体に圧縮が生じる。

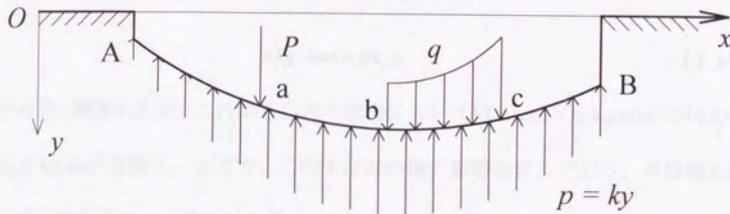


図 2.11 たわみに比例する反力を受ける真直梁

ここで、 $p = ky$  という仮定は支持体の材料が Hooke の法則に従うことを意味しており、支持体のこの定数  $k_0 \text{ kg/mm}^3$  を基盤係数 (modulus of the foundation) と称する。本論文においては円筒問題への適用を考え、基盤係数を「弾性支持梁のバネ定数」と称する。

以下、幅  $b$  の均一断面を有する梁が弾性支持されている問題を考える。このとき梁は単位たわみに対し、支持体より  $bk_0$  の反力を受ける。その結果たわみが  $y$  となる点における梁の単位長さ当たり分布反力は、

$$p \text{ kg/mm} = bk_0 y \quad (2.69)$$

となる。簡単のため、これからの式の誘導においては  $b \text{ mm} \times k_0 \text{ kg/mm}^3$  の代わりに  $k \text{ kg/mm}^2$  を使う。ここで、この  $k$  は梁の幅の影響を含んでおり、単位幅の梁を取り扱うときのみ数値的に等しくなることに対し、注意が必要である。

ところで、荷重を受けた梁がたわむとき、垂直反力の他に梁が支持体との接触面に沿って若干の水平力 (摩擦による) が生じると考えられる。ここではその影響は小さいとして、考慮に入れない。そして基盤の反力はどの断面においても垂直であるとする。

さて、微小長さ  $dx$  の梁の要素について考える。この要素は分布荷重  $q \text{ kg/mm}$  が作用する梁であるとする。この要素に働く力のつりあいを図 2.12 に示す。上向きに働く断面左のせん断力  $Q$  を正とし、曲げモーメント  $M$  は要素左側から時計回りの回転を与えるとき正とする。

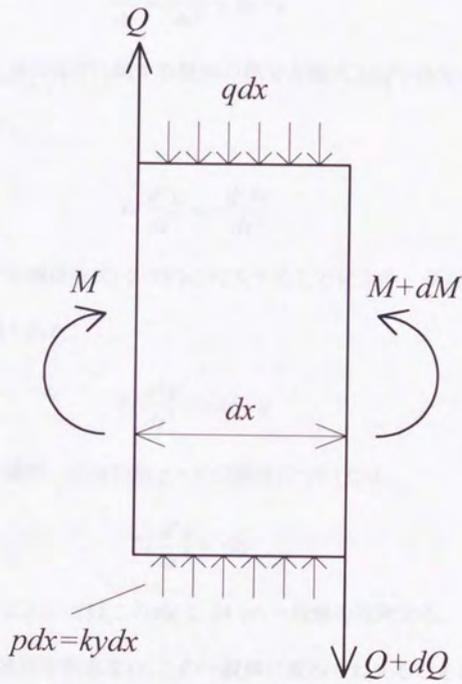


図 2.12 弾性支持梁要素の力のつりあい

図 2.12における垂直方向の力のつりあいより次式を得る。

$$Q - (Q + dQ) + ky \, dx - q \, dx = 0 \quad (2.70)$$

ここに、 $Q = dM/dx$  の関係より、

$$\frac{dQ}{dx} = \frac{d^2 M}{dx^2} = ky - q \quad (2.71)$$

を得る。さらに梁の曲げに関する既知の微分方程式  $EI(d^2y/dx^2) = -M$  を 2 階微分することにより、

$$EI \frac{d^4 y}{dx^4} = -\frac{d^2 M}{dx^2} \quad (2.72)$$

が得られる。この関係を式(2.71)に代入することにより、所用の弾性支持梁の支配方程式が得られた。

$$EI \frac{d^4 y}{dx^4} = -ky + q \quad (2.73)$$

分布力がない場所、すなわち  $q = 0$  の場所については、

$$EI \frac{d^4 y}{dx^4} = -ky \quad (2.74)$$

が得られ、以下においてはこの式(2.74)の一般解のみ考える。これは、分布荷重  $q$  に対する特殊解を別途求め、この一般解に重ね合わせることにより式(2.73)の解が得られるからである。

ここで、式(2.74)において  $\beta$  を次のように定義するとき、

$$\beta = \sqrt[4]{\frac{k}{4EI}} \quad (2.75)$$

式(2.74)の一般解は  $C_1 \sim C_4$  を積分定数として、次のように書くことができる。

$$y = e^{\beta x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x) + e^{-\beta x} (C_3 \cos \beta x + C_4 \sin \beta x) \quad (2.76)$$

ここに、 $\beta$ は支持体の剛性と同時に梁の曲げ剛性の影響を含み、たわみ曲線の形状に影響を与える重要なファクターである。このため $\beta$ はこの系の特性値 (*characteristic of the system*) と呼ばれ、その次元は長さの逆数である。また、 $1/\beta$ はしばしば特性長さ (*characteristic length*) と呼ばれる。

式(2.76)は弾性支持された矩形断面の真直梁に、縦軸線に垂直な曲げのみが加えられた、 $q = 0$  の場合に対するたわみの一般解を表す。分布荷重が加わる時は追加の項が必要となる。式(2.76)を微分して次の式を得る。

$$\frac{1}{\beta} \frac{dy}{dx} = e^{\beta x} [C_1 (\cos \beta x - \sin \beta x) + C_2 (\cos \beta x + \sin \beta x)] - e^{-\beta x} [C_3 (\cos \beta x + \sin \beta x) - C_4 (\cos \beta x - \sin \beta x)] \quad (2.77)$$

$$\frac{1}{2\beta^2} \frac{d^2 y}{dx^2} = -e^{\beta x} (C_1 \sin \beta x - C_2 \cos \beta x) + e^{-\beta x} (C_3 \sin \beta x - C_4 \cos \beta x) \quad (2.78)$$

$$\frac{1}{2\beta^3} \frac{d^3 y}{dx^3} = -e^{\beta x} [C_1 (\cos \beta x + \sin \beta x) - C_2 (\cos \beta x - \sin \beta x)] + e^{-\beta x} [C_3 (\cos \beta x - \sin \beta x) + C_4 (\cos \beta x + \sin \beta x)] \quad (2.79)$$

ここで、

$$\frac{dy}{dx} = \tan \theta, \quad -EI \frac{d^2 y}{dx^2} = M, \quad -EI \frac{d^3 y}{dx^3} = Q \quad (2.80)$$

であるので、式(2.77)~(2.79)から曲げモーメント  $M$ 、およびせん断力  $Q$  同様にたわみ曲線の勾配  $\theta$  (微小変形の範囲では、 $\tan \theta \doteq \theta$ ) に対する一般式を得る事が出来る。また、支持体を受ける圧力の強さは式(2.76)から  $p = ky$  として求まる。

これらの一般解、あるいは分布荷重  $q$  に対応する特殊解を具体的な問題に適用するには、次のステップとして積分定数  $C_1 \sim C_4$  を決める必要がある。これらの積分定数は梁の荷重状態により変わるが、たわみ曲線、およびその微分値が連続している梁についてはその範囲内で一定値となる。そして、この連続部の両端の境界条件からこれらの積分定数を求めることができる。一般の問題では、4個の変数  $y, \theta, M, Q$  のうち2個につき両端における値が既知であり、これらの境界条件から4個の積分定数  $C_1 \sim C_4$  を定めることができる。

なお、梁が図 2.11のように各種の荷重を受けるとき、梁全長をその範囲でたわみ曲線・微係数が連続した何本かの梁の組み合わせと考え、その接続部における連続性により境界条件を定め、積分定数を求めることになる。例えば、図 2.11においては A-a、a-b、b-c および c-B の4本の梁に分解して考えることになる。

数学的な観点からすると以上のように問題は完全に解けるが、その手順は面倒であり、実務的な計算になじまない。しかしながら、もし一般解中の積分定数が端部境界条件の物理量の形で書かれているならば、具体的な問題の計算は大幅に簡単になる。以下、この解法について述べる。

## 初期値法による支配方程式の解法

弾性支持梁が図 2.13 のモーメント  $M$ 、集中力  $P$ 、及び分布荷重  $q$  のような各種の荷重を受ける場合を考える。  $x$ 、  $y$  座標系の原点を梁の左端にとる。

式(2.76)~(2.79)において  $x=0$  とすると、梁の左端の境界条件が次のように得られる。

$$[y]_{x=0} = y_0 = C_1 + C_3 \quad (2.81)$$

$$\left[ \frac{dy}{dx} \right]_{x=0} = \theta_0 = \beta(C_1 + C_2 - C_3 + C_4)$$

$$\left[ -EI \frac{d^2 y}{dx^2} \right]_{x=0} = M_0 = 2\beta^2 EI(-C_2 + C_4)$$

$$\left[ -EI \frac{d^3 y}{dx^3} \right]_{x=0} = Q_0 = 2\beta^3 EI(C_1 - C_2 - C_3 - C_4)$$

$C$  を未知数として上式から

$$C_1 = \frac{1}{2}y_0 + \frac{1}{4\beta}\theta_0 + \frac{1}{8\beta^3 EI}Q_0 \quad (2.82)$$

$$C_2 = \frac{1}{4\beta}\theta_0 - \frac{1}{4\beta^2 EI}M_0 - \frac{1}{8\beta^3 EI}Q_0$$

$$C_3 = \frac{1}{2}y_0 - \frac{1}{4\beta}\theta_0 - \frac{1}{8\beta^3 EI}Q_0$$

$$C_4 = \frac{1}{4\beta}\theta_0 + \frac{1}{4\beta^2 EI}M_0 - \frac{1}{8\beta^3 EI}Q_0$$

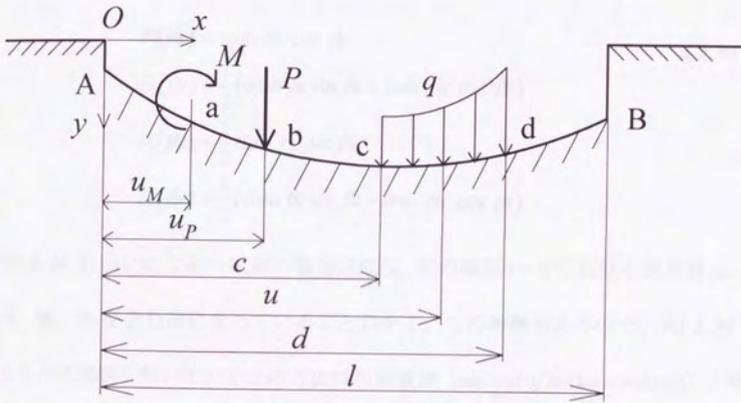


図 2.13 多種の荷重を受ける弾性支持梁

式(2.76)の  $C$  を上式で置き換え、

$$\frac{1}{2}(e^{\beta x} + e^{-\beta x}) = \cosh \beta x, \quad \frac{1}{2}(e^{\beta x} - e^{-\beta x}) = \sinh \beta x \quad (2.83)$$

を代入すればたわみ曲線は次のような形になる。

$$y_x = y_0 F_1(\beta x) + \frac{1}{\beta} \theta_0 F_2(\beta x) - \frac{1}{\beta^2 EI} M_0 F_3(\beta x) - \frac{1}{\beta^3 EI} Q_0 F_4(\beta x) \dots \quad (2.84)$$

ここに、

$$F_1(\beta x) = \cosh \beta x \cos \beta x \quad (2.85)$$

$$F_2(\beta x) = \frac{1}{2}(\cosh \beta x \sin \beta x + \sinh \beta x \cos \beta x)$$

$$F_3(\beta x) = \frac{1}{2} \sinh \beta x \sin \beta x$$

$$F_4(\beta x) = \frac{1}{2}(\cosh \beta x \sin \beta x - \sinh \beta x \cos \beta x)$$

式(2.84)においてこの一般解の積分定数は、梁の端部  $x=0$  における境界値  $y_0$ 、 $\theta_0$ 、 $M_0$ 、 $Q_0$  を含む形になっていることわかる。この特徴があるので、式(2.84)をもとに問題を解いていくこの方法は初期値法 (*method of initial condition*) と呼ばれる。積分定数が端部境界上の物理量として与えられることより、先に述べた一般解法に比べ非常に使いやすくなっている。

式(2.84)のさらに一般化された形は次のように考えていくことにより、求めることが出来る。まず、境界値  $y_0$ 、 $\theta_0$ 、 $M_0$ 、 $Q_0$  が既知であるとして、梁の左端から荷重を受けない部分 A-a については、式(2.84)によりたわみを表すことができる。最初の荷重が図 2.13 に示されるように集中モーメント  $M$  であるとする。このモーメント  $M$  が荷重点の右 ( $x > u_M$ ) のたわみ曲線に及ぼす影響は、そのモーメントの絶対値を除けば端部モーメント  $M_0$  が A-a の部分 ( $0 < x < u_M$ ) のた

わみ曲線に及ぼす影響と明らかに同じである。式(2.84)にて  $M_0$  がたわみ  $y_x$  に及ぼす影響は  $-(1/\beta^2 EI)F_3(\beta x)$  として表されることから、点  $a$  におけるモーメント  $M$  は点  $a$  の右、すなわち  $x > u_M$  のたわみに  $-(1/\beta^2 EI)F_3[\beta(x-u_M)]M$  の修正効果を与える。従って  $a$ - $b$  の部分のたわみ曲線は式(2.84)にこの修正項を加えることにより求められる。

同様に力  $P$  は点  $b$  の右のたわみ曲線に  $(1/\beta^3 EI)F_4[\beta(x-u_p)]P$  の影響を与える。最後に分布荷重  $q$  は無限の集中力からなるとみなせるので、 $x > c$  の部分のたわみ曲線に与える影響は  $(1/\beta^3 EI) \int_a^x q F_4[\beta(x-u)] du$  であると結論づけられる。 $x > d$  では積分の上限は  $d$  となる。以上の結果をまとめると、図 2.13 の荷重条件に対してたわみ曲線は次式により与えられる。

$$\begin{aligned}
 y_x = & y_0 F_1(\beta x) + \frac{1}{\beta} \theta_0 F_2(\beta x) - \frac{1}{\beta^2 EI} M_0 F_3(\beta x) - \frac{1}{\beta^3 EI} Q_0 F_4(\beta x) \\
 & - \frac{1}{\beta^2 EI} F_3[\beta(x-u_M)] + \frac{1}{\beta^3 EI} P F_4[\beta(x-u_p)] \\
 & + \frac{1}{\beta^3 EI} \int_a^x q F_4[\beta(x-u)] du
 \end{aligned} \quad (2.86)$$

この式は梁の左端 ( $x=0$ ) と今考えている点 ( $x=x$ ) の間に作用する  $M$ 、 $P$ 、 $q$  の影響を含むものであり、これらの荷重のうちのいずれかが欠ける場合には式(2.86)の対応する項をなくせばよい。上の式を続けて微分し

$$\frac{dF_1}{dx} = -4\beta F_4, \quad \frac{dF_2}{dx} = \beta F_1, \quad \frac{dF_3}{dx} = \beta F_2, \quad \frac{dF_4}{dx} = \beta F_3 \quad (2.87)$$

と置くと回転角、モーメント、せん断力が次のように得られる。

$$\begin{aligned} \theta_x = & \theta_0 F_1(\beta x) - \frac{1}{\beta EI} M_0 F_2(\beta x) - \frac{1}{\beta^2 EI} Q_0 F_3(\beta x) - 4\beta y_0 F_4(\beta x) \\ & - \frac{1}{\beta EI} M F_2[\beta(x - u_M)] + \frac{1}{\beta^2 EI} P F_3[\beta(x - u_P)] \\ & + \frac{1}{\beta^2 EI} \int q F_3[\beta(x - u)] du \end{aligned} \quad (2.88)$$

$$\begin{aligned} M_x = & M_0 F_1(\beta x) + \frac{1}{\beta} Q_0 F_2(\beta x) + \frac{k}{\beta^2} y_0 F_3(\beta x) + \frac{k}{\beta^3} \theta_0 F_4(\beta x) \\ & + M F_1[\beta(x - u_M)] - \frac{1}{\beta} P F_2[\beta(x - u_P)] - \frac{1}{\beta} \int q F_2[\beta(x - u)] du \end{aligned} \quad (2.89)$$

$$\begin{aligned} Q_x = & Q_0 F_1(\beta x) + \frac{k}{\beta} y_0 F_2(\beta x) + \frac{k}{\beta^2} \theta_0 F_3(\beta x) - 4\beta M_0 F_4(\beta x) \\ & - 4\beta M F_4[\beta(x - u_M)] - P F_1[\beta(x - u_P)] - \int q F_1[\beta(x - u)] du \end{aligned} \quad (2.90)$$

式(2.86)、(2.88)~(2.90)をみると、端部境界値  $y_0$ 、 $\theta_0$ 、 $M_0$ 、 $Q_0$  がその中にシステマティックに現れている。すなわち、このいずれの式においてもこの4個の端部境界値が登場し、その関数  $F_0 \sim F_4$  との対応は、式(2.86)、(2.88)~(2.90)へと進むに従い一度に一つずつずれていく。同様のことが梁が受ける荷重  $M$ 、 $P$ 、 $q$  と関数  $F$  との対応においても見られる。

$x=l$  を式(2.86)、(2.88)~(2.90)に代入し、梁の左端境界条件と荷重条件より梁の右端の  $y_l$ 、 $\theta_l$ 、 $M_l$ 、 $Q_l$  を得る。先に述べたように、梁の端部境界条件を与える四つの量すべてが既知ではなくとも、通常両端において各々二つが既知である。各々の端部において二つが未知数として残る。あわせると四つの未知数となるがこれは式(2.86)、(2.88)~(2.90)により定めることができる。

ここで、例として図 2.13の両端自由支持の梁を考える。この場合両端の境界条件は  $M_0 = M_l = 0$ 、 $Q_0 = Q_l = 0$  となり、これらを式(2.86)、(2.88)~(2.90)

に代入すると式(2.89)と(2.90)の左辺は零、右辺は二つの未知の初期条件  $y_0$ 、 $\theta_0$  を含むのみとなる。二つの未知数に対し二つの式が得られるので、この未知数は一意に定めることができる。以上、求めた  $y_0$ 、 $\theta_0$ 、および  $M_0=0$ 、 $Q_0=0$  を一般式(2.86)、(2.88)~(2.90)に代入すると両端自由の弾性支持梁の任意中間点に対する各値  $y_x$ 、 $\theta_x$ 、 $M_x$ 、 $Q_x$  が計算できる。この方法の素晴らしい点は、積分定数が明快な物理量として与えられる点と、式の中これらの定数がシステマティックに現れる点にある。しかしながら、この方法ですら関数  $F$  の表が完備されている場合にのみ実用的となる。

#### 重ね合わせの方法による支配方程式の解法

以上、弾性支持梁の支配方程式を解く二つの方法を示した。共にたわみ曲線の定められた端部の条件から積分定数を定めようとするものである。一般解を特定の問題に適用するときの主たる困難は積分定数の決定にあり、紹介したいずれの方法においてもかなりの労力を要する。

これらの困難は重ね合わせの方法 (*Method of Superposition*) を用いることで大部分避けられる。この方法の有利な点は無限長の梁に対する積分定数を定めることが非常に簡単であることに基づいている。結果として任意の荷重を受ける無限長弾性支持梁のたわみ曲線が簡潔な形で得られる。Hetényi はこの手法によって、特定の境界条件・荷重条件に対する有限長弾性支持梁の基本解を求めている。本論文ではこの解を円筒問題用に書き直し、これを重ね合わせることでより円筒問題を解いている。ここでは、Hetényi の手法の詳細は省略し、本論文で用いた基本解をハンドブック形式で図 2.14 ~ 図 2.17 に紹介するにとどめる。

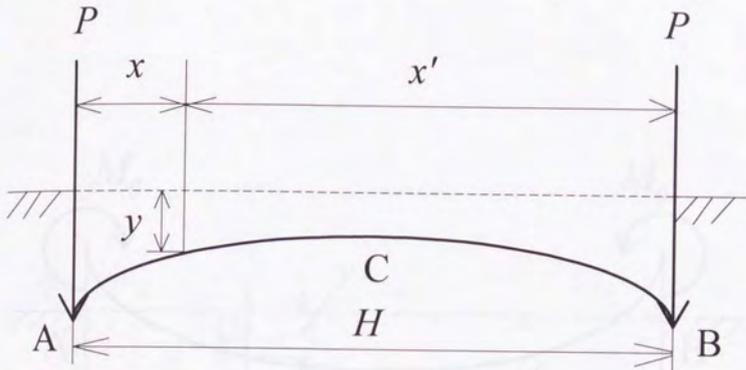


図 2.14 両端に集中力を受ける弾性支持梁

変位 :

$$y = -\frac{2P\beta}{k} \times \frac{\cosh \beta x \cos \beta x' + \cosh \beta x' \cos \beta x}{\sinh \beta H + \sin \beta H} \quad (2.91)$$

回転角 :

$$\theta = \frac{2P\beta^2}{k} \times \frac{1}{\sinh \beta H + \sin \beta H} \times \quad (2.92)$$

$$[\sinh \beta x \cos \beta x' + \cosh \beta x \sin \beta x' - \sin \beta x \cosh \beta x' - \cos \beta x \sinh \beta x']$$



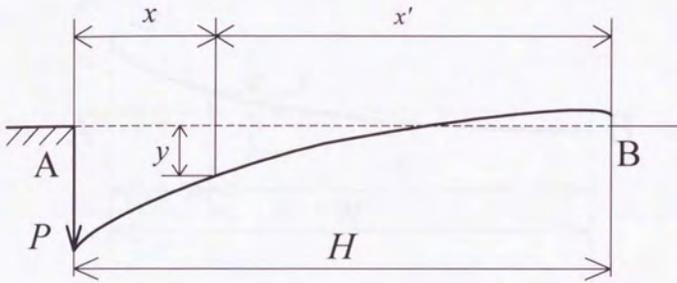


図 2.16 一端に集中荷重を受ける弾性支持梁

変位 :

$$y = \frac{2P\beta}{k} \cdot \frac{\sinh \beta H \cos \beta x \cosh \beta x' - \sin \beta H \cosh \beta x \cos \beta x'}{\sinh^2 \beta H - \sin^2 \beta H} \quad (2.95)$$

回転角 :

$$\theta = -\frac{2P\beta^2}{k} \times \frac{1}{\sinh^2 \beta H - \sin^2 \beta H} \times \quad (2.96)$$

$$[\sinh \beta H \{ \sin \beta x \cosh \beta x' + \cos \beta x \sinh \beta x' \}$$

$$+ \sin \beta H \{ \sinh \beta x \cos \beta x' + \cosh \beta x \sin \beta x' \}]$$

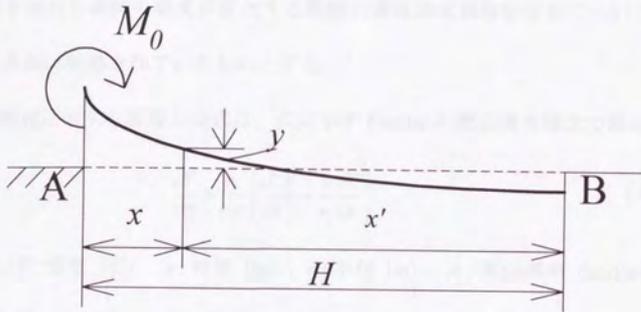


図 2.17 一端に曲げモーメントを受ける弾性支持梁

変位 :

$$y = \frac{2M_0\beta^2}{k} \times \frac{1}{\sinh^2 \beta H - \sin^2 \beta H} \times \quad (2.97)$$

$$[\sinh \beta H \{ \sin \beta x \cosh \beta x' - \cos \beta x \sinh \beta x' \}$$

$$+ \sin \beta H \{ \sinh \beta x \cos \beta x' - \cosh \beta x \sin \beta x' \}]$$

回転角 :

$$\theta = \frac{4M_0\beta^3}{k} \cdot \frac{\sinh \beta H \cos \beta x \cosh \beta x' + \sin \beta H \cosh \beta x \cos \beta x'}{\sinh^2 \beta H - \sin^2 \beta H} \quad (2.98)$$

### 2.3.4 過渡温度場解析

ここでは6.2節にて使用する、円筒の半径方向に温度が一次的に分布し、その内面を流れる流体の温度が変化する問題の過渡温度場解析手法について説明する。外面は断熱されているものとする。

この問題に対する基礎方程式は、次に示す Fourier の熱伝導方程式である。

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = \frac{\Lambda}{c\gamma} \left\{ \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right\} \quad (2.99)$$

ここに、 $T$ : 温度 ( $^{\circ}\text{C}$ )、 $\tau$ : 時間 (hr)、 $r$ : 半径 (m)、 $\Lambda$ : 熱伝導率 (kcal/mh $^{\circ}\text{C}$ )、 $c$ : 比熱 (kcal/kg $^{\circ}\text{C}$ )、 $\gamma$ : 比重量 (kg/m $^3$ )、である。

そして、境界条件が次式にて与えられる。

$$\text{内面:} \quad h(T_i - T_b) = -\Lambda \frac{\partial T}{\partial r} \quad (2.100)$$

$$\text{外面:} \quad -\Lambda \frac{\partial T}{\partial r} = 0 \quad (2.101)$$

ここに、 $h$ : 熱伝達率 (kcal/m $^2$ h $^{\circ}\text{C}$ )、 $T_i$ 、 $T_b$ 、 $T_s$ : 各々流体、円筒内面、外面温度、である。

この方程式を図 2.18 に示すような円筒モデルに対し、前進階差法にて解く手順を、以下説明する。断面は6分割するものとした。

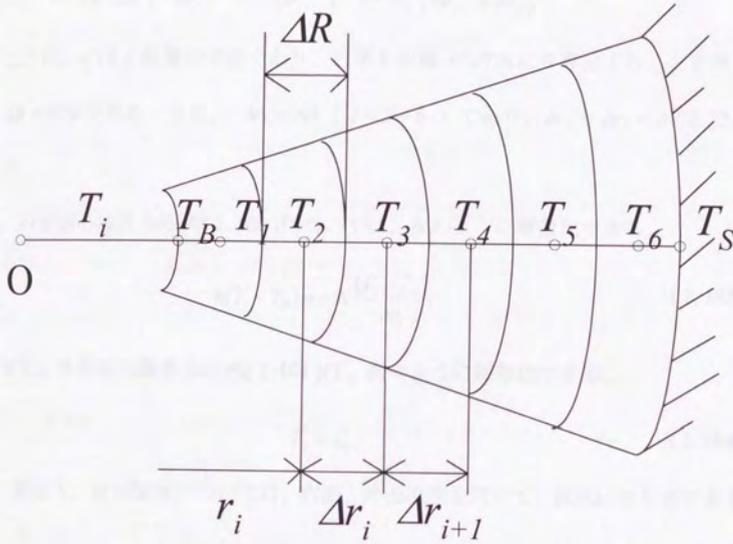


図 2.18 円筒の過渡温度場解析モデル

ある時刻  $\tau$  の微小時間  $\Delta\tau$  時間後に、 $j$  断面の温度  $T_j$  が  $T_j^*$  に上昇したとすれば、式(2.99)は次のように離散化できる。

$$T_j^* = T_j + \frac{\Lambda \cdot \Delta\tau}{c\gamma \cdot \Delta R} \left\{ \frac{T_{j+1} - T_j}{\Delta r_{j+1}} - \frac{T_j - T_{j-1}}{\Delta r_j} \right\} + \frac{\Lambda \cdot \Delta\tau}{c\gamma \cdot r_j} \left\{ \frac{T_{j+1} - T_{j-1}}{\Delta r_{j+1} + \Delta r_j} \right\}; \text{ for } j=2-5 \quad (2.102)$$

ここに、 $r_j$  は  $j$  断面の半径であり、円筒を肉厚  $W$  方向に 6 等分することを考え  $\Delta R = W/6$  である。また、 $\Delta r_j = \Delta R$  ( $j=2 \sim 6$ ) であり、 $\Delta r_1 = \Delta r_7 = \Delta R/2$  である。

内表面の境界条件式(2.100)については、次のように離散化できる。

$$h(T_i - T_B) = -\Lambda \frac{(T_1 - T_B)}{\Delta r_1} \quad (2.103)$$

また、外表面の境界条件式(2.101)は、次のように離散化できる。

$$T_s^* = T_6^* \quad (2.104)$$

断面 1, 6 の温度については、内面、外面温度を用いて、次式にて計算できる。

$$T_1^* = T_1 + \frac{\Lambda \cdot \Delta\tau}{c\gamma \cdot \Delta R} \left\{ \frac{T_2 - T_1}{\Delta r_2} - \frac{T_1 - T_B}{\Delta r_1} \right\} + \frac{\Lambda \cdot \Delta\tau}{c\gamma \cdot r_1} \left\{ \frac{T_2 - T_B}{\Delta r_2 + \Delta r_1} \right\} \quad (2.105)$$

$$T_6^* = T_6 + \frac{\Lambda \cdot \Delta\tau}{c\gamma \cdot \Delta R} \left\{ \frac{T_s - T_6}{\Delta r_7} - \frac{T_6 - T_5}{\Delta r_6} \right\} + \frac{\Lambda \cdot \Delta\tau}{c\gamma \cdot r_6} \left\{ \frac{T_s - T_5}{\Delta r_7 + \Delta r_6} \right\} \quad (2.106)$$

以上、時刻  $\tau$  の温度をもとに時刻  $\tau + \Delta\tau$  の温度を直接計算するところから「前進階差法」と称している。

## 2.4 疲労き裂進展の破壊力学的解析の基礎

### 2.4.1 応力拡大係数による疲労き裂進展解析の歴史

まず応力拡大係数による疲労き裂進展特性解析の歴史的経緯の紹介から始める<sup>[36]、[37]</sup>。

Irwinら<sup>[38]、[39]</sup>により、1957ないし1958年までの約10年間に次第に破壊力学の体系が形成されたが、その当初き裂材の脆性破壊解析のために開発されたとされるエネルギー解放率 (energy release rate) と等価なパラメータ、応力拡大係数 (stress intensity factor)  $K$  値は、これがき裂先端の応力状態を記述できるパラメータであるため、脆性破壊のみならず、疲労・環境破壊などを含めたすべてのき裂問題の解析に適用可能であることが1957年にParisら<sup>[40]</sup>により指摘された。これは荷重・き裂部材形状などの力学的境界条件の疲労き裂の成長に対する影響は $K$ 値という量により記述できるとの主張に他ならない。その後Parisらは1962~1963年にかけて、各種試験片・荷重条件に対する疲労き裂の進展速度の実験値が $K$ 値を用いて統一的に整理されることを実証した<sup>[41]、[42]</sup>。これがいわゆるParis則として名高い関係式である。

$K$ 値による整理以前にもき裂進展速度の法則性については多くの実験的、半実験的研究が行われていた。き裂進展速度  $da/dN$  がき裂長さ  $a$  に対し対数、または片対数グラフ上で直線関係を示すとして整理できることより、荷重一定制御疲労試験結果から<sup>[43]~[46]</sup>

$$\frac{da}{dN} = C \cdot a \quad (2.107)$$

または<sup>147)・149)</sup>

$$\frac{da}{dN} = C \cdot (\Delta\sigma)^m \cdot a^n \quad (2.108)$$

が提案された。ここで $\Delta\sigma$ は応力により表示された荷重振幅、 $N$ は荷重繰返し数、 $C, m, n$ は材料定数である。 $n$ については多くの場合1で、 $m$ についてはFrostら<sup>147)</sup>は $m=3$ 、Liuら<sup>149)</sup>は $m=2$ とした。また、き裂を除いた残断面(リガメント)平均応力一定制御の平板の引張疲労試験結果から $n=0$ 、すなわちき裂長さに関係なく $da/dN$ が各応力について一定であるとされたこともあった<sup>150)・151)</sup>。

しかしながら、上記式(2.107)、(2.108)の経験則は広い範囲の $a$ または $da/dN$ に対しては成立しない。これらの式ではき裂が成長することによる境界条件の変化が画一的にしか反映されていないからである。また、一步譲ってこれらの式が成立する範囲についても、異なる試験片形状や試験機で求めた材料定数 $C$ の値がかなりばらつく<sup>152)</sup>。後に式(2.107)、(2.108)はき裂長さ $a$ の関数としての $K$ 値のある特定の変化域に対する $K$ 依存の $da/dN$ であって、いわゆるParis則で表される広領域特性の一部であることが分かった。

Parisらの1957年の提案とほぼ同時期に、かつ各々独立にMcEvilyとIllg<sup>153)</sup>、および石橋<sup>154)</sup>は一見異なった形式の疲労き裂進展則を提案した。しかし、これらは $da/dN$ を $K$ 値の関数とするParisらの提案と実質上は同じであり、後に破壊力学による整理方法の中に融合して行ったものと理解される。このParis(1964)<sup>155)</sup>、McEvily(1963)<sup>156)</sup>、石橋(1958)<sup>154)</sup>のいずれもが、疲労き裂進展速

度がき裂端の塑性ひずみ、ないし塑性ひずみエネルギーとき裂端塑性域寸法とにより整理できると考えていたらしいことは興味深い。

疲労き裂進展速度のK値による整理は、その初期には $K_{max}$ による式(2.109)と $\Delta K (= K_{max} - K_{min})$ による式(2.110)が使用されていた<sup>[41], [42], [57]</sup>。

$$\frac{da}{dN} = C \cdot (K_{max})^m \quad (2.109)$$

$$\frac{da}{dN} = C \cdot (\Delta K)^m \quad (2.110)$$

その後不規則変動荷重による疲労き裂進展に関する研究<sup>[55]</sup>や、応力比による影響の検討<sup>[57]</sup>などを経て、 $\Delta K$ 依存性を重視する式(2.110)が普及・定着したようである。

材料定数については高張力アルミニウム合金試験片による $da/dN$ の広い範囲にわたるデータをもとにして、 $m = 4$ が選ばれ式(2.111)の4乗則がParisとErdoganにより1963年に提案された<sup>[42]</sup>。

$$\frac{da}{dN} = C \cdot (\Delta K)^4 \quad (2.111)$$

しかし、材料定数 $C$ 、 $m$ の値は応力比などの影響を受けるので、その後上記の提案者を含めて一般にべき乗則式(2.110)が多く使われている。本論文では以下、このべき乗則をParis則と呼ぶことにする。

ところで、両対数紙上での非直線部も含めて一般化すると式(2.112)のように書ける。これまでこの式が具体的に示されることはほとんどなかったが、低サイクル疲労域でのき裂進展を問題にする場合に必要となってきた。本件につい

ては後述する。

$$\frac{da}{dN} = f(\Delta K) \quad (2.112)$$

$da/dN$  が  $\Delta K$  の関数であることについて、これを支持する多くの実験結果がその後得られている。一方、これを否定するデータや意見もあり、後述のように  $\Delta K$  以外のパラメータによる疲労き裂進展則も提案されている。しかし、特殊な条件下での修正を除き、 $da/dN$  の  $\Delta K$  依存性は現状では一般的に承認され、定着しているように思われる。一時期  $\Delta K$  による整理が不相当とされた特性も、 $K$  値の解析や実験方法の進歩、あるいは改良されたき裂モデルの採用によって（たとえば、 $\Delta K$  として実効値  $\Delta K_{eff}$  を用いる、など）、あらためて  $\Delta K$  依存性が確認されるようになってきている。

適用対象も初期の高張力 Al 合金、高張力 Ti 合金、高張力鋼から、延性の高い軟鋼やステンレス鋼、Al などの純金属類、プラスチックなどの非金属材料、複合材料・溶接部などの不均質材料へ拡張されつつある。

また、き裂の形状・荷重についても一軸引張正弦波荷重下の平板中の単独貫通直線き裂（モード I）から、曲げ・ねじり・せん断・多軸規則荷重・不規則荷重を受ける板、棒、構造物モデル中の貫通・半貫通・表面き裂、傾斜き裂、分布き裂、微小き裂まで適用対象が広がりつつある。

## 2.4.2 疲労き裂進展則の特性

次にいわゆる Paris 則（べき乗則、式(2.110)）により表される疲労き裂進展則の全般的特徴を述べる。

$\Delta K$  と  $da/dN$  の基本関係は、一定振幅の面内引張荷重を繰り返し受ける片側または中央貫通き裂入り平板のき裂長さを表面上で計測したデータをもとに求めたものである。K 値の意味合いからして、同一材料に対して構造物形状・荷重方法によらず同一の  $\Delta K \sim da/dN$  関係が成立することが期待されるが、それは実証を待って言えることである。

$\Delta K$  と  $da/dN$  の特性を両対数紙上に表すと、図 2.19 のように中央に直線部を挟んだ 3 つの領域を示すと信じられている。この直線部を第 II 領域、あるいはき裂の安定成長域などと称され、いわゆる Paris 則はこの領域の特性を表している。この 3 領域の特性が連続した一つの現象なのか、質的に異なる 3 現象の組み合わせなのかは、1 本の試験片でこの 3 つの特性を実験的に実現することが技術的に容易でないこともあって、明らかではない。たとえば、 $\Delta K$  が大きい第 III 領域になると、小型試験片ではき裂が入っていない残りの断面の全断面降伏が生じ  $da/dN$  が急増するが、この立ち上がり点は試験片寸法により異なる。以下、各領域の特徴、および第 II 領域にて成立する Paris 則の材料定数についてまとめた。

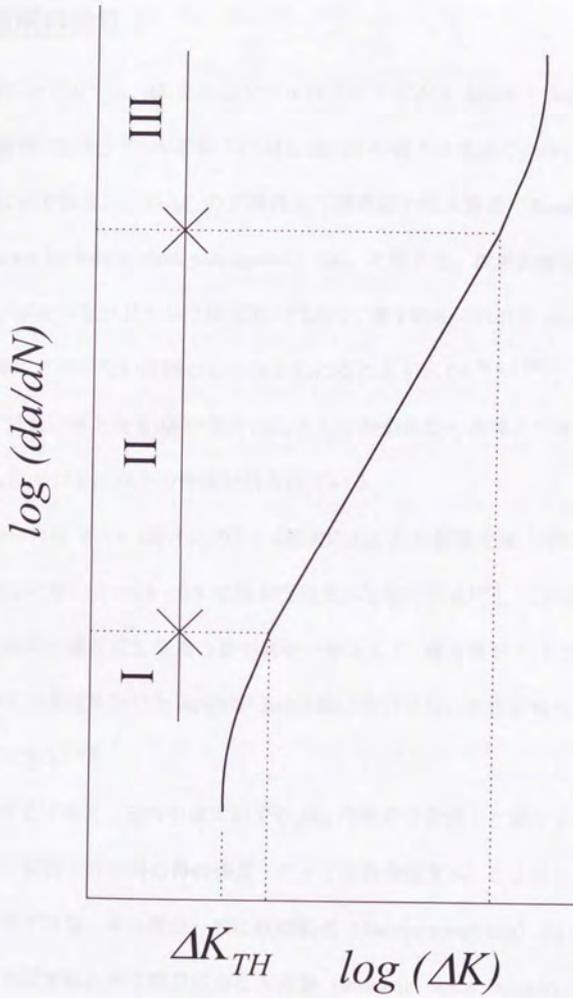


図 2.19 疲労き裂進展速度と  $\Delta K$

## 第1領域の特性

図 2.19に示すように、 $\Delta K$  をあるレベル以下に下げると  $da/dN$  は急速に低下する。この領域では微小の  $\Delta K$  の低下に対し  $da/dN$  の低下は急速で、ほとんど測定できないほどである。この  $\Delta K$  の下限界を下限界応力拡大係数 (threshold stress intensity factor for fatigue crack propagation)  $\Delta K_{th}$  と称する。鉄鋼の疲労限度のように  $\Delta K_{th}$  が存在するかどうかは確定的ではなく、第1領域における  $da/dN$  の特性が  $da/dN$  軸に平行でない直線として与えられることもある<sup>158, 159</sup>。実用上は  $da/dN$  が十分低い値となる  $\Delta K$  の値を  $\Delta K_{th}$  として寿命推定の参考とできる。

この  $\Delta K_{th}$  については以下の特性が得られている。

1.  $\Delta K_{th}$  は応力比  $R$  ( $=$  (最小応力) / (最大応力) ) の影響を強く受け、 $R = 0$  での  $\Delta K_{th}$  に対し  $R = 0.8 \sim 0.9$  では 40%程度にも低下する<sup>160</sup>。この事実より、もし試験時の繰返し荷重の最小値を一定として、最大値を下げていくような試験を行えば見かけ上  $da/dN$  が  $da/dN$  軸に平行でない特性が得られることが説明できる<sup>161</sup>。
2.  $R$  を一定とすると、面内引張に対する  $\Delta K_{th}$  は極めて安定した値である。かつ、同系列の材料では材料の静的強度 (たとえば降伏強度  $\sigma_y$ ) とはほとんど無関係に一定である。その値は一般に破壊靱性 (fracture toughness)  $K_{IC}$  はもちろん、応力腐食割れの下限界応力拡大係数 (threshold stress intensity factor for stress corrosion cracking)  $K_{ISCC}$  よりも低い。

$$\Delta K_{th} \cong const. \quad (2.113)$$

3.  $\Delta K_{th}$  が降伏点  $\sigma_y$  に無関係に一定である上記の傾向は異種材料間でも成立し、Speidel<sup>62)</sup> はヤング率  $E$  を用い次式のような整理を行った。この一定値から環境による強度の変化分が加減される。

$$\left[ \frac{\Delta K_{th}}{E} \right]_{inert} = (8.53 \pm 0.95) \times 10^{-4} \sqrt{mm} \quad (2.114)$$

4. 面外曲げについても上記 2、3 項とほぼ同様の結論が得られた。ただし、降伏強度  $\sigma_y$  の影響を若干受け<sup>63)</sup>、 $\sigma_y$  が高い材料の方が低い  $\Delta K_{th}$  を示す。この傾向は回転曲げ疲労試験によって求められた  $\Delta K_{th}$  にも現れている<sup>64)</sup>。
5. 以上の  $\Delta K_{th}$  の値のほとんどは  $\Delta K$  を漸減させる試験法により求めたものである。これに対し、 $\Delta K$  を急減させた場合や、 $\Delta K$  増加の場合に求めた  $\Delta K_{th}$  は上記の  $\Delta K_{th}$  より大きい。

### 第 III 領域の特性

$\Delta K$  あるいは  $K_{max}$  が大きい領域になると、 $da/dN$  は急増する。両対数紙上直線関係の式(2.110)が成立する第 II 領域の上限について、破壊靱性  $K_{IC}$  が低い材料ではこの上限を  $K_{IC}$  とすることが比較的 naturally 認められてきた<sup>65)・66)</sup>。一方、この上限が実際には  $K_{IC}$  と一致しないことが多いことも知られていた<sup>67)</sup>。ただし、この場合の  $K_{IC}$  は  $\Delta K$  ではなく、 $K_{max}$  と比較される。

$$K_{max} = \Delta K / (1 - R) \quad (2.115)$$

$K_{IC}$  の高い材料や、板厚条件を満足しない薄板での実験でも  $K_{IC}$  の拡張適用として上限界に破断荷重より求める破壊靱性  $K_C$  を用いることがあったが、 $\Delta K \sim da/dN$  の関係は試験片破断時より著しく低い  $K$  値のレベルから式(2.110)の直線

関係が成立しなくなることが多かった。特に弾性限の低い Al 合金でこの傾向が著しく、破断に対する  $K_{IC}$  を形式的に修正した次の Forman の式<sup>68)</sup>もかなり使われた。

$$\frac{da}{dN} = \frac{C(\Delta K)^m}{(1-R)K_{IC} - \Delta K} \quad (2.116)$$

一般に、 $\Delta K \sim da/dN$  の上部曲線部の垂直漸近線で示される  $K$  値は、単調増加荷重による破壊靱性と異なることが示され<sup>69)~71)</sup>、疲労破壊靱性なる量  $K_{IC}$  が定義された<sup>72)</sup>。 $K_{IC}/K_{IC} < 0.6$  なる実験データも得られている<sup>60)</sup>。

最近では第 III 領域に関し、別の扱い方をしている場合が出てきている。すなわち、線形破壊力学で扱える式(2.110)の直線範囲の上限界条件を決め、これを超える危険側加速域とみなすのである。この上限値を  $K_T$  とし、多くの圧力容器鋼についての実験から次の値が与えられた<sup>60)</sup>。

$$\frac{K_T^2}{E \cdot \sigma_Y} = 1.6 \times 10^{-3} \text{ inch} (= 0.04 \text{ mm}) \quad (2.117)$$

式(2.117)はき裂開口変位  $COD$  (Crack Opening Displacement) 基準で与えたことに相当する。具体的には、 $K_T > K_{IC}$  なら  $K_{IC}$  を、 $K_T < K_{IC}$  なら  $K_T$  を上限界値にとろうというのである。また、これより大きい  $K$  値のレベルでの疲労き裂進展は材料の非線形性を考慮して処置する。これについての議論は低サイクル疲労に関する項で扱う。

なお、高サイクル疲労での第 III 領域の特性は、実験技術上詳細な議論が容易ではない。

### Paris 則の材料定数

式(2.110)、いわゆる Paris 則で表される疲労き裂進展特性の材料定数  $C$ 、 $m$  について以下まとめた。

$\log(\Delta K) \sim \log(da/dN)$  の直線関係はある狭い  $\Delta K \sim da/dN$  領域を通過するので、 $C$  と  $m$  の間には極めて安定な関係がある<sup>173)</sup>。これを

$$C = A \cdot B^m \quad (2.118)$$

と示すと、 $B$  は約 1/55、 $A$  は普通鋼で約 1/20 000、アルミニウム合金で約 1/2 500 のようである<sup>152)</sup>。ただし、応力比  $R$  に影響するような荷重条件の変化があると、 $C$  と  $m$  の値は変わる。また  $da/dN$  測定時の  $\Delta a$  が小さいと  $C$  と  $m$  は大きく変動する。しかし、これらの場合でも  $\log(C)$  と  $m$  の関係をプロットすると、直線上に乗る<sup>152)、174)</sup>。残留応力が存在する場合も同様で、それらの溶接部のデータも同じ直線上に乗る<sup>175)</sup>。しかし、超硬度鋼やオーステナイトステンレス鋼・Ti 合金・Cu 合金・Al 合金等の面心立方格子材料では  $C$  または  $m$  が上記直線より高い値を示すようである<sup>175)</sup>。

### 2.4.3 低サイクル疲労き裂進展

これまで主として高サイクル疲労き裂進展に関する基礎事項をまとめてきたが、本項においてこれらの議論をいわゆる低サイクル疲労領域に拡張する<sup>176)</sup>。

ここではどのような状態にある疲労き裂を低サイクル疲労き裂と呼ぶかについての議論を避け、従来から一般的に受け入れられている低サイクル疲労の概念の類推・拡張として、き裂部の塑性変形が著しくて材料非線形性や幾何学的非線形性が無視できない状態にある疲労き裂を扱うものとする。このようなき裂としては、

- 低応力が繰り返されるような荷重条件下であっても、き裂寸法が十分大きい  
ためき裂先端の塑性域寸法が大きいときの疲労き裂
- き裂周辺の材料がかなり広い領域で高応力が繰り返されるような荷重条件下にあるときの疲労き裂(高応力部にあるき裂はごく短いき裂も含めて非線形性が無視できない場合がある)
- 高温条件下の疲労き裂(クリープ温度域において、材料のクリープ現象が塑性変形の繰り返しとともにき裂成長に関与すると考えられる)

を対象として考えることにする。以下、本論文の主要なテーマである、破壊力学パラメータによる低サイクル疲労き裂進展データの整理に関連する事項をまとめた。

これまでに低サイクル疲労き裂進展特性についても、高サイクル疲労き裂進展特性同様、種々の破壊力学パラメータを用いた整理式が提案されている。し

かし、低サイクル疲労き裂については、巨視的な力学的挙動についても、巨視的・微視的なき裂の進展機構についても、広範囲の条件にわたって適用できるき裂進展速度の整理式、あるいはき裂解析モデルは確立されていない。しかしながら、構造物の健全性評価を行う立場からは使用条件を明確にしておけば、有効に適用できるものが多い。以下、前述の低サイクル疲労き裂の分類に従い、き裂進展速度の整理式をまとめた。

### 長い疲労き裂（常温、または低温）

「長いき裂」をここでは、容易に目視でき、き裂先端の塑性変形領域が大きくなったき裂を指すものとする。

まず、K値を用いた整理から説明を始める。今一度疲労き裂進展速度  $da/dN$  を応力拡大係数範囲  $\Delta K$  で整理した場合の一般特性（図 2.19）を考える。図中の第III領域はき裂の塑性域が大きく成長した状態に対応するようであり、 $da/dN \sim \Delta K$  関係がいわゆる Paris 則、式(2.110)から上方に離れて加速されたような状態となる過程である。この過程は、微視的には疲労き裂先端近傍における空洞の形成と合体によるといわれるディンプルなどの破面で特徴付けられ、これらの破面とストライエーション形の破面との面積比の増加に従って、疲労き裂進展速度の加速が顕著になると考えられている<sup>177)</sup>。

線形破壊力学パラメータであるK値は、静荷重条件では小規模降伏条件においてき裂先端の近傍の応力状態を良く表現できるとされている。もしこの考え方が疲労き裂に拡張できるとしても、第II～IIIの遷移領域から第III領域においては当然 $\Delta K$ の使用に際し注意が必要である。ところが、中央き裂広幅平板試験片、

あるいはCT (Compact Tension) 試験片を用いて得られたデータに対してはいわゆる Paris 則の式(2.110)の関係が高 $\Delta K$ 領域まで適用できる例があり、応用上の有用性から第III領域においてもき裂進展速度の整理に $\Delta K$ が用いられている。高 $\Delta K$ 領域まで式(2.110)が適用できる現象は、塑性域周辺の拘束の大きさと関係があるといわれている。

広幅でないAl合金板で見られるように第III領域が広く緩やかな上昇曲線を描く $\log(\Delta K) \sim \log(da/dN)$ 特性に対しては、その曲線の漸近線としてK値の限界値 $K_C$ を設定し、式を形式的に修正したいわゆる Forman 式<sup>168)</sup>(式(2.116))も提案されている。

また、疲労き裂進展速度がき裂先端の塑性域寸法に関係すると仮定することにより、材料の降伏応力や加工効果指数などを含む形で式をまとめ、軟鋼やAl合金(Al-Zn-Mg-0.5 Cu)に対し高い速度域まで適用できる整理式も提案されている<sup>178)</sup>。

ところで、実際の疲労き裂では、変動する荷重がその下限値まで降下する以前にき裂の面間接触が起こるため、 $\Delta K$ は厳密には荷重変動範囲 $\Delta P$ に比例しない。そこでその差が著しい場合には、 $\Delta K$ を補正する方法が提案されている。例えば、き裂の面間接触が起こらないとしたときのK値から面間反力によるK値を差し引く方法や、幾何学的に接触が起こるまでのK値の変動をとる方法もある。また、一方応力の実効変動範囲 $\Delta\sigma_{eff}$ 、あるいはこれに対応する有効応力拡大係数範囲 $\Delta K_{eff}$ を求める方法も提案されている。この場合、次式の関係がかなり広い範囲のき裂進展速度に対し成立することが多くの材料に対し認められてい

る<sup>[79]-[82]</sup>。

$$\frac{da}{dN} = C(\Delta K_{eff})^m \quad (2.119)$$

ここに、 $U(R)$ を応力比  $R$  の関数として、

$$\Delta K_{eff} = U(R) \cdot \Delta K \quad (2.120)$$

であるが、 $U(R)$ は解析的にも実験的にも予め決定するのは困難であり、類似の実験結果を参考に設定せざるをえない。

以上は非線形の現れる領域まで含め、線形破壊力学パラメータ  $K$  値を用いて疲労き裂進展速度を整理する方法であった。これに対し、以下最後にき裂における非線形挙動を直接反映させる立場からの速度法則も提案されている。たとえば、静荷重における  $J$  積分に対応した繰り返し荷重に対する  $J$  積分範囲  $\Delta J$  が整理パラメータとして用いられ、Paris 則が成立しなくなる高  $\Delta K$  領域まで含めて、

$$\frac{da}{dN} = C \cdot (\Delta J)^m \quad (2.121)$$

の関係が成立することを示すデータを Dowling が発表している<sup>[83]</sup>。また、式(2.121)は弾性の破壊力学パラメータ  $\Delta K$  でよく整理ができる中低位のき裂進展領域における進展速度法則も包含して統一的に表現できる表示式のようなのである。

すなわち、

$$J = \frac{K^2}{E} \quad (2.122)$$

なる関係が成立する弾性域も含めて、よく整理ができることが知られている。

また、き裂先端の開口変位量  $CTOD$  (Crack Tip Opening Displacement)、または

その有効範囲  $CTOD_{eff}$  に対して次式の適合性が検討されている<sup>[80], [84], [85]</sup>。

$$\frac{da}{dN} = C(CTOD)^m \quad (2.123)$$

このほかひずみ範囲  $\Delta\varepsilon$  とき裂長さ  $l$  によるパラメータ  $\Delta\varepsilon\sqrt{l}$ <sup>[86]</sup>、またはき裂先端の全ひずみ範囲  $\Delta\varepsilon_T$  による整理<sup>[80]</sup>も提案されている。

## 高温疲労き裂

高温下の疲労き裂進展の現象は、

1. クリープ温度以下の高温における疲労き裂進展現象
  2. クリープ温度以上の高温においてクリープき裂進展現象と疲労き裂進展現象が相互に影響を及ぼしあうクリープ疲労現象
  3. 熱サイクルを受けることにより疲労き裂が進展する熱疲労き裂進展現象
- に区別して論じられることが多い。いずれも確立された疲労き裂進展則はまだなく、提案されているものの紹介にとどめる。

熱疲労き裂進展：3項の熱疲労き裂進展に関する研究は極めて少ない。その中で、熱疲労き裂進展則としてひずみ拡大係数範囲  $\Delta K_e$  を用いた次の式が提案されている<sup>[87]</sup>。

$$\frac{da}{dN} = C(\Delta K_e)^m \quad (2.124)$$

クリープ温度以下の高温における疲労き裂進展：1項のクリープ温度以下の高温における疲労き裂進展則に関しては2例紹介する。

まず、荷重周期  $\omega$  の影響を考慮した修正 Manson-Coffin 則<sup>[88]</sup>、およびき裂進展速度  $da/dN$  がき裂長さ  $a$  に比例するとの実験結果、塑性ひずみ範囲  $\Delta\varepsilon_p$  の影響

を考慮した次式が提案されている<sup>189)</sup>。

$$\frac{da}{dN} = C(\Delta\epsilon_p)^m \cdot \omega^{k-1} \cdot a \quad (2.125)$$

$k$ は荷重周期の影響を示す定数で、0と1の間の値である。

また、高サイクル疲労からの類推によりK値を用い、さらに上式と同様に  $da/dN$  が  $\Delta\epsilon_p$  の増大に伴い速くなること、繰り返し負荷後の引張強度  $\bar{T}$  を導入することにより温度依存性を考慮した次式が提案されている<sup>190)</sup>。

$$\frac{da}{dN} = C \frac{K_{\max}^2 \cdot \Delta\epsilon_p}{\bar{T}^2} \quad (2.126)$$

その他、正味断面の公称応力で整理した例<sup>191)</sup>や、 $K/E$  ( $E$ : ヤング率)<sup>192)</sup>や  $K^2/E$  で整理した例<sup>193)</sup>もある。

クリープき裂進展：クリープ疲労ではクリープによるき裂進展と低サイクル疲労き裂進展の両者、およびその相互作用の現象が含まれるので一層複雑である。

まず、クリープ単独のき裂進展がどのようなパラメータに依存するかについての検討結果を紹介する。クリープでも小規模降伏の条件が満足される場合には、き裂先端の応力の特異性がクリープによるき裂進展を支配すると仮定し、 $K$ 値を用いてき裂の進展時間速度  $da/dt$  を整理すると、次式の関係で良く整理ができることが示されている<sup>194)</sup>。

$$\frac{da}{dt} = \frac{C \cdot K^{2m}}{(1+n)} \quad (2.127)$$

ここに、 $n$ : クリープ指数、 $C, m$ : 材料定数、である。

K値でクリープき裂進展速度を整理した例は数多く報告されている<sup>195)~197)</sup>。しかし、クリープ変形が著しくなると、K値が整理パラメータとして不適当になる例が報告されている<sup>195)~198)</sup>。正味断面の公称応力で整理した例<sup>195)~197)</sup>や、真応力で整理した例<sup>99)</sup>も報告されている。また、非線形性を考慮し、定常クリープ状態でのき裂進展を修正J積分 $J^*$ を用いて整理した例<sup>100)~102)</sup>もあり、この場合K値や公称応力で整理した場合に比べて良く整理できることが報告されている。さらに、き裂端開口変位 (CTOD) をパラメータとして整理した結果も報告されている<sup>103)~105)</sup>。

クリープ疲労：クリープ疲労に関する研究もいくつか報告されている。 $da/dt$ とK(または $\Delta K$ )で整理されているもの<sup>106)~109)</sup>や、実断面応力で整理したもの<sup>106)</sup>がある。一方、非線形性を考慮したパラメータ $\Delta J_\phi$ を用いた次式により、良く整理ができるとの報告もある<sup>110)</sup>。

$$\frac{da}{dN} = C \cdot \Delta J_\phi^m \quad (2.128)$$

$\Delta J_\phi$ は従来の $\Delta J$ に修正を加え、荷重端変位の代わりにき裂中央の開口変位量を用いたものである。

また、クリープき裂進展に用いられる修正J積分によって求めたパラメータ $\Delta J_c$ を用い、次式により高温クリープ疲労き裂進展速度が良く整理できることが報告されている<sup>111)~112)</sup>。

$$\frac{da}{dN} = C \cdot (\Delta J_c)^m \quad (2.129)$$

## 短い疲労き裂

従来より構造物の疲労による損傷過程は、疲労き裂の発生、進展過程に分けて取り扱われることが一般的であった。ところが、従来発生過程として扱われていた微小なき裂についても定量的な評価が必要となる場合や、ごく微小な欠陥からの疲労損傷過程を検討する必要がある場合もあり、微小き裂の進展挙動を明らかにするための研究が進められている。

本論文では対象外の分野であり、項目としての記述にとどめる。

## 2.5 結 言

本章にて本研究を展開する上で基礎となる理論をまとめた。

まず2.2節にて、き裂を有する構造物の健全性評価の際に必要な線形破壊力学の基礎理論を説明した。はじめに本論文で一貫して破壊力学パラメータとして使用する応力拡大係数（K値）を説明し、続いて第3章では片側き裂梁、第4章では円筒環状き裂のK値導出に用いるコンプライアンスの概念を説明した。その後K値の解析法の説明を行った。この中で、有限要素解析は第3、4章、重み関数法は第3章にて用いられる。

次に2.3節にて、熱応力や円筒の変形問題を取り扱う際に用いた連続体力学の基礎理論をまとめた。まず熱応力問題を扱うに必要な Duhamel のアナログについて説明した。これは第3、4章に共通して用いられる。次に第4章の基礎となる、薄肉円筒の理論を説明した。ここで、薄肉円筒の軸対称問題がその変形に関する支配方程式の類似性から弾性支持梁に置き換えることができることを示し、その後有限長の弾性支持梁の曲げに関連する理論を説明した。さらに、第6章にて用いられる円筒の一次元過渡温度場解析手法について説明した。

最後に2.4節にて、第6章の疲労き裂進展解析の際に必要な基礎理論、および過去の研究の歴史的経緯について説明した。この説明の中で、高サイクル疲労から低サイクル疲労まで、疲労き裂進展速度が線形破壊力学パラメータであるK値を用いて多くの場合良く整理ができることを述べた。この整理の基本は、疲労き裂進展速度がK値のべき乗に比例するとする、いわゆる Paris 則であ



## 参考文献

- [14] Irwin, G. R., *Handbuch der Physik*, Vol. VI, (1958), Springer, Berlin.
- [15] Sih, G. C., Methods of Analysis and Solutions of Crack Problems, in *Mechanics of Fracture*, Vol. I, (1973), Noordhoff, Leyden.
- [16] Tada, H., et al., *The Stress Analysis of Cracks Handbook*, (1973), Del Research Corporation, Hellertown, Pa., U. S. A.
- [17] Rooke, D. P. and Cartwright, D. J., *Compendium of Stress Intensity Factors*, (1976), Her Majesty's Stationery Office, London.
- [18] Murakami, Y., et al., *Stress Intensity Factors Handbook*, (1987), Pergamon Press.
- [19] Paris, P. C. and Sih, G. C., in *Fracture Toughness Testing and its Applications*, ASTM STP, **381**, (1965), 30.
- [20] Broek, D., *Elementary Engineering Fracture Mechanics*, (1974), Noordhoff International Publishing, p. 77.
- [21] Barsoum, R. S., *Int. J. for Num. Methods in Engng.*, Vol. **11** (1977), p. 85.
- [22] Sih, G. C., *Handbook of Stress Intensity Factors*, (1973), Institute of Fracture and Solid Mechanics, Lehigh University.
- [23] Bueckner, H.F., A Novel Principle for the Computation of Stress Intensity Factors, *Z. Angew. Math. Mech.*, Vol. **50**, No. 9, (1970), pp. 529-546.
- [24] Rice, J.R., Some Remarks on Elastic Crack-Tip Stress, *Int. J. Solids Struct.*, Vol. **8**, (1972), pp. 751-758.
- [25] Sham, T. L. and Zhou, Y., Weight functions in two-dimensional bodies with

- arbitrary anisotropy, *Int. J. Fract.*, Vol. **40**, (1989), pp. 13-41.
- [ 26 ] Cheng, W. and Finnie, I., KI Solutions for an Edge-Cracked Strip, *Eng. Fract. Mech.*, Vol. **31**, No. 2 (1988), pp. 201-207.
- [ 27 ] Cheng, W., Finnie, I. and Varder, O., Deformation of and Edge-Cracked Stripp. Subjected to Normal Surface Traction on the Crack Faces, *Eng. Fract. Mech.*, Vol. **42**, No. 1 (1992), pp. 97-107.
- [ 28 ] Bueckner, H. F., Field singularities and related integral representations, *Mechanics of Fracture I: Methods of analysis and solutions of crack problem*, (1973, Ed. Sih, G. C.), Noordhoff, Leyden, pp. 239-314.
- [ 29 ] Bowie, O.L. and Freese, C.E., Cracked-Rectangular Sheet with Linearly Varying End Displacements, *Eng. Fract. Mech.*, Vol. **14**, (1981), pp. 519-526.
- [ 30 ] Torvik, P. J., On the Determination of Stresses, Displacements, and Stress-Intensity Factors in Edge-Cracked Sheets with Mixed Boundary Conditions, *Trans. ASME Ser. E, J. Appl. Mech.*, Vol. **46**, (1979), pp. 611-617.
- [ 31 ] 例えば、Fung, Y. C., *Foundations of Solid Mechanics*, (1965), Prentice-Hall Inc.
- [ 32 ] 例えば、Timoshenko, S. P. and Woinowsky-Krieger, S., *Theory of Plates and Shells*, 2<sup>nd</sup> ed. ( 1959 ), McGraw-Hill, Chap. 15.
- [ 33 ] Winkler, E., *Die Lehre von der Elastizität und Festigkeit*, (1867), Prag, p. 182.
- [ 34 ] Zimmermann, H., *Die Berechnung des Eisenbahnoberbaues*, (1888), Berlin.
- [ 35 ] Hetényi, M., *Beams on Elastic Foundation*, (1946), The University of Michigan

Press, Ann Arbor.

- [ 36 ] 北川英夫、疲労き裂進展への破壊力学的解析 (I)、材料、Vol. 26、No. 284 (1977)、pp. 482-493.
- [ 37 ] Suresh, S., *Fatigue of materials*, 1<sup>st</sup> edn. (1991), Cambridge Univ. Press, Cambridge.
- [ 38 ] Irwin, G. R., *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, Vol. 24 (1957), p. 361.
- [ 39 ] Irwin, G. R., *Handbuch der Physik*, Vol. 6 (1958), p. 551.
- [ 40 ] Paris, P. C., *Boeing Co. Document*, No. 17867 (1957), Addendum N.
- [ 41 ] Paris, P. C., *ASME paper*, 62-MET-3 (1962).
- [ 42 ] Paris, P. C. and Erdogan, F., A Critical Analysis of Crack Propagation Laws, *Trans. ASME, J. Basic Eng.*, Ser. D, Vol. 85 (1963), pp. 528-534.
- [ 43 ] Moore, H. F., *Univ. Illinois Eng. Exp. Sta. Bull.*, Vol. 165 (1927).
- [ 44 ] de Forest, A. V., *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, Vol. 53 (1936), p. 23.
- [ 45 ] Bennett, J. A., *Proc. ASTM*, Vol. 46, No. 693 (1946).
- [ 46 ] Martin, D. E. and Sinclair, G. M., *Proc. 3<sup>rd</sup> US Nat. Cong. Appl. Mech.* (1958), p. 595.
- [ 47 ] Frost, N. E. and Dugdale, D. S., *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 6 (1958), p. 92.
- [ 48 ] Frost, N. E., Holden, J. and Phillips, C. E., *Proc. Crack Propagation. Symp.*, Vol. 1 (1961), Cranfield, p. 166.
- [ 49 ] Liu, H. W., Fatigue Crack Propagation and Applied Stress Range, *Trans. ASME, J. Basic Eng.*, Ser. D, Vol. 85 (1963), pp. 116-122.
- [ 50 ] Weibull, W., The Effect of Size and Stress History on Fatigue Crack Initiation and Propagation, *Proc. Crack Propagation. Symp.*, Vol. 2 (1961), Cranfield, pp.

271-286.

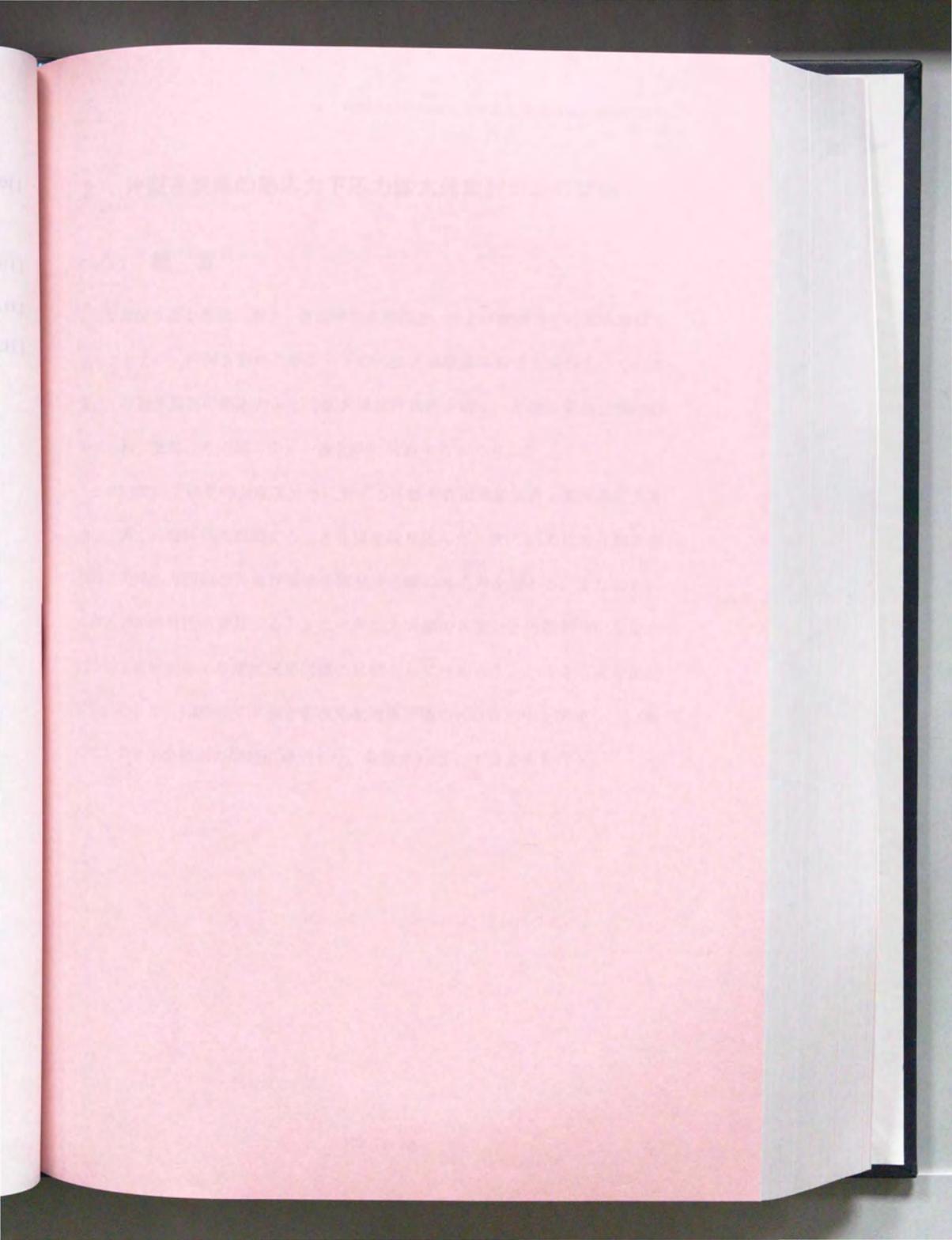
- [51] Uryuu, T., *Proc. 3<sup>rd</sup> Proc. Japan Cong. Test. Mater.*, (1960), p. 40.
- [52] 三角正明、東京大学学位論文 (1972).
- [53] McEvily, A. J. and Illg, A., *NACA TN 4394* (1958).
- [54] 石橋正、疲労亀裂の伝播に関する最近の問題、*機械の研究*、Vol. 10 (1958)、  
p. 609.
- [55] Paris, P. C., *Fatigue, An Interdisciplinary Approach*, (1964), Syracuse Univ.  
Press, p. 107.
- [56] McEvily, A. J., *Trans. ASME, Ser. D*, Vol. 85, No. 4 (1964), p. 553.
- [57] Donaldson, D. R. and Anderson, W. E., Crack Propagation Behaviour of Some  
Airframe Materials, *Proc. Crack Prop. Symp.*, Vol. 2 (1961), Cranfield, pp. 375-  
441.
- [58] Gurney, T. R., *Metal Construction*, Vol. 1 (1969), p. 2.
- [59] Maddox, S. J., *Metal Construction*, Vol. 2 (1970), p. 7.
- [60] Barsom, J. M., *WRC Bulletin*, (1974), p. 194.
- [61] 北川英夫、高橋進、微小欠陥からの表面き裂の発生と成長挙動 (第2報、  
表面き裂の成長速度のK依存性と下限界応力拡大係数 $\Delta K_{TH}$ )、*機講論*、No.  
760-2 (1976), p. 213-216.
- [62] Speidel, M. O., *Proc. Int. Conf. SCC and HE of Metallic Materials*, (1973),  
Firminy.
- [63] 北川英夫、松本年男、金属材料における面外曲げ疲労き裂成長の下限界  
応力拡大係数、*機論*、Vol. 43, No. 371 (1977), pp. 2421-2427.

- [64] 安藤司文、第14回材料研究連合講演会前刷(1970)、p. 9.
- [65] Gallagher, J. P. and Wei, R. P., *Proc. Int. Conf. Corrosion Fatigue*, (1971), NACE & AIME, Connecticut, p. 409.
- [66] McEvily, A. J. and Wei, R. P., *Proc. Int. Conf. Corrosion Fatigue*, (1971), NACE & AIME, Connecticut, p. 381.
- [67] Carman, C. M. and Katlin, J. M., Low Cycle Fatigue Crack Propagation Characteristics of High Strength Materials, *Trans. ASME, J. Basic Eng.*, Ser. D, Vol. 88, No. 4 (1966), pp. 792-800.
- [68] Forman, R. G., Kearney, V. E. and Engle, R. M., Numerical Analysis of Crack Propagation in Cyclic-Loaded Structures, *Trans. ASME, J. Basic Eng.*, Ser. D, Vol. 89, No. 3 (1967), pp. 459-464.
- [69] 石田誠、寺田博之、角田義秋、機論、(1974)、p. 897.
- [70] 川崎正、中西征三、沢木洋三、畑中健一、横堀武夫、低温(室温 ~ -180°C)における高強度鋼の破壊靱性と疲れき裂伝播について、機講論、No. 750-1 (1975)、p. 31-37.
- [71] 安藤柱、小倉信和、材料、Vol. 25 (1976)、p. 99.
- [72] 横堀武夫、相沢民玉、疲労破壊靱性 (Fatigue Fracture Toughness) について、材料強度学会誌、Vol. 5 (1970)、p. 54-55.
- [73] 北川英夫、三角正明、機講論、No. 714-10 (1972)、p. 67.
- [74] 久田俊明、東京大学修士論文 (1975).
- [75] 越賀房雄、川原正言、疲労き裂伝播に着目した設計基準に関する二、三の考察、造船学論、Vol. 133 (1973)、pp. 249-256.

- [76] 日本機械学会編、金属材料疲労強度の設計資料 (IV) 低サイクル疲労強度、(1983)、日本機械学会。
- [77] 小林、材料、Vol. 29、No. 317 (1980)、p. 198.
- [78] Schwalbe, K. H., *Eng. Fract. Mech.*, Vol. 9, No. 3 (1977), p. 547.
- [79] Elber, W., The Significance of Fatigue Crack Closure, *ASTM STP*, Vol. 486 (1971), pp. 230-242.
- [80] 島田・ほか、機講論、No. 790-2 (1979)、p. 29.
- [81] 菊川・ほか、材料、Vol. 25、No. 276 (1976)、p. 899.
- [82] 西谷、高尾、機講論、No. 750-1 (1975)、p. 13.
- [83] Dowling, N. E., Fatigue-Crack Growth Rate Testing at High Stress Intensities, *ASTM STP*, Vol. 631 (1977), pp. 139-158.
- [84] Dover, W. D., *Eng. Fract. Mech.*, Vol. 5, No. 1 (1973), p. 11.
- [85] 平・ほか、機講論、No. 780-13 (1978)、p. 218.
- [86] 平野・ほか、機論、Vol. 42、No. 361 (1976)、p. 2673.
- [87] Rau, Jr., C. A., Gemma, A. E. and Leverant, G. R., Thermal-Mechanical Fatigue Crack Propagation in Nickel- and Cobalt- Base Superalloys Under Various Strain-Temperature Cycles, *ASTM STP*, Vol. 520 (1973), pp. 166-178.
- [88] Coffin Jr., L. F., *Fracture*, (1969), Chapman and Hall, p. 643.
- [89] Solomon, H. D., *Metall. Trans.*, Ser. A, 4 A-1 (1973), p. 341.
- [90] Wareing, J., *Metall. Trans.*, A 6 A-7 (1975), p. 1367.
- [91] Harrison, C. B. and Sandor, G. N., *Eng. Fract. Mech.*, Vol. 3, No. 4 (1971), p. 976.

- [92] Shahinian, P. et al., *Trans. ASME, J. Eng. Ind.*, Vol. **93**, No. 3 (1971), p. 976.
- [93] Shahinian, P. et al., *J. Mater. JMLSA*, Vol. **7**, No. 4 (1972), p. 527.
- [94] 坂田、機講論、No. 720-79 (1972)、p.177.
- [95] Siverns, M. J. and Price, A. T., *Int. J. Fract.*, Vol. 9, No.2 (1973), p. 199.
- [96] Kenyon, J. L. et al., *Proc. Int. Conf. Creep Fatigue in Elevated Temp. Applications*, (1973), C 156, p. 73.
- [97] 川崎、堀口、機講論、No. 740-2 (1974)、p. 219.
- [98] 大路・ほか、機械の研究、Vol. **28**, No. 12 (1976)、p. 1397.
- [99] 大谷、新田、材料、Vol. **25**, No. 275 (1976)、p. 595.
- [100] 大路・ほか、機講論、Vol. 740-11 (1974)、p. 207.
- [101] Landes, J. D. and Begley, J. A., A Fracture Mechanics Approach to Creep Crack Growth, *ASTM STP*, Vol. **590** (1976), pp. 128-148.
- [102] Harper, M. P. and Ellison, E. G., *J. Strain Analys.*, Vol. **12**, No. 3 (1977), p. 167.
- [103] 大路・ほか、材料、Vol. **22**, No. 234 (1973)、p. 285.
- [104] Nicholson, R. D. and Formby, C. L., *Int. J. Fract.*, Vol. **11**, No. 4 (1975), p. 595.
- [105] Haigh, J. R., *Mater. Sci. Eng.*, Vol. **20** (1975), p. 213.
- [106] Koterawasa, R. and Iwata, Y., *Trans. ASME, J. Eng. Mater. Technol.*, Vol. **98**, No. 4 (1976), p. 296.
- [107] Shahinian, P., *Weld. J.*, Vol. 57, No. 3 (1978), 87-S.
- [108] Sadananda, K. and Shahinian, P., *Trans. ASME, J. Eng. Mater. Technol.*, Vol. **100**, No. 4 (1978), p. 381.

- [109] Atanmo, P. N. and McEvily, Jr., A. J., Creep-Fatigue Interaction During Crack Growth, *ASTM STP*, Vol. **520** (1973), pp. 157-165.
- [110] 高温構造安全技術研究組合、ISES、7907 (1979).
- [111] Ohtani, R., *Proc. Int. Conf. Eng. Aspects of Creep*, IME 2 (1980), p. 7.
- [112] Taira, S. et al., *Trans. ASME, J. Eng. Mater. Technol.*, Vol. **101**, No. 1 (1979), p. 42.



### 3 片側き裂板の熱応力下応力拡大係数評価法の開発

#### 3.1 緒言

円筒環状き裂を念頭に置き、断面形状の類似性、および破壊力学の基本部材であることより、片側き裂板の熱応力下応力拡大係数基本特性を検討すべく、本章にて片側き裂板の熱応力下応力拡大係数評価法を導く。片側き裂板の端部は拘束され、温度はその幅方向に一次的に分布するものとした。

まず3.2節にて典型的な温度分布に対するK値を有限要素解析・変位法により求め、導くK値評価式が備えるべき仕様を絞り込んだ。次に3.3節にて片側き裂板のこの熱応力問題のK値評価法を開発する際の考え方を述べる。すなわち、き裂先端の特異性に着目すると、この熱応力問題のK値が自由膨張時の変位を打ち消す変位を与える変位境界問題のK値として求めることができる点を説明する。そして、3.4節にて片側き裂板変位境界問題のK値評価法を開発し、3.5節にてこの手法を熱応力問題に適用する。最後に3.6節にてまとめを行う。

### 3.2 有限要素解析による片側き裂板熱応力下K値

一般に任意温度分布に対応する熱応力は平均熱応力と、平均熱応力からの偏差成分に分解して考えることができる。ここでは端部を拘束され、その幅方向に温度が一次的に分布する片側き裂板の平均熱応力に対応し平均温度( $-\Delta T$ )に基づく熱応力を、そして平均熱応力からの偏差に基づく応力に対応し平均値零、内外面温度差  $2\Delta T$  の線形温度分布に対応する熱応力を検討した (図 3. 1)。以下この熱応力を、各々「一様熱応力」「線形熱応力」と称する。

有限要素解析ではき裂まわりを三角形要素、他は四角形要素を使用した。いずれも二次要素である。要素数は断面のアスペクト比  $H/W$ 、無次元き裂長さ  $a/W$  にもよるが、100~700 程度の要素を使用した。K値の評価は変位法によった。

通常の荷重境界問題であれば、K値は  $H/W=3$  以上で  $H/W=\infty$  の結果と差が無いと言われている。今回の熱応力の場合には状況が異なった。そこで長さ  $H$  の影響についても合わせて考えることにした。板幅  $W=10$  mm、長さ  $H=10, 20, 30, 40, 50, 100, 500, 1\ 000$  mm について無次元き裂長さ  $a/W=0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6$  の計算を行った。いずれも  $E=21\ 000$  kg/mm<sup>2</sup>、 $\alpha=1.0 \times 10^{-5}$  1/°C、 $\Delta T=50$  °C、 $\nu=0.3$  とした。

いずれもき裂は板の長さ方向中央に存在するとして計算を行った。

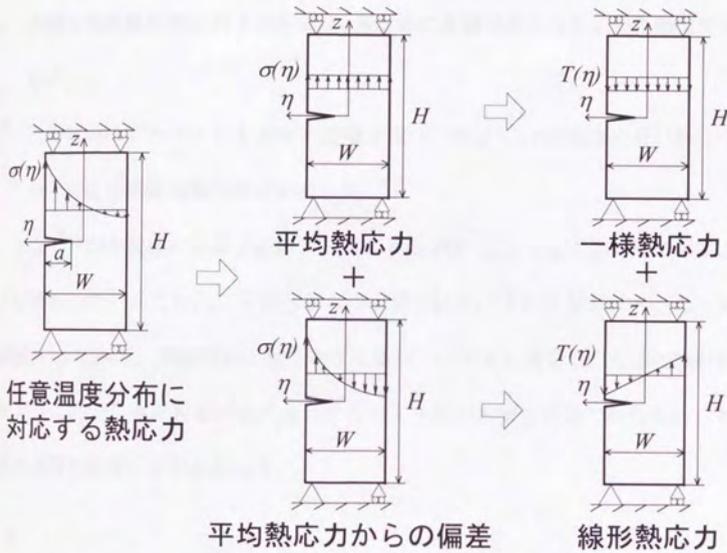


図 3.1 片側き裂板の一様・線形熱応力

### 3.2.1 線形熱応力下のK値

図 3.2に片側き裂板の線形熱応力下無次元K値を示す。これより次のことがわかる。

1. 片側き裂板線形熱応力下のK値は、基本的なき裂が長くなるにつれ極大値を示す。
2. この傾向はアスペクト比  $H/W$  の影響を受け、 $W/H = 1/100$  程度の長い板になるとK値が単調増加の傾向を示した。

ここで片側き裂板のK値が断面アスペクト比  $H/W$  によっては極大値を示すことに注目したい。これは、片側き裂板の引張・純曲げ下のK値がアスペクト比  $H/W > 1.5$  に対し、無限長板の特性を示す傾向とは大きく異なる。今回の検討結果よりこれから導くK値評価式は「アスペクト比の影響が評価できるもの」とする必要があることがわかった。

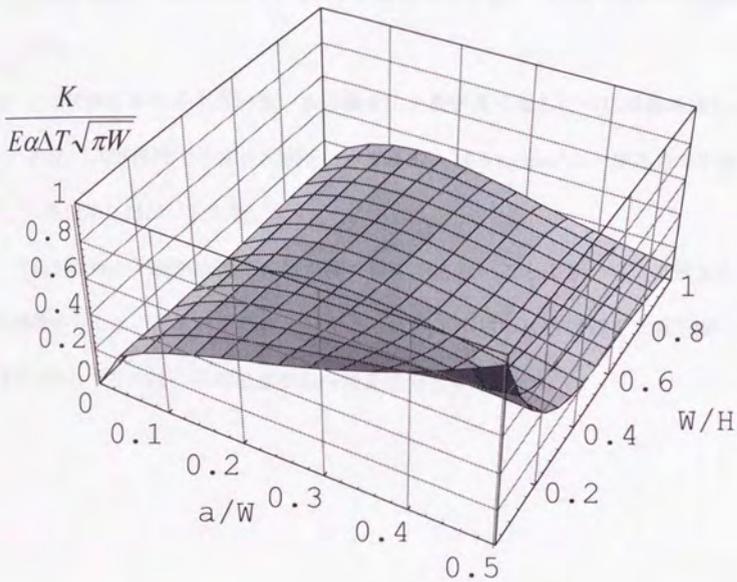


図 3.2 有限要素解析による線形熱応力下の無次元K値 ( $W=10\text{ mm}$ )

### 3.2.2 一様熱応力下のK値

図 3.3に片側き裂板の一様熱応力下無次元K値を示す。これより次のことがわかる。

1. 片側き裂板の一様熱応力下K値は、き裂が長くなるにつれ極大値を示さなかった。
2. このK値は $W/H$ が小さい長い板の場合にき裂が長くなるにつれ単調増加し、 $W/H = 1/100$ 程度で片側き裂板を $\sigma_0 = E \alpha \Delta T = 10.5 \text{ kg/mm}^2$ の一様応力で引張った結果とほぼ一致した。

片側き裂板の一様熱応力下K値が極大値を示さないことより、平均温度からの偏差成分について検討すれば十分であり、以下所用のK値評価式を導く際に検討対象とするのは、平均温度からの偏差成分とする。

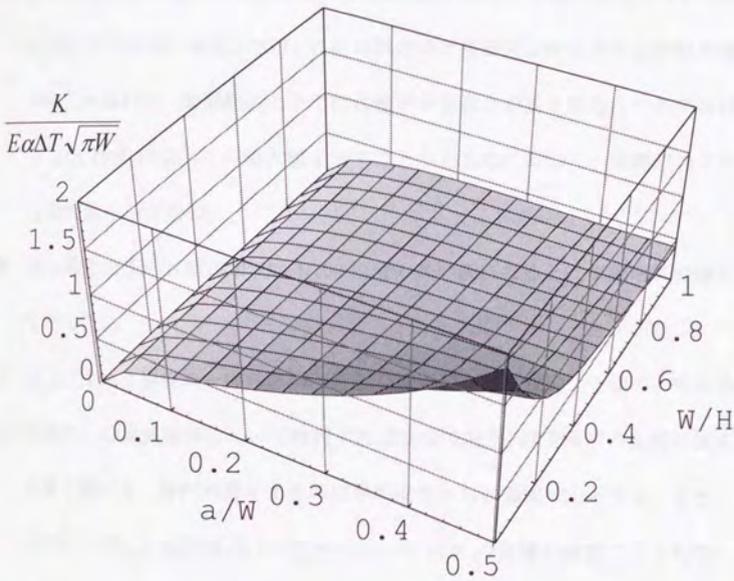


図 3.3 有限要素解析による一様熱応力下の無次元K値 ( $W=10\text{ mm}$ )

### 3.2.3 有限要素解析まとめ

端部を拘束された片側き裂板の一樣・線形熱応力下K値を有限要素解析・変位法により求め、次のことがわかった。

1. 片側き裂板のK値は一樣熱応力（平均熱応力に対応）と線形熱応力（平均熱応力からの偏差に対応）では、K値の無次元き裂長さ  $a/W$  に対する特性が異なる。すなわち、線形熱応力下ではK値がき裂長さが長くなるにつれアスペクト比  $H/W$  によっては極大値を示すことがあるのに対し、一樣熱応力下では極大値を示さない。
2. 線形熱応力下のK値は  $W/H = 1/100$  程度の長い板になると、単調増加の傾向を示した。
3. 以上、片側き裂板の一樣熱応力下K値が極大値を示さないことより、平均熱応力からの偏差成分について検討すれば十分であり、以下所用のK値評価式を導く際にも、検討対象とするのは平均温度からの偏差成分とする。また、これから導くK値評価式は「アスペクト比  $H/W$  の影響が評価できるもの」とする必要がある。

### 3.3 片側き裂板の熱応力問題と変位境界問題

図 3.4左に示す、端部を拘束され、温度が幅方向に一次的に分布しする片側き裂板の熱応力下K値について考える。前節の有限要素解析結果より、検討対象とするのは平均温度からの偏差成分に対応する熱応力である。

ここでまずこの問題のK値が、図 3.4中央の自由膨張時のK値  $K_{free}$  と、この自由膨張による変位を打ち消すような強制変位を与える図 3.4右の問題のK値  $K_f$  の和として求まる点に着目した。

そして、図 3.4中央の自由膨張の変形については、Duhamel のアナロジー<sup>113)</sup>により図 3.5(b)に示すように端部に  $M_f$  を負荷する場合と、き裂面上に  $M_f$  を生じさせる応力分布に対応する表面力(図 3.5(c)の実線)が負荷される場合の変形と等価である。ここに、片側き裂板の  $M_f$  は次式にて定義される量で、以下熱変形相当モーメントと称する。 $\alpha$  は線膨張係数である。

$$M_f = E\alpha \int_{-w/2}^{w/2} T\eta d\eta \quad (3.1)$$

ところが、き裂先端の特異性に着目すると、図 3.5(b)と(c)の特異性が相殺されるために、図 3.5(a)の自由膨張問題に特異性が生じないことになる。従って、 $K_{free} = 0$  であり、所用のK値は図 3.6に示すように、自由膨張時に端部に生じる変位  $U(\eta)$  を零にすべく、端部に変位  $(-U(\eta))$  を与える変位境界問題のK値  $K_f$  として求められることになる。ここで、熱応力は線形温度分布以外に対し零ではないが、特異性は常に生じない点に注意が必要である。

以下、片側き裂板変位問題のK値を評価する一般的な方法を導く。

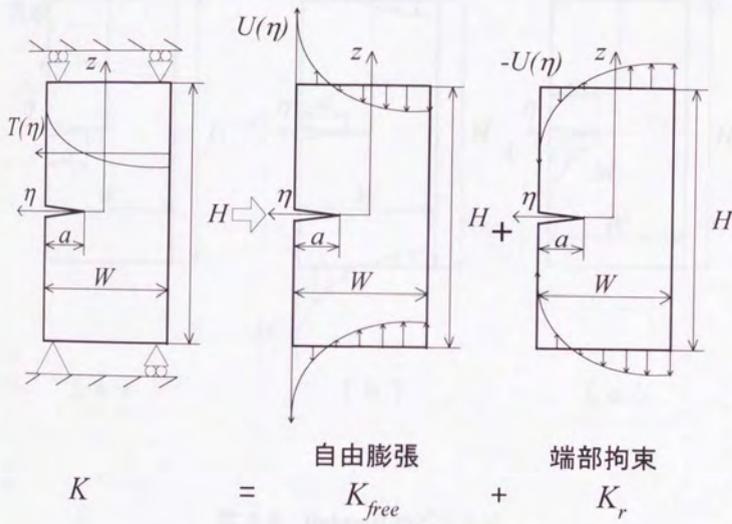


図 3.4 着眼点：端部を拘束された片側き裂板熱応力下のK値

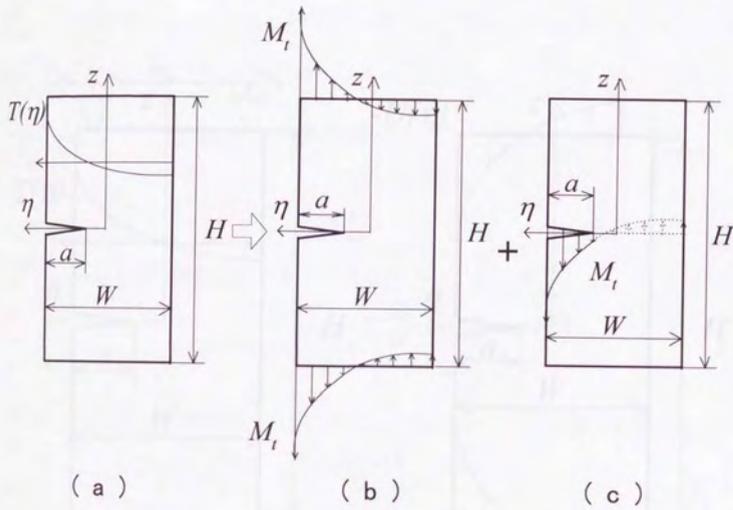


図 3.5 Duhamel のアナロジ

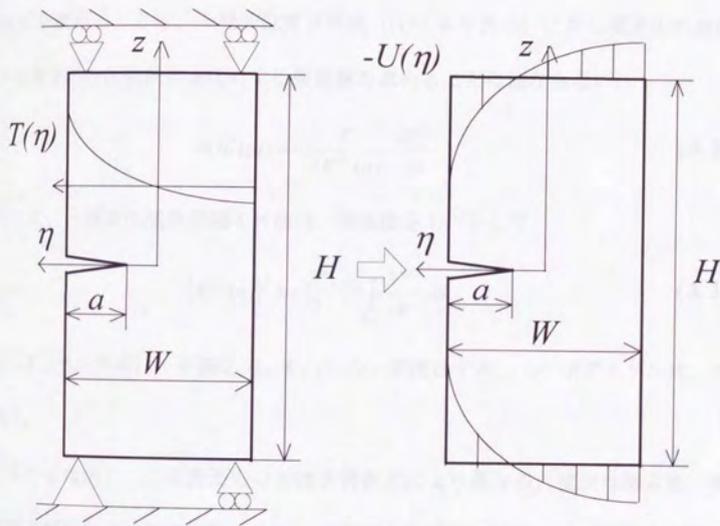


図 3.6 片側き裂板の熱応力問題と変位境界問題