

3.4 重み関数法による変位境界問題K値評価法開発

ここでは、片側き裂板変位境界問題のK値を求める一般的な方法を導く。

片側き裂板の任意変位境界問題は、2.2.3項に述べたように、この問題に対する重み関数を導くことにより解決する。そして、変位境界問題に対する重み関数 w を求めることは、一様変位境界問題 ((1)により表示) に対し境界上の表面力分布 $T_i^{(1)}$ のき裂長さ a に対する微係数を求めることに他ならない。

$$w(\eta, z; a) = -\frac{E'}{2K_i^{(1)}(a)} \frac{\partial T_i^{(1)}}{\partial a} \quad (3.2)$$

ここに、一様変位境界問題のK値は一様変位を $U_i^{(1)}$ として、

$$\{K_i^{(1)}(a)\}^2 = -\frac{E'}{2} U_i^{(1)} \int_{C_i} \frac{\partial T_i^{(1)}}{\partial a} dS \quad (3.3)$$

$E = E$ (ヤング率) : 平面応力、 $E / (1-\nu^2)$: 平面ひずみ、 ν : ポアソン比、である。

しかしながら、この表面力分布はき裂長さにより異なる。従来は選点法、有限要素解析などの構造解析によりこの表面力分布をき裂長さごとに数値的に求めているが、例えば有限要素解析にて特異要素を使う場合にはき裂先端の情報も得られているので、変位外挿法などによりK値を求める方がスマートである。

本研究では梁とみなせる構造については、一様変位境界問題の境界上表面力分布が、St. Venantの原理が成り立つような場合には、実用上線形分布とみなせる点に着目し、一様変位境界問題を集中荷重・集中モーメントの問題に置き換えた。その結果、集中荷重・モーメントと変位を一義的に結びつける状態量「コ

ンプライアンス」を導入することにより、一様変位境界問題の境界上の表面力分布を統一的に記述することが可能になった。

以下、まず着眼点と考え方を説明し、次にこの考え方に従い片側き裂板の重み関数を導く。その後、この手法を一般の板構造に適用できるように拡張する。

3.4.1 着眼点と考え方

これまでに述べたように、変位境界問題に対する重み関数を求めることは、一様変位境界問題に対し境界上の表面力分布のき裂長さに対する微係数を求めることに他ならない。変位境界問題に対する境界上の表面力分布（2次元問題では応力分布）は *a priori* にわかっているわけではなく、一般には有限要素解析などの数値解析を行った結果得られる。これは一様変位境界問題を解くことに他ならない。

ここでは一様変位境界問題を解くための、構造解析と異なるアプローチを考える。一様変位境界問題では、変位は境界上一定で、かつ回転角は零である。このとき Saint-Venant の原理が成り立つならば、境界上で表面力分布を積分することにより等価な集中荷重・モーメントに置き換えることができる。この集中荷重・モーメントは未知であるが、「コンプライアンス」の概念^[14]を導入することにより、未知の集中荷重・モーメントを一様変位・回転角零の条件のもとで導くことができる事実に着目した。

すなわち、微小変形の範囲では、集中荷重・モーメントと変形は一對一の対応し(図 3. 7)、両者を対応づける量がコンプライアンスであるので、この集中荷重・モーメントをコンプライアンスの概念を導入することによりこれらは求まり、かつ所用の境界上の表面力分布は求めた等価な集中荷重・モーメントに置き換えることができる。しかも、周知のように境界上(梁の端部)の表面力分布は、Saint-Venant の原理が成立する場合断面の幅方向に線形の分布になる。これが今回導いた重み関数評価法の着眼点である。

ところで、今回提案する手法では材料力学の梁の仮定を置くわけであるから、当然制約がある。これがいわゆる St. Venant の原理が成り立つような場合、という制約である。例えば、片側き裂板の場合であれば、種々の高さ H と梁幅 W との比(以下、アスペクト比) $H/W > 1.5$ でほぼ成り立つと言われている。有限要素解析で確認計算を行ったところ、広範囲の無次元き裂長さ a/W に対し、一様変位境界問題の境界上の応力分布は $H/W = 1$ では非線形、 $H/W = 2$ では線形分布となった(図 3. 8、図 3. 9)。しかし、後述するように応力拡大係数の計算精度、という点から判断すると境界上の応力分布を線形とみなすことによる誤差は、実用上無視できるようである。

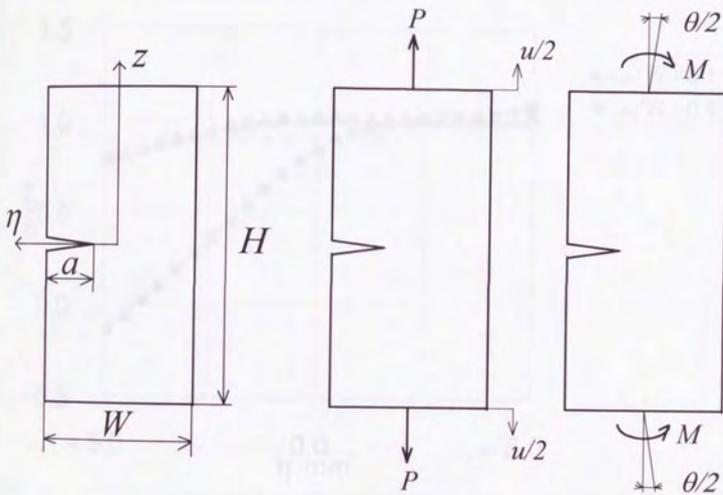


図 3.7 軸力と曲げを受ける片側き裂板の変形

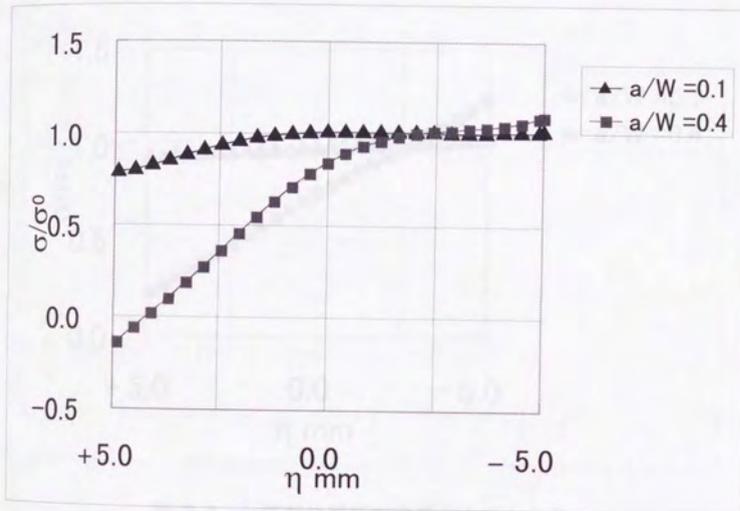


図 3.8 一様変位問題の境界上の応力分布

($H/W=1$; $\sigma_0 = 10.5 \text{ kg/mm}^2$: き裂がない場合の応力)

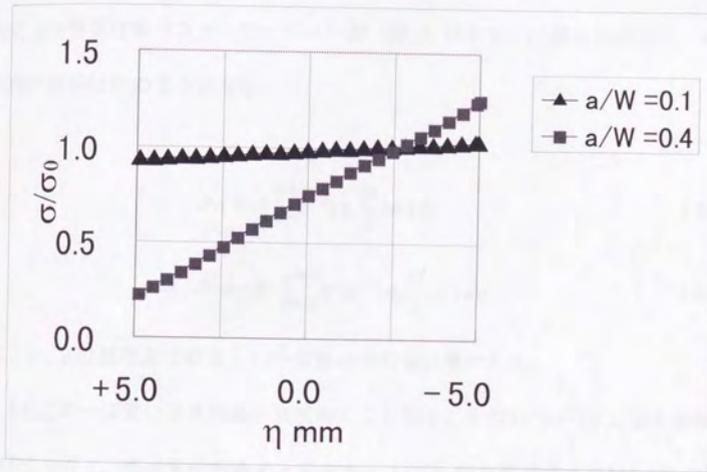


図 3.9 一様変位問題の境界上の応力分布

($H/W=2$; $\sigma_0 = 10.5 \text{ kg/mm}^2$: き裂がない場合の応力)

3.4.2 変位境界問題の重み関数導出

以下、片側き裂板の変位境界問題重み関数を導く。図 3.10 に示す、幅 W 、高さ H 、厚み B の片側き裂板につき、Saint-Venant の原理が成り立つとして、一様変位 $v^{(1)}$ を端部に加えたとき (図 3.10 上半) の端部における表面力分布 $\sigma^{(1)}(\eta, H/2; a)$ を等価な集中力 $P \cdot$ モーメント M (図 3.10 下半) に置き換えると、両者の間の関係は次のようになる。

$$P = B \cdot \int_{-W/2}^{W/2} \sigma^{(1)}(\eta, \frac{H}{2}; a) dx \quad (3.4)$$

$$M = P \cdot e = B \cdot \int_{-W/2}^{W/2} \eta \cdot \sigma^{(1)}(\eta, \frac{H}{2}; a) d\eta \quad (3.5)$$

ここに、 e は等価集中荷重 P の中立軸からの偏心量である。

もしこの一様変位境界問題を直接解くことなく、すなわち $\sigma^{(1)}(\eta, z; a)$ を最初に知ることなく、等価集中荷重 P と集中モーメント M が直接求まるならば、材料力学の梁に関する初歩的な知識から、境界上の応力は次のような線形、かつ非常に簡単な式で表すことができる。

$$\sigma^{(1)}(\eta, \frac{H}{2}; a) = \frac{P}{A} - \frac{M}{I} \cdot \eta \quad (3.6)$$

ここに A は境界上の面積、 I は中立軸まわりの慣性モーメントである。

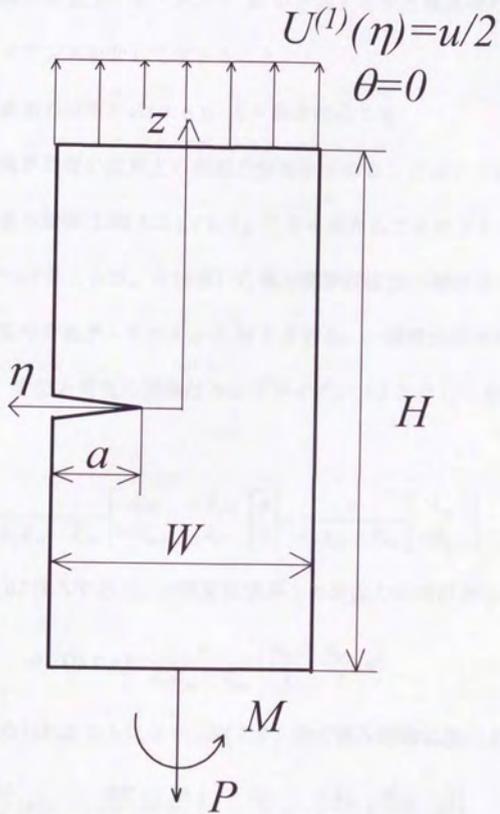


図 3.10 一様変位境界問題の等価集中力・モーメント

一様変位境界問題については

1. この等価集中荷重 P ・モーメント M がき裂を有する構造物の変形能を表すコンプライアンスを介して求まること
2. 境界上の表面力分布が式(3.6)により表されること
3. 一様変位境界問題の境界上の表面力分布を求めることさえできれば、変位境界問題の重み関数は式(3.2)、(3.3)により求めることができること

の3点を結びつけたことが、今回導いた重み関数評価法の着眼点である。

まず、等価集中荷重 P ・モーメント M を求める。一様変位境界問題では、 $\theta = 0$ であるから、変位と荷重の関係はコンプライアンス λ を介して表すと次のようになる。

$$\begin{bmatrix} P \\ M \end{bmatrix} = \frac{1}{\lambda_p \lambda_M - \lambda_{pM}^2} \begin{bmatrix} \lambda_M & -\lambda_{pM} \\ -\lambda_{pM} & \lambda_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{u}{\lambda_p \lambda_M - \lambda_{pM}^2} \begin{bmatrix} \lambda_M \\ -\lambda_{pM} \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

これを式(3.6)に代入すると、一様変位境界上の表面力分布は次のようになる。

$$\sigma^{(1)}(\eta, z; a) = \frac{u}{\lambda_p \lambda_M - \lambda_{pM}^2} \left(\frac{\lambda_M}{A} + \frac{\lambda_{pM}}{I} \eta \right) \quad (3.8)$$

式(3.8)が求められたことにより、式(3.2)中の重み関数は次のように書ける。

$$w\left(\eta, \frac{H}{2}; a\right) = -\frac{BE^*}{2K_I^{(1)}(a)} \cdot \frac{\partial}{\partial a} \left\{ \frac{u}{\lambda_p \lambda_M - \lambda_{pM}^2} \left(\frac{\lambda_M}{A} + \frac{\lambda_{pM}}{I} \eta \right) \right\} \quad (3.9)$$

この重み関数はあと一様変位境界問題に対する応力拡大係数 $K_I^{(1)}(a)$ がわかれば、完全に記述できたことになる。この $K_I^{(1)}(a)$ は式(3.3)と式(3.8)により求まる。対称性と $U^{(1)}(\eta) = u/2$ により、式(3.3)は

$$\begin{aligned} \{K_I(a)\}^2 &= -E \cdot \frac{u}{2} \int_{W/2}^{W/2} \frac{\partial}{\partial a} \left\{ \sigma^{(1)} \left(\eta, \frac{H}{2}; a \right) \right\} d\eta \\ &= -E \cdot \frac{u}{2} \left[\frac{u}{BW} \frac{d}{d\xi} \left(\frac{\lambda_M}{\lambda_P \lambda_M - \lambda_{PM}^2} \right) \right] \end{aligned} \quad (3.10)$$

以上、式(3.9)、(3.10)により、き裂を有する構造物のコンプライアンスがわかっていれば、簡単に変位境界問題の重み関数を求めることができることを導いた。なお、このコンプライアンス λ は2.2.2項にて説明したように、集中荷重・モーメントに対するK値から求まる。

ところで、式(3.9)、(3.10)では実用上いささか使いづらいので、式(3.9)、(3.10)を今一度重み関数とコンプライアンスの関係がはっきりわかるように整理し直した。

片側き裂板の場合、コンプライアンスは通常無次元き裂長さ $\xi = a/W$ で記述されている。この場合、式(3.9)、(3.10)において $\partial/\partial a = (1/W) \cdot d/d\xi$ であるから、重み関数 w は次のように書き直せる。

$$w \left(\eta, \frac{H}{2}; a \right) = - \frac{\sqrt{2E'}}{W} \cdot \frac{\{D_0(\xi) + D_1(\xi) \cdot \eta\}}{\sqrt{-D_0(\xi)}} \quad (3.11)$$

ここに、 η は梁の境界(縁)上の曲げの中立軸からの距離である(図3.10)。

この重み関数の定義式と対応している応力拡大係数の計算式は

$$K_I^{(2)}(a) = \int_{W/2}^{W/2} U^{(2)}(\eta) \cdot w \left(\eta, \frac{H}{2}; a \right) d\eta \quad (3.12)$$

式(3.11)はいわゆる定義式(3.2)の2倍になっているので、応力拡大係数の計算式とペアで使う必要がある。これは、梁の両端に境界があり、対称であることを考慮し、計算の便宜を優先したものである。

なお、新たに定義された関数は次の通りである。

$$D_0(\xi) = \frac{1}{A} \cdot \frac{d}{d\xi} \left\{ \frac{\lambda_M(\xi)}{\lambda_P(\xi)\lambda_M(\xi) - \{\lambda_{PM}(\xi)\}^2} \right\} \quad (3.13)$$

$$D_1(\xi) = \frac{1}{I} \cdot \frac{d}{d\xi} \left\{ \frac{\lambda_{PM}(\xi)}{\lambda_P(\xi)\lambda_M(\xi) - \{\lambda_{PM}(\xi)\}^2} \right\} \quad (3.14)$$

ここに、 $A = BW$ 、 $I = BW^3/12$ は各々梁の端部の断面積、断面二次モーメントである。

一方、片側き裂板の一樣変位境界問題の応力拡大係数 $K_I^{(1)}(a)$ は次のように書き直せる。

$$K_I^{(1)}(a) = u \cdot \sqrt{\frac{BE'}{2}} \cdot \sqrt{-D_0(\xi)} \quad (3.15)$$

以上、式(3.11)~(3.14)により梁の変位境界問題に対する重み関数が簡潔な形で記述できた。制約は St. Venant の原理が成り立つこと、変形が微小であること、が条件として満足されることである。

今回提案した方法の優れている点は、

- 与えられた構造物のコンプライアンスがき裂長さの関数としてわかっているならば、直ちに重み関数を導くことができる点
- たとえコンプライアンスがわかっておらずとも、過去の集中荷重・モーメントに対する応力拡大係数のデータの蓄積を生かし、変位境界問題の重み関数を求めることができるようになった点
- 重み関数を求める際に、一樣変位境界問題さえも、有限要素解析・選点法等で解く必要がなくなった点

- 従って、き裂先端の応力場を知る必要がないので、メッシュ分割による計算精度を心配する必要がない
- 形状の影響（たとえば梁であれば、梁幅と高さの比）がコンプライアンスと
いう明快な物理量により評価できる点

などである。

ところで、式(3.11)にて導いた重み関数では、根号の中に $(-D_0(\xi))$ の形で負号が出てくる。そこで関数 $D_0(\xi)$ の特性を把握しておくことにした。式(3.13)を変形し、関数 $D_0(\xi)$ の微分前の姿を関数 $f_0(\xi)$ として定義することにする。

$$f_0(\xi) = \frac{1}{A} \cdot \frac{\lambda_M(\xi)}{\lambda_p(\xi)\lambda_M(\xi) - \{\lambda_{PM}(\xi)\}^2} \quad (3.16)$$

ここで、片側き裂板のコンプライアンスとして次の近似式^[115]を用いることにする。

$$\lambda_p = \frac{H}{EBW} + \frac{\pi(1.1215)^2}{EB} \cdot \frac{\xi^2}{(1-\xi)^2} \times \{1 - \xi(1-\xi)(1.606 - 1.942\xi + 1.128\xi^2)\} \quad (3.17)$$

$$\lambda_{PM} = \frac{\pi(1.1215)^2}{EB} \cdot \frac{\xi^2}{(1-\xi)^2(1+2\xi)} \times \{1 - \xi(1-\xi)(0.55 - 0.50\xi)\} \left(\frac{6}{W}\right) \quad (3.18)$$

$$\lambda_M = \frac{12H}{EBW^3} + \frac{\pi(1.1215)^2}{EB} \cdot \frac{\xi^2}{(1-\xi)^2(1+2\xi)^2} \times \{1 + \xi(1-\xi)(0.44 + 0.25\xi)\} \left(\frac{6}{W}\right)^2 \quad (3.19)$$

式(3.17)~(3.19)を(3.16)に代入し、 $A = BW$ なる関係を用いると、き裂がない場合の極限、すなわち $\xi \rightarrow 0$ の値が容易に得られる。

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} f(\xi) = \frac{E}{H} \quad (3.20)$$

この値を用いて関数 $f_0(\xi)$ を無次元整理したものを図 3.11 に示す。 $W = 10 \text{ mm}$ と
して計算した。この図より、関数 $f_0(\xi)$ が無次元き裂長さ ξ に対する単調減少関数
であり、そしてその微係数である関数 $D_0(\xi)$ が常に負の値をとることが確認でき
た。従って、式(3.11)中の根号内は正の値をとることになる。

なお、関数 $f_0(\xi) / (E/H)$ は ξ 、 H/W のみの関数であることを付記しておく。



図 3.11 関数 $f_0(\xi)$ の無次元化

$$\left\{ \frac{1}{A} \cdot \frac{\lambda_M}{\lambda_p \lambda_M - \lambda_{PM}^2} \right\} / \left(\frac{E}{H} \right)$$

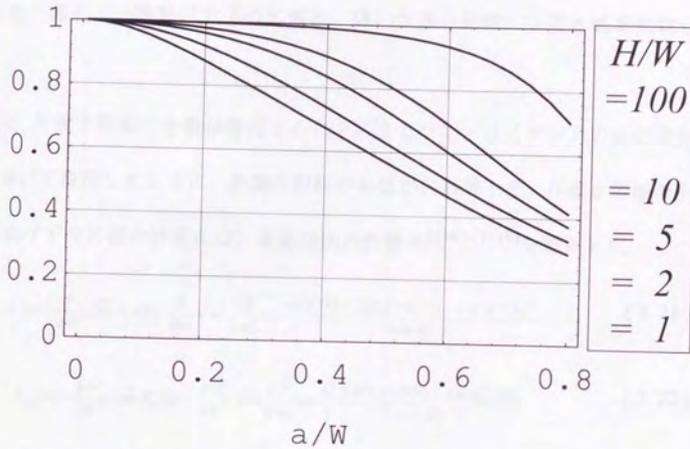


図 3.11 関数 $D_0(\xi)$ の特性

導いた重み関数の精度確認

最後に、今回提案した変位境界問題の重み関数の評価法の精度を確認するため、片側き裂板の一樣変位 (図 3. 12) ・線形変位 (図 3. 13) の 2 例につき応力拡大係数を求め、これを他の信頼できる解析的手法により求められている K 値を正しいものとして比較し、精度の確認を行った。その後 3.2 節にて有限要素解析を行った、線形・一樣熱応力下の K 値と、導いた重み関数による K 値を比較した。

ここで、片側き裂板のき裂が存在することによるコンプライアンスの変化量を、2.2.2 項にて説明したように、片側き裂板の K 値から計算した。片側き裂板の引張・純曲げ下の K 値の計算式は、有名な次の計算式^{[116]-[119]}を使用した。

$$K_p(a) = \frac{P}{BW} \sqrt{\pi a} F_p(\xi) = \frac{P}{BW} \sqrt{\pi a} \sqrt{\frac{2}{\pi \xi} \tan \frac{\pi \xi}{2} \frac{0.752 + 2.02\xi + 0.37\{1 - \sin(\pi \xi / 2)\}^3}{\cos(\pi \xi / 2)}} \quad (3.21)$$

$$K_M(a) = \frac{6M}{BW^2} \sqrt{\pi a} F_M(\xi) = \frac{6M}{BW^2} \sqrt{\pi a} \sqrt{\frac{2}{\pi \xi} \tan \frac{\pi \xi}{2} \frac{0.923 + 0.199\{1 - \sin(\pi \xi / 2)\}^4}{\cos(\pi \xi / 2)}} \quad (3.22)$$

ここに、 B, W は各々片側き裂板の厚みと幅、 a はき裂長さである。

また、き裂のない片側き裂板のコンプライアンスを次式で計算した。

$$\lambda_{p0} = \frac{H}{BWE}, \lambda_{M0} = \frac{12H}{BW^3E}, \lambda_{pM0} = 0 \quad (3.23)$$

以上求めたコンプライアンスの数値微分を行い、式(3.13)、(3.14)の関数 D_0 、 D_1 を求めた。その後一樣変位境界問題の K 値については式(3.15)、線形変位問題については式(3.12)の数値積分を行うことにより求めた。

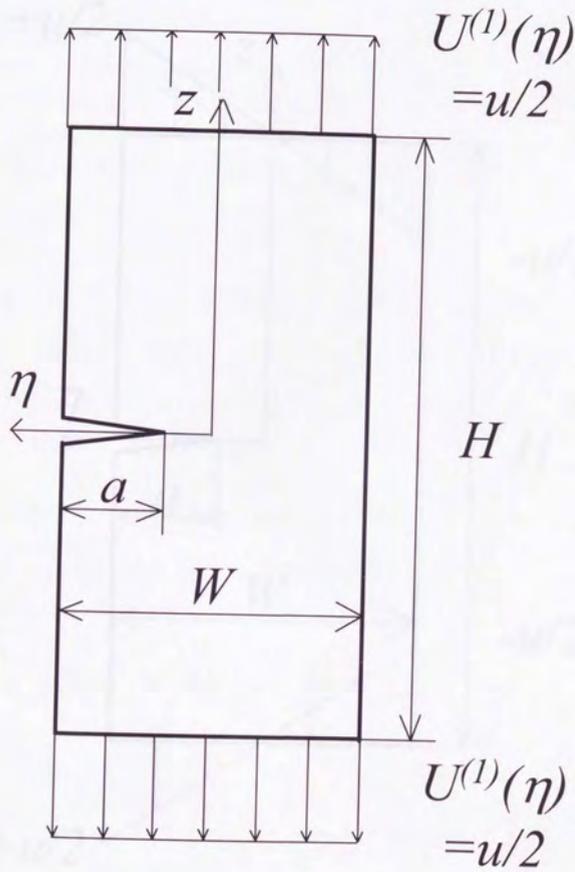


図 3.12 片側き裂板の一様変位境界問題

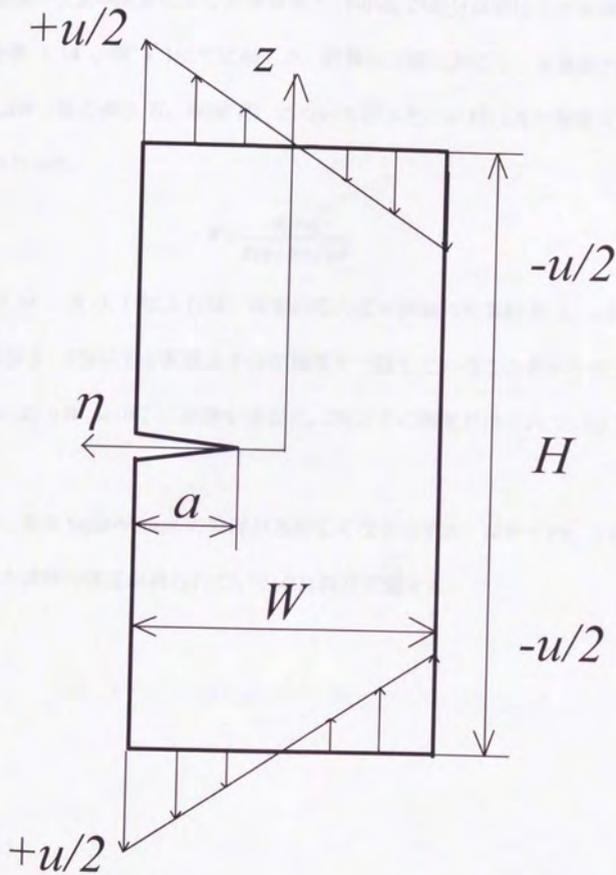


図 3.13 片側き裂板の線形変位境界問題

a) 一様変位境界問題のK値

今回導いた重み関数による計算結果と、Torvik が変分原理により計算した結果¹¹²⁾を図 3.14、表 3.1にて比較した。計算は文献に対応し、4種類のアスペクト比 H/W (板の高さ H 、板幅 W) について行った。比較は次の無次元整理結果につき行った。

$$K = \frac{K_I(a)}{E(u/H)\sqrt{\pi W}} \quad (3.24)$$

図 3.14、表 3.1 によれば、両者の応力拡大係数の計算結果は、 $a/W=0.1$ の場合を除き、5%以下の実用上十分な精度で一致していることがわかる。かつ、 $H/W \geq 2$ 、 $a/W \geq 0.2$ に範囲を絞ると、2%以下の精度が得られていることがわかる。

また、本来 Saint-Venant の原理があやしくなるはずの、 $H/W=1/2$ 、1 の場合についても同様の精度が得られている点は注目に値する。

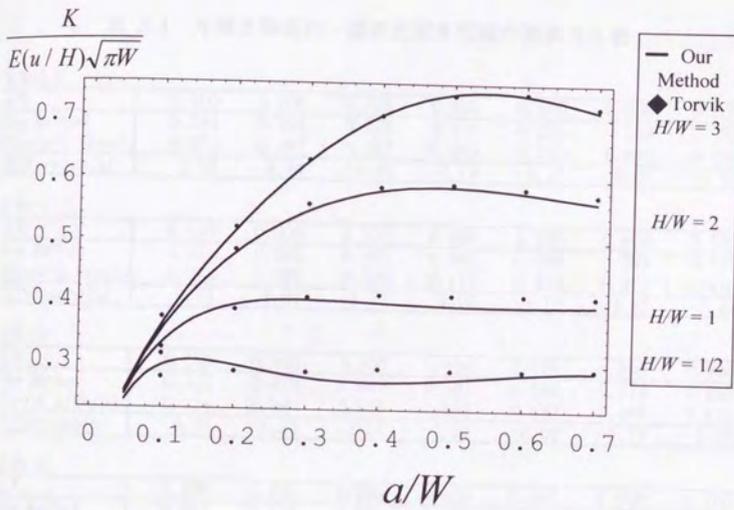


図 3.14 片側き裂板の一様変位境界問題のK値

3 片側き裂板の熱応力下応力拡大係数評価法の開発

表 3.1 片側き裂板の一樣変位境界問題の無次元K値

H/W=0.5							
a/W	0.100	0.200	0.300	0.400	0.500	0.600	0.700
New Method	0.294	0.296	0.277	0.271	0.275	0.284	0.290
Torvik's Result	0.276	0.287	0.287	0.292	0.290	0.290	0.292
Difference (%)	6.52	3.14	-3.48	-7.19	-5.17	-2.07	-0.68
H/W= 1							
a/W	0.100	0.200	0.300	0.400	0.500	0.600	0.700
New Method	0.331	0.394	0.403	0.399	0.395	0.395	0.396
Torvik's Result	0.313	0.387	0.408	0.412	0.412	0.412	0.410
Difference (%)	5.75	1.81	-1.23	-3.16	-4.13	-4.13	-3.41
H/W= 2							
a/W	0.100	0.200	0.300	0.400	0.500	0.600	0.700
New Method	0.353	0.478	0.547	0.581	0.588	0.579	0.563
Torvik's Result	0.324	0.484	0.558	0.587	0.592	0.586	0.575
Difference (%)	8.95	-1.24	-1.97	-1.02	-0.68	-1.19	-2.09
H/W= 3							
a/W	0.100	0.200	0.300	0.400	0.500	0.600	0.700
New Method	0.361	0.515	0.627	0.703	0.739	0.737	0.712
Torvik's Result	0.374	0.520	0.630	0.702	0.736	0.740	0.718
Difference (%)	-3.48	-0.96	-0.48	0.14	0.41	-0.41	-0.84

b) 線形変位境界問題のK値

片側き裂板の幅方向に与える変位が $+u/2$ から $-u/2$ までが線形に変化する場合についてK値を計算し、これを Bowie and Freese が選点法により計算した結果^[21]と比較した。この場合 $U_i^{(1)}=u/2(-2\eta/W)$ であり、対称性を考慮し式(3.12)は次のように書ける。

$$K_I^{(2)}(a) = \int_{-W/2}^{W/2} \frac{u}{2} \left(-2\frac{\eta}{W}\right) \cdot w\left(\eta, \frac{H}{2}; a\right) d\eta \quad (3.25)$$

計算は文献通り、2種類のアスペクト比 H/W に対し行った。計算結果を式(3.24)により無次元化し、図 3.15、表 3.2 にて比較した。

これより計算した範囲における両者の最大差は 6.7%と、実用上十分な精度精度が得られていることがわかる。Bowie は Saint-Venant の原理が成り立つような長さの板につき計算を行っていないので、今回開発した手法にとっては不利な条件での比較であるが、この場合も実用的な精度が得られている点は注目に値する。

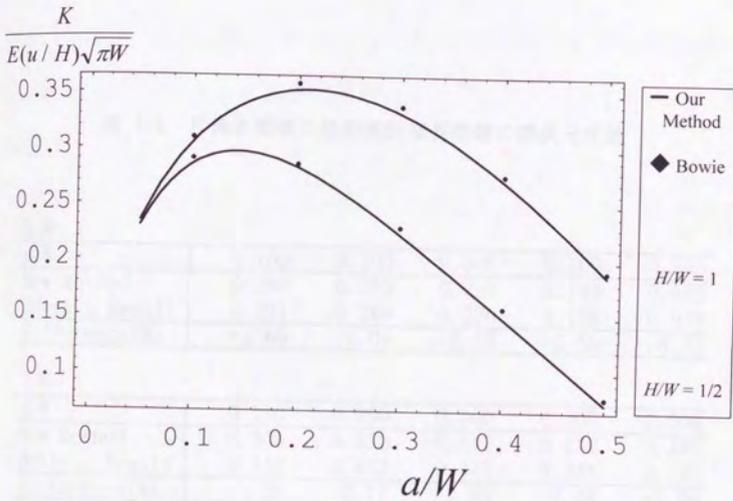


図 3.15 片側き裂板の線形変位境界問題のK値

3 片側き裂板の熱応力下応力拡大係数評価法の開発

表 3.2 片側き裂板の線形変位境界問題の無次元K値

H/W= 1					
a/W	0.100	0.200	0.300	0.400	0.500
New Method	0.286	0.283	0.223	0.149	0.073
Bowie's Result	0.291	0.286	0.230	0.158	0.078
Difference(%)	-1.69	-1.07	-2.88	-5.55	-6.73

H/W= 2					
a/W	0.100	0.200	0.300	0.400	0.500
New Method	0.306	0.352	0.332	0.272	0.187
Bowie's Result	0.310	0.362	0.345	0.278	0.191
Difference(%)	-1.26	-2.77	-3.89	-2.38	-1.96

c) 片側き裂板一様・線形熱応力下のK値

3.2節にて実施した有限要素解析に対応し、図 3. 1に示す端部を拘束された片側き裂板線形・一様熱応力下のK値を導いた重み関数により求め、有限要素解析・変位法により求めたK値と比較した。

重み関数による計算では、一様温度分布の場合に $U(\eta) = -\alpha\Delta TH/2$ 、線形温度分布の場合には $U(\eta) = \alpha\Delta TH(-2\eta/W)$ なる変位を片側き裂板の両端に加える変位境界問題としてK値の計算を行った。

両者によるK値を各々表 3. 3、表 3. 4にて比較した。これにより、導いた重み関数によるK値が実用上十分な精度を有していることがわかる。

3 片側き裂板の熱応力下応力拡大係数評価法の開発

表 3.3 片側き裂板の一様熱応力下のK値

$$E = 21000 \text{ kg/mm}^2 \quad \nu = 0.30 \quad \alpha = 0.000010 \text{ 1/}^\circ\text{C}$$

$$\Delta T = 50 \text{ }^\circ\text{C} \quad W = 10 \text{ mm}$$

H/W = 1

a/W	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
K	19.44	23.11	23.80	23.98	23.97	23.46
K _{FEM}	19.88	23.52	23.59	23.45	23.44	23.58
差%	-2.21	-1.74	0.89	2.26	2.26	-0.51

H/W = 2

a/W	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
K	20.75	28.01	32.22	34.51	35.16	34.35
K _{FEM}	21.52	28.77	32.06	33.84	34.35	34.18
差%	-3.58	-2.64	0.50	1.98	2.36	0.50

H/W = 4

a/W	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
K	21.47	31.43	39.87	46.78	51.06	51.88
K _{FEM}	22.24	32.21	39.74	46.08	49.99	51.27
差%	-3.46	-2.42	0.33	1.52	2.14	1.19

H/W = 5

a/W	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
K	21.62	32.22	41.93	50.66	56.92	59.16
K _{FEM}	22.37	33.01	41.81	49.94	55.75	58.36
差%	-3.35	-2.39	0.29	1.44	2.10	1.37

H/W = 10

a/W	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
K	21.92	33.95	46.86	61.23	75.48	86.13
K _{FEM}	22.72	34.75	46.78	60.55	74.10	84.69
差%	-3.52	-2.30	0.17	1.12	1.86	1.70

H/W = 50

a/W	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
K	22.18	35.47	51.83	74.21	105.49	148.36
K _{FEM}	22.97	36.29	51.81	73.66	104.00	145.80
差%	-3.44	-2.26	0.04	0.75	1.43	1.76

H/W = 100

a/W	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
K	22.21	35.67	52.53	76.28	111.27	164.34
K _{FEM}	23.00	36.49	52.52	75.76	109.80	161.50
差%	-3.43	-2.25	0.02	0.69	1.34	1.76

3 片側き裂板の熱応力下応力拡大係数評価法の開発

表 3.4 片側き裂板の線形熱応力下のK値

$E = 21000 \text{ kg/mm}^2$ $\nu = 0.30$ $\alpha = 0.000010 \text{ 1/}^\circ\text{C}$
 $\Delta T = 50 \text{ }^\circ\text{C}$ $W = 10 \text{ mm}$

H/W = 1

a/W	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
K	16.89	16.75	12.96	8.16	3.43	-0.66
K _{FEM}	17.67	17.25	13.09	8.68	4.10	0.52
差%	-4.41	-2.90	-0.99	-6.03	-16.38	-227.46

H/W = 2

a/W	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
K	18.07	20.81	19.38	15.50	10.33	4.82
K _{FEM}	18.90	21.53	19.56	15.81	10.64	4.73
差%	-4.39	-3.34	-0.92	-1.96	-2.91	1.95

H/W = 4

a/W	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
K	18.72	23.64	25.19	23.97	20.14	14.19
K _{FEM}	19.57	24.43	25.42	24.23	20.26	13.94
差%	-4.34	-3.23	-0.90	-1.07	-0.59	1.79

H/W = 5

a/W	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
K	18.86	24.30	26.75	26.64	23.75	18.13
K _{FEM}	19.69	25.10	27.01	26.90	23.82	17.81
差%	-4.22	-3.19	-0.96	-0.97	-0.29	1.80

H/W = 10

a/W	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
K	19.14	25.73	30.48	33.89	35.15	32.77
K _{FEM}	20.00	26.57	30.80	34.22	35.16	32.28
差%	-4.30	-3.16	-1.04	-0.96	-0.03	1.52

H/W = 50

a/W	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
K	19.37	27.00	34.24	42.77	53.51	66.60
K _{FEM}	20.24	27.87	34.65	43.26	53.65	66.00
差%	-4.30	-3.12	-1.18	-1.13	-0.26	0.91

H/W = 100

a/W	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
K	19.39	27.16	34.78	44.18	57.04	75.29
K _{FEM}	20.26	28.04	35.19	44.70	57.23	74.70
差%	-4.29	-3.14	-1.17	-1.16	-0.33	0.79

d) 計算結果の評価

今回開発した手法により重み関数を求め、これにより応力拡大係数を求めた場合の精度は二つの要因により影響を受ける。一つはコンプライアンスの変化量を計算するときの精度で、今回の数値計算例については式の応力拡大係数の計算式の精度がこれに相当する。もう一つは梁の仮定を置くことによる誤差、すなわち一様変位境界問題の境界上の応力を線形と置く（式(3.6),) ことによる誤差である。

まず、片側き裂板の集中荷重・モーメントに対する応力拡大係数の計算式(3.21), (3.22)は、いわゆる無限長板の式であり、誤差が0.5%以下であることが知られている^[116]。実用的には、板のアスペクト比 $H/W > 1.5$ ではほぼ無限長板として扱うことができると言われている。(中央き裂梁に対する石田の検討結果^[122]が有名である。) 従って、今回の手法により求めた応力拡大係数の計算精度が、アスペクト比 $H/W < 1.5$ に対し落ちる傾向を示すのはやむをえない。

一方、本章の初めに述べたように、一様変位境界問題の表面力が線形であると仮定が置けるのも、アスペクト比 $H/W > 1.5$ に対してである。(図 3.8, 図 3.9 も参照のこと) すなわち、アスペクト比 $H/W < 1.5$ に対し、 η が負の領域で式(3.6)と異なり非線形になるのである。そこで、アスペクト比 $H/W < 1.5$ に対し、誤差が増加する。

ところが、計算結果(図 3.14, 図 3.15, 表 3.1, 表 3.2)を見る限りにおいては、小アスペクト比となると確かに誤差が増加する傾向は見られるが、たとえば $H/W = 1/2$ に対しても、十分実用的な精度が得られている。

3 片側き裂板の熱応力下応力拡大係数評価法の開発

また、今回提案した手法では、アスペクト比によらずき裂長さが短い領域で誤差が出やすいという傾向を示した。しかし、応力拡大係数の絶対値が小さいことから、実用上問題にならないと考えられる。

以上をまとめると、片側き裂板に対し今回開発した手法により変位境界問題の重み関数を求め、重み関数法により応力拡大係数を計算する場合の精度に関するガイドラインとしては、アスペクト比 $H/W > 1.5$ ・無次元き裂長さ $a/W > 0.2$ に対し誤差2%以下が期待できる、と言える。

3.4.3 変位境界問題の重み関数評価法の一般化

前節にて変位境界問題の重み関数を片側き裂板（一様断面）につき導いた。ここではこの手法を一様断面板のみならず、変断面板としてモデル化できる任意の構造物に対し適用できる形に拡張する。

まず、本手法が適用できる前提条件は、片側き裂板と同様、次の通りである。

- St. Venant の原理が成り立つこと（材料力学の梁の仮定が成り立つこと）。
- 変形が微小であること。

一般に変位境界問題では構造物をその一端で固定し、他端に変位を与える問題に置き換えることができる。上記の前提条件の下、構造物を一端を固定された変断面板（図 3.16）としてモデル化できるものとして取り扱う。

さて、一端を固定された変断面板であっても、自由端の変位・回転角につきコンプライアンスを定義するとき、一様断面板について展開した議論をそのまま適用することができる。これは構造物のグロスとしての変形能がコンプライアンスにより記述できるからである。重み関数を導くには、一様変位境界問題の表面力分布が必要となるが、梁としての取り扱いができることを前提としているので、この荷重端上の表面力分布は荷重端断面の慣性主軸方向に線形となり、Saint-Venant の原理によりコンプライアンスを介して求まる等価集中荷重・モーメントで記述できる。そして、一様変位境界問題の境界上の表面力分布を求めることができれば、変位境界問題に対する重み関数が求まる。

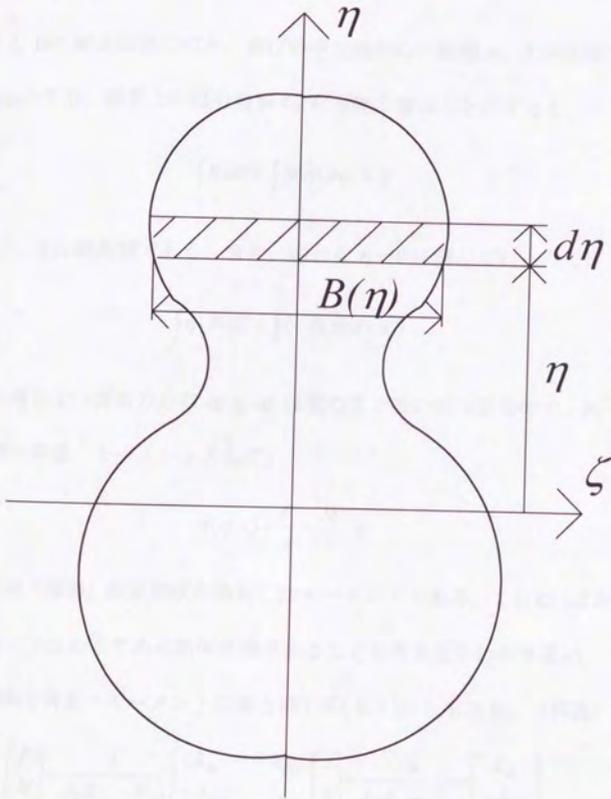


図 3.16 任意断面形状の境界

まず、変断面板の一端を固定し、任意の断面形状 (図 3.16) を有する他端に一樣変位を与える問題を、一樣断面梁同様の手法で解く。図 3.16中の原点は断面の図心である。

図 3.16の断面形状につき、曲げの中立軸からの距離 η 、その位置における幅を $B(\eta)$ とする。境界上の積分経路 C_L を η 軸に選ぶことにすると、

$$\int_{C_L} B dS = \int B(\eta) d\eta = A \quad (3.26)$$

ここに、 A は断面積である。また、図心を $\eta = 0$ に選んでいるので、

$$\int_{C_L} \eta \cdot B dS = \int \eta \cdot B(\eta) d\eta = 0 \quad (3.27)$$

この境界上の表面力分布 $\sigma(\eta, a)$ は梁の取り扱いができるので、 P 、 M を各々等価集中荷重・モーメントとして、

$$\sigma(\eta, a) = \frac{P}{A} - \frac{M}{I} \cdot \eta \quad (3.28)$$

この I は「端部」断面形状の断面二次モーメントである。これは η/I が端部における応力を求めるための断面係数であることを考えるとわかり易い。

等価集中荷重・モーメントは梁と同じ式(3.7)から求まる。(再掲)

$$\begin{bmatrix} P \\ M \end{bmatrix} = \frac{1}{\lambda_p \lambda_M - \lambda_{PM}^2} \begin{bmatrix} \lambda_M & -\lambda_{PM} \\ -\lambda_{PM} & \lambda_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{u}{\lambda_p \lambda_M - \lambda_{PM}^2} \begin{bmatrix} \lambda_M \\ -\lambda_{PM} \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

重み関数 w は式(3.2)同様次のように書ける。ただし、重み関数 w は境界上の積分経路 C_L でのみ定義される関数であるから、式(3.2)の変数 z は省略した。

(なお、式(3.2)で $z = H/2$ は自明であるので、省略可能である。)

$$w(\eta; a) = -\frac{E'}{2K_I^{(1)}(a)} \cdot \frac{\partial T_I^{(1)}}{\partial a} \quad (3.30)$$

ここに、一様変位境界問題の応力拡大係数 $K_I^{(1)}(a)$ の一般式は、一様断面板同様の式(3.3)再掲のように書ける。(式(3.3)再掲)

$$\{K_I^{(1)}(a)\}^2 = -\frac{E'}{2} U_I^{(1)} \int_{C_I} \frac{\partial T_I^{(1)}}{\partial a} dS \quad (3.31)$$

今回の場合、変断面梁の一端を固定端にしているため、式(3.31)で $U_I^{(1)} = u$ である。また、分布力 $T_I^{(1)}$ は式(3.28)の応力との間に $T_I^{(1)} = B(x) \cdot \sigma(\eta; a)$ の関係がある。ここで、次の関数を定義する。

$$C_0(a) = \frac{1}{A} \cdot \frac{\partial}{\partial a} \left\{ \frac{\lambda_M(a)}{\lambda_P(a)\lambda_M(a) - \{\lambda_{PM}(a)\}^2} \right\} \quad (3.32)$$

$$C_1(a) = \frac{1}{I} \cdot \frac{\partial}{\partial a} \left\{ \frac{\lambda_{PM}(a)}{\lambda_P(a)\lambda_M(a) - \{\lambda_{PM}(a)\}^2} \right\} \quad (3.33)$$

この関数を使うと、式(3.31)中の分布力の微係数は次のように簡潔に書ける。

$$\frac{\partial T_I^{(1)}}{\partial a} = u \cdot B(\eta) \cdot \{C_0(a) + C_1(a) \cdot \eta\} \quad (3.34)$$

式(3.31)中の積分は、式(3.26)、(3.27)より次のように書ける。

$$\int_{C_I} \frac{\partial T_I^{(1)}}{\partial a} dS = u \cdot \left\{ C_0(a) \cdot \int B(\eta) d\eta + C_1(a) \cdot \int \eta \cdot B(\eta) d\eta \right\} = u \cdot A \cdot C_0(a) \quad (3.35)$$

これより、一様変位境界問題に対する応力拡大係数 $K_I^{(1)}(a)$ は式(3.31)より

$$K_I^{(1)}(a) = u \cdot \sqrt{\frac{E' A}{2}} \cdot \sqrt{-C_0(a)} \quad (3.36)$$

以上より、任意断面形状を有する構造物に対する変位境界問題の重み関数 w

は、式(3.32)、(3.33)にて定義したコンプライアンスで記述された関数を用い、極めて一般的に次のように書ける。

$$w(\eta, a) = -\sqrt{\frac{E'}{2A}} \cdot \frac{B(\eta) \cdot \{C_0(a) + C_1(a) \cdot \eta\}}{\sqrt{-C_0(a)}} \quad (3.37)$$

なお、この式より一様断面梁の場合の式(3.11)を導くことができる。ただし、この場合には変位の定義の仕方が違うので（変位を与える境界が1カ所・2カ所の違いあり、それに対応して変位の定義が異なる）、2倍しなければ一致しないので注意が必要である。

式(3.37)に対応する応力拡大係数の計算式は

$$K_I(a) = \int U^*(\eta) \cdot w(\eta, a) d\eta \quad (3.38)$$

ここに $U^*(\eta)$ は構造物の一端を固定したときの、荷重端の変位である。

3.5 片側き裂板の熱応力下K値評価への適用

最後に、3.4節にて開発した片側き裂板変位境界問題のK値評価法を熱応力問題に適用する。対象とするのは、図 3.6左の端部を拘束され、温度が幅方向に一次的に分布し、その幅方向の平均温度が零である、片側き裂板の熱応力問題である。

3.3節にて述べたように、所用の問題のK値は、自由膨張時に生じる変位 $U(\eta)$ を零にすべく、端部に変位 $(-U(\eta))$ を与える変位境界問題のK値 K_r として求められることになる。この変位 $U(\eta)$ が既知であるとして、以下所用のK値評価式を導く。

まず、片側き裂板のK値評価式(3.11)~(3.14)について、重み関数が境界 $z = \pm H/2$ で定義された関数であり、かつその η 軸に関する対称性を考えると、これらの式は次のように書き直せる。

$$w(\eta, a) = -\frac{\sqrt{2E'}}{W} \cdot \frac{\{D_0(\xi) + D_1(\xi) \cdot \eta\}}{\sqrt{-D_0(\xi)}} \quad (3.39)$$

$$K = K_r = \int_{-W/2}^{W/2} \{-U(\eta)\} \cdot w(\eta, a) d\eta \quad (3.40)$$

関数は次の通りである (再掲)。

$$D_0(\xi) = \frac{1}{BW} \cdot \frac{d}{d\xi} \left\{ \frac{\lambda_M(\xi)}{\lambda_p(\xi)\lambda_M(\xi) - \{\lambda_{pM}(\xi)\}^2} \right\} \quad (3.41)$$

$$D_1(\xi) = \frac{12}{BW^3} \cdot \frac{d}{d\xi} \left\{ \frac{\lambda_{pM}(\xi)}{\lambda_p(\xi)\lambda_M(\xi) - \{\lambda_{pM}(\xi)\}^2} \right\} \quad (3.42)$$

ここに、 B は板の厚みである。

ここで、温度について平均値からの偏差成分を検討対象としていることより、次式を得る。

$$\int_{-W/2}^{+W/2} U(\eta) d\eta = 0 \quad (3.43)$$

このとき、重み関数が境界上の位置 η の一次関数であることを念頭に置き、式(3.39)、(3.41)、(3.42)を式(3.40)に代入すると、所用のK値評価式

$$K = K_r = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2E}} \cdot \frac{H}{BW} \cdot \frac{D_1(\xi)}{\sqrt{-D_0(\xi)}} \right\} \cdot (-M_u) \quad (3.44)$$

を得る。ここに、

$$M_u = B \int_{-W/2}^{+W/2} E \cdot \frac{U(\eta)}{(H/2)} \cdot \eta d\eta \quad (3.45)$$

は変位分布から計算される、等価な熱変形を与えるモーメントで、熱変形相当モーメントと称する。

式(3.44)より所用のK値は、{ }内の片側き裂板のコンプライアンスにより求まる項と、温度分布から求まる熱変形相当モーメントの積として計算できることがわかる。このことは過渡的な温度変化を受ける問題においても、応力解析を行うことなく、温度場解析のみによって刻々のK値変化が求められることを示していることを指摘しておく。

さて、これまで片側き裂板の熱応力下K値評価式を、広い立場から板としてその自由膨張時の端部変位 $U(\eta)$ が既知として導いたが、ここでは Euler 梁の仮定の下その変位を具体的に求める。以下の検討において、温度分布 $T(\eta)$

は特に断らない限り平均温度からの偏差を表すものとする。これは、3.2節の有限要素解析の結果、平均温度に対応する熱応力下所用のK値がき裂が長くなるにつれ極大値を示さないことがわかっているからである。

ここで、一般的な場合を考え、図 3.17左のように幅方向の位置 η の増加に伴い温度 $T(\eta)$ が大きくなるような問題を考える。ここで、梁の横断面が変形後も平面を保ち、その変形後の中立軸に対し垂直であるという Euler 梁の仮定をおくと、自由膨張時の端部変位 $U(\eta)$ は次のように書ける¹²³⁾。

$$N_i = E\alpha \int_{-w/2}^{+w/2} T d\eta; \quad M_i = E\alpha \int_{-w/2}^{+w/2} T\eta d\eta \quad (3.46)$$

$$U(\eta) = \frac{H}{2E} \left\{ \frac{BN_i}{A} + \frac{BM_i}{I} \cdot \eta \right\} \quad (3.47)$$

ここに、 N_i および M_i は等価な熱変形を生じさせるために加えるべき軸力、モーメントと考えることができる。この式より、Euler 梁の仮定をおくと、 $U(\eta)$ は $T(\eta)$ の分布にかかわらず常に幅方向位置 η の 1 次関数であることがわかる (図 3.17)。これが梁の理論を適用することによる制約であるが、これに起因する誤差が小さいことは有限要素解析により確認している。

ここで、 $T(\eta)$ が平均温度からの偏差であるとの条件、すなわち

$$\int_{-w/2}^{+w/2} T d\eta = 0 \quad (3.48)$$

を適用すると、式(3.46)、(3.47)は次のように書き直すことができる。

$$N_i = 0; \quad U(\eta) = \frac{H}{2E} \left\{ \frac{BM_i}{I} \cdot \eta \right\} \quad (3.49)$$

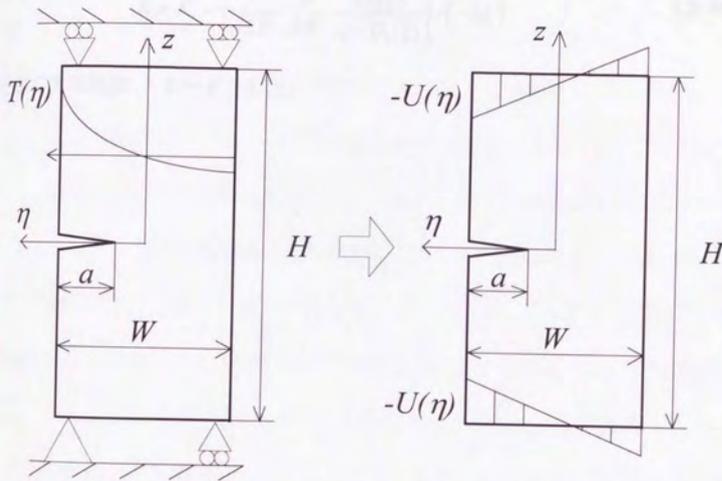


図 3.17 片側き裂梁の熱応力問題と変位境界問題

端面を回転拘束することは、自由膨張の状態の片側き裂梁の端面に変位 ($-U(\eta)$) を与えることに他ならない。以上、式(3.45)、(3.49)により、先に求めた熱変形相当モーメント $M_u = M_l$ であり、求める片側き裂梁の熱応力問題に対するK値は次式にて計算できる。

$$K = K_r = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2E}} \cdot \frac{H}{BW} \cdot \frac{D_1(\xi)}{\sqrt{-D_0(\xi)}} \right\} \cdot (-M_l) \quad (3.50)$$

平面応力問題故、 $E' = E$ とした。

3.6 結 言

円筒環状き裂を念頭に置き、断面形状の類似性、および破壊力学の基本部材であることより、片側き裂板の熱応力下応力拡大係数基本特性を検討すべく、本章にて片側き裂板の熱応力下応力拡大係数評価法を導いた。片側き裂板の端部は拘束され、温度はその幅方向に一次的に分布するものとした。

まず3.2節にて典型的な温度分布に対するK値を有限要素解析・変位法により求め、導くK値評価式が備えるべき仕様を絞り込んだ。これにより、平均温度からの偏差に対応する線形温度分布下のK値がアスペクト比 H/W によってはき裂が長くなるにつれK値が極大値を示すことがわかった。これは引張・純曲げ下の片側き裂板のK値とは異なる特性である。そこで、導くK値評価法の仕様として、平均温度からの偏差に対応する任意の熱応力分布に対し計算可能であること、およびアスペクト比の影響が評価可能であること、と定めた。

次に3.3節にて、き裂先端の特異性に注目すると、この熱応力問題のK値が自由膨張時の変位を打ち消す変位を与える変位境界問題のK値 K_r として求めることができる点を説明し、続いて3.4節にて片側き裂板変位境界問題のK値 K_r の評価法を開発した。すなわち、 K_r を重み関数法により求めるものとし、片側き裂板の変位境界問題重み関数を導く一般的な手法を開発した。この重み関数を用いてK値を計算した場合、ガイドラインとしてアスペクト比 $H/W > 1.5$ ・無次元き裂長さ $a/W > 0.2$ に対し誤差2%以下が期待できることを示した。また、本来この手法の適用範囲外である、Saint-Venantの原理があやしくなる場合に対しても、

実用上十分な精度が得られることを示した。その後、この手法を一般の板構造に適用できるように拡張した。

最後に3.5節にて導いた重み関数を用い、片側き裂板の熱応力下K値評価式を導いた。得られたK値評価式によれば、板幅方向の温度分布から定まる熱変形相当モーメント M_T のみ求めれば所用のK値が得られ、過渡的な温度変化を受ける問題においても温度場解析のみによって刻々のK値変化を求めることが可能になる。

参考文献

- [113] 例えば、Fung, Y. C., *Foundations of Solid Mechanics*, (1965), Prentice-Hall Inc.
- [114] 岡村弘之、線形破壊力学入門、(1976)、培風館、p. 90.
- [115] 高橋淳、エネルギー原理に基づく構造物の線形および非線形破壊力学解析に関する研究、東京大学学位論文(1991).
- [116] Tada, H., Paris, P.C. and Irwin, G.R., *The Stress Analysis of Cracks Handbook(2nd ed.)*, (1985), Del Research Corporation, Penn.
- [117] Rooke, D.P. and Cartwright, D.J., *Compendium of Stress Intensity Factors*, (1976), Her Majesty's Stationery Office, London.
- [118] Sih, G. C., *Handbook of Stress Intensity Factors*, (1973), Institute of Fracture and Solid Mechanics, Lehigh University
- [119] Murakami, Y. et al., *Stress Intensity Factors Handbook*, (1987), Pergamon Press, London.
- [120] Torvik, P. J., On the Determination of Stresses, Displacements, and Stress-Intensity Factors in Edge-Cracked Sheets with Mixed Boundary Conditions, *Trans. ASME Ser. E, J. Appl. Mech.*, Vol. 46, (1979), pp. 611-617.
- [121] Bowie, O.L. and Freese, C.E., Cracked-Rectangular Sheet with Linearly Varying End Displacements, *Eng. Fract. Mech.*, Vol. 14, (1981), pp. 519-526.
- [122] Isida, M., Effect of Width and Length on Stress Intensity Factors of Internally Cracked Plates Under Various Boundary Conditions, *Int. J. Fract. Mech.*, Vol. 7, No. 3, (1971), pp. 301-316.

3 片側き裂板の熱応力下応力拡大係数評価法の開発

- [123] Boley, B. A. and Weiner, J. H., *Theory of Thermal Stress*, 1st edn., (1960),
John Wiley & Sons, New York.

THE HISTORY OF THE UNITED STATES OF AMERICA

CHAPTER I

THE DISCOVERY OF AMERICA

THE EARLY SETTLEMENTS

THE REVOLUTION

THE CONSTITUTION

THE WESTERN EXPANSION

THE CIVIL WAR

THE RECONSTRUCTION

THE GROWTH OF THE NATION

THE PRESENT

THE FUTURE

THE CONCLUSION

THE END

THE HISTORY OF THE UNITED STATES OF AMERICA

THE HISTORY OF THE UNITED STATES OF AMERICA

THE HISTORY OF THE UNITED STATES OF AMERICA

4 円筒環状き裂の熱応力下応力拡大係数簡便評価式の導出

4.1 緒言

本章にて圧力容器のき裂を扱うにあたっての基本となる円筒環状き裂の熱応力下応力拡大係数（K値）簡便評価式を導出する。円筒は端部を回転拘束され、温度はその半径方向に一次的に分布するものとした。

まず4.2節にて、端部を回転拘束された円筒環状き裂の一樣・線形熱応力下のK値を有限要素解析・変位法により求め、導くK値評価式が備えるべき仕様を絞り込む。

次に4.3節にて、まず基本となる環状き裂を有する有限長円筒が端部に軸対称曲げを受ける場合のK値簡便計算式を求め、この式をもとに端面を回転拘束された円筒環状き裂の熱応力下K値を求める簡便評価式を導く。そして、このK値評価式は円筒の長さの影響、環状き裂の円筒長さ方向における位置の影響を評価することが出来るものとする。

最後に、4.4節にてまとめを行う。

4.2 有限要素解析による円筒環状き裂熱応力下K値

一般に任意の熱応力分布は平均熱応力と、平均熱応力からの偏差成分に分解して考えることができる。ここでは平均熱応力に対応し平均温度($-\Delta T$)に基づく熱応力を、そして平均熱応力からの偏差に基づく応力に対応し平均値零、内外面温度差 $2\Delta T$ の線形温度分布に対応する熱応力を検討した(図4.1)。以下この熱応力を、各々「一様熱応力」「線形熱応力」と称する。

有限要素解析ではき裂まわりを三角形要素、他は四角形要素を使用した。いずれも二次要素である。要素数は円筒断面のアスペクト比 H/W 、無次元き裂長さ a/W にもよるが、100~700程度の要素を使用した。K値の評価は変位法によった。

片側き裂梁に対する検討同様、円筒長さ H の影響についても合わせて考えることにした。肉厚 $W=10$ mm、内半径 $R_i=10, 50, 100$ mm、長さ $H=10, 20, 40, 100, 1000$ mmの円筒につき、各々無次元き裂長さ $a/W=0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6$ の計算を行った。いずれも材料のヤング率 $E=21\,000$ kg/mm²、線膨張係数 $\alpha=1.0 \times 10^{-5}$ 1/°C、ポアソン比 $\nu=0.3$ とした。また、温度差 $\Delta T=50$ °Cとした。

いずれもき裂は円筒軸方向の中央に存在するとして計算を行った。

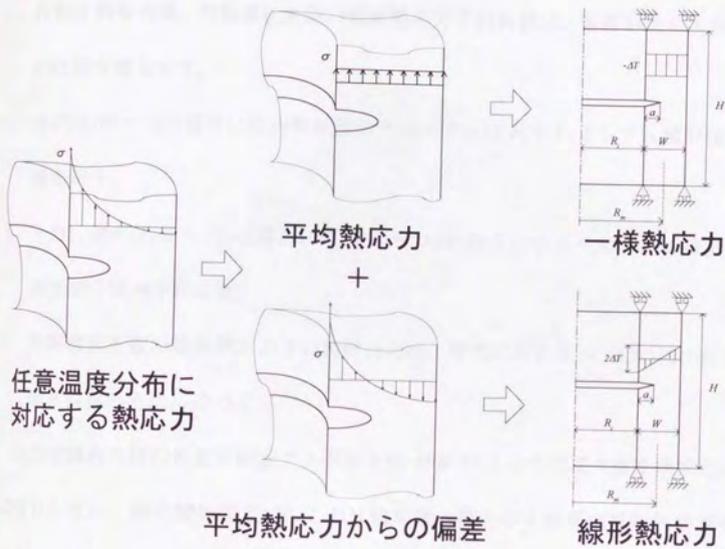


図 4.1 円筒の一様・線形熱応力

4.2.1 線形熱応力下のK値

図 4.2、図 4.3、図 4.4に各々 $R/W = 1, 5, 10$ の円筒環状き裂の線形熱応力下の無次元K値を示す。これより次のことがわかる。

1. 片側き裂梁同様、円筒環状き裂の線形熱応力下のK値は、き裂が長くなるにつれ極大値を示す。
2. 厚肉($R/W = 1$)の場合には円筒断面のアスペクト比 H/W によらずK値が極大値を示す。
3. 一方、薄肉($R/W = 10$)の場合には $W/H = 1/100$ 程度に小さくなるとK値が単調増加の傾向を示した。
4. 円筒環状き裂の線形熱応力下のK値分布は、薄肉になる($R/W \rightarrow$ 大)につれ片側き裂梁のそれに近づく。

ここで薄肉円筒のK値が断面アスペクト比 H/W によっては極大値を示すことに注目したい。研究開始時点ではこのK値が極大値を示す性質は厚肉円筒固有のものであるという見込みでスタートしたわけだが、今回の検討結果よりこれから導くK値評価式は「薄肉円筒を対象」とし、「円筒長さの影響が評価できるもの」とする必要があることがわかった。

4 円筒環状き裂の熱応力下応力拡大係数簡便評価式の導出

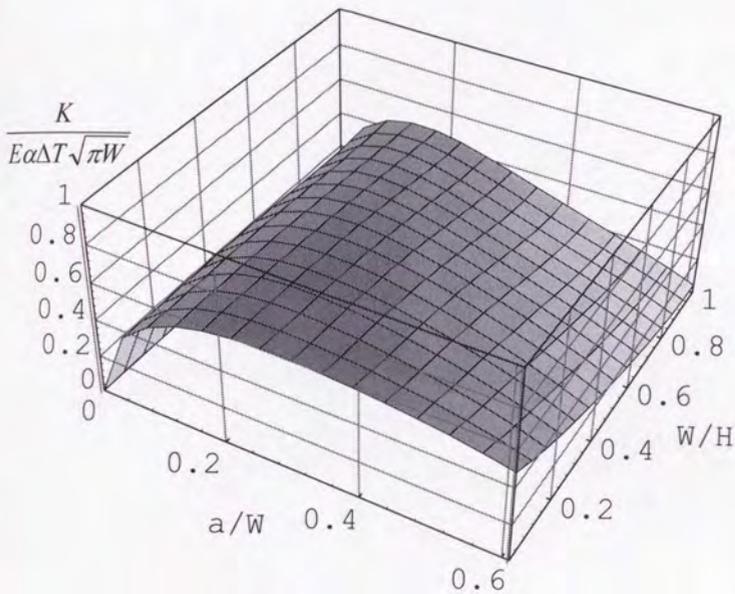


図 4.2 有限要素解析による線形熱応力下の円筒環状き裂の無次元K値

($R/W=1$)

4 円筒環状き裂の熱応力下応力拡大係数簡便評価式の導出

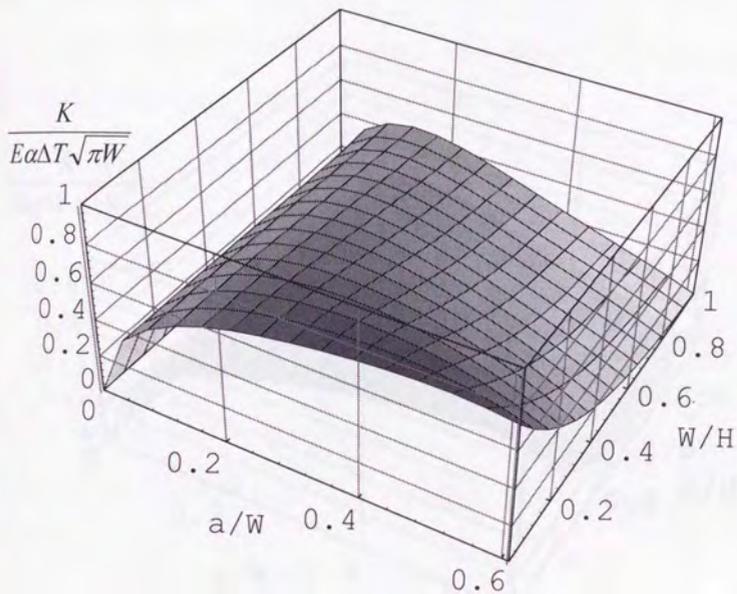


図 4.3 有限要素解析による線形熱応力下の円筒環状き裂の無次元K値

($R/W=5$)

4 円筒環状き裂の熱応力下応力拡大係数簡便評価式の導出

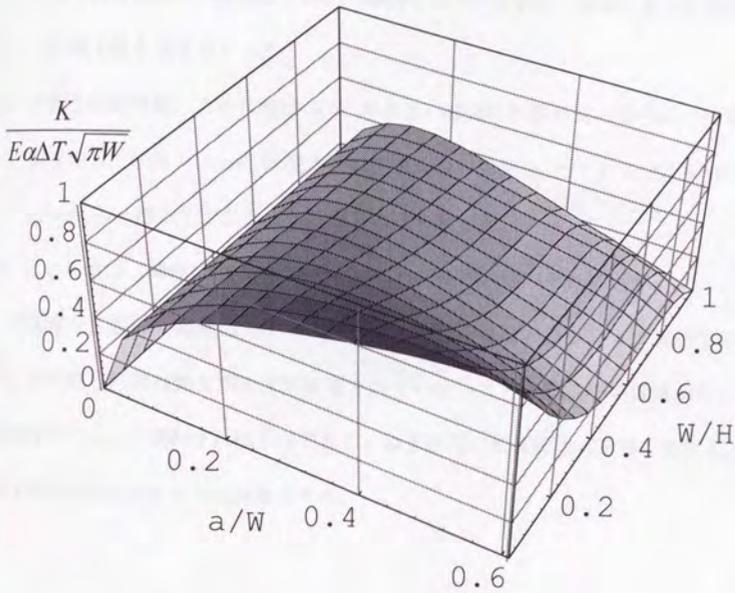


図 4.4 有限要素解析による線形熱応力下の円筒環状き裂の無次元K値

($R/W=10$)

4.2.2 一様熱応力下のK値

図 4.5、図 4.6、図 4.7に各々 $R/W=1, 5, 10$ の円筒環状き裂の一様熱応力下の無次元K値を示す。これより次のことがわかる。

1. 片側き裂梁同様、円筒環状き裂の一様熱応力下のK値は、き裂が長くなるにつれ極大値を示さなかった。
2. 片側き裂梁同様、このK値は W/H が小さい場合にき裂が長くなるにつれ単調増加し、 $W/H = 1/100$ 程度で回転拘束がない円筒を $\sigma_0 = E \alpha \Delta T = 10.5 \text{ kg/mm}^2$ の一様応力で引張った結果とほぼ一致した。
3. このK値は、薄肉になる($R/W \rightarrow$ 大)につれ片側き裂梁のそれに近づく。

円筒環状き裂の一様熱応力下のK値が極大値を示さないこと、また実用上の多くの問題で円筒は軸方向に変形拘束されていないことより、平均温度からの偏差成分について検討すれば十分であり、以下所用のK値評価式を導く際にも、断面平均温度を零のものを対象とする。

4 円筒環状き裂の熱応力下応力拡大係数簡便評価式の導出

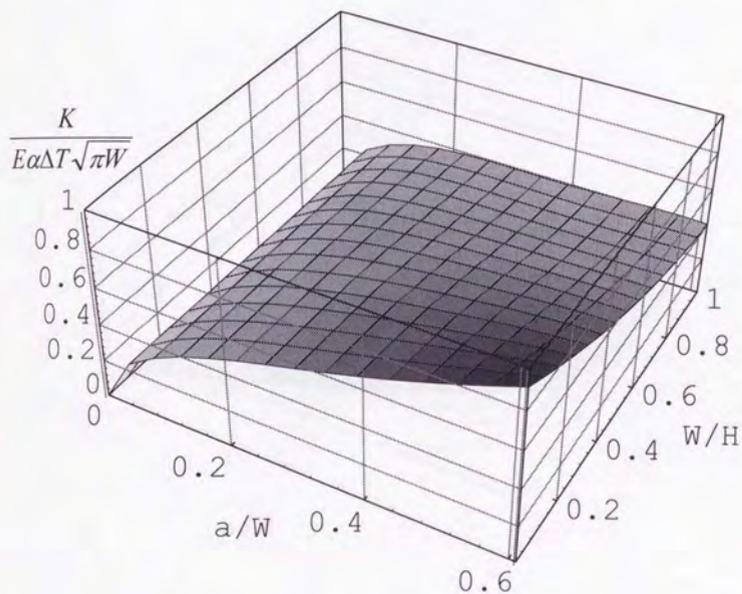


図 4.5 有限要素解析による一様熱応力下の円筒環状き裂の無次元K値
($R/W=1$)

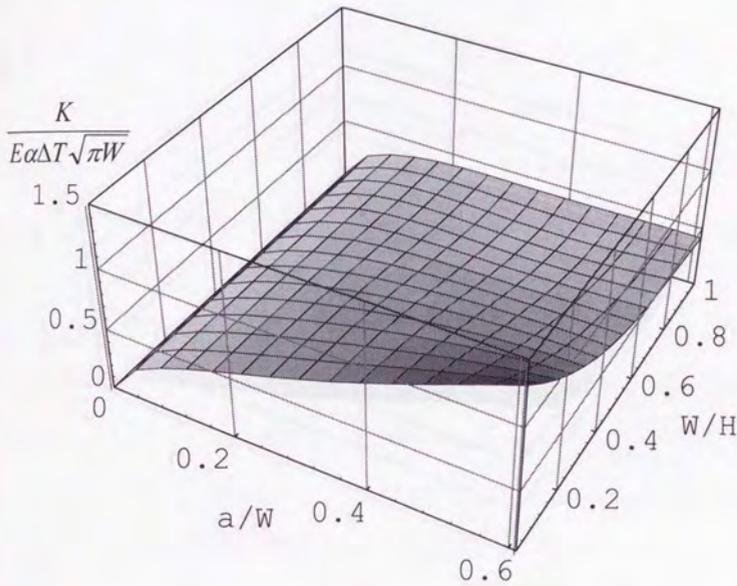


図 4.6 有限要素解析による一様熱応力下の円筒環状き裂の無次元K値
($R/W=5$)

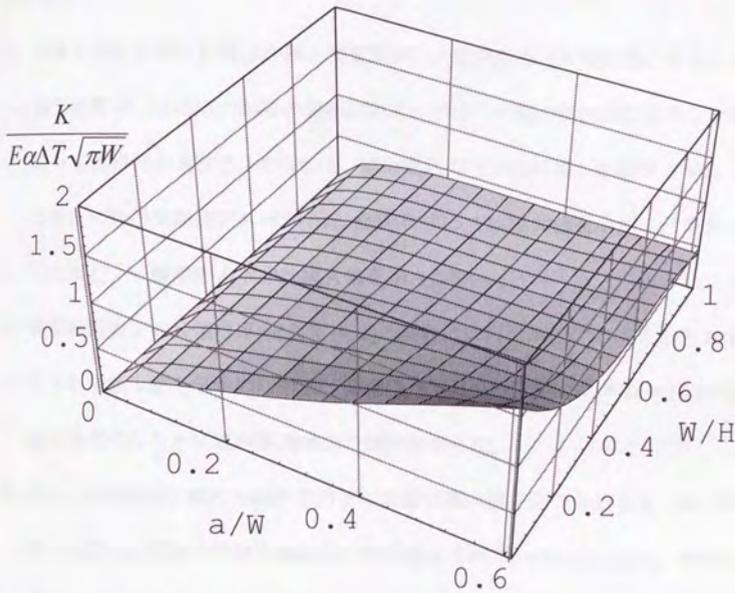


図 4.7 有限要素解析による一様熱応力下の円筒環状き裂の無次元K値

($R/W=10$)

4.2.3 有限要素解析まとめ

端部を回転拘束された円筒環状き裂の一樣・線形熱応力下のK値を有限要素解析・変位法により求め、片側き裂梁に対する計算結果と比較し、次のことがわかった。

1. 円筒の環状き裂のK値は片側き裂梁同様、一樣熱応力（平均応力に対応）と線形熱応力（平均応力からの偏差に対応）では、K値の無次元き裂長さ a/W に対する特性が異なる。すなわち、線形熱応力下ではK値がき裂長さが長くなるにつれ円筒断面アスペクト比 H/W によっては極大値を示すことがあるのに対し、一樣熱応力下では極大値を示さない。
2. 線形熱応力下のK値は厚肉($R/W = 1$)の場合には円筒断面アスペクト比 H/W によらず極大値を示すのに対し、薄肉($R/W = 10$)の場合には $W/H = 1/100$ 程度に小さくなるとK値が単調増加の傾向を示した。
3. 以上、円筒環状き裂の一樣熱応力下のK値が極大値を示さないこと、また実用上の多くの問題で円筒は軸方向に変形拘束されていないことより、平均温度からの偏差成分について検討すれば十分であり、以下所用のK値評価式を導く際にも、断面平均温度を零のものを対象とする。また、これから導くK値評価式は「薄肉円筒を対象」とし、「円筒長さの影響が評価できるもの」とする必要がある。

4.3 円筒環状き裂の熱応力下のK値計算法

有限要素法をはじめとする各種数値解析法の急速な発達とともに、より実際に近い形状のき裂の応力拡大係数（K値）が計算され、ハンドブック等の形でデータが蓄積されつつある^{[124] - [127]}。例えば、円筒内面の表面き裂などがこれにあたる。しかしながら、この円筒内面の表面き裂の場合、実用上重要と思われるが、検討された荷重の種類については十分とは言えず、特に熱応力の影響も考慮に入れたデータまでは完備する段階には至っていない。

また、円筒を扱う場合にはその長さの影響について記述がなく、無限円筒のデータが記載されるのが一般的である。これは軸方向のき裂を扱う場合には大きな問題とならないと考えられる。しかしながら、周方向のき裂を扱う場合には軸対称曲げを考えればわかるように円筒固有の変形に対する抵抗が働くので、端部に曲げ荷重を負荷する場合にはK値に円筒の長さの影響が出てくると予想される。そして実際の円筒においては端部において何らかの回転拘束が加えられている場合が多いことを考えるとき、実用上この問題は重要であると思われる。

そこで、本研究では端部で回転拘束を受ける円筒の内表面き裂の熱応力下のK値について検討することにした。き裂形状については最大熱応力が軸方向に発生することより周方向環状き裂とし、軸対称問題につき円筒の長さの影響を含んだ形で実用上十分な精度を有すると思われる熱応力下K値の簡便計算式を理論的に導いた。

具体的には、はじめに本研究を進めるにあたっての着眼点、基本的な考え方を述べ、続いて基本となる周方向環状き裂を有する円筒が軸対称曲げ外力を受ける場合のK値の近似計算式を導く。なお、き裂の位置はまず円筒長さの中央位置にあるとして議論を進め、最後に任意位置に適用できるよう理論を拡張する。

4.3.1 着眼点と考え方

ここでは目標とするK値簡便評価式を導くにあたっての着眼点、基本的な考え方について述べる。

まず「薄肉円筒の軸対称曲げ問題は弾性支持梁の問題として扱うことができる」という事実がある。具体的には、図 4.8左に示す端部で周方向単位長さ当り M_1 、 M_2 の軸対称曲げモーメントを受ける円筒の曲げ問題は、弾性支持梁問題の支配方程式とのアナログより、次の式で求まるバネ定数 k のバネで弾性支持され、形式的に曲げ剛性 EI を $D = EW^3/12(1-\nu^2)$ としたときの梁が端部で単位長さ当りの曲げモーメント M_1 、 M_2 を受ける図 4.8右の問題に置き換えることができる^[128]。

$$k = 4\beta^4 D; \beta^4 = \frac{EW}{4R_m^2 D} \quad (4.1)$$

ここに、 R_m : 平均半径、 W : 肉厚、 E : ヤング率、 ν : ポアッソン比、である。 β は長さの逆数の次元を有する。

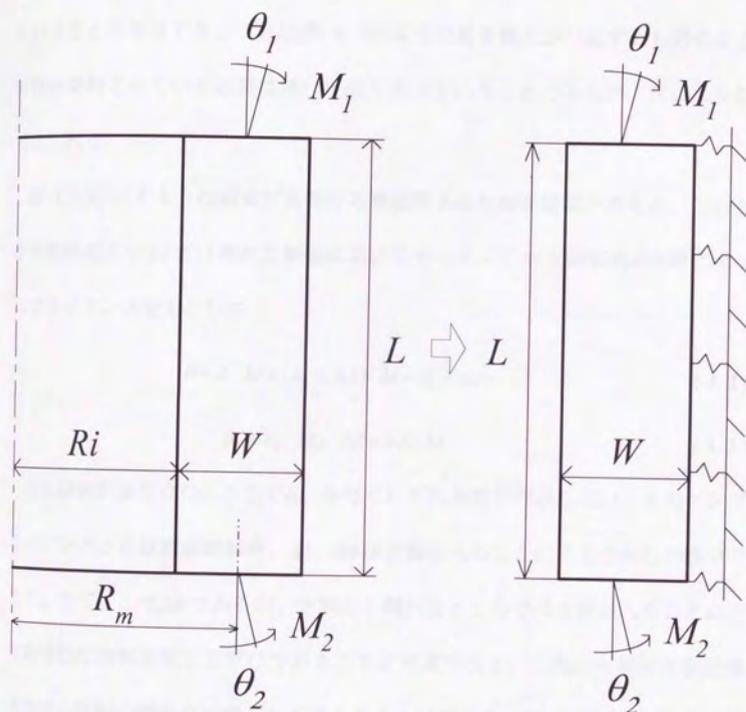


図 4.8 円筒の軸対称曲げ問題の弾性支持梁問題への置き換え

4 円筒環状き裂の熱応力下応力拡大係数簡便評価式の導出

次に「き裂を有する梁が長手方向に分布する曲げモーメントを受けるとき、その変形は、近似的に二本の梁がき裂部で長さの無い適切なコンプライアンス（バネ定数の逆数）を有する回転バネで接続された問題として扱うことができる」ということに注目する。これは図 4.9 のような置き換えが（必ずしも図のように弾性支持されている必要は無い）成り立つということであるが、次のように考えられる。

図 4.10 に示すような純曲げを受ける単位厚さの片側き裂梁を考える。このときき裂断面より $l/2$ だけ離れた断面においてモーメント M と回転角 θ の間にはコンプライアンスを λ として

$$\theta = \lambda \cdot M = (\lambda_0 + \Delta\lambda) \cdot M = \theta_0 + \Delta\theta \quad (4.2)$$

$$\theta_0 = \lambda_0 \cdot M, \quad \Delta\theta = \Delta\lambda \cdot M \quad (4.3)$$

なる関係が成り立つ。ここで λ_0 、 θ_0 はそれぞれき裂が存在しないときのコンプライアンスと当該断面回転角、 $\Delta\lambda$ 、 $\Delta\theta$ はき裂が入ることによるそれらの増分である。さてここで $\Delta\theta$ であるが、き裂から離れたところではき裂が入ることにより剛体的な回転が生じるだけであることを考慮すると、これは大部分き裂近傍断面での回転の増分の反映として考えることができる。従ってき裂断面 ($l=0$) では $\theta_0=0$ であることも考慮すると、き裂の存在による変形に対する効果は、き裂を、純曲げを受ける無限長片側き裂梁におけるコンプライアンスの増分として与えられる $\Delta\lambda$ ($\xi = a/W$ 、 W には依存するが、 l には依存しない) をコンプライアンスとして有する回転バネで置き換えることにより近似的に扱えることになる。そしてこのように考えるとき、長手方向に分布する曲げモーメントを

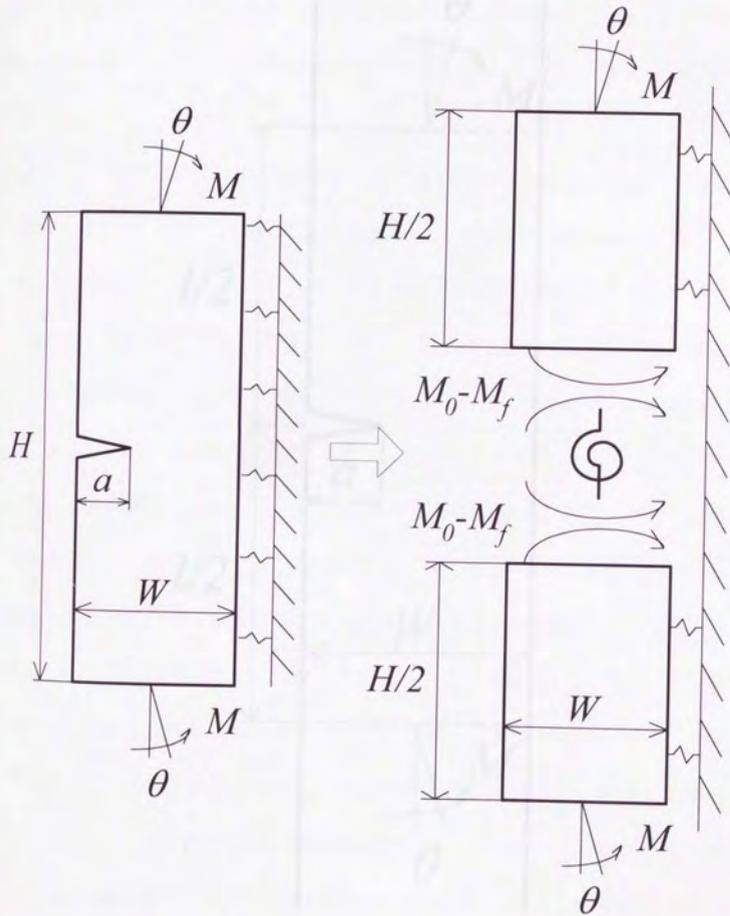


図 4.9 き裂部の回転バネによる置き換え

4 円筒環状き裂の熱応力下応力拡大係数簡便評価式の導出

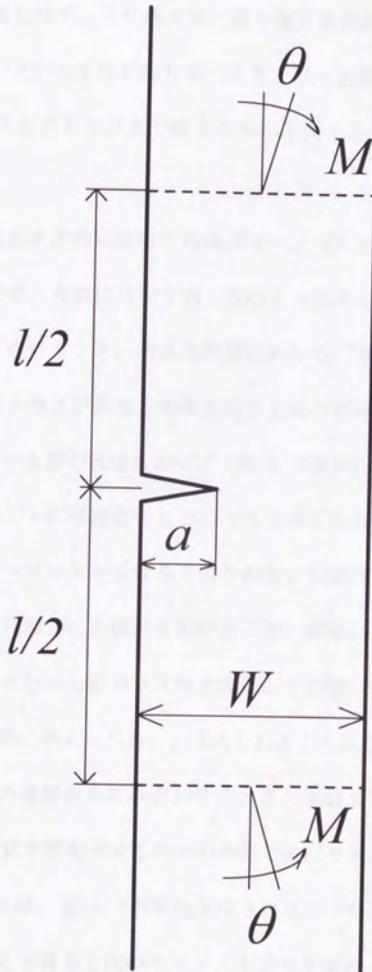


図 4.10 純曲げ下の片側き裂梁

受ける片側き裂梁であっても、き裂を含む近傍で長手方向のモーメント分布がその範囲で符号が変化せず、その最大値と最小値の差が絶対値において最小値に比べて十分小さいという条件が成り立つとき、第一近似的にき裂の存在は ΔL のコンプライアンスを有するバネで扱えるものと考えられることとなる¹²⁹⁾、¹³⁰⁾。

ここで述べたのは長手方向に分布する曲げモーメントを受ける片側き裂梁の変形についてであるが、K値については、次のように考えられる。上のようなバネによる置き換えを行うとき、考える問題におけるバネ部に生じるモーメントが求まり、その置き換えが妥当と判断される上述の条件の下では、その値はバネに置き換える前のき裂の状態において(図 4.10参照)、 $l/2$ が小さい断面において生じるモーメントにほぼ近いものになると考えられる。従って「長手方向に分布する曲げモーメントを受ける片側き裂梁のK値は、バネ部に生じる曲げモーメントとして評価された値がき裂断面に近い断面に曲げモーメントとして作用する場合の、すなわち結局は片側き裂梁がその値の純曲げを受ける場合のK値によって近似的に与えられる」と考えられることになる。

以上述べてきた三つの着眼点を組み合わせるとき、本論文で基本となるのは図 4.11に示すような環状き裂を有する円筒が端部で曲げモーメントを受ける場合のK値であるが、それは、図 4.9の弾性支持された二つの梁を回転バネで接続したモデルに置き換えて長手方向のモーメント分布を求め、バネ部のモーメントに等しいモーメントが働く純曲げ下の片側き裂梁のK値として近似的に求まることになる。

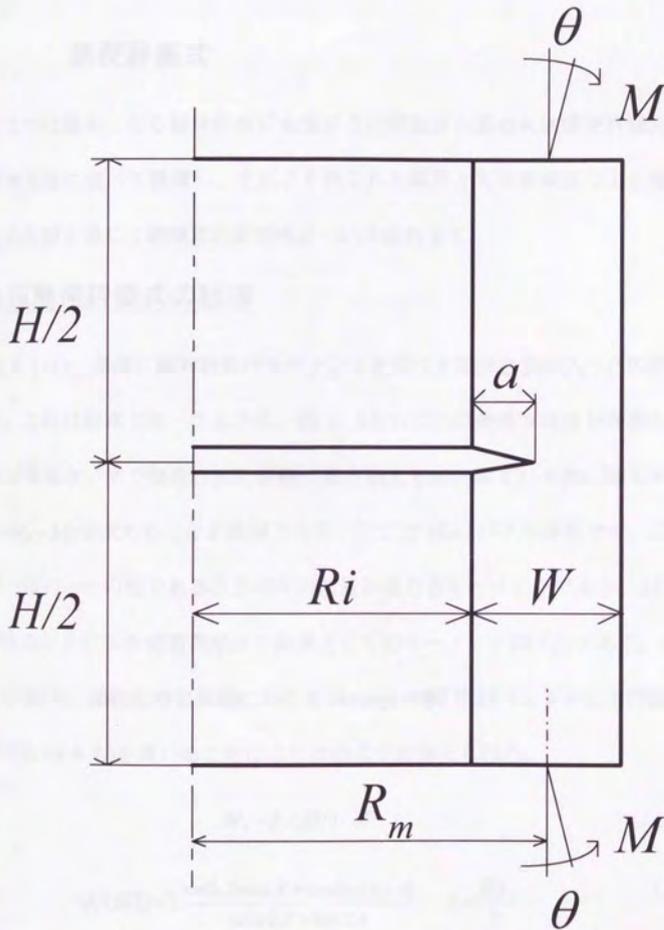


図 4.11 軸対称曲げを受ける環状き裂を有する円筒

4.3.2 軸対称曲げを受ける円筒環状き裂のK値

簡便評価式

ここでは基本となる軸対称曲げを受ける円筒環状き裂のK値簡便評価式を前項の考え方に従って誘導し、それより得られる結果と有限要素法による解析結果との比較を通じて簡便式の妥当性について検討する。

K値簡便評価式の誘導

図 4.11の、端部に軸対称曲げモーメントを受ける環状き裂の入った円筒を考える。これは前章で述べたように、図 4.9右の二つの弾性支持梁がき裂の存在とほぼ等価なバネで接合された問題に置き換えられ、まずバネ部に働くモーメント($M_0 - M_f$)を求めることが課題となる。ここで M_0 はバネが存在せず、二つの梁が一体の一つの梁であるときバネの位置に生じるモーメントであり、 M_f はバネが入ることによる荷重再配分の結果としてのモーメント低下分である。

さて M_0 は、弾性支持梁問題における Hetényi の解¹³¹⁾より、 β として円筒問題に対する式(4.1)を用いることにより次のように与えられる。

$$M_0 = \phi_f(\beta H) \cdot M \quad (4.4)$$

$$\phi_f(\beta H) = 2 \frac{\sinh A \cos A + \cosh A \sin A}{\sinh 2A + \sin 2A} ; A = \frac{\beta H}{2} \quad (4.5)$$

M_f については、図 4.9右においてバネの回転角の半分は弾性支持された長さ $H/2$ の梁のバネ側端面に M_f を作用させたときの作用面の回転角に等しいので

4 円筒環状き裂の熱応力下応力拡大係数簡便評価式の導出

$$\Delta\lambda \cdot (M_0 - M_f) = \lambda_{bf} \cdot M_f \quad (4.6)$$

が成り立つ。ここで $\Delta\lambda$ は回転バネのコンプライアンス、 λ_{bf} は、一端にモーメントを受け、他端自由の場合の荷重端の弾性支持梁に関するコンプライアンスであり、Hetényiによるもの¹³¹⁾を円筒用に書き直すことにより次のように与えられる。

$$\lambda_{bf}(\beta H) = \frac{1}{\beta D} \cdot \frac{\sinh B + \sin B}{\cosh B + \cos B - 2} ; B = \beta H \quad (4.7)$$

式(4.6)より

$$\psi_f(\xi, \beta H, \beta W) \equiv \frac{(M_0 - M_f)}{M_0} = \frac{1}{1 + \Delta\lambda / \lambda_{bf}} \quad (4.8)$$

が成り立ち、バネが入ることによるバネ位置モーメントの低下率 ψ_f を用いて($M_0 - M_f$)は

$$(M_0 - M_f) = \psi_f \cdot M_0 = \psi_f \cdot (\phi_f \cdot M) \quad (4.9)$$

と与えられる。

K値については式(4.9)の($M_0 - M_f$)を受ける片側き裂梁の純曲げに対するK値として求めればよいので、次式により与えられることになる。

$$K_M = \phi_f(\beta H) \cdot \psi_f(\xi, \beta H, \beta W) \cdot \left\{ \frac{M}{Z} \sqrt{\pi a} \cdot F_M(\xi) \right\} \quad (4.10)$$

ただし{ }内は片側き裂梁の純曲げ下のK値、 F_M は有限幅補正関数であり、 Z は梁の断面定数 $Z = W^2/6$ である。

なおここでは軸対称曲げを受ける円筒環状き裂のK値として式(4.10)を与えたわけであるが、 D を EI に置き換え、 β として $\beta^4 = k/4EI$ より求まるものを用い

るとき、当然それは、バネ定数 k のバネで弾性支持梁された片側き裂梁が端部で曲げモーメントを受けるときの K 値となり、Parmerter が求めたもの^{1132), 1133)} に一致することを付言しておく。

有限要素解析結果との比較

式(4.10)の妥当性を確認するため軸対称有限要素解析を行った。この種の解析で行われるように、端部に曲げモーメントをかける代わりに、等価な K 値を与える、き裂が存在しないときき裂相当面に生じるモーメント ($M_0 = \phi \cdot M$) に対応する表面力を打ち消すような表面力をき裂面にかける解析を行い、変位法によって K 値を評価した。

この解析結果 K_{FEM} と式(4.10)による結果 K_{THEORY} が βH をパラメータにして図 4.12、表 4.1 に比較してある。式(4.10)は薄肉円筒理論に基づくものであるが、薄肉円筒という制約を越えると思われる範囲の R_m/W 、 H/W (例えば、 $R_m/W = 5.5$ 、 $H/W = 2$) に対しても両者は実用上十分な程度に一致しており、実際の使用にあたってのその適用範囲は広いようである。適用範囲の目安を得るために、さらに厚肉の $R/W = 1$ についても同様の検討を行った結果を表 4.2 に示す。これによると、導いた評価式による K 値は有限要素解析・変位法による K 値と 20% 程度の差があり、実際の適用の目安としては $R/W = 5$ が下限と考えられる。

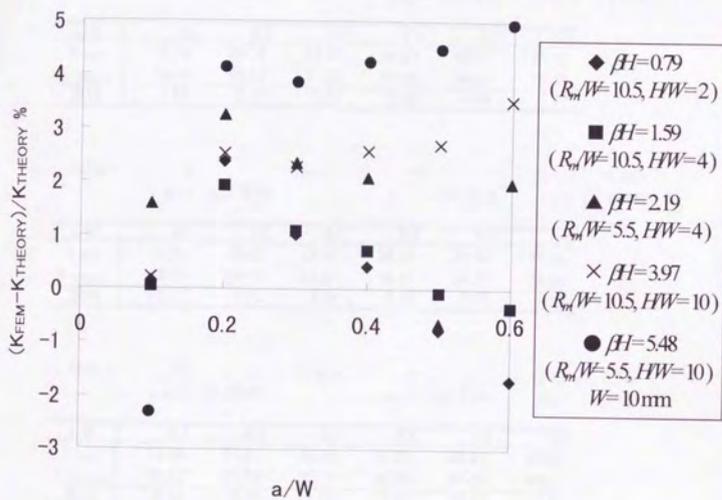


図 4.12 円筒内面環状き裂の軸対称曲げに対する理論式・有限要素解析

によるK値比較

(き裂面に表面力を与える計算)

表 4.1 円筒内面環状き裂の軸対称曲げに対するK値比較

(き裂面上に表面力を与える計算: $R_m/W = 5.5, 10.5$)

$E =$	21000 kg/mm ²		$\nu =$	0.3	
$W =$	10 mm		$2\Delta\sigma =$	21 kg/mm ²	
$R_i/W =$	5		$H/W =$	4	
	$\sigma_1 = 10.81818$			$\sigma_o = -10.1818$	
			$\beta H =$	2.192	
			$M_o =$	174.0	

a/W	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
K_{FEM}	19.34	26.76	32.57	38.67	43.97	51.43
K_{THEORY}	19.04	25.92	31.83	37.88	44.25	50.43
差%	1.59	3.25	2.34	2.08	-0.64	1.97

$R_i/W =$	5		$H/W =$	10	
	$\sigma_1 = 10.81818$			$\sigma_o = -10.1818$	
			$\beta H =$	5.481	
			$M_o =$	174.0	

a/W	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
K_{FEM}	18.24	25.15	28.50	30.72	31.68	31.30
K_{THEORY}	18.67	24.15	27.44	29.47	30.32	29.83
差%	-2.31	4.13	3.85	4.23	4.48	4.94

$R_i/W =$	10		$H/W =$	2	
	$\sigma_1 = 10.66667$			$\sigma_o = -10.3333$	
			$\beta H =$	0.793	
			$M_o =$	174.7	

a/W	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
K_{FEM}	19.36	27.81	35.54	45.69	59.91	82.58
K_{THEORY}	19.33	27.16	35.18	45.50	60.38	84.01
差%	0.14	2.38	1.01	0.41	-0.77	-1.71

$R_i/W =$	10		$H/W =$	4	
	$\sigma_1 = 10.66667$			$\sigma_o = -10.3333$	
			$\beta H =$	1.587	
			$M_o =$	174.7	

a/W	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
K_{FEM}	19.28	27.35	34.59	43.45	54.83	70.71
K_{THEORY}	19.27	26.83	34.22	43.14	54.88	70.96
差%	0.05	1.92	1.09	0.72	-0.09	-0.35

$R_i/W =$	10		$H/W =$	10	
	$\sigma_1 = 10.66667$			$\sigma_o = -10.3333$	
			$\beta H =$	3.967	
			$M_o =$	174.7	

a/W	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
K_{FEM}	18.98	25.78	30.37	34.34	37.43	39.43
K_{THEORY}	18.94	25.15	29.69	33.48	36.45	38.09
差%	0.23	2.52	2.28	2.57	2.70	3.52

表 4.2 円筒内面環状き裂の軸対称曲げに対するK値比較

(き裂面上に表面力を与える計算: $R_m/W = 1.5$)

$E =$	21000 kg/mm ²	$\nu =$	0.3		
$W =$	10 mm	$2\Delta\sigma =$	21 kg/mm ²		
$R_i/W =$	1	$H/W =$	1	$\beta H =$	1.050
	$\sigma_i = 11.66667$		$\sigma_o = -9.33333$	$M_0 =$	162.5

a/W	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
K_{FEM}	20.83	30.21	37.74	45.76	54.59	66.85
K_{THEORY}	17.93	25.03	32.03	40.61	52.15	68.49
差%	16.14	20.71	17.83	12.67	4.67	-2.40

$R_i/W =$	1	$H/W =$	4	$\beta H =$	4.198
	$\sigma_i = 11.66667$		$\sigma_o = -9.33333$	$M_0 =$	162.5

a/W	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
K_{FEM}	19.41	24.03	25.04	24.85	23.50	21.38
K_{THEORY}	17.00	20.69	21.67	21.26	19.98	18.06
差%	14.17	16.17	15.56	16.88	17.64	18.35

$R_i/W =$	1	$H/W =$	10	$\beta H =$	10.495
	$\sigma_i = 11.66667$		$\sigma_o = -9.33333$	$M_0 =$	162.5

a/W	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
K_{FEM}	19.37	23.84	24.66	24.24	22.76	20.55
K_{THEORY}	16.95	20.49	21.29	20.72	19.32	17.36
差%	14.26	16.35	15.83	16.98	17.79	18.35

また、図 4.13 は $R/W=10$ の計算結果をアスペクト比 H/W をパラメータとして整理したものである。これによれば、軸対称曲げ下の K 値はき裂面上に同じ表面力を与えているにもかかわらずアスペクト比 H/W の影響を受け、かつ短い円筒の K 値が大きくなることがわかる。また、この場合無限円筒に対する評価を行うことは危険側の評価となる。従って、アスペクト比 H/W の影響が適切に評価できる式が得られたことの意義は大きいと考えられる。

なお計算の際に、有限幅の補正係数 F_M 、また、純曲げを受ける無限長梁において、き裂が入ることによるコンプライアンスの増分として与えられるバネのコンプライアンス $\Delta\lambda$ として、それぞれ次の式(4.11)^{[124]~[127]}、(4.12)^[134]を用いた。

$$F_M(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi\xi} \tan \frac{\pi\xi}{2} \cdot \frac{0.923 + 0.199\{1 - \sin(\pi\xi/2)\}^4}{\cos(\pi\xi/2)}} \quad (4.11)$$

$$\Delta\lambda(\xi) = \frac{\pi(1.1215)^2}{2E} \cdot \frac{\xi^2}{(1-\xi)^2(1+2\xi)^2} \times \{1 + \xi(1-\xi)(0.44 + 0.25\xi)\} \left(\frac{6}{W}\right)^2 \quad (4.12)$$

ここで行ったような、外部の境界面に外力を作用させる代わりにき裂面に力を作用させ、所用の K 値評価を行うことはしばしば行われることであるが、円筒の端部曲げの場合梁や板の一樣曲げと異なり、き裂面に作用させる力を考えるときの M_0 は端部での M とは異なり、 M_0 は長さ H の影響を考えねばならないことに注意したい。

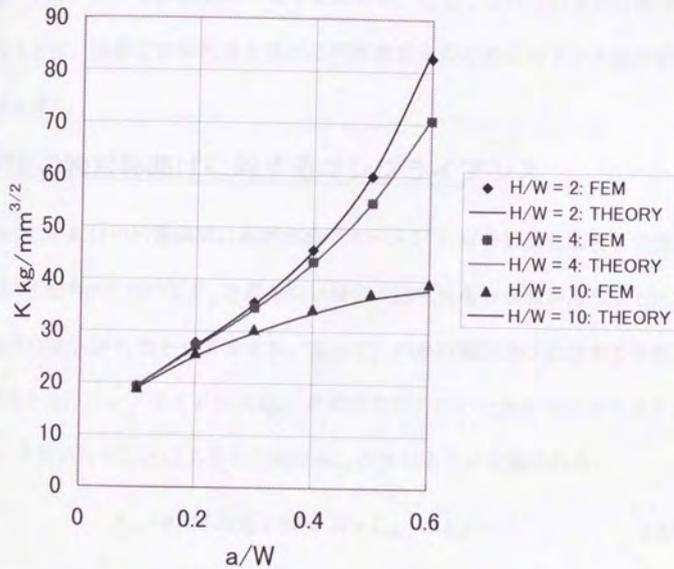


図 4.13 円筒内面環状き裂の軸対称曲げに対する理論式・

有限要素解析によるK値比較

(き裂面に表面力を与える計算 ; $R/W = 10$)

4.3.3 円筒環状き裂の熱応力下K値簡便評価式誘導

ここでは始めに円筒の軸対称曲げに対するコンプライアンスを求め、続いて円筒の熱応力下の自由膨張時の変形を求める。そしてこれらの知見と前項の結果をもとに、端部で回転拘束を受ける円筒環状き裂の熱応力下のK値の簡便評価式を導く。

円筒の軸対称曲げに対するコンプライアンス

さて、図 4.11の円筒端部に軸対称曲げモーメント M を負荷したときに生じる端部の回転角 θ についても、き裂がない場合の回転角 θ_0 とき裂が入ることによる回転角の増分 $\Delta\theta$ の和として表せる。従って、円筒の端部曲げに対するき裂が存在するときのコンプライアンス λ_{cyl} 、き裂が存在しないときのコンプライアンス λ_{cyl0} 、き裂が入ることによるその増分 $\Delta\lambda_{cyl}$ が次のように定義される。

$$\lambda_{cyl} = \theta / M = (\theta_0 + \Delta\theta) / M = \lambda_{cyl0} + \Delta\lambda_{cyl} \quad (4.13)$$

$$\lambda_{cyl0} = \theta_0 / M \quad ; \quad \Delta\lambda_{cyl} = \Delta\theta / M \quad (4.14)$$

き裂がない場合は図 4.8にて $M_1 = M_2 = M$ 、 $\theta_1 = \theta_2 = \theta_0$ 、 $L = H$ とした場合であり、そのコンプライアンスは Hetényi が弾性支持梁に対し導いた結果¹³¹⁾を円筒用書き直し、次式を得る。

$$\lambda_{cyl0} = \frac{1}{\beta D} \cdot \frac{\cosh B - \cos B}{\sinh B + \sin B} \quad ; \quad B = \beta H \quad (4.15)$$

この式において D を EI に置き換え、 β として $\beta^4 = k/4EI$ より定まるものを用いたものが Hetényi による弾性支持梁のコンプライアンスであり、このときには当然、

弾性支持のバネ定数が $k \rightarrow 0$ 、すなわち $B \rightarrow 0$ において、 $H/2EI$ という普通の梁の曲げの場合の値に収束する。

き裂が入ることによるコンプライアンスの増分については次のように考える。き裂をバネによって置き換えた図 4.9 右で考えるとき、バネが入ることにより(すなわちき裂が入ることにより)中央部で M_f だけモーメントは減少する。 $\Delta\theta$ は M_f を反映したものであり、従って図 4.9 の上下二つの弾性支持梁において、バネ側端部に M_f を受け、他端が自由であるときの自由端の回転角として $\Delta\theta$ は求まることになる。式(4.9)より、 M_f は次のように書き直せる。

$$M_f = (1 - \psi_f) \cdot M_0 = (1 - \psi_f) \cdot \phi_f \cdot M \quad (4.16)$$

Hetényi が導いた結果¹³¹⁾を円筒用に書き直し、次式を得る。

$$\frac{\Delta\theta}{M_f} = \frac{1}{BD} \cdot \frac{\sinh A \cos A + \sin A \cosh A}{\sinh^2 A - \sin^2 A} \equiv \lambda_{bf}^* ; A = \frac{BH}{2} \quad (4.17)$$

求めるコンプライアンスの増分 $\Delta\lambda_{cyl}$ は端部のモーメント M に対し定義するので、式(4.16)、(4.17)より次のように求まる。

$$\Delta\lambda_{cyl} = (1 - \psi_f) \cdot \phi_f \cdot \lambda_{bf}^* \quad (4.18)$$

以上、式(4.13)、(4.18)により、円筒の端部曲げに対するコンプライアンス λ_{cyl} は次式にまとめられる。

$$\lambda_{cyl} = \lambda_{cyl0} + (1 - \psi_f) \cdot \phi_f \cdot \lambda_{bf}^* \quad (4.19)$$

式中、 λ_{cyl0} 、 λ_{bf}^* は各々式(4.15)、(4.17)により計算される。

最後に円筒の端部曲げに対するコンプライアンスを今回導いた式(4.15)、(4.17)、(4.19)により計算し、有限要素解析による計算結果とを表 4.3にて比較し

4 円筒環状き裂の熱応力下応力拡大係数簡便評価式の導出

た。表中、 $a/W=0$ における λ_{cyl} が λ_{cyl0} である。今回導いた理論式を用い、実用上十分な精度で円筒の軸対称端部曲げに対するコンプライアンスを計算できることが確認できた。

4 円筒環状き裂の熱応力下応力拡大係数簡便評価式の導出

表 4.3 円筒の端部曲げに対するコンプライアンス

($W = 10 \text{ mm}$, $E = 21\,000 \text{ kg/mm}^2$, $\nu = 0.3$)

	Ri/W = 10		H/W = 10		$\phi_r(\beta H) = 0.153$		
a/W	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
ψ_f	1.000	0.979	0.924	0.840	0.730	0.595	0.441
λ_{bf}^*	0.0000022	0.0000022	0.0000022	0.0000022	0.0000022	0.0000022	0.0000022
$\Delta\lambda_{cyl}$	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000001	0.0000001	0.0000001	0.0000002
λ_{cyl}	0.0000138	0.0000138	0.0000139	0.0000139	0.0000139	0.0000140	0.0000140
λ_{FEM}	0.0000140	0.0000140	0.0000141	0.0000141	0.0000141	0.0000142	0.0000142
差%	-1.32	-1.30	-1.35	-1.40	-1.42	-1.48	-1.54

	Ri/W = 10		H/W = 4		$\phi_r(\beta H) = 0.937$		
a/W	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
ψ_f	1.000	0.996	0.986	0.968	0.940	0.895	0.821
λ_{bf}^*	0.0000774	0.0000774	0.0000774	0.0000774	0.0000774	0.0000774	0.0000774
$\Delta\lambda_{cyl}$	0.0000000	0.0000003	0.0000010	0.0000023	0.0000043	0.0000076	0.0000130
λ_{cyl}	0.0000101	0.0000103	0.0000111	0.0000123	0.0000144	0.0000176	0.0000230
λ_{FEM}	0.0000101	0.0000103	0.0000110	0.0000122	0.0000141	0.0000172	0.0000223
差%	-0.19	0.16	0.59	1.16	1.74	2.47	3.36

	Ri/W = 5		H/W = 4		$\phi_r(\beta H) = 0.797$		
a/W	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
ψ_f	1.000	0.988	0.956	0.904	0.829	0.725	0.586
λ_{bf}^*	0.0000203	0.0000203	0.0000203	0.0000203	0.0000203	0.0000203	0.0000203
$\Delta\lambda_{cyl}$	0.0000000	0.0000002	0.0000007	0.0000015	0.0000028	0.0000045	0.0000067
λ_{cyl}	0.0000093	0.0000095	0.0000100	0.0000108	0.0000120	0.0000137	0.0000160
λ_{FEM}	0.0000093	0.0000095	0.0000100	0.0000108	0.0000120	0.0000136	0.0000158
差%	-0.73	-0.40	-0.00	0.37	0.65	0.87	0.87

(注) $a/W = 0$ における λ_{cyl} が λ_{cyl0} である。

$$\lambda_{cyl} = \lambda_{cyl0} + \Delta\lambda_{cyl}$$

円筒の熱応力下の自由膨張時の変形

端部を回転拘束した円筒の熱応力の問題は、円筒端部が温度分布に基づき自由膨張した後、端部に生じた回転角を零にする端部モーメントを重ね合わせる問題として考えることができる。そこで、円筒の自由膨張時の端部の回転角をまず求めた。

円筒の半径方向に温度が一次的に $T = T(\eta)$ の分布をする場合 (図 4. 14(a) 参照) の変形について考える。実用上の多くの問題で円筒は軸方向に変形拘束されていないことより、平均温度からの偏差成分について検討すれば十分であり、以下 $T(\eta)$ は平均温度からの偏差成分を表すものとする。すなわち、

$$\int_{-W/2}^{W/2} T d\eta = 0 \quad (4. 20)$$

この場合の変形は、Duhamel のアナロジ¹³⁵⁾により図 4. 14(b)に示すように端面に M_i を負荷する場合と、き裂を含む面上に M_i を生じさせる応力分布に対応する表面力 (図 4. 14(c)の実線) が負荷される場合の変形の和と等価である。ここに、薄肉円筒の M_i は次式にて定義される量で、以下熱変形相当モーメントと称する。 α は線膨張係数である。

$$M_i = \frac{E\alpha}{1-\nu} \int_{-W/2}^{W/2} T\eta d\eta \quad (4. 21)$$

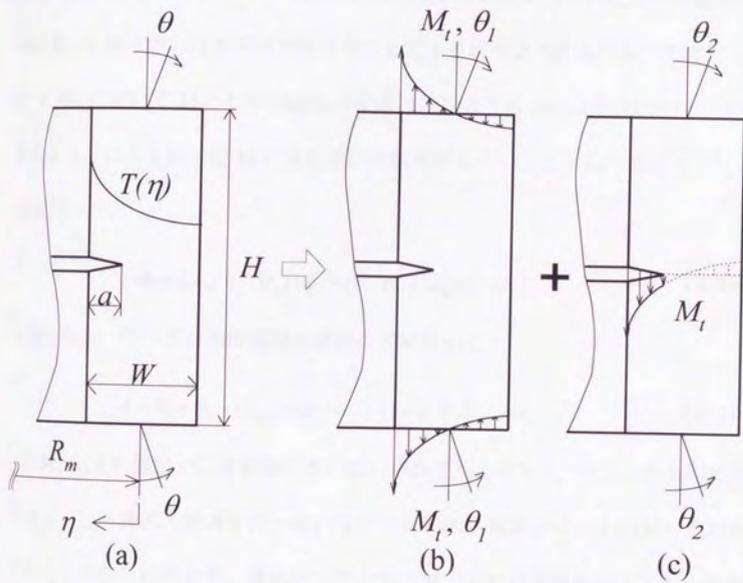


図 4.14 Duhamel のアナロジ

4 円筒環状き裂の熱応力下応力拡大係数簡便評価式の導出

図 4.14(b)は図 4.11における M が M_t となった場合であり、これに対応する回転角 θ_1 は直ちに

$$\theta_1 = \lambda_{cyf} \cdot M_t \quad (4.22)$$

と求まる。さて、図 4.14(c)におけるき裂面に表面力を負荷したことによる端面での回転角 θ_2 であるが、今まで行って来たように弾性支持された二つの梁がパネによって接合されたモデルで考えることにより次のように求まる。すなわち、図 4.9右において M として $(-M_t)/\phi_f$ がかかっているとき M_0 は $(-M_t)$ であり、パネが入ることによる低下分 M_f に対応する回転角が θ_2 ということになるので、式(4.18)より

$$\theta_2 = \Delta\lambda_{cyf} \cdot (-M_t) / \phi_f = (1 - \psi_f) \cdot \lambda_{bf}^* \cdot (-M_t) \quad (4.23)$$

と得られる。従って自由膨張時の端部の回転角 θ は

$$\theta = \theta_1 + \theta_2 = \{\lambda_{cyf0} - (1 - \psi_f) \cdot (1 - \phi_f) \cdot \lambda_{bf}^*\} \cdot M_t \quad (4.24)$$

なお、以上の議論ではき裂面の食い違いが許されるとして(すなわち負のK値が生じる)計算式の誘導を行っているが、最終的狀態がいくつかの解の重ね合わせとして得られるとき、最終的K値が正の値であれば意味のある正しい結果が得られることになる。例えば、配管、圧力容器の内面が急冷される熱衝撃問題では、式(4.21)にて計算される熱変形相当モーメント M_t が負の値となり、最終的に正のK値が得られることになる。

4 円筒環状き裂の熱応力下応力拡大係数簡便評価式の導出

以上、円筒の温度分布から熱変形相当モーメント M_t を求めると、自由膨張時の端面の回転角を理論的に計算できるようになった。表 4. 4に例として、外面-内面温度差 $2\Delta T = 100$ °Cの線形温度分布下の円筒の端面の回転角を式(4. 24)により計算した結果と、有限要素解析により計算した結果を比較する。ヤング率 $E = 21\,000$ kg/mm²、線膨張係数 $\alpha = 1 \times 10^{-5}$ 1/°C、ポアソン比 $\nu = 0.3$ 、肉厚 $W = 10$ mm とした。この場合の熱変形相当モーメントは次式により表される。

$$(-M_t) = \frac{E\alpha\Delta TW^2}{6(1-\nu)} \quad (4. 25)$$

両者が3%以内の高い精度で一致していることがわかる。

表 4.4 線形温度分布下 (内外面温度差 $2\Delta T$) の

円筒の自由膨張時の端面の回転角

$$E = 21000 \text{ kg/mm}^2 \quad \alpha = 0.000010 \text{ 1/C} \quad \nu = 0.3$$

$$W = 10 \text{ mm} \quad \Delta T = 50 \text{ C}$$

$$Mt = 250 \text{ kgmm/mm}$$

$$Ri/W = 10 \quad H/W = 10 \quad \phi_r(\beta H) = 0.153$$

a/W	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
ψf	1.000	0.979	0.924	0.840	0.730	0.595	0.441
$-\theta_1$	-0.003460	-0.003462	-0.003466	-0.003473	-0.003482	-0.003494	-0.003506
θ_2	0.000000	0.000011	0.000041	0.000087	0.000146	0.000220	0.000303
$-\theta$	-0.003460	-0.003450	-0.003425	-0.003387	-0.003336	-0.003274	-0.003203
θFEM	-0.003500	-0.003491	-0.003466	-0.003427	-0.003374	-0.003309	-0.003233
差%	-1.14	-1.17	-1.18	-1.17	-1.13	-1.06	-0.91

$$Ri/W = 10 \quad H/W = 4 \quad \phi_r(\beta H) = 0.937$$

a/W	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
ψf	1.000	0.996	0.986	0.968	0.940	0.895	0.821
$-\theta_1$	-0.002513	-0.002579	-0.002765	-0.003085	-0.003596	-0.004412	-0.005754
θ_2	0.000000	0.000071	0.000269	0.000611	0.001156	0.002027	0.003459
$-\theta$	-0.002513	-0.002508	-0.002496	-0.002474	-0.002440	-0.002386	-0.002296
θFEM	-0.002513	-0.002509	-0.002497	-0.002478	-0.002446	-0.002396	-0.002312
差%	-0.01	-0.02	-0.04	-0.14	-0.24	-0.44	-0.71

$$Ri/W = 5 \quad H/W = 10 \quad \phi_r(\beta H) = -0.068$$

a/W	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
ψf	1.000	0.969	0.891	0.780	0.645	0.497	0.347
$-\theta_1$	-0.002372	-0.002373	-0.002374	-0.002375	-0.002376	-0.002378	-0.002380
θ_2	0.000000	-0.000005	-0.000018	-0.000036	-0.000058	-0.000082	-0.000106
$-\theta$	-0.002372	-0.002378	-0.002391	-0.002411	-0.002434	-0.002460	-0.002486
θFEM	-0.002438	-0.002442	-0.002450	-0.002463	-0.002478	-0.002495	-0.002513
差%	-2.69	-2.63	-2.40	-2.13	-1.78	-1.41	-1.08

$$Ri/W = 5 \quad H/W = 4 \quad \phi_r(\beta H) = 0.797$$

a/W	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
ψf	1.000	0.988	0.956	0.904	0.829	0.725	0.586
$-\theta_1$	-0.002318	-0.002365	-0.002495	-0.002705	-0.003009	-0.003431	-0.003992
θ_2	0.000000	0.000060	0.000222	0.000485	0.000867	0.001396	0.002100
$-\theta$	-0.002318	-0.002306	-0.002273	-0.002220	-0.002142	-0.002035	-0.001892
θFEM	-0.002320	-0.002310	-0.002281	-0.002232	-0.002160	-0.002060	-0.001923
差%	-0.09	-0.18	-0.35	-0.56	-0.83	-1.22	-1.60

4.3.4 円筒の熱応力下のK値

円筒の自由膨張時のK値

前項において Duhamel のアナロジにより自由膨張時の変形について考えたが、K値についても、同様にして求めることができる。すなわち図 4.14(b)の端部に M_t が作用するときのK値と図 4.14(c)のき裂面に表面力が作用するときのK値の和として求められ、後者のK値は端部に $(-M_t)/\phi_f$ が作用するときのK値に等しいので、円筒環状き裂の自由膨張によるK値 K_{free} は、結局図 4.9右において M として

$$M = M_t + (-M_t / \phi_f) = (1 / \phi_f - 1) \cdot (-M_t) \quad (4.26)$$

が働いている場合として求められることになり、式(4.10)より次のように与えられる。

$$K_{free} = (1 - \phi_f) \cdot \psi_f \cdot \left\{ \frac{(-M_t)}{Z} \sqrt{\pi a} \cdot F_M(\xi) \right\} \quad (4.27)$$

表 4.5、表 4.6に例として、外面—内面温度差 $2\Delta T = 100$ °Cの線形温度分布下の円筒の自由膨張時のK値を式(4.27)により計算した結果と、有限要素解析により計算した結果を比較する。ヤング率 $E = 21\,000$ kg/mm²、線膨張係数 $\alpha = 1 \times 10^{-5}$ 1/°C、ポアソン比 $\nu = 0.3$ 、肉厚 $W = 10$ mm とした。これにより、求めた式が広範囲の円筒形状に対し実用上十分な精度を有していることがわかる。

4 円筒環状き裂の熱応力下応力拡大係数簡便評価式の導出

表 4.5 円筒環状き裂の線形温度分布下の自由膨張時のK値 ($R_i/W = 10$)

$E = 21000 \text{ kg/mm}^2$ $\nu = 0.3$ $W = 10 \text{ mm}$
 $\Delta T = 50^\circ\text{C}$ $\alpha = 0.000010 \text{ 1/}^\circ\text{C}$

$R_i/W = 10$ $H/W = 10$ $h_i/H = 0.5$ $M_t = 250 \text{ kgmm/mm}$
 $\phi_f = 0.153$

a/W	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
ψ_f	0.979	0.924	0.840	0.730	0.595	0.441
K_{Mplate}	27.67	38.93	50.55	65.64	87.70	123.62
K_{free}	22.95	30.48	35.99	40.58	44.17	46.16
K_{FEM}	22.83	31.07	36.35	40.97	44.61	46.95
差%	0.53	-1.91	-1.00	-0.96	-0.98	-1.67

$R_i/W = 10$ $H/W = 15$ $h_i/H = 0.5$ $M_t = 250 \text{ kgmm/mm}$
 $\phi_f = -0.084$

a/W	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
ψ_f	0.978	0.919	0.830	0.715	0.577	0.423
K_{Mplate}	27.67	38.93	50.55	65.64	87.70	123.62
K_{free}	29.31	38.76	45.47	50.85	54.79	56.62
K_{FEM}	30.80	40.27	46.25	51.77	55.78	58.01
差%	-4.83	-3.75	-1.68	-1.78	-1.77	-2.40

$R_i/W = 10$ $H/W = 25$ $h_i/H = 0.5$ $M_t = 250 \text{ kgmm/mm}$
 $\phi_f = -0.010$

a/W	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
ψ_f	0.977	0.918	0.830	0.714	0.576	0.422
K_{Mplate}	27.67	38.93	50.55	65.64	87.70	123.62
K_{free}	27.32	36.12	42.37	47.36	51.01	52.67
K_{FEM}	29.01	37.96	43.55	48.70	52.46	54.52
差%	-5.81	-4.84	-2.71	-2.76	-2.77	-3.39

$R_i/W = 10$ $H/W = 50$ $h_i/H = 0.5$ $M_t = 250 \text{ kgmm/mm}$
 $\phi_f = 0.000$

a/W	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
ψ_f	0.977	0.918	0.830	0.714	0.576	0.422
K_{Mplate}	27.67	38.93	50.55	65.64	87.70	123.62
K_{free}	27.05	35.76	41.94	46.88	50.49	52.14
K_{FEM}	28.70	37.56	43.09	48.18	51.90	53.93
差%	-5.74	-4.79	-2.66	-2.70	-2.71	-3.32

$R_i/W = 10$ $H/W = 100$ $h_i/H = 0.5$ $M_t = 250 \text{ kgmm/mm}$
 $\phi_f = 0.000$

a/W	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
ψ_f	0.977	0.918	0.830	0.714	0.576	0.422
K_{Mplate}	27.67	38.93	50.55	65.64	87.70	123.62
K_{free}	27.05	35.76	41.94	46.87	50.49	52.13
K_{FEM}	28.70	37.56	43.08	48.17	51.89	53.93
差%	-5.76	-4.80	-2.65	-2.69	-2.71	-3.33

4 円筒環状き裂の熱応力下応力拡大係数簡便評価式の導出

表 4.6 円筒環状き裂の線形温度分布下の自由膨張時のK値 ($R_1/W = 5$)

$E = 21000 \text{ kg/mm}^2$ $\nu = 0.3$ $W = 10 \text{ mm}$
 $\Delta T = 50^\circ\text{C}$ $\alpha = 0.000010 \text{ } 1/^\circ\text{C}$

$R_1/W = 5$ $H/W = 4$ $h_1/H = 0.5$ $M_t = 250 \text{ kgmm/mm}$
 $\phi_f = 0.797$

a/W	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
ψ_f	0.988	0.956	0.904	0.829	0.725	0.586
K_{Mplate}	27.67	38.93	50.55	65.64	87.70	123.62
K_{free}	5.54	7.55	9.27	11.03	12.89	14.69
K_{FEM}	5.52	7.57	9.31	10.98	12.80	14.67
差%	0.39	-0.24	-0.48	0.47	0.67	0.11

$R_1/W = 5$ $H/W = 10$ $h_1/H = 0.5$ $M_t = 250 \text{ kgmm/mm}$
 $\phi_f = -0.068$

a/W	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
ψ_f	0.969	0.891	0.780	0.645	0.497	0.347
K_{Mplate}	27.67	38.93	50.55	65.64	87.70	123.62
K_{free}	28.65	37.06	42.11	45.22	46.52	45.76
K_{FEM}	28.69	37.99	42.80	46.01	47.40	46.94
差%	-0.14	-2.45	-1.62	-1.71	-1.85	-2.51

$R_1/W = 5$ $H/W = 100$ $h_1/H = 0.5$ $M_t = 250 \text{ kgmm/mm}$
 $\phi_f = 0.000$

a/W	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
ψ_f	0.969	0.891	0.779	0.644	0.495	0.345
K_{Mplate}	27.67	38.93	50.55	65.64	87.70	123.62
K_{free}	26.82	34.68	39.38	42.26	43.45	42.71
K_{FEM}	28.77	36.81	40.88	43.93	45.23	44.74
差%	-6.79	-5.80	-3.68	-3.80	-3.94	-4.54

端部回転拘束によるK値

自由膨張時においては端部で式(4.24)で与えられる θ の回転が生じる。従って端部の回転が拘束されている場合には、端部にはその拘束によって自由膨張を打消す(- θ)を生じさせるモーメント M_r (拘束モーメントと呼ぶことにする)が働くことになり、この M_r によるK値が求めるものとなる。式(4.13)より、

$$(-\theta) = \lambda_{cyl} \cdot M_r \quad (4.28)$$

が成り立ち、求めるK値 K_r は式(4.10)、(4.24)、(4.28)より次式にて与えられる。

$$\begin{aligned} K_r &= \phi_f \cdot \psi_f \cdot \left\{ \frac{M_r \sqrt{\pi a} \cdot F_M(\xi)}{Z} \right\} \\ &= \phi_f \cdot \psi_f \cdot \left(\frac{\lambda_{cyl0} - (1 - \psi_f) \cdot (1 - \phi_f) \cdot \lambda_{bf}^*}{\lambda_{cyl}} \right) \cdot \left\{ \frac{(-M_r) \sqrt{\pi a} \cdot F_M(\xi)}{Z} \right\} \end{aligned} \quad (4.29)$$

円筒環状き裂の熱応力下のK値

求めるK値は重ね合わせの原理により式(4.27)、(4.29)にて求めた、自由膨張時のK値 K_{free} と拘束モーメント K_r に対するK値の和である。式(4.27)、(4.29)により求めるK値 K_{cyl} は次式にて表される。

$$\begin{aligned} K_{cyl} &= K_{free} + K_r \\ &= \frac{\psi_f \cdot \lambda_{cyl0}}{\lambda_{cyl0} + \phi_f \cdot (1 - \psi_f) \cdot \lambda_{bf}^*} \cdot \left\{ \frac{(-M_r) \sqrt{\pi a} \cdot F_M(\xi)}{Z} \right\} \end{aligned} \quad (4.30)$$

自由膨張の場合同様、端部が回転拘束された円筒環状き裂の熱応力下のK値は熱変形相当モーメントに比例することになる。なおここで式(4.30)の結果は、熱変形相当モーメント M_r が与えられれば、すなわち、温度分布が与え

4 円筒環状き裂の熱応力下応力拡大係数簡便評価式の導出

られれば M_i は定まるのであるから温度分布のみが与えられれば所用の K 値が求まることを意味しており、このことは、過渡的な温度変化を受ける問題においても、応力解析を行うことなく、温度場解析のみによって刻々の K 値変化が求められることを示していることを指摘しておく。

最後に、図 4. 15、図 4. 16に例として、外面—内面温度差 $2\Delta T = 100$ °Cの線形温度分布下の円筒の K 値を式(4. 30)により計算した結果を示す。計算条件は $R_o/W = 5.5, 10.5$ の2種類である。材料定数はヤング率 $E = 21\ 000$ kg/mm²、線膨張係数 $\alpha = 1 \times 10^{-5}$ 1/°C、ポアソン比 $\nu = 0.3$ とし、寸法として $W = 10$ mm とした。いずれもこれまでに片側き裂梁で見られたように、き裂が長くなるにつれ K 値が極大値を示した。

4 円筒環状き裂の熱応力下応力拡大係数簡便評価式の導出

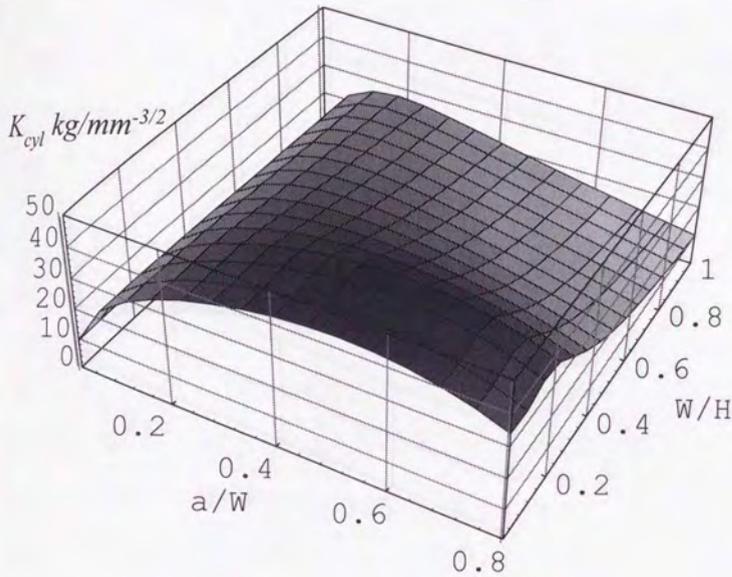


図 4.15 円筒の線形温度分布下のK値

($R_m/W = 5.5$; $\Delta T = 50^\circ\text{C}$, $W = 10 \text{ mm}$, $E = 21\,000 \text{ kg/mm}^2$, $\nu = 0.3$, $\alpha = 1 \times 10^{-5} \text{ } 1^\circ\text{C}$)

4 円筒環状き裂の熱応力下応力拡大係数簡便評価式の導出

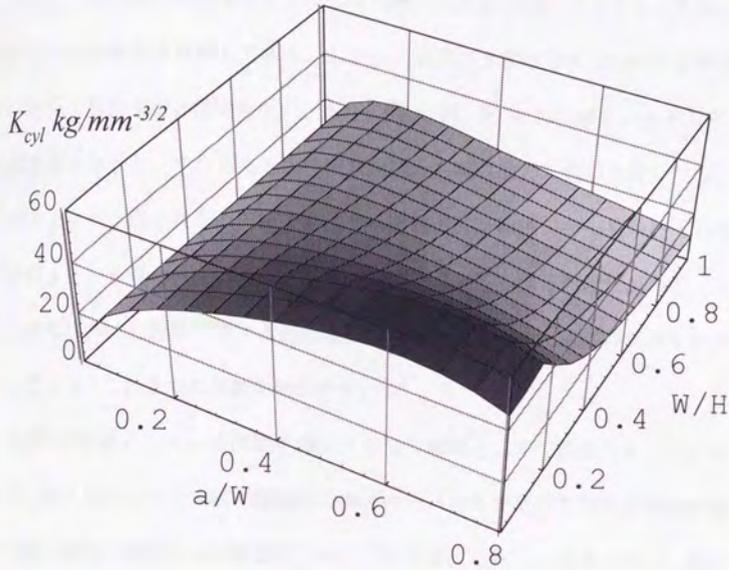


図 4.16 円筒の線形温度分布下のK値

($R_m/W = 10.5$; $\Delta T = 50^\circ\text{C}$, $W = 10 \text{ mm}$, $E = 21\,000 \text{ kg/mm}^2$, $\nu = 0.3$, $\alpha = 1 \times 10^{-5} \text{ 1/}^\circ\text{C}$)

4.3.5 任意位置の環状き裂のK値

これまでは円筒の内面環状き裂が円筒の軸方向中央位置にあるとしてK値を求めたための理論を展開してきた。しかし、実際のき裂は必ずしも円筒の軸方向の中央に発生するとは限らない。また、図 4.15、図 4.16の結果からすると、円筒が長くなると、すなわちき裂が円筒端部から離れるとK値が大きくなる。このことより、同じ長さの円筒であってもき裂位置が軸方向の中央からずれることにより、き裂が中央にある場合よりもK値が大きくなる可能性がある。そこで本項において円筒の環状き裂が軸方向の中央からずれた場合のK値を計算できるようにこれまでの理論を拡張する。

まず検討対象としている問題を弾性支持梁の問題として一般化した上で定式化し、次に基本となる両端・接続端に曲げモーメントを受ける弾性支持梁問題のK値・端部の変形につき評価式を導く。その後、これらの結果を用い、軸方向の任意位置の円筒環状き裂の熱応力下のK値を導く。

弾性支持梁問題の定式化

その前にこれまでに行ってきた議論の意味合いについて今一度考える。これまで円筒環状き裂の熱応力下の変形の問題を、長さのない適切なコンプライアンスを有する回転バネで接続された二本の弾性支持梁の軸対称曲げの問題として扱ってきた。この際、き裂が入る前の状態、き裂が入ることによる状態の変化、の二つの段階に分けて議論を行ってきたが、原点に立ち戻ればき裂の有無を議論する必要はない。すなわち、この問題を弾性支持梁流の表現で統一すると、

二本の弾性支持梁がその接続部において変位の食い違いは許さず、回転角の食い違いを許す問題、と言える。接続部では、この変位・回転角の境界条件を満足するために、連続した一本の弾性支持梁に対し、モーメント・せん断力の再配分が生じる。以下、この趣旨に添って、定式化を行う。

まず、基本となる長さ H の弾性支持梁の左端に荷重 P 、 M を単独で受ける場合の左端 A から x 、右端 B から x' の位置 C における変形 y 、 θ に関するコンプライアンス λ の定義から始める。

図 4.17 (a) の荷重 P 、 M を単独で受ける場合につき、変形に添字 P 、 M をつけて表すことにし、

$$\begin{bmatrix} y_C(x, x') \\ \theta_C(x, x') \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_{yP}(x, x') & \lambda_{yM}(x, x') \\ \lambda_{\theta P}(x, x') & \lambda_{\theta M}(x, x') \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} P \\ M \end{bmatrix} \equiv \Lambda(x, x') \cdot \begin{bmatrix} P \\ M \end{bmatrix} \quad (4.31)$$

なるコンプライアンス行列 $\Lambda(x, x')$ を定義する。行列の個々の成分については Hetényi の解¹³¹⁾ を円筒用に書き換え、次式を得る。

$$\lambda_{yP}(x, x') = \frac{1}{2\beta^3 D} \cdot \frac{\sinh \beta H \cos \beta x \cosh \beta x' - \sin \beta H \cosh \beta x \cos \beta x'}{\sinh^2 \beta H - \sin^2 \beta H} \quad (4.32)$$

$$\lambda_{\theta P}(x, x') = -\frac{1}{2\beta^2 D} \times \frac{1}{\sinh^2 \beta H - \sin^2 \beta H} \times [\sinh \beta H \{ \sin \beta x \cosh \beta x' + \cos \beta x \sinh \beta x' \} + \sin \beta H \{ \sinh \beta x \cos \beta x' + \cosh \beta x \sin \beta x' \}] \quad (4.33)$$

$$\lambda_{yM}(x, x') = \frac{1}{2\beta^2 D} \times \frac{1}{\sinh^2 \beta H - \sin^2 \beta H} \times [\sinh \beta H \{ \sin \beta x \cosh \beta x' - \cos \beta x \sinh \beta x' \} + \sin \beta H \{ \sinh \beta x \cos \beta x' - \cosh \beta x \sin \beta x' \}] \quad (4.34)$$

$$\lambda_{\theta M}(x, x') = \frac{1}{\beta D} \cdot \frac{\sinh \beta H \cos \beta x \cosh \beta x' + \sin \beta H \cosh \beta x \cos \beta x'}{\sinh^2 \beta H - \sin^2 \beta H} \quad (4.35)$$

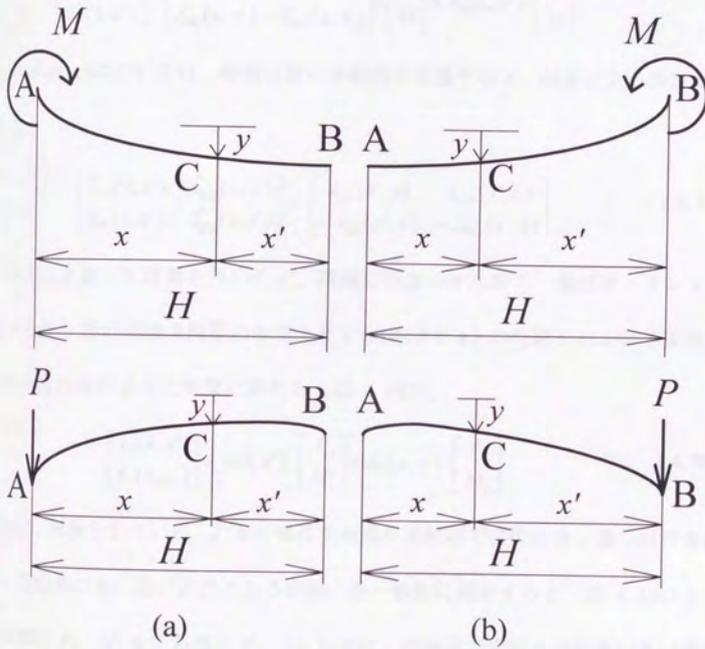


図 4.17 一端に荷重を受ける弾性支持梁

次に荷重を右端に受ける場合（図 4.17 (b)）について、コンプライアンス行列 $\Lambda(x, x')$ を次式により定義する。この場合にも、 x は左端からの距離を、 x' は右端からの距離を示すとする。

$$\begin{bmatrix} y_c(x, x') \\ \theta_c(x, x') \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_{yp}^*(x, x') & \lambda_{ym}^*(x, x') \\ \lambda_{\theta p}^*(x, x') & \lambda_{\theta m}^*(x, x') \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} P \\ M \end{bmatrix} \equiv \Lambda_c(x, x') \cdot \begin{bmatrix} P \\ M \end{bmatrix} \quad (4.36)$$

この $\Lambda_c(x, x')$ については、荷重位置の対称性を考慮すると、容易に次の関係が求まる。

$$\begin{bmatrix} \lambda_{yp}^*(x, x') & \lambda_{ym}^*(x, x') \\ \lambda_{\theta p}^*(x, x') & \lambda_{\theta m}^*(x, x') \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_{yp}(x', x) & \lambda_{ym}(x', x) \\ -\lambda_{\theta p}(x', x) & -\lambda_{\theta m}(x', x) \end{bmatrix} \quad (4.37)$$

以上に定義した諸量を用いると、両端に任意のせん断力・曲げモーメントを受ける長さ H の弾性支持梁の左端より x (右端より x') の位置 C における変位 y_c 、回転角 θ_c は次のように簡潔に表せる（図 4.18）。

$$\begin{bmatrix} y_c(x, x') \\ \theta_c(x, x') \end{bmatrix} = \Lambda(x, x') \cdot \begin{bmatrix} P_1 \\ M_1 \end{bmatrix} + \Lambda_c(x, x') \cdot \begin{bmatrix} P_2 \\ M_2 \end{bmatrix} \quad (4.38)$$

次に、対象としている「二本の弾性支持梁が接続部で変位の食い違いは許されず、回転角の食い違いが許される問題」を一般的に図示すると、図 4.19 のように左端に P_1, M_1 を、右端に P_2, M_2 を受け、接続部で変位・回転角の食い違いに関する境界条件を満足するために P_c, M_c なる荷重が発生、すなわち二本の梁が連続梁の場合に対し荷重の再配分が生じる問題となる。

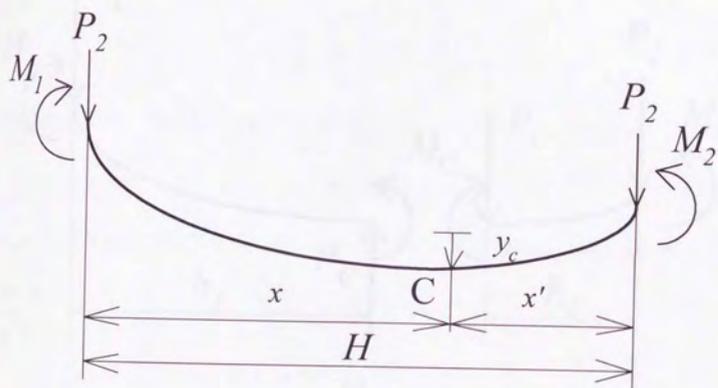


図 4.18 両端に任意の荷重を受ける弾性支持梁

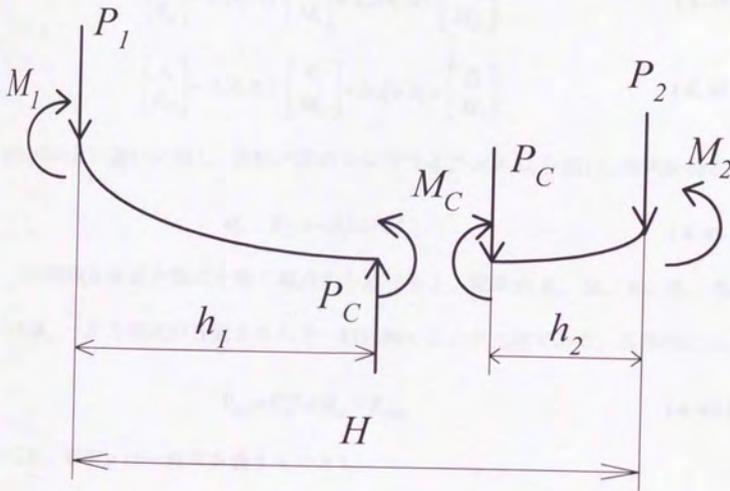


図 4.19 回転バネで接続された二本の弾性支持梁の一般問題

4 円筒環状き裂の熱応力下応力拡大係数簡便評価式の導出

以下、長さ H の弾性支持梁の左端から h_1 、右端から h_2 の位置にある C 点に回転バネがあるとす。この場合に点 C の変形を梁 AC 、 CB 上の 1 点として表すと、各々次のようになる。変位の食い違いは許さないで両方の梁に対し等しい値 y_c とし、回転角に関しては食い違いを考え各々 θ_{c1} 、 θ_{c2} とした。

$$\begin{bmatrix} y_c \\ \theta_{c1} \end{bmatrix} = \Lambda(h_1, 0) \cdot \begin{bmatrix} P_1 \\ M_1 \end{bmatrix} + \Lambda_c(h_1, 0) \cdot \begin{bmatrix} -P_c \\ M_c \end{bmatrix} \quad (4.39)$$

$$\begin{bmatrix} y_c \\ \theta_{c2} \end{bmatrix} = \Lambda(0, h_2) \cdot \begin{bmatrix} P_c \\ M_c \end{bmatrix} + \Lambda_c(0, h_2) \cdot \begin{bmatrix} P_2 \\ M_2 \end{bmatrix} \quad (4.40)$$

回転角の食い違いに関し、回転バネのコンプライアンス $\Delta\lambda$ を用い、次式を得る。

$$\theta_{c1} - \theta_{c2} = -2\Delta\lambda \cdot M_c \quad (4.41)$$

この問題を連立方程式を解く観点から述べると、変数が P_c 、 M_c 、 y_c 、 θ_{c1} 、 θ_{c2} の 5 個、一次方程式が 5 個あるので一般に解くことが可能である。具体的には、

$$\mathbf{P}_{Cg} = \mathbf{C}_g^{-1} \times \mathbf{B}_g \times \mathbf{P}_{ABg} \quad (4.42)$$

ここに、添字 g は一般式を表すものとし、

$$\mathbf{P}_{cg} = \begin{bmatrix} P_c \\ M_c \\ y_c \\ \theta_{c1} \\ \theta_{c2} \end{bmatrix} \quad (4.43)$$

$$\mathbf{C}_g = \begin{bmatrix} -\lambda_{yp}^*(h_1, 0) & \lambda_{ym}^*(h_1, 0) & -1 & 0 & 0 \\ -\lambda_{\theta p}^*(h_1, 0) & \lambda_{\theta m}^*(h_1, 0) & 0 & -1 & 0 \\ \lambda_{yp}(0, h_2) & \lambda_{ym}(0, h_2) & -1 & 0 & 0 \\ \lambda_{\theta p}(0, h_2) & \lambda_{\theta m}(0, h_2) & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -2\Delta\lambda & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (4.44)$$

4 円筒環状き裂の熱応力下応力拡大係数簡便評価式の導出

$$\mathbf{B}_s = \begin{bmatrix} -\lambda_{yp}(h_1, 0) & -\lambda_{yM}(h_1, 0) & 0 & 0 & 0 \\ -\lambda_{\theta p}(h_1, 0) & -\lambda_{\theta M}(h_1, 0) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda_{yp}^*(0, h_2) & -\lambda_{yM}^*(0, h_2) & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda_{\theta p}^*(0, h_2) & -\lambda_{\theta M}^*(0, h_2) & 0 \end{bmatrix} \quad (4.45)$$

$$\mathbf{P}_{ABg} = \begin{bmatrix} P_1 \\ M_1 \\ P_2 \\ M_2 \end{bmatrix} \quad (4.46)$$

両端に曲げを受ける問題への適用

以下円筒環状き裂が軸方向任意位置に存在する場合の熱応力下のK値を求めるための準備を行う。この場合の変形はき裂位置が軸方向に移動しても、Duhamelのアナロジ¹³⁵⁾により図4.20(b)に示すように両端面に熱変形相当モーメント M_i を負荷する場合と、き裂を含む面上に M_i を生じさせる応力分布に対応する表面力(図4.20(c)の実線)が負荷される場合の変形の和と等価である。

そこでまず、基本となる両端に等しいモーメントを受ける場合につき、K値、および端部の回転角の評価式を導く。この場合先に弾性支持梁の一般化の項にて述べた一般的な条件の下での式は、 $P_1 = P_2 = 0$ 、 $M_1 = M_2 = M$ の条件を追加することにより簡単になる(図4.21)。さらに、着目している点Cにおける荷重 P_c 、 M_c に関する連立方程式に整理すると、結局次の式を得る。

$$\mathbf{P}_C = \mathbf{C}^{-1} \times \mathbf{B} \cdot M \quad (4.47)$$

$$\mathbf{P}_C = \begin{bmatrix} P_C \\ M_C \end{bmatrix} \quad (4.48)$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \lambda_{yP}^*(h_1, 0) + \lambda_{yP}(0, h_2) & -\lambda_{yM}^*(h_1, 0) + \lambda_{yM}(0, h_2) \\ \lambda_{\theta P}^*(h_1, 0) + \lambda_{\theta P}(0, h_2) & -\lambda_{\theta M}^*(h_1, 0) + \lambda_{\theta M}(0, h_2) + 2\Delta\lambda \end{bmatrix} \quad (4.49)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \lambda_{yM}(h_1, 0) - \lambda_{yM}^*(0, h_2) \\ \lambda_{\theta M}(h_1, 0) - \lambda_{\theta M}^*(0, h_2) \end{bmatrix} \quad (4.50)$$

4 円筒環状き裂の熱応力下応力拡大係数簡便評価式の導出

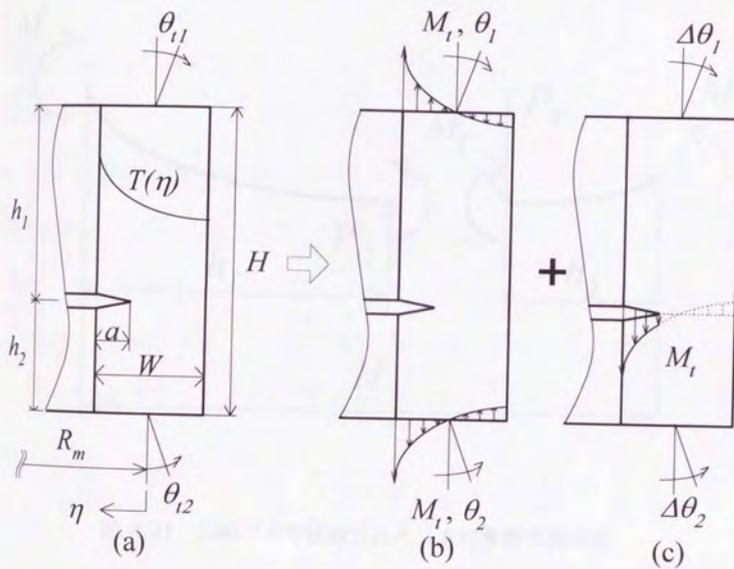


図 4.20 Duhamel のアナロジ (き裂位置が軸方向任意位置に存在する場合)

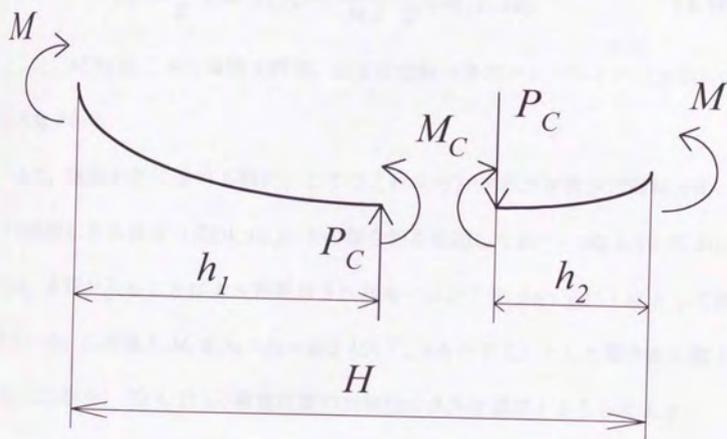


図 4.21 回転バネで接続された二本の弾性支持梁が
両端に曲げモーメントを受ける問題

a) 両端に曲げを受ける問題のK値評価式

式(4.47)~(4.50)により、回転バネ部のモーメント M_c を求めることができれば、無限長片側き裂梁の純曲げ下のK値計算式より、この両端に等しいモーメント M を受ける問題のK値 K_M を求めることができる。

$$K_M = \frac{M_c}{Z} \sqrt{\pi a} \cdot F_M(\xi) = \left(\frac{M_c}{M} \right) \cdot \frac{M}{Z} \sqrt{\pi a} \cdot F_M(\xi) \quad (4.51)$$

ここに、 M_c/M は二本の弾性支持梁、および回転バネのコンプライアンスから定まる量である。

さて、議論を先に進める前に、ここでこれまでに求めたき裂が円筒軸方向の中央位置にある場合(式(4.10))との整合性を確認しておく。式(4.10)においては、き裂が入ることにより再配分されたモーメントを $(\phi_f \cdot \psi_f) \cdot M$ として表している。この値と M_c を $h_1 = h_2 = H/2$ (以下、 $=h$ とする) とした場合を比較する。この場合、式(4.37)の荷重位置の対称性の条件を適用することにより、

$$C(h, h) = \begin{bmatrix} 2\lambda_{yf}(0, h) & 0 \\ 0 & -2\lambda_{yf}(0, h) - 2\Delta\lambda \end{bmatrix} \quad (4.52)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ -2\lambda_{yf}(h, 0) \end{bmatrix} \quad (4.53)$$

となり、 $P_0 = 0$ 、および

$$\frac{M_c}{M} = \frac{\lambda_{yf}(h, 0)}{\lambda_{yf}(0, h) + \Delta\lambda} \quad (4.54)$$

が求まる。これをこれまでの流儀で表現すると、実は

$$\frac{M_c}{M} = \frac{\lambda_{yf}^*}{\lambda_{yf} + \Delta\lambda} \equiv \phi_f \cdot \psi_f \quad (4.55)$$

のように簡単になり、かつ右側の関係が恒等的に成立する。

b) K値評価式の精度確認

さて、前項にて導いた M_c/M を求めることができれば、式(4.51)により、無限長片側き裂梁の純曲げ下のK値として所用のK値が計算できる。ここでは式(4.51)の妥当性を確認するため軸対称有限要素解析を行った。端部に曲げモーメント M をかけ解析を行い、変位法によってK値を評価した。この解析結果 K_{FEM} と式(4.51)による結果 K_M が表 4.7、表 4.8に比較してある。検討条件は $R_m/W = 10.5$; $H/W = 4, 10$; $h_1/H = 0.5, 0.625, 0.75$ である。ヤング率 $E = 21\,000 \text{ kg/mm}^2$ 、線膨張係数 $\alpha = 1 \times 10^{-5} \text{ 1/}^\circ\text{C}$ 、ポアソン比 $\nu = 0.3$ 、肉厚 $W = 10 \text{ mm}$ とした。両者は実用上十分な程度に一致していることがわかる。

4 円筒環状き裂の熱応力下応力拡大係数簡便評価式の導出

表 4.7 円筒の任意位置環状き裂のK値

(両端面に M を受ける場合、 $H/W = 4$)

$E = 21000 \text{ kg/mm}^2$ $\nu = 0.3$ $W = 10 \text{ mm}$

$R_0/W = 10$ $H/W = 4$ $h_1/H = 0.5$ $M = 174.7 \text{ kgmm/mm}$

a/W	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
M_c/M	0.934	0.924	0.908	0.881	0.839	0.770
K_{Mplate}	19.34	27.21	35.33	45.87	61.29	86.38
K_M	18.06	25.14	32.06	40.42	51.42	66.49
K_{FEM}	18.94	25.64	32.51	40.81	51.44	66.26
差%	-4.66	-1.94	-1.38	-0.95	-0.04	0.35

$R_0/W = 10$ $H/W = 4$ $h_1/H = 0.625$ $M = 174.7 \text{ kgmm/mm}$

a/W	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
M_c/M	0.942	0.934	0.920	0.898	0.861	0.801
K_{Mplate}	19.34	27.21	35.33	45.87	61.29	86.38
K_M	18.21	25.41	32.50	41.17	52.80	69.17
K_{FEM}	18.37	26.18	32.94	41.53	52.74	68.77
差%	-0.85	-2.95	-1.34	-0.86	0.11	0.58

$R_0/W = 10$ $H/W = 4$ $h_1/H = 0.75$ $M = 174.7 \text{ kgmm/mm}$

a/W	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
M_c/M	0.963	0.959	0.951	0.939	0.919	0.883
K_{Mplate}	19.34	27.21	35.33	45.87	61.29	86.38
K_M	18.62	26.09	33.61	43.08	56.30	76.24
K_{FEM}	18.79	26.87	34.03	43.37	56.04	75.32
差%	-0.88	-2.91	-1.24	-0.67	0.47	1.22

4 円筒環状き裂の熱応力下応力拡大係数簡便評価式の導出

表 4.8 円筒の任意位置環状き裂のK値

(両端面に M を受ける場合、 $H/W = 10$)

$E = 21000 \text{ kg/mm}^2$ $\nu = 0.3$ $W = 10 \text{ mm}$

$R_1/W = 10$ $H/W = 10$ $h_1/H = 0.5$ $M = 174.7 \text{ kgmm/mm}$

a/W	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
M_c/M	0.150	0.141	0.128	0.112	0.091	0.067
K_{Mplate}	19.34	27.21	35.33	45.87	61.29	86.38
K_M	2.90	3.84	4.54	5.12	5.57	5.82
K_{FEM}	3.28	4.29	5.08	5.75	6.25	6.56
差%	-11.82	-10.45	-10.66	-10.94	-10.88	-11.26

$R_1/W = 10$ $H/W = 10$ $h_1/H = 0.625$ $M = 174.7 \text{ kgmm/mm}$

a/W	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
M_c/M	0.239	0.227	0.208	0.183	0.151	0.114
K_{Mplate}	19.34	27.21	35.33	45.87	61.29	86.38
K_M	4.62	6.17	7.35	8.38	9.25	9.83
K_{FEM}	4.86	6.69	7.90	9.03	9.96	10.63
差%	-4.95	-7.73	-6.90	-7.16	-7.05	-7.56

$R_1/W = 10$ $H/W = 10$ $h_1/H = 0.75$ $M = 174.7 \text{ kgmm/mm}$

a/W	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
M_c/M	0.488	0.471	0.444	0.406	0.353	0.283
K_{Mplate}	19.34	27.21	35.33	45.87	61.29	86.38
K_M	9.43	12.82	15.70	18.61	21.62	24.46
K_{FEM}	9.64	13.42	16.22	19.26	22.28	25.34
差%	-2.16	-4.48	-3.22	-3.37	-2.97	-3.47

c) 両端に曲げを受ける問題の荷重端回転角

両端に曲げを受ける問題 (図 4.21) の荷重端 A、B における回転角を各々 θ_1 、 θ_2 とすると、式(4.47)~(4.50)により P_c 、 M_c が既知であるとして、式(4.38) から直ちに次式を得る。

$$\theta_1 = \lambda_{\theta_1}(0, h_1) \cdot M - \lambda_{\theta_1}^*(0, h_1) \cdot P_c + \lambda_{\theta_1}^*(0, h_1) \cdot M_c \quad (4.56)$$

$$\theta_2 = \lambda_{\theta_1}^*(h_2, 0) \cdot M + \lambda_{\theta_1}(h_2, 0) \cdot P_c + \lambda_{\theta_1}(h_2, 0) \cdot M_c \quad (4.57)$$

これを今後の使用の便を考え、コンプライアンスの次元で行列表示しておく。

$$\vec{\theta} = \begin{bmatrix} \theta_1 / M \\ \theta_2 / M \end{bmatrix} = \mathbf{q} + \mathbf{Q} \cdot \begin{bmatrix} P_c / M \\ M_c / M \end{bmatrix} \quad (4.58)$$

ここに、

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \lambda_{\theta_1}(0, h_1) \\ \lambda_{\theta_1}^*(h_2, 0) \end{bmatrix}; \quad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} -\lambda_{\theta_1}^*(0, h_1) & \lambda_{\theta_1}^*(0, h_1) \\ \lambda_{\theta_1}(h_2, 0) & \lambda_{\theta_1}(h_2, 0) \end{bmatrix} \quad (4.59)$$

式(4.56)、(4.57)による計算結果を有限要素解析による結果と表 4.9、表 4.10にて比較した。検討条件は $R_m/W = 10.5$; $H/W = 4, 10$; $h_1/H = 0.5, 0.625, 0.75$ である。ヤング率 $E = 21\,000 \text{ kg/mm}^2$ 、ポアソン比 $\nu = 0.3$ 、肉厚 $W = 10 \text{ mm}$ とした。これらの表より、両者が 5%以内の高い精度で一致しており、式(4.56)、(4.57)を用い実用的な精度で端面の回転角が計算できることがわかる。なお、 h_1 、あるいは h_2 が非常に短くなるにつれ、誤差が増加するようである。

4 円筒環状き裂の熱応力下応力拡大係数簡便評価式の導出

表 4.9 円筒の任意位置環状き裂の端面回転角

(両端面に M を受ける場合、 $H/W = 4$)

$E = 21000 \text{ kg/mm}^2$ $\nu = 0.3$ $W = 10 \text{ mm}$
 $R/W = 10$ $H/W = 4$ $h_1/H = 0.5$ $M = 174.7 \text{ kgmm/mm}$

a/W	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
P_c/M	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
M_c/M	0.934	0.924	0.908	0.881	0.839	0.770
θ_1	0.001802	0.001932	0.002156	0.002513	0.003083	0.004021
$\theta_{1 \text{ FEM}}$	0.001799	0.001921	0.002131	0.002470	0.003009	0.003890
差%	0.18	0.58	1.17	1.74	2.47	3.36
θ_2	-0.001802	-0.001932	-0.002156	-0.002513	-0.003083	-0.004021
$\theta_{2 \text{ FEM}}$	-0.001799	-0.001921	-0.002131	-0.002470	-0.003009	-0.003890
差%	0.18	0.58	1.17	1.74	2.47	3.36

$R/W = 10$ $H/W = 4$ $h_1/H = 0.625$ $M = 174.7 \text{ kgmm/mm}$

a/W	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
P_c/M	-0.003	-0.003	-0.004	-0.005	-0.006	-0.009
M_c/M	0.942	0.934	0.920	0.898	0.861	0.801
θ_1	0.001785	0.001866	0.002008	0.002235	0.002602	0.003218
$\theta_{1 \text{ FEM}}$	0.001784	0.001860	0.001993	0.002208	0.002554	0.003131
差%	0.06	0.36	0.74	1.21	1.86	2.78
θ_2	-0.001821	-0.002005	-0.002322	-0.002832	-0.003658	-0.005045
$\theta_{2 \text{ FEM}}$	-0.001815	-0.001987	-0.002286	-0.002769	-0.003548	-0.004848
差%	0.31	0.89	1.58	2.29	3.11	4.07

$R/W = 10$ $H/W = 4$ $h_1/H = 0.75$ $M = 174.7 \text{ kgmm/mm}$

a/W	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
P_c/M	-0.005	-0.005	-0.006	-0.007	-0.009	-0.013
M_c/M	0.963	0.959	0.951	0.939	0.919	0.883
θ_1	0.001770	0.001811	0.001882	0.001999	0.002193	0.002538
$\theta_{1 \text{ FEM}}$	0.001771	0.001809	0.001876	0.001986	0.002170	0.002489
差%	-0.04	0.13	0.35	0.63	1.10	1.95
θ_2	-0.001840	-0.002077	-0.002493	-0.003174	-0.004311	-0.006321
$\theta_{2 \text{ FEM}}$	-0.001832	-0.002054	-0.002446	-0.003089	-0.004154	-0.006020
差%	0.44	1.13	1.95	2.77	3.76	5.00

4 円筒環状き裂の熱応力下応力拡大係数簡便評価式の導出

表 4.10 円筒の任意位置環状き裂の端面回転角

(両端面に M を受ける場合、 $H/W = 10$)

$E = 21000 \text{ kg/mm}^2$ $\nu = 0.3$ $W = 10 \text{ mm}$
 $R/W = 10$ $H/W = 10$ $h_1/H = 0.5$ $M = 174.7 \text{ kgmm/mm}$

a/W	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
P_1/M	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
M_1/M	0.150	0.141	0.128	0.112	0.091	0.067
θ_1	0.002419	0.002422	0.002427	0.002434	0.002441	0.002450
$\theta_{1 \text{ FEM}}$	0.002451	0.002455	0.002461	0.002468	0.002478	0.002488
差%	-1.31	-1.34	-1.39	-1.41	-1.49	-1.53
θ_2	-0.002419	-0.002422	-0.002427	-0.002434	-0.002441	-0.002450
$\theta_{2 \text{ FEM}}$	-0.002451	-0.002455	-0.002461	-0.002468	-0.002478	-0.002488
差%	-1.31	-1.34	-1.39	-1.41	-1.49	-1.53

$R/W = 10$ $H/W = 10$ $h_1/H = 0.625$ $M = 174.7 \text{ kgmm/mm}$

a/W	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
P_1/M	-0.014	-0.014	-0.015	-0.015	-0.015	-0.015
M_1/M	0.239	0.227	0.208	0.183	0.151	0.114
θ_1	0.002418	0.002418	0.002418	0.002417	0.002417	0.002417
$\theta_{1 \text{ FEM}}$	0.002451	0.002451	0.002451	0.002452	0.002452	0.002453
差%	-1.34	-1.36	-1.38	-1.40	-1.44	-1.48
θ_2	-0.002424	-0.002441	-0.002466	-0.002500	-0.002543	-0.002593
$\theta_{2 \text{ FEM}}$	-0.002456	-0.002473	-0.002499	-0.002535	-0.002582	-0.002637
差%	-1.31	-1.31	-1.33	-1.39	-1.50	-1.67

$R/W = 10$ $H/W = 10$ $h_1/H = 0.75$ $M = 174.7 \text{ kgmm/mm}$

a/W	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
P_1/M	-0.025	-0.025	-0.026	-0.027	-0.029	-0.031
M_1/M	0.488	0.471	0.444	0.406	0.353	0.283
θ_1	0.002417	0.002414	0.002410	0.002403	0.002395	0.002383
$\theta_{1 \text{ FEM}}$	0.002450	0.002448	0.002444	0.002439	0.002432	0.002423
差%	-1.35	-1.37	-1.41	-1.47	-1.54	-1.62
θ_2	-0.002444	-0.002516	-0.002632	-0.002800	-0.003029	-0.003331
$\theta_{2 \text{ FEM}}$	-0.002474	-0.002543	-0.002656	-0.002822	-0.003052	-0.003358
差%	-1.20	-1.04	-0.89	-0.78	-0.73	-0.80

表面力をき裂面にかける解析との対応

次に、き裂を含む面上に熱変形相当モーメント M_1 を生じさせる応力分布に対応する表面力(図 4.20(c)の実線)が負荷される場合を想定し、この場合のK値・自由端の回転角の評価式を導く。

a) 表面力をき裂面にかける解析に対応するK値評価式

き裂が存在しないときき裂相当面に生じるモーメント M_0 に対応する表面力を打ち消すような表面力をき裂面にかける解析の結果得られるK値は、両端に曲げモーメント $M = M_0/\phi_a$ を受ける前項の問題に帰着する。ここに、 ϕ_a は図 4.18 にて $M_1 = M_2 = M$ とした場合に、任意の位置Cと端部のモーメントの比であり、これは Hetényi¹³¹⁾により次のように求められている。

$$\phi_a(x, x') = \frac{\sinh \beta x \cos \beta x' + \cosh \beta x \sin \beta x' + \sinh \beta x' \cos \beta x + \cosh \beta x' \sin \beta x}{\sinh \beta H + \sin \beta H} \quad (4.60)$$

なお、式(4.60)にて $x = x' = H/2$ としたものが、式(4.5)の ϕ_f である。

M_0/M が二本の弾性支持梁、および回転バネのコンプライアンスにより定まる量であることに留意し、式(4.51)を書き直し次式を得る。

$$K_M = \left(\frac{M_C}{M} \right) \cdot \left(\frac{M_0 / \phi_a}{Z} \right) \sqrt{\pi a} \cdot F_M(\xi) \quad (4.61)$$

b) K値評価式の精度確認

ここでは式(4.61)の妥当性を確認するため軸対称有限要素解析を行った。き裂が存在しないときき裂相当面に生じるモーメント M_0 に対応する表面力を打ち消すような表面力をき裂面にかける解析を行い、変位法によってK値を評価し

4 円筒環状き裂の熱応力下応力拡大係数簡便評価式の導出

た。この解析結果 K_{FEM} と式(4.61)による結果 K_M が表 4.11、表 4.12 に比較してある。検討条件は $R_m/W = 10.5; H/W = 4, 10; h_l/H = 0.5, 0.625, 0.75$ である。ヤング率 $E = 21\,000 \text{ kg/mm}^2$ 、ポアソン比 $\nu = 0.3$ 、肉厚 $W = 10 \text{ mm}$ とした。両者は実用上十分な程度に一致していることがわかる。

表 4.11	条件	結果				
		K_{FEM}	K_M	誤差 (%)	K_{FEM}	K_M
表 4.11-1	$R_m/W = 10.5, H/W = 4, h_l/H = 0.5$	1.794	1.804	-0.56	1.794	1.794
	$R_m/W = 10.5, H/W = 10, h_l/H = 0.5$	19.51	19.52	-0.05	19.51	19.51
	$R_m/W = 10.5, H/W = 4, h_l/H = 0.625$	19.27	19.26	0.05	19.27	19.27
表 4.11-2	$R_m/W = 10.5, H/W = 4, h_l/H = 0.75$	19.29	19.28	0.05	19.29	19.29
	$R_m/W = 10.5, H/W = 10, h_l/H = 0.75$	20.7	20.7	0.0	20.7	20.7

表 4.12	条件	結果				
		K_{FEM}	K_M	誤差 (%)	K_{FEM}	K_M
表 4.12-1	$R_m/W = 10.5, H/W = 4, h_l/H = 0.5$	1.794	1.804	-0.56	1.794	1.794
	$R_m/W = 10.5, H/W = 10, h_l/H = 0.5$	19.51	19.52	-0.05	19.51	19.51
	$R_m/W = 10.5, H/W = 4, h_l/H = 0.625$	19.27	19.26	0.05	19.27	19.27
表 4.12-2	$R_m/W = 10.5, H/W = 4, h_l/H = 0.75$	19.29	19.28	0.05	19.29	19.29
	$R_m/W = 10.5, H/W = 10, h_l/H = 0.75$	20.7	20.7	0.0	20.7	20.7

表 4.13	条件	結果				
		K_{FEM}	K_M	誤差 (%)	K_{FEM}	K_M
表 4.13-1	$R_m/W = 10.5, H/W = 4, h_l/H = 0.5$	1.794	1.804	-0.56	1.794	1.794
	$R_m/W = 10.5, H/W = 10, h_l/H = 0.5$	19.51	19.52	-0.05	19.51	19.51
	$R_m/W = 10.5, H/W = 4, h_l/H = 0.625$	19.27	19.26	0.05	19.27	19.27
表 4.13-2	$R_m/W = 10.5, H/W = 4, h_l/H = 0.75$	19.29	19.28	0.05	19.29	19.29
	$R_m/W = 10.5, H/W = 10, h_l/H = 0.75$	20.7	20.7	0.0	20.7	20.7

4 円筒環状き裂の熱応力下応力拡大係数簡便評価式の導出

表 4.11 円筒の任意位置環状き裂のK値

(き裂面上に表面力を与える計算、 $H/W = 4$)

$E = 21000 \text{ kg/mm}^2$ $\nu = 0.3$ $W = 10 \text{ mm}$

$R_1/W = 10$ $H/W = 4$ $h_1/H = 0.5$ $M_0 = 174.7 \text{ kgmm/mm}$

	$\phi_a = 0.937$					
a/W	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
M_c/M	0.934	0.924	0.908	0.881	0.839	0.770
K_{Mplate}	19.34	27.21	35.33	45.87	61.29	86.38
K_M	19.27	26.83	34.21	43.13	54.87	70.95
K_{FEM}	19.28	27.35	34.59	43.45	54.83	70.71
差%	-0.07	-1.91	-1.09	-0.74	0.07	0.34

$R_1/W = 10$ $H/W = 4$ $h_1/H = 0.625$ $M_0 = 174.7 \text{ kgmm/mm}$

	$\phi_a = 0.945$					
a/W	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
M_c/M	0.942	0.934	0.920	0.898	0.861	0.801
K_{Mplate}	19.34	27.21	35.33	45.87	61.29	86.38
K_M	19.28	26.89	34.40	43.58	55.88	73.22
K_{FEM}	19.30	27.53	34.77	43.88	55.77	72.79
差%	-0.11	-2.31	-1.06	-0.68	0.20	0.58

$R_1/W = 10$ $H/W = 4$ $h_1/H = 0.75$ $M_0 = 174.7 \text{ kgmm/mm}$

	$\phi_a = 0.965$					
a/W	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
M_c/M	0.963	0.959	0.951	0.939	0.919	0.883
K_{Mplate}	19.34	27.21	35.33	45.87	61.29	86.38
K_M	19.31	27.04	34.84	44.66	58.37	79.04
K_{FEM}	19.34	27.69	35.21	44.90	58.07	78.09
差%	-0.17	-2.33	-1.05	-0.54	0.51	1.21

4 円筒環状き裂の熱応力下応力拡大係数簡便評価式の導出

表 4.12 円筒の任意位置環状き裂のK値

(き裂面上に表面力を与える計算、 $H/W = 10$)

$E = 21000 \text{ kg/mm}^2$ $\nu = 0.3$ $W = 10 \text{ mm}$

$R_1/W = 10$ $H/W = 10$ $h_1/H = 0.5$ $M_0 = 174.7 \text{ kgmm/mm}$

		$\phi_a = 0.153$				
a/W	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
M_c/M	0.150	0.141	0.128	0.112	0.091	0.067
K_{Mplate}	19.34	27.21	35.33	45.87	61.29	86.38
K_M	18.93	25.14	29.69	33.47	36.44	38.08
K_{FEM}	18.98	25.78	30.37	34.34	37.43	39.43
差%	-0.25	-2.48	-2.25	-2.52	-2.65	-3.42

$R_1/W = 10$ $H/W = 10$ $h_1/H = 0.625$ $M_0 = 174.7 \text{ kgmm/mm}$

		$\phi_a = 0.244$				
a/W	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
M_c/M	0.239	0.227	0.208	0.183	0.151	0.114
K_{Mplate}	19.34	27.21	35.33	45.87	61.29	86.38
K_M	18.97	25.33	30.16	34.40	37.97	40.32
K_{FEM}	19.02	26.06	30.82	35.24	38.91	41.65
差%	-0.25	-2.79	-2.13	-2.39	-2.42	-3.18

$R_1/W = 10$ $H/W = 10$ $h_1/H = 0.75$ $M_0 = 174.7 \text{ kgmm/mm}$

		$\phi_a = 0.494$				
a/W	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
M_c/M	0.488	0.471	0.444	0.406	0.353	0.283
K_{Mplate}	19.34	27.21	35.33	45.87	61.29	86.38
K_M	19.10	25.96	31.78	37.68	43.77	49.53
K_{FEM}	19.13	26.64	32.33	38.40	44.46	50.59
差%	-0.17	-2.57	-1.69	-1.87	-1.54	-2.10

c) 表面力をき裂面にかける解析に対応する端部回転角

き裂が存在しないときき裂相当面に生じるモーメント M_0 に対応する表面力を打ち消すような表面力をき裂面にかける解析の結果端面に生じる回転角 $\Delta\theta_1$ 、 $\Delta\theta_2$ については次のように考えることができる。この問題は先に述べたように、モーメントに関しては両端面に $M = M_0/\phi_a$ を受ける問題と等価であり、き裂が入ることによる荷重再配分による回転角の変化が求める $\Delta\theta_1$ 、 $\Delta\theta_2$ となる。

さて、き裂がない状態にて両端に M を受ける場合の端面 A、B の回転角 θ_A 、 θ_B は式(4.15)にて定義した $\lambda_{\text{cyl}0}$ を用い、次式のように書ける。

$$\theta_0 = \theta_A = -\theta_B = \lambda_{\text{cyl}0} \cdot M \quad (4.62)$$

これにより、 P_C/M 、 M_C/M が式(4.47)~(4.49)にて求まっているとして、次式を得る。

$$\Delta\theta_1 / M = \lambda_{\text{cyl}1}^*(0, h_1) - \lambda_{\text{cyl}2}^*(0, h_1) \cdot (P_C / M) + \lambda_{\text{cyl}1}^*(0, h_1) \cdot (M_C / M) - \lambda_{\text{cyl}0} \quad (4.63)$$

$$\Delta\theta_2 / M = \lambda_{\text{cyl}1}^*(h_2, 0) + \lambda_{\text{cyl}2}^*(h_2, 0) \cdot (P_C / M) + \lambda_{\text{cyl}1}^*(h_2, 0) \cdot (M_C / M) + \lambda_{\text{cyl}0} \quad (4.64)$$

$M = M_0/\phi_a$ の関係を代入し、 M_0 についての整理を行うと次のようになる。

$$\begin{bmatrix} \Delta\theta_1 / M_0 \\ \Delta\theta_2 / M_0 \end{bmatrix} = \frac{1}{\phi_a} \cdot \left\{ \mathbf{q} + \mathbf{Q} \cdot \begin{bmatrix} P_C / M \\ M_C / M \end{bmatrix} \right\} - \frac{1}{\phi_a} \begin{bmatrix} \lambda_{\text{cyl}0} \\ -\lambda_{\text{cyl}0} \end{bmatrix} \quad (4.65)$$

式(4.65)の妥当性を確認するため、両式による計算結果を有限要素解析による結果と表 4.13、表 4.14にて比較した。検討条件は $R_m/W = 10.5$; $H/W = 4, 10$; $h_1/H = 0.5, 0.625, 0.75$ である。ヤング率 $E = 21\,000 \text{ kg/mm}^2$ 、ポアソン比 $\nu = 0.3$ 、肉厚 $W = 10 \text{ mm}$ とした。これらの表より、 h_1 、あるいは h_2 の絶対値が小さい場合、即ち回転角の絶対値が 10^{-3} rad 程度の大きさであれば両者は高い精度で一致

4 円筒環状き裂の熱応力下応力拡大係数簡便評価式の導出

していることがわかる。しかし、回転角の絶対値がこれより2桁小さい値となると、有限要素解析の数値計算上の誤差に起因すると思われるが、式(4.65)による計算結果との差が大きくなる。これが熱応力問題へ適用する上で問題がないことを、自由膨張時の端面回転角に対する同様の比較にて後ほど示す。

(The following table content is extremely faint and illegible due to low contrast and blurring in the original image. It appears to be a multi-column table with several rows of data.)

4 円筒環状き裂の熱応力下応力拡大係数簡便評価式の導出

表 4.13 円筒の任意位置環状き裂の端面回転角

(き裂面上に表面力を与える計算、 $H/W = 4$)

$E = 21000 \text{ kg/mm}^2$ $\nu = 0.3$ $W = 10 \text{ mm}$

$R/W = 10$ $H/W = 4$ $h_1/H = 0.5$ $M_0 = 174.7 \text{ kgmm/mm}$

		$\theta_0 = 0.001874$				$\phi_s = 0.937$	
a/W		0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
P_r/M		0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
M_r/M		0.934	0.924	0.908	0.881	0.839	0.770
$\Delta\theta_1$		0.000049	0.000188	0.000427	0.000808	0.001416	0.002417
$\Delta\theta_{1 \text{ FEM}}$		0.000041	0.000170	0.000395	0.000756	0.001331	0.002273
差%		20.96	10.35	8.12	6.89	6.41	6.35
$\Delta\theta_2$		-0.000049	-0.000188	-0.000427	-0.000808	-0.001416	-0.002417
$\Delta\theta_{2 \text{ FEM}}$		-0.000041	-0.000170	-0.000395	-0.000756	-0.001331	-0.002273
差%		20.96	10.35	8.12	6.89	6.41	6.35

$R/W = 10$ $H/W = 4$ $h_1/H = 0.625$ $M_0 = 174.7 \text{ kgmm/mm}$

		$\theta_0 = 0.001859$				$\phi_s = 0.945$	
a/W		0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
P_r/M		-0.003	-0.003	-0.004	-0.005	-0.006	-0.009
M_r/M		0.942	0.934	0.920	0.898	0.861	0.801
$\Delta\theta_1$		0.000031	0.000117	0.000266	0.000507	0.000895	0.001548
$\Delta\theta_{1 \text{ FEM}}$		0.000021	0.000102	0.000244	0.000473	0.000841	0.001453
差%		44.87	14.21	9.26	7.18	6.49	6.50
$\Delta\theta_2$		-0.000069	-0.000263	-0.000599	-0.001139	-0.002014	-0.003481
$\Delta\theta_{2 \text{ FEM}}$		-0.000062	-0.000243	-0.000557	-0.001066	-0.001889	-0.003264
差%		11.35	8.49	7.62	6.85	6.57	6.65

$R/W = 10$ $H/W = 4$ $h_1/H = 0.75$ $M_0 = 174.7 \text{ kgmm/mm}$

		$\theta_0 = 0.001820$				$\phi_s = 0.965$	
a/W		0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
P_r/M		-0.005	-0.005	-0.006	-0.007	-0.009	-0.013
M_r/M		0.963	0.959	0.951	0.939	0.919	0.883
$\Delta\theta_1$		0.000015	0.000057	0.000131	0.000252	0.000453	0.000810
$\Delta\theta_{1 \text{ FEM}}$		0.000004	0.000045	0.000116	0.000233	0.000426	0.000760
差%		253.52	27.28	12.52	7.96	6.55	6.69
$\Delta\theta_2$		-0.000087	-0.000333	-0.000764	-0.001470	-0.002648	-0.004732
$\Delta\theta_{2 \text{ FEM}}$		-0.000082	-0.000311	-0.000713	-0.001377	-0.002478	-0.004410
差%		5.61	7.12	7.18	6.77	6.87	7.32

4 円筒環状き裂の熱応力下応力拡大係数簡便評価式の導出

表 4.14 円筒の任意位置環状き裂の端面回転角

(き裂面上に表面力を与える計算、 $H/W = 10$)

$E = 21000 \text{ kg/mm}^2$ $\nu = 0.3$ $W = 10 \text{ mm}$

$R_1/W = 10$ $H/W = 10$ $h_1/H = 0.5$ $M_0 = 174.7 \text{ kgmm/mm}$

		$\theta_0 = 0.015812$				$\phi_s = 0.153$	
a/W		0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
P_1/M		0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
M_2/M		0.150	0.141	0.128	0.112	0.091	0.067
$\Delta\theta_1$		0.000008	0.000029	0.000060	0.000102	0.000153	0.000212
$\Delta\theta_{1 \text{ FEM}}$		0.000005	0.000026	0.000060	0.000105	0.000161	0.000225
差%		69.07	8.90	0.75	-2.66	-4.67	-6.05
$\Delta\theta_2$		-0.000008	-0.000029	-0.000060	-0.000102	-0.000153	-0.000212
$\Delta\theta_{2 \text{ FEM}}$		-0.000005	-0.000026	-0.000060	-0.000105	-0.000161	-0.000225
差%		69.07	8.90	0.75	-2.66	-4.67	-6.05

$R_1/W = 10$ $H/W = 10$ $h_1/H = 0.625$ $M_0 = 174.7 \text{ kgmm/mm}$

		$\theta_0 = 0.009922$				$\phi_s = 0.244$	
a/W		0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
P_1/M		-0.014	-0.014	-0.015	-0.015	-0.015	-0.015
M_2/M		0.239	0.227	0.208	0.183	0.151	0.114
$\Delta\theta_1$		-0.000000	-0.000001	-0.000001	-0.000002	-0.000004	-0.000005
$\Delta\theta_{1 \text{ FEM}}$		-0.000001	-0.000000	0.000002	0.000005	0.000008	0.000012
差%		-87.16	552.02	-172.76	-152.58	-146.15	-143.87
$\Delta\theta_2$		-0.000025	-0.000093	-0.000197	-0.000337	-0.000513	-0.000719
$\Delta\theta_{2 \text{ FEM}}$		-0.000019	-0.000085	-0.000187	-0.000328	-0.000506	-0.000718
差%		31.94	9.85	5.50	3.03	1.45	0.15

$R_1/W = 10$ $H/W = 10$ $h_1/H = 0.75$ $M_0 = 174.7 \text{ kgmm/mm}$

		$\theta_0 = 0.004896$				$\phi_s = 0.494$	
a/W		0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
P_1/M		-0.025	-0.025	-0.026	-0.027	-0.029	-0.031
M_2/M		0.488	0.471	0.444	0.406	0.353	0.283
$\Delta\theta_1$		-0.000002	-0.000008	-0.000017	-0.000029	-0.000047	-0.000070
$\Delta\theta_{1 \text{ FEM}}$		-0.000002	-0.000006	-0.000013	-0.000023	-0.000037	-0.000056
差%		-9.79	18.36	25.13	26.70	26.50	26.14
$\Delta\theta_2$		-0.000054	-0.000199	-0.000435	-0.000773	-0.001238	-0.001849
$\Delta\theta_{2 \text{ FEM}}$		-0.000045	-0.000182	-0.000407	-0.000735	-0.001189	-0.001794
差%		20.27	9.57	6.88	5.22	4.12	3.04

熱応力問題への適用

円筒環状き裂が円筒軸方向の中央位置にある場合同様、自由膨張時のK値と端部回転拘束によるK値を重ね合わせ、所用のK値を求める。

a) 円筒の自由膨張時のK値

き裂が円筒軸方向中央位置に存在する場合同様、所用のK値は図 4.20(b)の端部に M_t が作用するときのK値と図 4.20(c)のき裂面に表面力が作用するときのK値の和として求められ、後者のK値は端部に $(-M_t)/\phi_a$ が作用するときのK値に等しいので、円筒環状き裂の自由膨張によるK値 K_{free} は、結局図 4.21において M として

$$M_{free} = M_t + (-M_t / \phi_a) = (1 / \phi_a - 1) \cdot (-M_t) \quad (4.66)$$

が働いている場合として求められることになり、式(4.10)より次のように与えられる。

$$K_{free} = (M_c / M) \cdot (1 / \phi_a - 1) \cdot \left\{ \frac{(-M_t)}{Z} \sqrt{\pi a} \cdot F_M(\xi) \right\} \quad (4.67)$$

ここにモーメント再配分係数 M_c/M は式(4.47)~(4.50)により求まる。

式(4.67)の妥当性を確認するため、内外面温度差 $2\Delta T = 100^\circ\text{C}$ の線形温度分布の場合につき、この式による計算結果を有限要素解析による結果と表 4.15、表 4.16にて比較した。検討条件は $R_m/W = 10.5$; $H/W = 4, 10$; $h_l/H = 0.5, 0.625, 0.75$ である。ヤング率 $E = 21\,000 \text{ kg/mm}^2$ 、線膨張係数 $\alpha = 1 \times 10^{-5} \text{ } 1/^\circ\text{C}$ 、ポアソン比 $\nu = 0.3$ 、肉厚 $W = 10 \text{ mm}$ とした。これらの表より、両者が高い精度で一致していることがわかる。

表 4.15 円筒の任意位置環状き裂の

線形温度分布下の自由膨張時のK値 ($H/W = 4$)

$$E = 21000 \text{ kg/mm}^2 \quad \nu = 0.3 \quad W = 10 \text{ mm}$$

$$\Delta T = 50^\circ\text{C} \quad \alpha = 0.000010 \text{ } 1/^\circ\text{C}$$

$$R_i/W = 10 \quad H/W = 4 \quad h_1/H = 0.5 \quad M_t = 250 \text{ kgmm/mm}$$

	$\phi_a = 0.937$					
a/W	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
M_c/M	0.934	0.924	0.908	0.881	0.839	0.770
K_{Mplate}	27.67	38.93	50.55	65.64	87.70	123.62
K_{free}	1.73	2.41	3.08	3.88	4.93	6.38
K_{FEM}	1.73	2.49	3.19	3.92	4.94	6.36
差%	0.10	-3.15	-3.60	-1.11	-0.17	0.27

$$R_i/W = 10 \quad H/W = 4 \quad h_1/H = 0.625 \quad M_t = 250 \text{ kgmm/mm}$$

	$\phi_a = 0.945$					
a/W	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
M_c/M	0.942	0.934	0.920	0.898	0.861	0.801
K_{Mplate}	27.67	38.93	50.55	65.64	87.70	123.62
K_{free}	1.52	2.13	2.72	3.44	4.42	5.79
K_{FEM}	1.52	2.20	2.84	3.49	4.42	5.76
差%	0.24	-3.39	-4.27	-1.31	-0.08	0.46

$$R_i/W = 10 \quad H/W = 4 \quad h_1/H = 0.75 \quad M_t = 250 \text{ kgmm/mm}$$

	$\phi_a = 0.965$					
a/W	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
M_c/M	0.963	0.959	0.951	0.939	0.919	0.883
K_{Mplate}	27.67	38.93	50.55	65.64	87.70	123.62
K_{free}	0.98	1.37	1.76	2.26	2.96	4.00
K_{FEM}	0.96	1.42	1.89	2.31	2.98	3.98
差%	2.07	-3.55	-6.64	-2.09	-0.80	0.57

4 円筒環状き裂の熱応力下応力拡大係数簡便評価式の導出

表 4.16 円筒の任意位置環状き裂の

線形温度分布下の自由膨張時のK値 ($H/W = 10$)

$E = 21000 \text{ kg/mm}^2$ $\nu = 0.3$ $W = 10 \text{ mm}$
 $\Delta T = 50^\circ\text{C}$ $\alpha = 0.000010 \text{ 1/}^\circ\text{C}$

$R_0/W = 10$ $H/W = 10$ $h_1/H = 0.5$ $M_t = 250 \text{ kgmm/mm}$

	$\phi_a = 0.153$					
a/W	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
M_c/M	0.150	0.141	0.128	0.112	0.091	0.067
K_{Mplate}	27.67	38.93	50.55	65.64	87.70	123.62
K_{free}	22.95	30.48	35.99	40.58	44.17	46.16
K_{FEM}	22.83	31.07	36.35	40.97	44.61	46.95
差%	0.53	-1.91	-1.00	-0.96	-0.98	-1.67

$R_0/W = 10$ $H/W = 10$ $h_1/H = 0.625$ $M_t = 250 \text{ kgmm/mm}$

	$\phi_a = 0.244$					
a/W	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
M_c/M	0.239	0.227	0.208	0.183	0.151	0.114
K_{Mplate}	27.67	38.93	50.55	65.64	87.70	123.62
K_{free}	20.53	27.42	32.65	37.23	41.09	43.64
K_{FEM}	20.44	27.96	32.97	37.57	41.44	44.31
差%	0.46	-1.94	-0.98	-0.91	-0.83	-1.51

$R_0/W = 10$ $H/W = 10$ $h_1/H = 0.75$ $M_t = 250 \text{ kgmm/mm}$

	$\phi_a = 0.494$					
a/W	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
M_c/M	0.488	0.471	0.444	0.406	0.353	0.283
K_{Mplate}	27.67	38.93	50.55	65.64	87.70	123.62
K_{free}	13.83	18.80	23.02	27.29	31.70	35.87
K_{FEM}	13.77	19.17	23.24	27.47	31.76	36.08
差%	0.45	-1.94	-0.95	-0.64	-0.17	-0.57

b) 自由膨張時の端部回転角

円筒環状き裂の位置が円筒軸方向任意位置に存在する場合についても、中央位置にある場合同様、端部を回転拘束した円筒の熱応力の問題は、円筒端部が温度分布に基づき自由膨張した後、端部に生じた回転角を零にする端部モーメントを重ね合わせる問題として考えることができる。そこで、円筒の自由膨張時の端部の回転角をまず求めた。

この場合の変形は、Duhamelのアナロジ¹³⁵⁾により図 4.20(b)に示すように端面に M_i を負荷する場合と、き裂を含む面上に M_i を生じさせる応力分布に対応する表面力(図 4.20(c)の実線)が負荷される場合の変形の和と等価である。すなわち、式(4.58)において $M = M_i$ 、式(4.65)において $M_0 = (-M_i)$ において得られる回転角の和として所用の回転角が得られる。式(4.58)、(4.65)により、次式を得る。

$$\begin{aligned} \bar{\theta}_i &= \begin{bmatrix} \theta_1 / M_i \\ \theta_2 / M_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_1 / M_i \\ \theta_2 / M_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta\theta_1 / (-M_i) \\ \Delta\theta_2 / (-M_i) \end{bmatrix} \\ &= \left\{ 1 - \frac{1}{\phi_a} \right\} \cdot \left\{ \mathbf{q} + \mathbf{Q} \cdot \begin{bmatrix} P_C / M \\ M_C / M \end{bmatrix} \right\} + \frac{1}{\phi_a} \begin{bmatrix} \lambda_{\text{cyl}0} \\ -\lambda_{\text{cyl}0} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.68)$$

式(4.68)の妥当性を確認するため、内外面温度差 $2\Delta T = 100^\circ\text{C}$ の線形温度分布の場合につき、この式による計算結果を有限要素解析による結果と表 4.17、表 4.18にて比較した。検討条件は $R_m/W = 10.5$; $H/W = 4, 10$; $h_1/H = 0.5, 0.625, 0.75$ である。ヤング率 $E = 21\,000 \text{ kg/mm}^2$ 、線膨張係数 $\alpha = 1 \times 10^{-5} \text{ } 1/^\circ\text{C}$ 、ポアソン比 $\nu = 0.3$ 、肉厚 $W = 10 \text{ mm}$ とした。これらの表より、両者が実用上十分な精度で一致していることがわかる。

4 円筒環状き裂の熱応力下応力拡大係数簡便評価式の導出

表 4.17 円筒の任意位置環状き裂の

線形温度分布下の自由膨張時の端面回転角

($H/W = 4$; $\Delta T = 50^\circ\text{C}$, $\alpha = 1 \times 10^{-5} 1/^\circ\text{C}$)

$E = 21000 \text{ kg/mm}^2$ $\nu = 0.3$ $W = 10 \text{ mm}$

$R_1/W = 10$ $H/W = 4$ $h_1/H = 0.5$ $M_1 = 250 \text{ kgmm/mm}$

	$\theta_0 = 0.002681$					$\phi_a = 0.937$
a/W	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
P_2/M	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
M_c/M	0.934	0.924	0.908	0.881	0.839	0.770
θ_1	-0.002508	-0.002496	-0.002474	-0.002440	-0.002386	-0.002296
$\theta_{1 \text{ FEM}}$	-0.002509	-0.002497	-0.002478	-0.002446	-0.002396	-0.002312
差%	-0.01	-0.06	-0.14	-0.25	-0.42	-0.71
θ_2	0.002508	0.002496	0.002474	0.002440	0.002386	0.002296
$\theta_{2 \text{ FEM}}$	0.002509	0.002497	0.002478	0.002446	0.002396	0.002312
差%	-0.01	-0.06	-0.14	-0.25	-0.42	-0.71

$R_1/W = 10$ $H/W = 4$ $h_1/H = 0.625$ $M_1 = 250 \text{ kgmm/mm}$

	$\theta_0 = 0.002660$					$\phi_a = 0.945$
a/W	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
P_2/M	-0.003	-0.003	-0.004	-0.005	-0.006	-0.009
M_c/M	0.942	0.934	0.920	0.898	0.861	0.801
θ_1	-0.002510	-0.002504	-0.002492	-0.002473	-0.002442	-0.002391
$\theta_{1 \text{ FEM}}$	-0.002511	-0.002504	-0.002494	-0.002476	-0.002447	-0.002398
差%	-0.01	-0.03	-0.07	-0.13	-0.20	-0.33
θ_2	0.002507	0.002492	0.002465	0.002423	0.002354	0.002238
$\theta_{2 \text{ FEM}}$	0.002508	0.002494	0.002470	0.002431	0.002368	0.002261
差%	-0.02	-0.08	-0.18	-0.34	-0.59	-1.03

$R_1/W = 10$ $H/W = 4$ $h_1/H = 0.75$ $M_1 = 250 \text{ kgmm/mm}$

	$\theta_0 = 0.002605$					$\phi_a = 0.965$
a/W	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
P_2/M	-0.005	-0.005	-0.006	-0.007	-0.009	-0.013
M_c/M	0.963	0.959	0.951	0.939	0.919	0.883
θ_1	-0.002512	-0.002510	-0.002506	-0.002500	-0.002490	-0.002472
$\theta_{1 \text{ FEM}}$	-0.002512	-0.002510	-0.002507	-0.002501	-0.002491	-0.002473
差%	0.00	-0.01	-0.02	-0.03	-0.04	-0.06
θ_2	0.002508	0.002496	0.002474	0.002438	0.002379	0.002273
$\theta_{2 \text{ FEM}}$	0.002509	0.002498	0.002478	0.002446	0.002392	0.002296
差%	-0.01	-0.07	-0.16	-0.32	-0.56	-1.00

表 4.18 円筒の任意位置環状き裂の

線形温度分布下の自由膨張時の端面回転角

 $(H/W = 10 ; \Delta T = 50^\circ\text{C}、\alpha = 1 \times 10^{-5} 1/^\circ\text{C})$ E = 21000 kg/mm² v = 0.3 W = 10 mmR/W = 10 H/W = 10 h₁/H = 0.5 M_t = 250 kgmm/mm

		$\theta_0 = 0.022628$				$\phi_s = 0.153$
a/W	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
P _r /M	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
M _r /M	0.150	0.141	0.128	0.112	0.091	0.067
θ_1	-0.003450	-0.003425	-0.003387	-0.003336	-0.003274	-0.003203
$\theta_{1\text{FEM}}$	-0.003491	-0.003466	-0.003427	-0.003374	-0.003309	-0.003233
差%	-1.17	-1.19	-1.17	-1.13	-1.05	-0.91
θ_2	0.003450	0.003425	0.003387	0.003336	0.003274	0.003203
$\theta_{2\text{FEM}}$	0.003491	0.003466	0.003427	0.003374	0.003309	0.003233
差%	-1.17	-1.19	-1.17	-1.13	-1.05	-0.91

R/W = 10 H/W = 10 h₁/H = 0.625 M_t = 250 kgmm/mm

		$\theta_0 = 0.014199$				$\phi_s = 0.244$
a/W	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
P _r /M	-0.014	-0.014	-0.015	-0.015	-0.015	-0.015
M _r /M	0.239	0.227	0.208	0.183	0.151	0.114
θ_1	-0.003460	-0.003461	-0.003462	-0.003463	-0.003464	-0.003465
$\theta_{1\text{FEM}}$	-0.003500	-0.003499	-0.003497	-0.003495	-0.003491	-0.003488
差%	-1.13	-1.09	-1.02	-0.92	-0.79	-0.63
θ_2	0.003432	0.003359	0.003247	0.003095	0.002904	0.002681
$\theta_{2\text{FEM}}$	0.003476	0.003407	0.003300	0.003152	0.002964	0.002742
差%	-1.26	-1.41	-1.60	-1.81	-2.02	-2.21

R/W = 10 H/W = 10 h₁/H = 0.75 M_t = 250 kgmm/mm

		$\theta_0 = 0.007006$				$\phi_s = 0.494$
a/W	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
P _r /M	-0.025	-0.025	-0.026	-0.027	-0.029	-0.031
M _r /M	0.488	0.471	0.444	0.406	0.353	0.283
θ_1	-0.003461	-0.003466	-0.003472	-0.003481	-0.003494	-0.003511
$\theta_{1\text{FEM}}$	-0.003501	-0.003504	-0.003509	-0.003517	-0.003527	-0.003540
差%	-1.13	-1.11	-1.07	-1.00	-0.92	-0.82
θ_2	0.003421	0.003316	0.003145	0.002900	0.002563	0.002121
$\theta_{2\text{FEM}}$	0.003467	0.003369	0.003210	0.002978	0.002658	0.002234
差%	-1.32	-1.59	-2.02	-2.63	-3.56	-5.05

c) 端部回転拘束によるK値

自由膨張時においては端部で式(4.24)で与えられる $\bar{\theta}_i$ の回転が生じる。従って端部の回転が拘束されている場合には、端部にはその拘束によって自由膨張を打消す(- $\bar{\theta}_i$)を生じさせるモーメント M_r (拘束モーメントベクトルと呼ぶことにする)が働くことになり、この M_r によるK値 K_r が求めるものとなる。要はき裂が円筒軸方向中央位置にない場合は、端面におけるこの拘束モーメントの値が両端面で異なるので、図4.19の一般的な問題において、 $M_1 = M_{r1}$ 、 $M_2 = M_{r2}$ 、 $P_1 = P_2 = 0$ の問題において、端面の回転角 θ_{r1} 、 θ_{r2} を境界条件として与える(その代わりに M_{r1} 、 M_{r2} を未知とする)、図4.22の問題を解くことになる。

$$\mathbf{P}_{cr} = \mathbf{C}_r^{-1} \times \mathbf{B}_r \quad (4.69)$$

$$\mathbf{P}_{cr} = \begin{bmatrix} P_{cr} \\ M_{cr} \\ M_{r1} \\ M_{r2} \\ \theta_{r1} \\ \theta_{r2} \end{bmatrix} ; \quad \mathbf{B}_r = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \theta_{r1} \\ 0 \\ \theta_{r1} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.70)$$

$$\mathbf{C}_r =$$

$$\begin{bmatrix} \lambda_{yp}^*(h_1, 0) + \lambda_{yp}^*(0, h_2) & -\lambda_{ym}^*(h_1, 0) + \lambda_{ym}^*(0, h_2) & -\lambda_{ym}(h_1, 0) & \lambda_{ym}^*(0, h_2) & 0 & 0 \\ -\lambda_{\theta p}^*(h_1, 0) & \lambda_{\theta m}^*(h_1, 0) & \lambda_{\theta m}(h_1, 0) & 0 & -1 & 0 \\ -\lambda_{\theta p}^*(0, h_1) & \lambda_{\theta m}^*(0, h_1) & \lambda_{\theta m}(0, h_1) & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_{\theta p}^*(0, h_2) & \lambda_{\theta m}^*(0, h_2) & 0 & \lambda_{\theta m}^*(0, h_2) & 0 & -1 \\ \lambda_{\theta p}^*(h_2, 0) & \lambda_{\theta m}^*(h_2, 0) & 0 & \lambda_{\theta m}^*(h_2, 0) & 0 & 0 \\ 0 & -2\Delta\lambda & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

(4.71)

4 円筒環状き裂の熱応力下応力拡大係数簡便評価式の導出

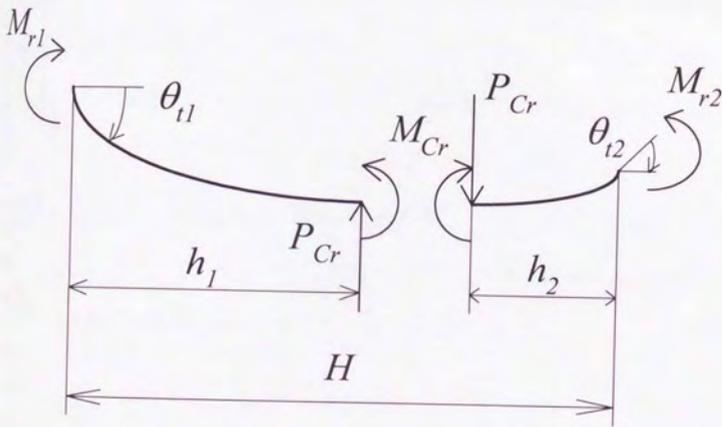


図 4.22 端部回転拘束を受ける熱応力下の円筒問題の
弾性支持梁問題への置き換え

4 円筒環状き裂の熱応力下応力拡大係数簡便評価式の導出

この連立方程式を解くことにより M_{cr} を求め、式(4.51)により端部回転拘束によるK値 K_r が求まることになる。

$$K_r = \frac{M_{cr}}{Z} \sqrt{\pi a} \cdot F_M(\xi) \quad (4.72)$$

d) 円筒環状き裂の熱応力下のK値

所用のK値は重ね合わせの原理より b), c)項にて求めたモーメント K_{free} , K_r との和として所用のK値 K_{cyl} が求まる。

$$K_{cyl} = K_{free} + K_r \quad (4.73)$$

このき裂が円筒軸方向の任意位置に存在する場合の所用のK値を、き裂が中央位置にある場合のK値と図 4.23、図 4.24にて比べた。検討条件は $R_m/W = 10.5$; $H/W = 4, 10$ である。これよりき裂が軸方向中央位置からずれる、すなわち h_l/H が0.5からずれることにより所用のK値が小さくなることがわかる。

従って、安全側の評価を行う上では、き裂が軸方向の中央位置にあるとして評価してよいことになる。そこで、以下次章における所用のK値の基本特性についても、き裂が円筒軸方向の中央位置にある場合に絞って行うことにした。

4 円筒環状き裂の熱応力下応力拡大係数簡便評価式の導出

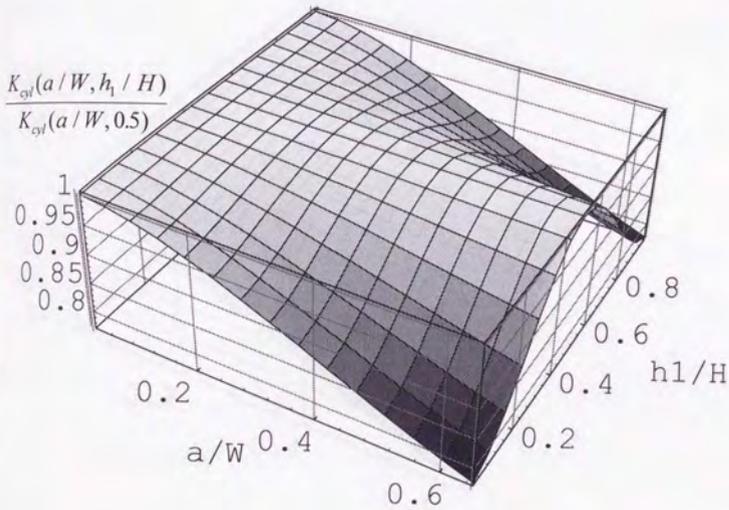


図 4.23 円筒環状き裂に熱応力下で作用するモーメントの
 き裂位置が及ぼす影響 ($R_m/W = 10.5$, $H/W = 4$)

4 円筒環状き裂の熱応力下応力拡大係数簡便評価式の導出

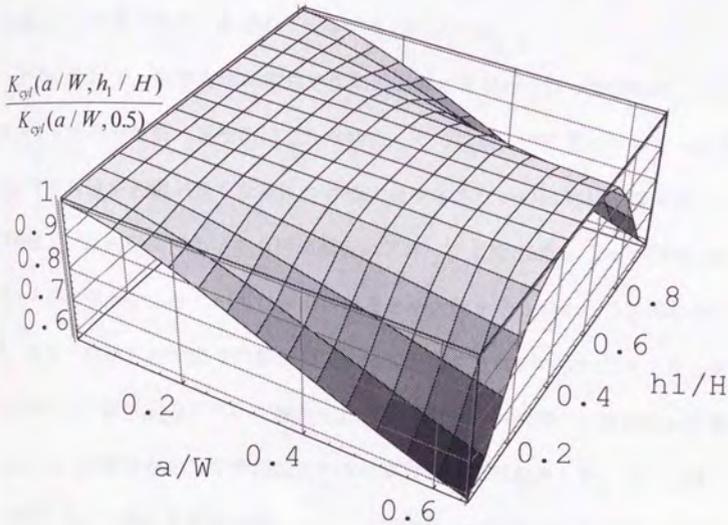


図 4.24 円筒環状き裂に熱応力下で作用するモーメントの
き裂位置が及ぼす影響 ($R_m/W = 10.5$, $H/W = 10$)

4.4 結 言

本章にて压力容器のき裂を扱うにあたっての基本となる円筒環状き裂の熱応力下応力拡大係数（ K 値）簡便評価式を導出した。円筒は端部を回転拘束され、温度はその半径方向に一次的に分布するものとした。

まず4.2節にて、端部を回転拘束された円筒環状き裂の一樣・線形熱応力下の K 値を有限要素解析・変位法により求めた。その結果、円筒環状き裂の一樣熱応力下の K 値がき裂が長くなるにつれ極大値を示さないのに対し、線形熱応力下の K 値は薄肉円筒であっても円筒断面のアスペクト比 H/W によっては極大値を示す場合があること、および厚肉になると極大値を示しやすいことがわかった。実用上の多くの問題で円筒は軸方向に変形拘束されていないことより、平均温度からの偏差成分について検討すれば十分であり、所用の K 値評価式を導く際にも、温度分布として平均温度からの偏差成分を対象とした。また、導く K 値評価式は「薄肉円筒を対象」とし、「円筒長さの影響が評価できるもの」とした。

次に4.3節にて、まず基本となる環状き裂を有する有限長円筒が端部に軸対称曲げを受ける場合の K 値簡便計算式を求めた。そしてこの式をもとに端面を回転拘束された円筒環状き裂の熱応力下 K 値を求める簡便評価式を導いた。

得られた K 値評価式によれば、肉厚方向の温度分布から定まる熱変形相当モーメント M_t のみ求めれば所用の K 値が得られ、過渡的な温度変化を受ける問題においても温度場解析のみによって刻々の K 値変化を求めることが可能になる。

4 円筒環状き裂の熱応力下応力拡大係数簡便評価式の導出

また、得られた評価式は薄肉円筒理論に基づくものであるが、薄肉円筒という制約を超えられると思われる範囲の円筒半径/肉厚比 R_m/W 、アスペクト比 H/W (例えば、 $R_m/W = 5.5$ 、 $H/W = 2$) に対しても実用上十分な精度で一致しており、その適用範囲は広い。

このK値評価式は円筒の長さの影響、環状き裂の円筒長さ方向における位置の影響を評価することが出来るものとした。この評価式によると、所用のK値はき裂が円筒の軸方向中央位置に存在するときに最大値をとることがわかった。

そこで、第5章のK値基本特性検討は、き裂が円筒長さの中央位置にある場合について行うことにした。

参考文献

- [124] Tada, H., Paris, P. C. and Irwin, G. R., *The Stress Analysis of Cracks Handbook(2nd ed.)*, (1985), Del Research Corporation, Penn.
- [125] Rooke, D. P. and Cartwright, D. J., *Compendium of Stress Intensity Factors*, (1976), Her Majesty's Stationery Office, London.
- [126] Sih, G. C., *Handbook of Stress Intensity Factors*, (1973), Institute of Fracture and Solid Mechanics, Lehigh University.
- [127] Murakami, Y. et al., *Stress Intensity Factors Handbook*, (1987), Pergamon Press, London.
- [128] 例えば、Timoshenko, S., *Strength of Materials, Part II*, 2nd printing (1934), D. Van Nostrad Company, New York, Chap. I.
- [129] Okamura, H., Watanabe, K. and Takano, T., Application of the Compliance Concept in Fracture Mechanics, *ASTM STP 536*, (1973), pp. 423-438.
- [130] Okamura, H., Watanabe, K. and Naito, Y., Some Crack Problems in Structural Reliability Analysis, *Reliability Approach in Structural Engineering*, (1975), pp. 243-257, Maruzen.
- [131] Hetényi, M., *Beams on Elastic Foundation*, 2nd edition (1971), The University of Michigan Press, Ann Arbor.
- [132] Parmerter, R. R. and Mukherji, B., Stress Intensity Factors for a Notched Beam on an Elastic Foundation, *Engng. Fract. Mech.*, Vol. 7 (1975), pp. 291-298.
- [133] Parmerter, R. R., A Method for Calculating the Reduction in Stress Intensity

4 円筒環状き裂の熱応力下応力拡大係数簡便評価式の導出

Factors due to an Elastic Foundation, *Engng. Fract. Mech.*, Vol. 8 (1976), pp. 539-546.

[134] 高橋 淳、エネルギー原理に基づく構造物の線形および非線形破壊力学解析に関する研究、東京大学学位論文(1991).

[135] 例えば、Fung, Y. C., *Foundations of Solid Mechanics*, (1965), Prentice-Hall Inc.