

応力方程式モデルによる都市・建築空間の
熱・空気流動の数値解析に関する研究

平成九年

大 岡 龍 三

応力方程式モデルによる都市・建築空間の
熱・空気流動の数値解析に関する研究

平成九年

大岡龍三

<目次>

第一章 序論

1.1 序論	1-1
1.2 各章の構成	1-2

第二章 乱流のクロージャ問題と標準型応力方程式モデル

2.1 RANS モデルの歴史	2-1
2.2 レイノルズ平均とクロージャ問題	2-1
2.3 レイノルズ応力の輸送方程式とその物理的意味	2-4
2.4 標準 D S M におけるレイノルズ応力の輸送方程式の各項のモデリング	2-5
2.4.1 圧力-歪相関項 Φ_{ij} のモデリング	2-5
2.4.2 乱流拡散項 D_{ij} のモデリング	2-12
2.4.3 ε 方程式のモデリング	2-13
2.4.4 代数応力方程式モデル	2-13
2.5 温度フラックス $\langle u_i \theta \rangle$ の輸送方程式とそのモデリング	2-15
2.5.1 乱流熱フラックスの輸送方程式とその物理的意味	2-15
2.5.2 圧力-温度勾配相関項 (Φ_{θ})	2-16
2.5.3 温度フラックスの拡散項 (D_{θ})	2-19
2.5.4 温度フラックスの散逸項 (ε_{θ})	2-19
2.5.5 $\langle \theta'^2 \rangle$ のモデリング	2-19
2.5.6 代数応力方程式モデル	2-20

第三章 乱流モデリング手法と高次 D S M

3.1 テンソル解析と不変量	3-1
3.2 圧力-歪相関項の一般形と高次モデリング	3-2
3.2.1 圧力-歪相関項と realizability	3-2
3.2.2 $\Phi_{ij(1)}$ の高次モデリング	3-2
3.2.3 $\Phi_{ij(2)}$ の高次モデリング	3-4
3.3 衝突領域を含む流れ場に適用可能な $\Phi_{ij(2)}$ のモデル	3-7
3.4 Poisson 方程式に基づいた圧力-歪相関項のモデリング	3-8
3.5 ε 方程式の高次モデリング	3-9
3.6 低レイノルズ数型 D S M	3-10

第四章 応力方程式モデルの数値計算手法

4.1 はじめに	4-1
4.2 差分定義点	4-1

4.3 移流拡散方程式と数値安定性条件	4-3
4.4 計算スキームによる安定化	4-4
4.4.1 一次風上差分スキームによる安定化	4-4
4.4.2 QUICK スキームによる安定化	4-5
4.4.3 一次精度後退差分による安定化	4-6
4.5 運動方程式安定のための PSEUDO VISCOSITY の導入	4-6
4.6 GGDH による負拡散に対する処理	4-8
 第五章 3次元室内等温・非等温気流の解析	 5-1
5.1 はじめに	5-1
5.2 等温流れ場の解析	5-1
5.2.1 計算概要	5-1
5.2.2 計算結果	5-4
5.2.3 まとめ	5-14
5.3 非等温流れ場の解析	5-15
5.3.1 計算概要	5-15
5.3.2 計算結果	5-17
5.3.3 まとめ	5-25
5.4 結論	5-26
 第六章 建物周辺気流の解析 その1	
立方体周辺気流の解析	6-1
6.1 はじめに	6-1
6.2 風洞実験の概要	6-1
6.3 DSM の基礎方程式	6-2
6.4 数値計算の概要	6-4
6.4.1 計算ケース	6-4
6.4.2 計算領域	6-4
6.4.3 メッシュ分割	6-4
6.4.4 境界条件	6-5
6.4.5 差分スキーム	6-5
6.5 計算結果	6-6
6.5.1 平均風速ベクトル	6-6
6.5.2 ASM と DSM の比較 - 移流・拡散項の代数近似の影響 -	6-7
6.5.3 wall reflection 項のモデル化の影響	6-9
6.5.4 ϕ_0 のモデル化の影響	6-11
6.5.5 D_0 のモデル化の影響	6-11

第七章 建物周辺気流の解析 その2

2次元建物モデル周辺気流の解析

- 圧力歪み相関項の乱流の生産構造に与える影響の評価 -

7.1 はじめに	7-1
7.2 風洞実験の概要	7-1
7.3 数値計算の概要	7-1
7.4 計算結果	7-4
7.4.1 k の分布	7-4
7.4.2 平均風速ベクトル	7-5
7.4.3 ノルマルストレス $\langle u_i' u_i' \rangle$ の分布	7-6
7.5 DSM における P_k の過小評価の原因とその改善	7-7
7.5.1 P_k の過小評価の構造的考察	7-7
7.5.2 P_k 評価に対する圧力歪相関項 ϕ_{ij} の役割	7-8
7.5.3 圧力歪相関項の検討	7-9
7.6 結論	7-11

第八章 DSM による不安定都市境界層の乱流熱輸送の解析

8.1 はじめに	8-1
8.2 対象とする流れ	8-1
8.3 数値計算の概要	8-2
8.3.1 計算ケース	8-2
8.3.2 基礎方程式	8-2
8.3.3 計算条件	8-2
8.4 DSM の解析と標準 $k-\varepsilon$ の問題点	8-6
8.4.1 平均温度分布	8-6
8.4.2 $\langle u_j \theta' \rangle$ の分布	8-6
8.4.3 k の生産メカニズムの検討	8-6
8.5 $k-\varepsilon$ における $\langle u_j \theta' \rangle$ のモデルの改良の効果	8-8
8.5.1 $\langle u_j \theta' \rangle$ に浮力生産項の効果を組み込んだ改良型 $k-\varepsilon$	8-8
8.5.2 平均温度分布	8-8
8.6 結論	8-9

第九章 結語

記号

x_i : 空間座標の3成分

($i=1$ 主流方向, $i=2$ 横方向, $i=3$ 鉛直方向)

u_i : x_i 方向の風速3成分

θ : 温度の瞬時値

p : 圧力

\bar{f} : 変数 f の格子平均

(ここでは filtering による格子平均)

$\langle f \rangle$: 変数 f のアンサンブル平均

f : アンサンブル平均値からのずれ

ν : 動粘性係数

H_b : 建物高さ

u_b : 高さ H_b における流入風速の u_i 成分

$\langle u_i' u_j' \rangle$: レイノルズストレス

k : 乱流エネルギー, $1/2 \langle u_i' u_i' \rangle$

P_k : k の生産項

P_{ij} : $\langle u_i' u_j' \rangle$ の生産項

ε : k の散逸項

ε_{ij} : $\langle u_i' u_j' \rangle$ の散逸項

C_{ij} : $\langle u_i' u_j' \rangle$ の移流項, $C_{ij} = \frac{\partial \langle u_i' u_j' \rangle}{\partial x_k}$

D_{ij} : $\langle u_i' u_j' \rangle$ の乱流拡散項,

$$D_{ij} = \frac{\partial}{\partial x_k} (-\langle u_i' u_j' u_k' \rangle - \langle p' u_j' \rangle \delta_{ik} - \langle p' u_i' \rangle \delta_{jk})$$

ϕ_{ij} : $\langle u_i' u_j' \rangle$ の圧力歪相関項

$\langle u_i' \theta' \rangle$: 温度フラックス

$P_{\theta(1)}$: $\langle u_i' \theta' \rangle$ の温度勾配による生産項

$P_{\theta(2)}$: $\langle u_i' \theta' \rangle$ の速度勾配による生産項

G_{θ} : $\langle u_i' \theta' \rangle$ の浮力による生産項

D_{θ} : $\langle u_i' \theta' \rangle$ の拡散項

ϕ_{θ} : $\langle u_i' \theta' \rangle$ の圧力勾配相関項

$\langle \theta'^2 \rangle$: 温度変動強度

P_{θ} : $\langle \theta'^2 \rangle$ の生産項

ε_{θ} : $\langle \theta'^2 \rangle$ の散逸項

R : スカラ変動の時間スケールと速度変動の時間スケールの比

h_n : 壁面から第一セル差分定義点までの距離

g_i : 重力加速度ベクトル (0, 0, -9.8 m/s^2)

ν : 分子動粘性係数

α : 温度の分子拡散係数

ν_i : 渦動粘性係数, $\nu_i = C_\mu k^2 / \varepsilon$

σ_θ : 温度の乱流プラントル数

ℓ : 乱れの長さスケール

h_p : 壁面第1セルの壁面直交方向の幅

$(u_i)_p$: 壁面第1セルの接線方向速度成分

k_p : 壁面第1セルの k

ε_p : 壁面第1セルの ε

τ_w : 壁面のシアーストレス

u_* : 壁面摩擦速度

a_{ij} : 非等方テンソル: $a_{ij} = \frac{(\langle u_i' u_j' \rangle - 2/3 k \delta_{ij})}{k}$

A_2 : 第二不変量: $A_2 = a_{ij} a_{ji}$

A_3 : 第三不変量: $A_3 = a_{ij} a_{jk} a_{ki}$

A : Lumley の flatness parameter: $A = 1.9/8(A_2 - A_3)$

S_{ij} : 平均歪テンソル: $S_{ij} = 1/2 \cdot (\partial \langle u_i \rangle / \partial x_j + \partial \langle u_j \rangle / \partial x_i)$

Ω_{ij} : 平均渦度テンソル: $\Omega_{ij} = 1/2 \cdot (\partial \langle u_j \rangle / \partial x_i - \partial \langle u_i \rangle / \partial x_j)$

"(w)" : w 番目の壁面

$h_n^{(w)}$: w 番目の壁面からの鉛直距離

"wo" : 全壁面数

Re : レイノルズ数

: バルクリチャードソン数

Ar : アルキメデス数

本論の記号は基本的には以上の記述に従うが、各章、各節において、必要に応じて異なる使い方をする場合もある。そのような場合は本文中で記号を定義している。

第一章

序論

第1章 序論

1.1 序

建築都市環境工学分野において、室内や屋外、果ては都市広域環境にいたるまでの空気流動やそれに伴う熱や物質の輸送を CFD (Computational Fluid Dynamics: 計算流体力学) の手法を用いて解析する例が多く見られる。CFD の手法には大きく分けて乱流モデルを施さず Navier-Stokes 方程式を直接解く DNS (Direct Numerical Simulation: 直接シミュレーション) と Navier-Stokes 方程式にアンサンブル平均やフィルタリングなどの平均化操作を施し乱流モデル (Turbulence Model) を用いたシミュレーションがある。後者の内アンサンブル平均 (レイノルズ平均) を利用した乱流モデルは一般に RANS (Reynolds Averaged Navier-Stokes) モデルと呼ばれている。代表的な例に $k-\epsilon$ 型乱流モデルがある。またフィルタリング (粗視化) 操作を施す乱流モデルを SGS (Subgrid Scale) モデル、より一般的には LES (Large Eddy Simulation) と呼んでいる。

本研究では RANS モデルのうち最も精度の高いと言われている応力方程式モデルを建築都市環境工学分野に現れる様々な流れ場・温度場・拡散場に適用し、その有効性の確認を行い、今後の利用可能性・発展性について検討を行う。応力方程式モデルは、Navier-Stokes 方程式や温度の輸送方程式にアンサンブル平均を施した時に現れるレイノルズ応力 ($-\langle u_i u_j \rangle$) や温度フラックス ($-\langle u_i \theta \rangle$) 等の 2 次モーメントを $k-\epsilon$ 型乱流モデルのように勾配拡散近似を用いて表すのではなく、その輸送方程式を直接解くことにより求めるものである。応力方程式モデルは DSM (Differential Second-moment Closure model または Differential Stress Model) あるいは RSM (Reynolds Stress Model) と呼ばれている。RSM という表現はレイノルズ応力の輸送方程式のみのモデルという印象を受けるので、本論文においては、DSM という表現を用いる。

現在までの数値流体力学の研究分野においては、多くの流れ場において数値精度の点では LES が最も精度の高い乱流モデルであるということが一般常識となりつつある。従来は、LES は解の時間積分を行うためのデータの蓄積を行うため膨大なメモリと計算時間を要し、それが LES による環境解析の実用化のネックとなっていた。しかしながら近年の計算機科学の急速な発展はそれらの問題をクリアしてきている。さらに LES においては、Scale Similarity の概念に基づき Dynamic にモデル係数を求める Dynamic LES が提案され、LES の数値予測精度は現在もなお、向上し続けている。

それでもなお著者は、DSM の研究を行うことの意味は、十分にあると考える。一つは LES がいかに実用化に近づいたとはいえ、計算負荷・データ取得の煩雑性を考えれば、まだはるかに RANS モデルが有利であり、今後もその傾向は続くものと考えられる。また実際の建築物等の設計において常時大規模計算を行うわけではなく、通常何らかの簡易式や簡易化された設計指標を用いる。これらの簡易式や設計手法の導出には物理現象に対する深い洞察が必要となるが、DSM の研究では 2 次モーメントの輸送方程式まで立ち回り、その物理的構造を

詳細に考察する必要があるため、その研究成果により物理構造に基づいた簡易式の導出も可能となる。さらに乱流における2次モーメントのクロージャの問題はO. Reynolds以来約1世紀にわたって研究がつけられているが、いまだに解けない古典物理の問題であり、その物理学的・数学的興味はつきない。そして何よりもこの研究を進める大きな推進力は、この分野は著者がもっとも興味をいだいているということである。

1.2 本論文の構成

本論文は以下の9章からなり、さらに大きく、主としてDSMの理論的解説である第二章~第四章の基礎編と、実際の建築都市空間への適用例である第五章~第八章の応用編に分けられる。

第一章では、まず序論として本研究の目的と概要が述べられる。

第二章では、DSMを中心としたRANSモデルの発展の歴史を簡単に解説し、レイノルズストレス $\langle u_i' u_j' \rangle$ 及び乱流熱フラックス $\langle u_i' \theta \rangle$ の各輸送方程式を導出し、それをクローズする最も標準的なDSMの説明を行う。

第三章では、DSMを中心としたRANSモデルのモデリングのための数学的手法、物理学的手法について解説し、現在提案されているDSMの高次モデルを紹介する。

第四章では、レイノルズストレス $\langle u_i' u_j' \rangle$ 輸送方程式を解くための、具体的な数値計算法について説明する。特に数値安定化手法について解説を行う。

第五章では、DSMを実際の室内の等温・非等温気流に適用した例を示す。特に工学上広く用いられているk-εモデルやDSMを簡略化したASMとの比較を詳細に行い、DSMの利点とk-εとASMの問題点を構造的に検討している。

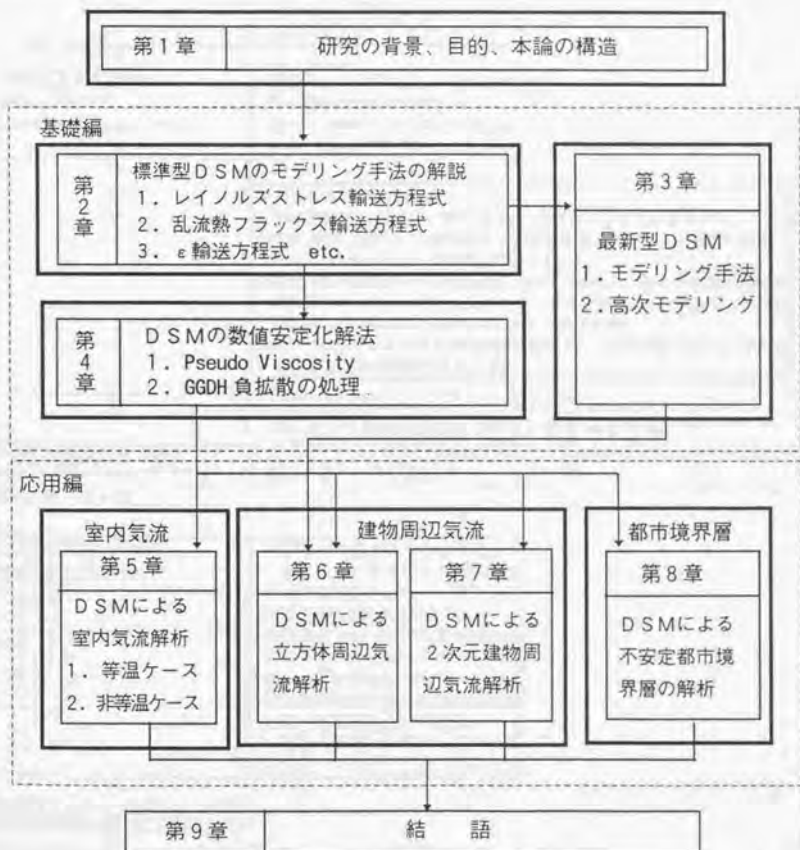
第六章では、屋外建物周辺等温流れ場を想定して、立方体周辺3次元流れ場の解析にDSMを適用し、ASM、LESとの比較により、その有効性を検討する。特に従来より、DSMにおいて問題となっていたImpingingを含む流れ場におけるWall reflection項の取り扱いについて検討する。更に各種DSMの高次モデルについても検討した。

第七章では、屋外建物周辺等温流れ場のうち、境界層流中におかれた2次元建物モデルにDSMを適用し、k-εモデルや実験との比較により、その有効性を検討する。特に本章では、前章の考察を受け、圧力歪み相関項の役割に着目し、そのモデリングが、乱流エネルギーの生産構造に及ぼす影響について考察した。

第八章では、不安定都市境界層にDSMを適用し、その精度を確認した。また同じ流れ場k-εモデルにより解析し、k-εモデルの構造的欠陥をDSMの結果より推察し、不安定境界層に適用可能な新しいk-εモデルを提案した。

第九章では、全体のまとめを行っており、本研究の成果と今後の課題が総括されている。

以下に本論文の構成をフローで示す



DSM 解析ケース

得られた知見・問題点

本論第5章

A. 室内気流の DSM

A1. 等温室内気流解析

- ・標準 IP モデル¹⁾
- ・wall reflection $\phi_{(2)}$ ²⁾ なし

k-ε モデル, ASM に比べて最も良い結果をしめす。
特に噴流域で他の二つのモデルに比べて DSM の予測精度が高い。
これは DSM がレイノルズストレスの輸送方程式を忠実にモデル化しているため

A2. 非等温室内気流解析

- ・標準 IP モデル¹⁾
- ・wall reflection $\phi_{(2)}$ ²⁾ なし

過去の k-ε モデルに比べて風速分布・温度分布ともに改善。
過去の ASM と比べると噴流における一部を除き殆ど差はない。

室内気流の DSM まとめ

- ①室内気流解析において DSM は k-ε, ASM よりもよい結果を示す。
- ②特に ASM と同じく生産項を正しく評価するため、k-ε が評価し得ない stream line curvature の効果を再現する。
- ③更に移流の影響が大きい噴流部において DSM は ASM の結果を改善する。これは ASM がストレスやフラックスの移流項を代数近似しているのに対し、DSM は忠実に解いているためである。
- ④但し、全般にこれらモデル間の差異は小さい。室内気流では k-ε でさえそこそこ妥当な結果をもたらす。

B. 建物周辺気流の DSM

本論第6章・第7章

B1. 立方体周辺気流解析

- ・標準 IP モデル
- ・ $\phi_{(2)}$ ²⁾ なし

- ・ASM, k-ε で見られた立方体風上コーナーにおける異常なストレスの非等方性改善される。←ストレス輸送方程式の移流項のため
- ・乱流エネルギー k が立方体風上コーナーで LES と比べてやや大きめ ← $\phi_{(2)}$ ²⁾ を除外している
- ・立方体屋上面逆流・後方循環流が LES・風洞実験と比べて過大
→これが後々まで DSM のネックとなる

Craft-Launder モデルの導入

B2. 立方体周辺気流解析

- ・標準 IP モデル
- ・Craft-Launder の $\phi_{(2)}$ ²⁾ の利用

- ・立方体風上コーナーでの乱流エネルギー k の過大評価が改善
- ・立方体屋上面逆流・後方循環流が LES・風洞実験と比べて過大

B3. 立方体周辺気流解析 ・SSG モデルや FLT モデル利用	・立方体屋上面逆流・立方体後方循環流の過大評価は改善されず
--------------------------------------	-------------------------------

B4. 立方体周辺気流解析 ・標準 IP モデル ・ ϕ_{H1} なし ・ ϕ_{H2} は Craft-Lauder	・立方体屋上面逆流が小さくなり LES・実験に近づいた ・立方体後方循環流はやや小さくなるものの過大評価は改善されず
---	---

B5. 2次元リブ周辺気流解析 ・標準 IP モデル ・Craft-Lauder の ϕ_{H2} の利用	・立方体周辺気流解析同様 2次元リブ後方循環流が実験より大きめ
--	---------------------------------

B6. 2次元リブ周辺気流解析 ・標準 IP モデル 但し ϕ_{H2} の係数を 0.6→0.3 再分配を効き難くした。 ・ ϕ_{H2} は Craft-Lauder	・2次元リブ後方循環流が小さくなり、実験に近づいた。
---	----------------------------

建物周辺気流まとめ

- ① DSM では ASM に比べ移流拡散項を正確に評価するため立方体風上コーナーにおける異常なストレスの非等方向性改善される。
- ② 従来より Impinging 領域において問題となっていた Gibson-Lauder タイプの ϕ_{H2} に代わり、Craft-Lauder タイプの ϕ_{H2} を用いることにより Impinging 領域における k の過大評価を改善することができた。
- ③ 但し、DSM の B4, B6 を除く全ての解析は屋上面逆流・後方循環流を過大評価する。channel 流と Back step における DSM の予測精度の高さから鑑みて、Bluff Body による剥離領域におけるモデルに問題があるものと考えられる。
- ④ B4, B6 の結果よりこの剥離領域における圧力歪み相関項のモデルに問題があると推察される。即ち現状の標準型 DSM では、Bluff Body による剥離領域に対応するように Wall reflection 項のモデルがなされていない。
- ⑤ 従って、Durbin のボアソン方程式型の圧力歪み相関項のモデルや Wall reflection 項を必要とせず不変量などを用いて壁面効果を組み込んだモデルを導入する必要がある。但し B3 の結果より本計算では不変量を用いたモデルである SSG と FLT はダメであった。

本論第 8 章

C. 不安定都市境界層流の DSM

C1. Hot Panel 上の乱流熱輸送の解析 ・標準 IP モデル ・ ϕ_{H2} は Craft-Lauder	・温度分布は k-ε の結果を大幅に改善し実験とはほぼ一致。 ・これは DSM が温度フラックスの生産項を忠実に再現するため（特に浮力項）
--	--

不安定都市境界層まとめ

- ① 不安定境界層中では浮力の効果が卓越する。
- ② DSM は温度フラックスの輸送方程式中の生産項を忠実に再現するため（特に浮力生産項の影響を正しく組み込むため）予測精度は非常に高い。
- ③ 一方 k-ε は単純な渦拡散モデルを用いているので、温度フラックスの正しい評価ができず、温度分布も実験とは大きく異なる結果を示す。
- ④ しかしながら浮力効果を組み込んだ k-ε は標準 k-ε の結果をある程度改善することが示されている。

総括

- ① DSM はレイノルズストレスや温度フラックスの輸送方程式の生産項を忠実に再現するため、streamline curvature や不安定境界層など生産項の影響が卓越する流れ場において $k-\varepsilon$ に比べ非常によい結果を示す。このような流れ場は建築環境工学では室内循環流や不安定都市境界層にあたる。
- ② また DSM は ASM にくらべストレスの移流項を正確に評価するため、吹き出し噴流域や建物上空風など移流が卓越する流れ場において ASM よりもよく実験に一致する。
- ③ しかしながら現状の標準型の DSM は Bluff Body による流れの剝離領域での予測精度に欠陥があり、このような領域を含む流れ場の予測に用いるには注意が必要である。
- ④ Bluff Body による流れの剝離領域に対応可能な DSM を開発するためには、現状の圧力歪み相関項になんらかの改良を加える必要がある。

第二章

乱流のクロージャ問題と 標準型応力方程式モデル

2.1

2.1.1

2.1.2

2.1.3

2.1.4

2.1.5

第2章 乱流のクロージャ問題と標準型応力方程式モデル

2.1. RANS モデルの歴史

最初にレイノルズ平均の概念を持ち出したのは O. Reynolds¹⁾ であった (1895)。レイノルズ平均の定義は式 (2.2.4~2.2.6) に示されている。しかしそれに先立ち、Boussinesq²⁾ はすでに、時間平均された Navier-Stokes 方程式 (以下 N-S 方程式) のクロージャ問題の簡単な解決策として、渦 (乱流) 粘性係数 (eddy viscosity) の概念を導入していた (1877)。Prandtl³⁾ は渦粘性係数を決定するために混合距離 (mixing length) の概念を導入した (1925)。彼はさらに、乱流エネルギー k と渦粘性係数を結びつけ、 k を得るために k の輸送方程式を導入した⁴⁾ (1945)。これは後の 1 方程式モデルの先駆となるものである。その後、Rotta⁵⁾ はレイノルズストレス $\langle u_i' u_j' \rangle$ の輸送方程式を導入した (1951)。これは後の応力方程式モデル (Differential Stress Equation Model, DSM) の基礎となる。1970 年代に入り計算機能力の著しい発達とともに、CFD (Computational Fluid Dynamics) が航空、機械の分野で実用的に使われるようになり、乱流モデルも大幅に進歩した。それより先に、Davidov⁶⁾ によって既に ε の輸送方程式の概念は導入されていたが (1961)、Hanjalic⁷⁾ (1970) や Rodi⁸⁾ (1971) の研究により ε の輸送方程式のモデル化が進められた。高レイノルズ数流れに対する k - ε 型 2 方程式モデルは、Launder と Spalding⁹⁾ によって一応の完成をみた (1974)。それと平行して、応力方程式モデルの研究が Daly と Harlow¹⁰⁾ によって進められ (1970)、Launder, Reece 及び Rodi¹¹⁾ によって基本的な形が作られた (1975)。その後、Shumann¹²⁾ (1977) と Lumley¹³⁾ (1978) によって実現性 (realizability) と不変量の概念が導入され、それに従いモデルの改良が行われるようになった。一方で吉澤ら¹⁴⁾ による統計理論 TSD1A や Yakhot, Orszag ら¹⁵⁾ による繰り込み群の理論によるモデル化の試みも行われている。

2.2 レイノルズ平均とクロージャ問題

層流、乱流にかかわらず、非圧縮性非等温の流体現象は、次の連続の式と浮力を組み込んだ N-S 方程式で記述される。

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (2.2.1)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - g_i \beta \theta \quad (2.2.2)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{\partial u_j \theta}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \alpha \frac{\partial \theta}{\partial x_j} \quad (2.2.3)$$

ここで u_i は瞬時速度ベクトルの各成分、 p は圧力、 ρ は流体の密度、 ν は動粘性係数、 θ は温度、 g_i は重力加速度ベクトルの各成分、 β は体膨張率、 α は温度拡散係数である。速度、圧力および

温度は次のように、平均部分と変動部分に分解される（レイノルズ分解）。

$$u_i = \langle u_i \rangle + u_i', \quad p = \langle p \rangle + p', \quad \theta = \langle \theta \rangle + \theta' \quad (2.2.4)$$

このとき、平均部分 $\langle \phi \rangle$ と $\langle \psi \rangle$ 及びその変動部分 ϕ' と ψ' はレイノルズ平均規約

$$\langle \phi' \rangle = \langle \psi' \rangle = 0 \quad (2.2.5)$$

$$\langle \phi \psi \rangle = \langle \phi \rangle \langle \psi \rangle + \langle \phi' \psi' \rangle \quad (2.2.6)$$

$$\langle \phi' \langle \psi \rangle \rangle = \langle \psi' \langle \phi \rangle \rangle = 0 \quad (2.2.7)$$

に従うと仮定される。レイノルズ平均として、時間的に定常な乱流においては時間平均

$$\langle \phi \rangle = \langle \phi \rangle^{(T)}(x) \equiv \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \phi(x, t) dt \quad (2.2.8)$$

を、空間的に均質（homogeneous）な乱流においては、空間平均

$$\langle \phi \rangle = \langle \phi \rangle^{(V)}(t) \equiv \lim_{V \rightarrow \infty} \frac{1}{V} \int_V \phi(x, t) dx \quad (2.2.9)$$

を用いることができる。しかし、実際の工学問題で現れる多くの乱流は定常でも均質でもないため、レイノルズ平均の定義としてアンサンブル平均

$$\langle \phi \rangle = \langle \phi \rangle^{(E)}(x, t) \equiv \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \phi_k(x, t) \quad (2.2.10)$$

を用いることが多い。もし、エルゴード性を仮定すれば、定常乱流では

$$\langle \phi \rangle^{(E)} = \langle \phi \rangle^{(T)}$$

均質乱流では

$$\langle \phi \rangle^{(E)} = \langle \phi \rangle^{(V)}$$

がそれぞれ成立する。

式(2.2.4)を式(2.2.1)、(2.2.2)並びに(2.2.3)に代入し、両者にレイノルズ平均を施すことにより

$$\frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_i} = 0 \quad (2.2.11)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial t} + \langle u_j \rangle \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_j} \\ = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \langle p \rangle}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_j} + \frac{\partial \langle u_j \rangle}{\partial x_i} \right) - \frac{\partial}{\partial x_j} \langle u_i' u_j' \rangle - g_i \beta \langle \theta \rangle \end{aligned} \quad (2.2.12)$$

$$\frac{\partial \langle \theta \rangle}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \langle u_j \rangle \langle \theta \rangle = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\alpha \frac{\partial \langle \theta \rangle}{\partial x_j} - \langle u_j' \theta' \rangle \right) \quad (2.2.13)$$

が得られる。因みに、式(2.2.11)、(2.2.12)に基づくk-εモデルや応力方程式モデルを用いて角柱周りの流れ場を解析すると、周期的な渦放出が再現されることから、レイノルズ平均操作を単純に時間平均とみなすことは適切でない。

式(2.2.12)の右辺の $\langle u_i' u_j' \rangle$ がレイノルズ応力(Reynolds Stress)であり、式(2.2.13)の右辺の $\langle u_i' \theta' \rangle$ が温度フラックスである。レイノルズ応力の本来の定義は $-\rho \langle u_i' u_j' \rangle$ であるが、ここでは簡略に $\langle u_i' u_j' \rangle$ と記す。この二重相関により、式(2.2.10)、(2.2.11)は平均部分に関して閉じていない。未知量であるレイノルズ応力 $\langle u_i' u_j' \rangle$ を求めるには、その輸送方程式が必要となる。式(2.2.2)より式(2.2.11)を差し引くことにより、変動速度成分に対するナビエーストークス方程式

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_i'}{\partial t} + \langle u_j \rangle \frac{\partial u_i'}{\partial x_j} = -u_j' \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_j} - u_j' \frac{\partial u_i'}{\partial x_j} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x_i} \\ + \nu \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j'}{\partial x_i} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \langle u_i' u_j' \rangle - g_i \beta \theta' \end{aligned} \quad (2.2.12)$$

が得られるが、これより、 $\langle u_i' u_j' \rangle$ の輸送方程式は

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle u_i' u_j' \rangle}{\partial t} + \langle u_k \rangle \frac{\partial \langle u_i' u_j' \rangle}{\partial x_k} = -\langle u_j' u_i' \rangle \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_k} - \langle u_i' u_k' \rangle \frac{\partial \langle u_j \rangle}{\partial x_k} \\ - g_i \beta \langle u_j' \theta' \rangle - g_j \beta \langle u_i' \theta' \rangle \\ + \left\langle \frac{p'}{\rho} \left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j'}{\partial x_i} \right) \right\rangle \\ + \frac{\partial}{\partial x_k} \left(-\langle u_i' u_j' u_k' \rangle - \langle \frac{p'}{\rho} u_j' \rangle \delta_{ik} - \langle \frac{p'}{\rho} u_i' \rangle \delta_{jk} + \nu \frac{\partial \langle u_i' u_j' \rangle}{\partial x_k} \right) \end{aligned}$$

$$-2\nu \left\langle \frac{\partial u_i'}{\partial x_k} \frac{\partial u_j'}{\partial x_k} \right\rangle$$

(2.2.13)

となる。式(2.2.13)においては、新たに三重速度相関項 $-\frac{\partial}{\partial x_k} \langle u_i' u_j' u_k' \rangle$ 、圧力-歪相関項 $\left\langle \frac{p}{\rho} \left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j'}{\partial x_i} \right) \right\rangle$ 、圧力-速度相関項 $\frac{\partial}{\partial x_k} \langle p' u_j' \rangle \delta_{ik} + \langle p' u_i' \rangle \delta_{jk}$ 等の高次相関項、また式(2.2.13)最後の粘性消散に関連した微係数相関項が含まれている。したがって、式(2.2.13)は二重相関 $\langle u_i' u_j' \rangle$ に関して閉じておらず、三重相関 $\langle u_i' u_j' u_k' \rangle$ の輸送方程式を導くと、四次相関項のような更なる高次相関項が現れる。流れの物理的特性を調べ、高次モーメントをより低次の物理量で近似的に表現し、この連鎖を断ち切ることをクロージャ(closure)問題という。特に二重相関のレベルで閉じることを2次モーメントクロージャと呼ぶ。

2.3 レイノルズ応力の輸送方程式とその物理的意味

レイノルズストレスの輸送方程式を再掲し、各項の物理的意味を簡単に述べる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle u_i' u_j' \rangle}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left(u_k \langle u_i' u_j' \rangle \right) &= - \left(\langle u_i' u_k' \rangle \frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \langle u_j' u_k' \rangle \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right) - g_i \cdot \beta \cdot \langle u_j' \theta' \rangle - g_j \cdot \beta \cdot \langle u_i' \theta' \rangle \\ &+ \left\langle \frac{p}{\rho} \left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j'}{\partial x_i} \right) \right\rangle + \frac{\partial}{\partial x_k} \left(- \langle u_i' u_j' u_k' \rangle - \frac{\langle p u_i' \rangle}{\rho} \delta_{ik} - \frac{\langle p u_j' \rangle}{\rho} \delta_{jk} + \nu \frac{\partial \langle u_i' u_j' \rangle}{\partial x_k} \right) \\ &- 2\nu \left\langle \frac{\partial u_i'}{\partial x_k} \frac{\partial u_j'}{\partial x_k} \right\rangle \end{aligned} \quad (2.3.1)$$

(A) $\langle u_i' u_j' \rangle$ の実質微分項。時間微分を除いた部分が移流項で C_{ij} と略記。

(B) $\langle u_i' u_j' \rangle$ の平均速度勾配による生産項。 P_{ij} と略記。

応力方程式モデルでは、この項をモデル化せずに直接扱うということが、最大の利点の一つである。

(C) $\langle u_i' u_j' \rangle$ の浮力による生産・消散項。 G_{ij} と略記する。

この項も応力方程式モデルでは、直接扱う。

(D) 圧力-歪相関項 $\langle \phi_{ij} \rangle$ と略記する。

レイノルズストレス間のエネルギーの再分配を行うという役割をもつ項である。この項の持つ最も重要な性質の1つはそのトレースがゼロ、すなわち、

$$\Phi_{ij} = 0$$

である。したがって乱流エネルギー k の輸送方程式中には圧力-歪相関項が現れない。すなわち k の大小には直接寄与しないが、 k を構成するストレス間の再分配には寄与する項である。たとえば、2次元チャンネル流で、スパン(x3)方向の $\langle u_i'^2 \rangle$ の生産項がゼロである場合でも $\langle u_i'^2 \rangle$

はゼロでない。これは $\langle u_i'^2 \rangle$ が他のノルマルストレス $\langle u_i'^2 \rangle$, $\langle u_j'^2 \rangle$ からエネルギーを圧力-歪相関項により譲り受けるからである。応力方程式モデルではこの項のモデリングが最も重要な課題の1つである。

(E) $\langle u_i' u_j' \rangle$ の拡散項 (D_{ij} と略記。)。

(F) $\langle u_i' u_j' \rangle$ の散逸項 (ε_{ij} と略記。)。

(2.3.1)式右辺(F)部分はストレスの散逸項である。一般に高数領域では粘性による拡散項(2.3.1)式(E)部分ののにかかる項)は無視できるが、 ε_{ij} は一般に無視しえない。というのは、たとえば室内のような閉空間で(2.3.1)式を積分すれば、 ϕ_{ij} 等の項はほぼゼロなるが、 P_{ij} はあるレベルで存在する。従ってこの P_{ij} とバランスする ε_{ij} が必要となる。また、 ε_{ij} と D_{ij} の最も大きな差異は、 ε_{ij} は変動速度の微係数間の相関を含んでいるのに対し、 D_{ij} はこれを含んでいないことがある。粘性消散が問題となる非常に小さい空間スケールにおいて、この変動速度の微係数はかなり大きなものと評価される。 ε_{ij} が一般に無視できないということがこの点からも理解される。

2. 4 標準DSMにおけるレイノルズ応力の輸送方程式の各項のモデリング

$\langle u_i' u_j' \rangle$ 等の2次モーメントを得るために勾配拡散表現等を用いずに、2次モーメントの輸送方程式を直接に解こうとするのが応力方程式モデル(Differential Stress Model, 以降DSMと略記する)である。現在最もよく用いられている標準的なDSMはLaunderらの提案を基にしたものである。以降この標準的なDSMのモデル化の方法、内容について解説する。

2. 4. 1 圧力-歪相関項 ϕ_{ij} のモデリング

圧力-歪相関項 ϕ_{ij} は未だ汎用的モデルが確立されておらず、DSMのモデリングに際して最も議論の多い項の一つである。次章でテンソル解析に基づく ϕ_{ij} の一般的表現を示すが、本節では現在広く用いられている最も単純な標準的モデルについて解説する。

a) 圧力の変動成分に関するポアソン方程式

圧力の変動成分に関するポアソン方程式は次式である¹¹⁾。

$$\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial^2 p'}{\partial x_i^2} = - \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} (\bar{u}_i' \bar{u}_j' - \langle \bar{u}_i' \bar{u}_j' \rangle) - 2 \frac{\partial \langle \bar{u}_k \rangle}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \bar{u}_j'}{\partial x_k} - g \cdot \beta \frac{\partial \theta'}{\partial x_i} \quad (2.4.1)$$

この式の解は次の様に表現される。

$$\begin{aligned} \frac{p'}{\rho} = & \frac{1}{4\pi} \iiint_V \left[\frac{\partial^2}{\partial \bar{x}_i \partial \bar{x}_j} (\bar{u}_i' \bar{u}_j' - \langle \bar{u}_i' \bar{u}_j' \rangle) + 2 \frac{\partial \langle \bar{u}_k \rangle}{\partial \bar{x}_i} \cdot \frac{\partial \bar{u}_j'}{\partial \bar{x}_k} - g \cdot \beta \frac{\partial \bar{\theta}'}{\partial \bar{x}_i} \right] \frac{dV}{r} \\ & + \frac{1}{4\pi} \iint_S \left[\frac{1}{r} \frac{\partial p'}{\partial n} - \bar{p}' \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) \right] dS \end{aligned} \quad (2.4.2)$$

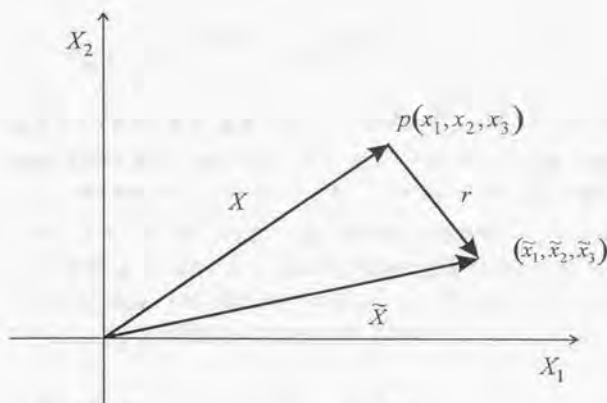


図 2.1

ここで、 \bar{x}_k 等は、今考えておる点の圧力 p の座標 x_k から r_k だけ離れた座標で、(2.4.2)式の体積積分は、この座標系により行う (図 2.1 参照)。またの座標 \bar{x}_i の変動流速を \bar{u}_k と表記する。

式(2.4.2)を用いて以下式(2.3.1)中の ϕ_j を検討する。

ϕ_j 中の一部 $\left\langle \frac{p}{\rho} \cdot \frac{\partial u_j'}{\partial x_j} \right\rangle$ は次の様になる。

$$\left\langle \frac{p}{\rho} \cdot \frac{\partial u_j'}{\partial x_j} \right\rangle = \frac{1}{4\pi} \iiint_V \left\langle \frac{\partial^2 \bar{u}_k' \bar{u}_l'}{\partial \bar{x}_k \partial \bar{x}_l} \cdot \frac{\partial u_j'}{\partial x_j} \right\rangle + 2 \frac{\partial \langle \bar{u}_k \rangle}{\partial \bar{x}_l} \left\langle \frac{\partial \bar{u}_l'}{\partial \bar{x}_k} \cdot \frac{\partial u_j'}{\partial x_j} \right\rangle - g_k \cdot \beta \left\langle \frac{\partial \bar{\theta}'}{\partial \bar{x}_k} \cdot \frac{\partial u_j'}{\partial x_j} \right\rangle \frac{dV}{r} + \left\langle S \frac{\partial u_j'}{\partial x_j} \right\rangle \quad (2.4.3)$$

ここで、(2.4.3)式右辺第2項の表面積分を S と表記した。(2.4.3)式中でチルダを付けた変数 (\bar{x}_k 等) と付けていない変数 (x_k 等) は独立であることより、(2.4.3)式は次の様になる。

$$\left\langle \frac{p}{\rho} \cdot \frac{\partial u_j'}{\partial x_j} \right\rangle = \frac{1}{4\pi} \iiint_V \left\langle \frac{\partial^3 \bar{u}_k' \bar{u}_l' u_j'}{\partial \bar{x}_k \partial \bar{x}_l \partial x_j} \right\rangle + 2 \frac{\partial \langle \bar{u}_k \rangle}{\partial \bar{x}_l} \cdot \frac{\partial^2 \langle \bar{u}_l' u_j' \rangle}{\partial \bar{x}_k \partial x_j} - g_k \cdot \beta \frac{\partial^2 \langle u_j' \bar{\theta}' \rangle}{\partial \bar{x}_k \partial x_j} \frac{dV}{r} + \left\langle S \frac{\partial u_j'}{\partial x_j} \right\rangle \quad (2.4.4)$$

従って(2.3.1)式中の ϕ_j は次式となる。

$$\begin{aligned} \Phi_{ij} = & -\frac{1}{4\pi} \iiint_V \left[\frac{\partial^3 \langle \bar{u}_k' \bar{u}_l' u_j' \rangle}{\partial \bar{x}_k \partial \bar{x}_l \partial x_j} + \frac{\partial^3 \langle \bar{u}_k' \bar{u}_l' u_j' \rangle}{\partial \bar{x}_k \partial \bar{x}_l \partial x_j} \right] \frac{dV}{r} \\ & - \frac{1}{2\pi} \iiint_V \left[\frac{\partial \langle \bar{u}_k \rangle}{\partial \bar{x}_l} \left(\frac{\partial^2 \langle \bar{u}_l' u_j' \rangle}{\partial \bar{x}_k \partial x_j} + \frac{\partial^2 \langle \bar{u}_l' u_j' \rangle}{\partial \bar{x}_k \partial x_j} \right) \right] \frac{dV}{r} \end{aligned} \quad \begin{matrix} (A) \\ (B) \end{matrix}$$

$$+\frac{1}{4\pi}\iint_V\left\{g_k\cdot\beta\frac{\partial^2\langle u_i\tilde{\theta}\rangle}{\partial x_k\partial x_i}+g_k\cdot\beta\frac{\partial^2\langle u_i'\tilde{\theta}'\rangle}{\partial x_k\partial x_i}\right\}\frac{dV}{r}+\left\langle S\frac{\partial u_i'}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j'}{\partial x_i}\right\rangle_{(D)} \quad (2.4.5)$$

ϕ_{ij} は (2.4.5) 式から分かる通り、次の 4 つの項からなる。まず、式 (2.3.6) 中 (A) 項は速度の変動成分のみに関与する項である。これに対して (B) 項は平均速度の勾配にも関与する。また (C) 項は温度フラックス (あるいは浮力による $\langle u_i' u_j' \rangle$ の生産・消散項 G_{ij}) の関与する項である。また (D) 項はポアソン方程式の解に現れる表面積分 (S 、(2.4.2) 式右辺第 2 項) に起因する項であり、後述のように壁面境界の影響に関連する項である。慣例に従って (A) 項を slow term $\Phi_{ij(1)}$ 、(B) 項を rapid term $\Phi_{ij(2)}$ 、(C) 項を $\Phi_{ij(3)}$ 、また (D) 項を wall reflection term Φ_{ij}^w と書いて以下個別にモデル化について説明する。

b) slow term $\Phi_{ij(1)}$ (Return to Isotropy 項)

最も一般的な $\Phi_{ij(1)}$ のモデルは次の通りである⁵¹⁾。

$$\Phi_{ij(1)} = -C_1 \frac{\varepsilon}{k} \left(\langle u_i' u_j' \rangle - \frac{2}{3} \delta_{ij} k \right) \quad (2.4.6)$$

ここで、 $C_1 = 1.8$ である。また k/ε は乱流の時間スケールを表している。

このモデルの妥当性を以下の考察により検討する。壁の影響がなく、一様であるが非等方的な乱流を考える。一様であるため、レイノルズストレスの生産項及び $\Phi_{ij(2)}$ はゼロであり、減衰する乱流である。この場合、レイノルズストレスの輸送方程式は次の様になる。

$$\frac{d\langle u_i' u_j' \rangle}{dt} = \Phi_{ij(1)} - \varepsilon_{ij} \quad (2.4.7)$$

ここで、次式で定義されるストレスの非等方性を表す無次元テンソルを導入する。

$$a_{ij} = \left(\langle u_i' u_j' \rangle - \frac{2}{3} \delta_{ij} k \right) / k \quad (2.4.8)$$

これを用いると式 (2.4.6) は次の様に書くことができる。

$$\Phi_{ij(1)} = -C_1 \varepsilon a_{ij} \quad (2.4.9)$$

(2.3.8) 式より、 a_{ij} の輸送方程式は次の様に表現される。

$$\frac{da_{ij}}{dt} = \frac{1}{k} \left\{ \left(\Phi_{ij(1)} + \varepsilon a_{ik} \right) - \left(\varepsilon_{ij} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \varepsilon \right) \right\} \quad (2.4.10)$$

また後述するように高 Re 数領域では $\varepsilon = 2/3 \delta_{ij} \varepsilon$ であるので (2.4.10) 式は、

$$\frac{da_{ij}}{dt} = \frac{1}{k} \left(\Phi_{ij(1)} + \varepsilon a_{ij} \right) \quad (2.4.11)$$

ここで、 $\Phi_{ij(1)}$ を (2.4.9) 式で表現したとすると、(2.4.11) 式は、

$$\frac{da_{ij}}{dt} = (1 - C_1) \frac{\varepsilon}{k} a_{ij} \quad (2.4.12)$$

もし、 $(1 - C_1) \varepsilon / k$ を定数と考えれば、 a_{ij} の解は次の様になる

$$a_{ij} = C_1 e^{(1-C_1) \frac{t}{k}} \quad (2.4.13)$$

このような流れ場では、当然 a_{ij} は時間と共に減衰する。一方、係数 C_1 は 1.8 が最適と考えられており、こも値のもとでは、式(2.4.13)の a_{ij} は減衰することになり、物理的に合理的な性質を持つことがわかる。また $\Phi_{ij(1)}$ がもつ本来の性質である対称性及びトレースがゼロという性質を式(2.4.6)は備えている。これらの考察から、式(2.4.6)のモデルは必要となる数学的・物理的条件のいくつかを満たしたものであると考えられる。

例えば、式(2.4.6)で $i=j=1$ 、すなわち $\Phi_{11(1)}$ を書き表すと次の様になる。

$$\Phi_{11(1)} = -C_1 \frac{e}{k} \left(\langle u_1'^2 \rangle - \frac{2}{3} k \right) \quad (2.4.14)$$

もし流れ場が非等方で $\langle u_1'^2 \rangle$ が $2/3k$ より大きければ、この $\Phi_{11(1)}$ は負となり $\langle u_1'^2 \rangle$ を減らす方向に再分配、すなわち等方的にするという働きがある。

c) Rapid term $\Phi_{ij(2)}$ の線形モデル (QIM と IPM)

境界近傍を除いた積分領域内で式(2.4.5) (B) 項に現れる平均速度勾配がほぼ均質と見なせるとすれば、この部分を積分の外に出すことができる。したがって $\Phi_{ij(2)}$ は次のようになる。

$$\Phi_{ij(2)} = k M_{ijl} \frac{\partial \langle u_l \rangle}{\partial x_l} \quad (2.4.15)$$

ここで M_{ijl} は式(2.4.16)に示す通りで、rapid term のメカニズムを表す 4 階の無次元テンソル関数である^{1) 16)}。壁面近傍では平均流勾配が大きく、積分の外に出す事は困難であるが、これにともなう誤差は次節に示す Φ_{ij}^w (Wall reflection 項) によって補償されるものと位置づける事が出来る。

$$k M_{ijl} = -\frac{1}{2\pi} \iiint_V \left[\frac{\partial^2 \langle \tilde{u}_i' \tilde{u}_j' \rangle}{\partial \tilde{x}_k \partial \tilde{x}_l} + \frac{\partial^2 \langle \tilde{u}_i' \tilde{u}_j' \rangle}{\partial \tilde{x}_k \partial \tilde{x}_l} \right] \frac{dV}{r} \quad (2.4.16)$$

この M_{ijl} を $\langle u_i' u_j' \rangle$ の線形関数で近似したものがいわゆる線形モデルと呼ばれるものである。代表的なものにテンソルの力学的制約 (kinematic constraints) に基づいて各係数を決定した次の QIM (Quasi-Isotropic Model) がある。

$$\begin{aligned} \Phi_{ij(2)} = & -\frac{(C_2+8)}{11} \left(P_{ij} - \frac{2}{3} \delta_{ij} P_k \right) - \frac{(30C_2-2)}{55} k \cdot \left(\frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_j} + \frac{\partial \langle u_j \rangle}{\partial x_i} \right) \\ & - \frac{(8C_2-2)}{11} \left(d_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} d_{kk} \right) \end{aligned} \quad (2.4.17)$$

ここで、

$$d_{ij} = - \left\{ \langle u_i' u_k' \rangle \frac{\partial \langle u_k \rangle}{\partial x_j} + \langle u_j' u_k' \rangle \frac{\partial \langle u_k \rangle}{\partial x_i} \right\} \quad (2.4.18)$$

ここで $C_2' = 0.4$ が最適とされている。式(2.4.17)の QIM において主要項のみを残し他を省略した簡易バージョンが以下に述べる IPM である。

式(2.4.17)の3つの項にかかる係数は、 $C_2' = 0.4$ を代入すれば次のようになる。

$$\frac{C_2' + 8}{11} = 0.76, \quad \frac{30C_2' - 2}{55} = 0.18, \quad \frac{8C_2' - 2}{11} = 0.11 \quad (2.4.19)$$

したがって、式(2.4.19)中では右辺第1項が他に卓越しており、またその物理的意味の明解な点も考慮してこの項のみを残す。すなわち、

$$\Phi_{ij(2)} = -C_2 \left(P_{ij} - \frac{2}{3} \delta_{ij} P_k \right) \quad (2.4.20)$$

これが IPM であり、平均速度勾配による $\langle u_i' u_j' \rangle$ の生産 P_{ij} を等方化するという性質を有している。また数値定数 C_2 については等方乱流に関する考察から 0.6 という値を一般に採用している。IPM はその簡便さ故に多く用いられている。適用事例によれば IPM が QIM に劣るといふ結果はあまり報告されていない^{1) 17)}。

d) $\Phi_{ij(3)}$

最も一般的な $\Phi_{ij(3)}$ のモデルは以下の通りである。

$$\Phi_{ij(3)} = C_3 \left(G_{ij} - \frac{2}{3} \delta_{ij} G_k \right) \quad (2.4.21)$$

ここで、 $C_3 = 0.6$ である。

このモデルについても $\Phi_{ij(2)}$ のモデル化 (2.4.20 式) と類似しており、浮力による生産・消散 (G_{ij}) を等方化するという性質を有している。

(2.4.5) 式に示したように $\Phi_{ij(3)}$ は以下で表せる。

$$\Phi_{ij(3)} = \frac{g_k \cdot \beta}{4\pi} \iiint_V \left[\frac{\partial^2 \langle u_i \tilde{\theta}' \rangle}{\partial \tilde{x}_k \partial x_j} + \frac{\partial^2 \langle u_j \tilde{\theta}' \rangle}{\partial \tilde{x}_k \partial x_i} \right] \frac{dV}{r} \quad (2.4.22)$$

(2.4.5) 式中の積分 $\iiint_V \left[\frac{\partial^2 \langle u_i \tilde{\theta}' \rangle}{\partial \tilde{x}_k \partial x_j} \right] \frac{dV}{r}$ は前述の QIM における M_{ijk} と同様、温度フラックス

$\langle u_i' \theta' \rangle$ の線形和で表現できると仮定し、また IPM の概念に基づいて浮力による生産・消散項 ($G_{ij} = -g_i \cdot \beta \langle u_j \theta \rangle - g_j \cdot \beta \langle u_i \theta \rangle$) で整理したものが、(2.4.21) 式であると理解される。

数値定数 C_3 については $\Phi_{ij(2)}$ と同様に、0.6 という値を一般には採用する。

e) Wall Reflection term Φ_{ij}''

式(2.4.5)中の表面積分項 (S) に起因する項 (式(2.4.5) (D) 項) Φ_{ij}'' は壁が圧力変動を反射するという効果 (いわゆる echo effect) に関わるものである。壁に垂直方向の垂直応力は壁近傍で減衰する。 Φ_{ij}'' は壁の存在のストレスに対する影響を表す。表 2.1 に一様せん断流中および乱流境界層壁近傍でのストレスの非等方性 (α_{ij}) を示す。両者の非等方性を比較すると、壁

近傍では、 $\langle u_2'^2 \rangle$ はかなり減衰し、その分流れ方向のノルマルストレス $\langle u_1'^2 \rangle$ のレベルが高くなっていることがわかる。

既に示した様に Φ_{ij}^w は次式で表現される。

$$\Phi_{ij}^w = \frac{1}{4\pi} \iint_S \left[\frac{1}{r} \left(\frac{\partial \bar{p}}{\partial n} \left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j'}{\partial x_i} \right) \right) - \left(\bar{p} \left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j'}{\partial x_i} \right) \right) \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) \right] dS \quad (2.4.23)$$

Φ_{ij}^w は $\Phi_{ij(1)}^w$ 、 $\Phi_{ij(2)}^w$ 、及び $\Phi_{ij(3)}^w$ のそれぞれに対応する項により構成されるものと考え、おのおのを $\Phi_{ij(1)}^w$ 、 $\Phi_{ij(2)}^w$ 、 $\Phi_{ij(3)}^w$ と記す。すなわち、

$$\Phi_{ij}^w = \Phi_{ij(1)}^w + \Phi_{ij(2)}^w + \Phi_{ij(3)}^w \quad (2.4.24)$$

この Φ_{ij}^w の一般性のあるモデル化は非常に困難である。現在では、比較的単純な流れ場を対象にしてモデル化がなされ、これが一般的に用いられることが多い。現在、最も一般的に用いられているモデルは以下のようものである。

$$\Phi_{ij(1)}^w = \sum_{(W)=1}^{W_0} C_1 \frac{\varepsilon}{k} \left(\langle u_k' u_m' \rangle \cdot n_k^{(W)} n_m^{(W)} \delta_{ij} - \frac{3}{2} \langle u_k' u_j' \rangle \cdot n_k^{(W)} n_j^{(W)} \right) - \frac{3}{2} \langle u_k' u_j' \rangle \cdot n_k^{(W)} n_j^{(W)} \times f \left(\frac{l}{x_n^{(W)}} \right) \quad (2.4.25)$$

$$\Phi_{ij(2)}^w = \sum_{(W)=1}^{W_0} C_2 \left(\Phi_{km(2)} \cdot n_k^{(W)} n_m^{(W)} \delta_{ij} - \frac{3}{2} \Phi_{kj(2)} \cdot n_k^{(W)} n_j^{(W)} \right) - \frac{3}{2} \Phi_{kj(2)} \cdot n_k^{(W)} n_j^{(W)} \times f \left(\frac{l}{x_n^{(W)}} \right) \quad (2.4.26)$$

$$\Phi_{ij(3)}^w = \sum_{(W)=1}^{W_0} C_3 \left(\Phi_{km(3)} \cdot n_k^{(W)} n_m^{(W)} \delta_{ij} - \frac{3}{2} \Phi_{kj(3)} \cdot n_k^{(W)} n_j^{(W)} \right) - \frac{3}{2} \Phi_{kj(3)} \cdot n_k^{(W)} n_j^{(W)} \times f \left(\frac{l}{x_n^{(W)}} \right) \quad (2.4.27)$$

ここで $C_1 = 0.5$ 、 $C_2 = 0.3$ 、 $C_3 = 0.0$ 。

上添字 (W) は存在する壁の番号を指し、 W_0 は壁の総数である。また $n_k^{(W)}$ は W 番目の壁に垂直な単位ベクトル $n^{(W)}$ の k 成分を意味する。また $x_n^{(W)}$ は W 番目の壁からの垂直距離である。

式(2.4.25)は Shir¹⁹⁾ によるモデルである。Gibson-Lauder²⁰⁾ はこの Shir によるモデルを参考にして式(2.4.26)や(2.4.27)の形で $\Phi_{ij(2)}^w$ や $\Phi_{ij(3)}^w$ のモデルを提案した。

表 2.1 一様剪断乱流と乱流境界層における非等方テンソル a_{ij} の成分¹⁸⁾

	$\langle u_1'^2 \rangle / k - 2/3$	$\langle u_2'^2 \rangle / k - 2/3$	$\langle u_3'^2 \rangle / k - 2/3$	$\langle u_1' u_2' \rangle / k$
一様剪断乱流	0.30	-0.18	-0.12	0.32
乱流境界層	0.55	-0.45	-0.11	0.24

注) ① x_1 : 主流方向、 x_2 : 縦方向 (壁鉛直方向)、 x_3 : 横方向

② $\partial \langle u_1' \rangle / \partial x_2 \neq 0$, $\langle u_2' \rangle = \langle u_3' \rangle = 0$ であるような流れ場

式(2.4.25) ~ (2.4.27)に共通に現れる $f(l/x_n^{(W)})$ は Φ_{ij}^w が乱れの特徴長さ l と、壁からの距離 $x_n^{(W)}$ の比 l/x_n の関数となるであろうという考察に基づくものである。

また $f(l/x_n^{(W)})$ は、 Φ_{ij}^w が重要となる壁面近傍で1、壁から離れると0となるような関数が選ばれる。乱れの特徴長さ l は一般に $k^{1/2}/\varepsilon$ と考えられ、通常 $f(l/x_n^{(W)})$ として次式が用いられる。

$$f(l/x_n^{(W)}) = \frac{k^{3/2}}{C_l \cdot \varepsilon \cdot x_n^{(W)}} \quad (2.4.28)$$

ここで $C_l = 2.5$ である。

但し、式(2.4.27)の Gibson-Lauder モデルは衝突領域を含むような流れ場では適切な解を与えないことが指摘されている^{2.11)}。例えば、図 2.2 に示すように主流 $\langle u_1 \rangle$ が x_2 軸に平行な壁に垂直に当たっている状況を考える。このとき $\Phi_{11(2)}^w$ 等は次のようになる。

$$\Phi_{11(2)}^w = 2C_2 C_2' \left(P_{11} - \frac{2}{3} P_k \right) \cdot f_l$$

$$\Phi_{22(2)}^w = -C_2 C_2' \left(P_{11} - \frac{2}{3} P_k \right) \cdot f_l$$

ここで $f_l = k^{3/2} / (C_l \cdot \varepsilon \cdot x_l)$

$\Phi_{11(2)}^w$ は本来 $\langle u_1'^2 \rangle$ を減衰させる働きを示す項であるから、この場合 $\left(P_{11} - \frac{2}{3} P_k \right)$ は負である

必要がある。しかし、衝突の中心軸上では P_{11} が大きく、 $\left(P_{11} - \frac{2}{3} P_k \right)$ は明らかに負にはならない。したがって $\Phi_{11(2)}^w$ は $\langle u_1'^2 \rangle$ を増加させる傾向の働きを示し矛盾が生ずる。

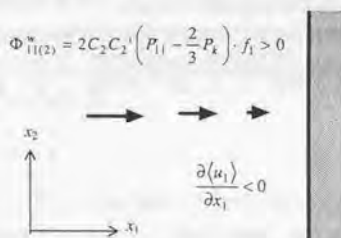


図 2.2 衝突領域を含む流れ場

2. 4. 2 乱流拡散項 D_{ij} のモデリング

式(2.3.1)中の(F)項は速度変動による拡散と圧力変動による拡散の両者から構成されている。前者の速度三重相関は測定可能であるが後者は測定不可能である。また理論的取り扱いも前者の方が容易である。これらの理由より D_{ij} のモデリングは一般に二つの項をまとめて、速度相関項を対象にしてなされることが多い。但しこれは圧力拡散項が重要でないということとはつながらない。実際、最近のDNSデータによれば、壁近傍において圧力拡散項が重要な役割を果たしていることが明らかにされている^{2, 21, 23)}。また $\langle u_i' u_j' u_k' \rangle$ 等、高次の相関項はより次数が高くなるほど平均流に及ぼす影響は小さくなると考えられるので、あまり厳密なモデル化は必要でないとされている。現在用いられているいくつかのモデルを簡単に解説する。

a) 等方的渦粘性モデル

k - ϵ モデルにおける k の拡散項と同様に、等方的渦粘性モデルを用いる。即ち、

$$-\langle u_i' u_j' u_k' \rangle = \frac{\nu_t}{\sigma_k} \frac{\partial \langle u_i' u_j' \rangle}{\partial x_k} \quad (2.4.29)$$

b) Daly-Harlow モデル¹⁰⁾ (GGDH)

等方的渦粘性モデルと同じく勾配拡散仮定に基づいたモデルであるが、渦粘性係数が方向によって異なり、流れ場の非等方性を考慮している。即ち

$$-\langle u_i' u_j' u_k' \rangle = C_S \frac{k}{\epsilon} \langle u_k' u_j' \rangle \frac{\partial \langle u_i' u_j' \rangle}{\partial x_i} \quad (2.4.30)$$

式(2.4.30)のような表現はGGDH (Generalized Gradient Diffusion Hypothesis) と呼ばれる。このモデルは比較的簡単な流れ場における予測精度の良好さと計算上の簡便さより、現在最も多く用いられているモデルである。このような表現は次のような3次相関にも応用される。

$$\langle e' u_k' \rangle = -C_e \frac{k}{\epsilon} \langle u_k' u_j' \rangle \frac{\partial e}{\partial x_j} \quad (2.4.31)$$

ここで、 $e' = \nu \frac{\partial u_i'}{\partial x_j} \frac{\partial u_i'}{\partial x_j}$ である。

但し、等方的渦粘性モデル並びに Daly-Harlow モデルは $\langle u_i' u_j' u_k' \rangle$ をモデル化する際、添字の対称性を満たさない。即ちこれらのモデルに基づく場合、一般に

$$-\langle u_i' u_j' u_k' \rangle \neq -\langle u_i' u_k' u_j' \rangle \quad (2.4.32)$$

である。

c) Mellor-Herring モデル²⁴⁾

等方的な渦粘性の概念に基づいて、添字の対称性を考慮したものに Mellor-Herring モデルがある。このモデルは次のように表される。

$$-\langle u_i' u_j' u_k' \rangle = \frac{\nu_t}{\sigma_k} \left(\frac{\partial \langle u_i' u_j' \rangle}{\partial x_k} + \frac{\partial \langle u_i' u_k' \rangle}{\partial x_j} + \frac{\partial \langle u_k' u_j' \rangle}{\partial x_i} \right) \quad (2.4.33)$$

d) Hanjalic-Launder モデル²³⁾

Hanjalic-Launder は $u_i u_j u_k$ の輸送方程式中の主要項に着目し、次のモデルを示している。

$$-\langle u_i' u_j' u_k' \rangle = C_s \frac{k}{\varepsilon} \left(\langle u_k' u_i' \rangle \frac{\partial \langle u_j' u_i' \rangle}{\partial x_i} + \langle u_j' u_i' \rangle \frac{\partial \langle u_k' u_i' \rangle}{\partial x_i} + \langle u_i' u_j' \rangle \frac{\partial \langle u_k' u_i' \rangle}{\partial x_j} \right) \quad (2.4.34)$$

このモデルは、GGDH (式(2.4.30)) で満たされていない添字の対称性を満足したモデルとなっている。従ってこのモデルはGGDHよりも妥当なモデルであるが、これをそのまま用いると非常に多くの項が現れ、計算実行上の不便が大きいため使用例は多くない。

2. 4. 3 ε 方程式のモデリング

$\langle u_i' u_j' \rangle$ の輸送方程式の高次相関項を Second-moment のレベルで close させても応力の散逸項 ε_{ij} という未知変数が残る。これについて新たにモデル式を導入する必要がある。

ε_{ij} の一般的なモデルは周知のように局所等方の仮定に基づくもので、次式のようなものである。

$$\varepsilon_{ij} = \frac{2}{3} \delta_{ij} \varepsilon \quad (2.4.35)$$

ここで ε は乱流エネルギー k の散逸項である。

DSM で用いられる ε 輸送方程式のモデル化された形式の最も一般的なものは以下のとおりで、拡散項中のGGDHを除いて k - ε モデルのものと同じである。

$$\frac{D\varepsilon}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(C_\varepsilon \langle u_j' \varepsilon' \rangle + \frac{k}{\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right) + \frac{\varepsilon}{k} (C_{\varepsilon 1} P_k - C_{\varepsilon 2} \varepsilon) \quad (2.4.36)$$

近年 ε 方程式についても新たな高次モデルがいくつか提案されているがそれについては次章で解説する。

2. 4. 4 代数応力方程式モデル

DSM の簡易バージョンの一つに代数応力方程式モデル (Algebraic Stress Model, ASM) がある。DSM の中でレイノルズストレスの微分を含む項は移流項 (C_{ij}) と拡散項 (D_{ij}) のみであり、もしこれらの項を単純化してストレスの微分を含まない形で表現できれば、レイノルズストレスの輸送方程式は代数式となり、取り扱いが容易になる。DSM に対してこの代数近似を施したモデルは代数応力モデル (ASM) と呼ばれ、この単純化の方法には次の様なものがある。

$$C_{ij} - D_{ij} = \frac{2}{3} \delta_{ij} (C_k - D_k) = \frac{2}{3} \delta_{ij} (P_k + G_k - \varepsilon) \quad (2.4.37)$$

$$C_{ij} - D_{ij} = \frac{\langle u_i' u_j' \rangle}{k} (C_k - D_k) = \frac{\langle u_i' u_j' \rangle}{k} (P_k + G_k - \varepsilon) \quad (\text{ASM } \uparrow) \quad (2.4.38)$$

$$C_{ij} = C_k \left\{ (1 + \alpha) \langle u_i' u_j' \rangle / k - \frac{2}{3} \alpha \delta_{ij} \right\} \quad D_{ij} = D_k \left\{ (1 + \beta) \langle u_i' u_j' \rangle / k - \frac{2}{3} \beta \delta_{ij} \right\} \quad (\text{ASM } 2) \quad (2.4.39)$$

ここで、 $\alpha = 0.3$ 、 $\beta = -0.8$ である。

(2.4.37)式は、Launder によるモデル²⁵⁾で、(2.4.38)式は Rodi によるモデル²⁷⁾、また (2.4.39)式は Launder²⁸⁾によるものである。(2.4.39)式で $\alpha = \beta = 0.0$ であれば、(2.4.37)式は (2.4.38)式に等しくなり、 $\alpha = \beta = -1.0$ であれば、(2.4.39)式は(2.4.37)式に等しい。一般には、(2.4.38)式の ASM 1 が良く用いられる。

しかしながら、 C_{ij} 、 D_{ij} を C_k 、 D_k 等で代用することの妥当性に関する理論的根拠がそれほど明らかなわけではない。実際、局所平衡の状態から大きく離れるような流れ場等では移流拡散項の代数近似に基づく ASM の欠陥が指摘されている (5 章、6 章参照)。

2. 5 温度フラックス $\langle u_i \theta' \rangle$ の輸送方程式とそのモデリング^{2, 3)}

2. 5. 1 温度フラックス $\langle u_i \theta' \rangle$ の輸送方程式の導出とその物理的意味

温度フラックスの輸送方程式は次の様にして導き出される。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle u_i \theta' \rangle}{\partial t} = & \left\langle u_i \frac{\partial \theta'}{\partial t} \right\rangle + \frac{\partial \langle u_i' u_j' \theta' \rangle}{\partial x_j} + \left\langle u_i \frac{\partial \langle u_j' \theta' \rangle}{\partial x_j} \right\rangle + \frac{\partial \langle u_i' u_j' \theta' \rangle}{\partial x_j} - \langle u_i \rangle \frac{\partial \langle u_j' \theta' \rangle}{\partial x_j} + \frac{\partial \langle u_i' u_j' \theta' \rangle}{\partial x_j} \\ & - \left\langle u_i' \frac{\partial u_j' \theta'}{\partial x_j} \right\rangle - \frac{\partial \langle p' \theta' \rangle}{\partial x_i} \frac{1}{\rho} + \left\langle \frac{p'}{\rho} \frac{\partial \theta'}{\partial x_i} \right\rangle + \frac{\partial}{\partial x_j} \left\langle u_j' \frac{\partial u_i' \theta'}{\partial x_j} \right\rangle - \left\langle v \frac{\partial u_i' \theta'}{\partial x_j} \right\rangle + g_i \beta \langle \theta'^2 \rangle \end{aligned} \quad (2.5.1)$$

θ の輸送方程式 (2.3.3) 式からアンサンブル平均をした式 (3.1.8) 式をひけば変動温度の輸送方程式が得られる。

$$\frac{\partial \theta'}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\langle u_j' \theta' \rangle + u_j' \langle \theta' \rangle + u_j' \theta' \right) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\alpha \frac{\partial \theta'}{\partial x_j} + \langle u_j' \theta' \rangle \right) \quad (2.5.2)$$

(2.5.2) 式の両辺に u_i をかけて時間平均をとれば、

$$\left\langle u_i' \frac{\partial \theta'}{\partial t} \right\rangle + \left\langle u_i' \frac{\partial \langle u_j' \theta' \rangle}{\partial x_j} \right\rangle + \left\langle u_i' \frac{\partial u_j' \theta'}{\partial x_j} \right\rangle + \left\langle u_i' \frac{\partial u_j' \theta'}{\partial x_j} \right\rangle = \left\langle u_i' \frac{\partial}{\partial x_j} \alpha \frac{\partial \theta'}{\partial x_j} \right\rangle \quad (2.5.3)$$

(2.5.1) 式と (2.5.2) 式をたして整理すると、

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle u_i \theta' \rangle}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} \underbrace{\left(\langle u_k' \rangle \langle u_i' \theta' \rangle \right)}_{(A)} &= \underbrace{- \langle u_i' u_k' \rangle \frac{\partial \langle \theta' \rangle}{\partial x_k}}_{(B)} - \underbrace{\langle u_i' \theta' \rangle \frac{\partial \langle u_k' \rangle}{\partial x_k}}_{(C)} + \underbrace{g_i \beta \langle \theta'^2 \rangle}_{(D)} + \underbrace{\left\langle \frac{p'}{\rho} \frac{\partial \theta'}{\partial x_i} \right\rangle}_{(E)} \\ &\quad - \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_k} \left(\langle u_k' u_i' \theta' \rangle + \frac{\langle p' \theta' \rangle}{\rho} \delta_{ik} - \alpha \left\langle u_i' \frac{\partial \theta'}{\partial x_k} \right\rangle - v \left\langle \theta' \frac{\partial u_i'}{\partial x_k} \right\rangle \right)}_{(F)} \\ &\quad - \underbrace{v \left\langle \frac{\partial u_i' \theta'}{\partial x_k} \right\rangle - \alpha \left\langle \frac{\partial u_i' \theta'}{\partial x_k} \right\rangle}_{(G)} \end{aligned} \quad (2.5.4)$$

(2.5.4) 式が温度フラックスの輸送方程式である。

ここで、各項の物理的意味は以下の通りである。

(A) $\langle u_i \theta' \rangle$ の実質微分項。定常状態では移流項となり C_{θ} と略記。

(B) $\langle u_i \theta' \rangle$ の平均温度勾配による生産項 ($P_{\theta(1)}$ と略記)。

(C) $\langle u_i \theta' \rangle$ の平均速度勾配による生産項 ($P_{\theta(2)}$ と略記)。

$P_{\theta(1)}$ と同様、DSM では、この項をモデル化せずに直接扱うということが最大の利点となる。

(D) $\langle u_i \theta' \rangle$ の浮力による生産・消散項 (G_{θ} と略記)。

この項も DSM では、直接扱う。

(E) 圧力-温度勾配相関項 (Φ_{θ} と略記)。

レイノルズストレス $\langle u_i' u_j' \rangle$ の輸送方程式のと同様、温度フラックス $\langle u_i \theta' \rangle$ の輸送方程式のモ

デル化の際には、この項の近似が重要な課題の一つとなる。

(F) $\langle u_i \theta' \rangle$ の拡散項 (D_{θ} と略記)。

(G) $\langle u_i \theta' \rangle$ の散逸項 (ε_{θ} と略記)。

2. 5. 2 圧力-温度勾配相関項 (Φ_{θ})

a) 圧力の変動成分に関するポアソン方程式

圧力の変動成分に関するポアソン方程式は次式である。(2.4.1)式を再掲)

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 p'}{\partial x_i^2} = -\frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_l} (\bar{u}_k' u_l' - \langle \bar{u}_k' u_l' \rangle) - 2 \frac{\partial \langle \bar{u}_k \rangle}{\partial x_l} \frac{\partial \bar{u}_l'}{\partial x_k} - g \cdot \beta \frac{\partial \theta'}{\partial x_k} \quad (2.5.5)$$

この式の解は次の様に表現される。

$$\begin{aligned} \frac{p'}{\rho} = & \frac{1}{4\pi} \iiint_V \left\{ \frac{\partial^2}{\partial \bar{x}_k \partial \bar{x}_l} (\bar{u}_k' \bar{u}_l' - \langle \bar{u}_k' \bar{u}_l' \rangle) + 2 \frac{\partial \langle \bar{u}_k \rangle}{\partial \bar{x}_l} \frac{\partial \bar{u}_l'}{\partial \bar{x}_k} - g \cdot \beta \frac{\partial \bar{\theta}'}{\partial \bar{x}_k} \right\} \frac{dV}{r} \\ & + \frac{1}{4\pi} \iint_S \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial p'}{\partial n} - \bar{p}' \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) \right\} dS \end{aligned} \quad (2.5.6)$$

ここで、 \bar{x}_i 等は 2. 4. 1 節と同様の座標系である。(図 2.1 参照)。

(2.5.6)式を用いて以下(2.5.4)式中の Φ_{θ} は次の様になる。

$$\left\langle \frac{p'}{\rho} \frac{\partial \theta'}{\partial x_i} \right\rangle = -\frac{1}{4\pi} \iiint_V \left\{ \frac{\partial^2 \bar{u}_k' \bar{u}_l'}{\partial \bar{x}_k \partial \bar{x}_l} \frac{\partial \theta'}{\partial x_i} + 2 \frac{\partial \langle \bar{u}_k \rangle}{\partial \bar{x}_l} \frac{\partial \bar{u}_l'}{\partial \bar{x}_k} \frac{\partial \theta'}{\partial x_i} - g_k \cdot \beta \left\{ \frac{\partial \bar{\theta}'}{\partial \bar{x}_k} \frac{\partial \theta'}{\partial x_i} \right\} \right\} \frac{dV}{r} + \left\langle S \frac{\partial \theta'}{\partial x_i} \right\rangle \quad (2.5.7)$$

ここで、(2.5.6)式右辺第 2 項の表面積を S と表記した。(2.5.6)式中でチルダを付けた変数 (\bar{x}_i 等) と付けていない変数 (x_i 等) は独立であることより、(2.5.7)式は次の様になる。

$$\left\langle \frac{p'}{\rho} \frac{\partial \theta'}{\partial x_i} \right\rangle = -\frac{1}{4\pi} \iiint_V \left\{ \frac{\partial^3 \langle \bar{u}_k' \bar{u}_l' \theta' \rangle}{\partial \bar{x}_k' \partial \bar{x}_l' \partial x_i} + 2 \frac{\partial \langle \bar{u}_k \rangle}{\partial \bar{x}_l} \frac{\partial^2 \langle \bar{u}_l' \theta' \rangle}{\partial \bar{x}_k \partial x_i} - g_k \cdot \beta \frac{\partial^2 \langle \bar{\theta}' \theta' \rangle}{\partial \bar{x}_k \partial x_i} \right\} \frac{dV}{r} + \left\langle S \frac{\partial \theta'}{\partial x_i} \right\rangle \quad (2.5.8)$$

結局 (2.5.8)式中の Φ_{θ} は次式となる。

$$\begin{aligned} \Phi_{\theta} = & \frac{1}{4\pi} \iiint_V \left\{ \frac{\partial^3 \langle \bar{u}_k' \bar{u}_l' \theta' \rangle}{\partial \bar{x}_k' \partial \bar{x}_l' \partial x_i} \right\} \frac{dV}{r} \\ & - \frac{1}{2\pi} \iiint_V 2 \frac{\partial \langle \bar{u}_k \rangle}{\partial \bar{x}_l} \frac{\partial^2 \langle \bar{u}_l' \theta' \rangle}{\partial \bar{x}_k \partial x_i} \frac{dV}{r} \\ & + \frac{1}{4\pi} \iiint_V \left\{ g_k \cdot \beta \frac{\partial^2 \langle \bar{\theta}' \theta' \rangle}{\partial \bar{x}_k \partial x_i} \right\} \frac{dV}{r} + \left\langle S \frac{\partial \theta'}{\partial x_i} \right\rangle \quad (2.5.9) \end{aligned}$$

Φ_{θ} は式(2.5.9)から分かる通り、次の 4 つの項からなる。まず、式(2.5.9)中(A)項は速度と温度の変動成分のみに関する項である。これに対して(B)項は平均速度の勾配にも関与する。また(C)項は温度変動強度 (あるいは浮力による $\langle u_i \theta \rangle$ の生産・消散項 G_{θ}) に関与する項である。また、(D)項はポアソン方程式の解に現れる表面積分 (S 、式(2.5.6)右辺第 2 項) に起因する項であり、後述のように壁面境界の影響に関する項である。(A)項を $\Phi_{\theta(1)}$ 、(B)項を $\Phi_{\theta(2)}$ 、(C)項を $\Phi_{\theta(3)}$ 、また(D)

項を $\Phi_{\theta 0}^*$ と書いて以下個別にモデル化について説明する。

b) $\Phi_{\theta(1)}$

最も一般的な $\Phi_{\theta(1)}$ のモデルは次の通りである。

$$\Phi_{\theta(1)} = -C_{\theta 1} \frac{\varepsilon}{k} \langle u \theta' \rangle \quad (2.5.10)$$

ここで、 $C_{\theta 1} = 3.0$ である。

式(2.4.14)は $\Phi_{\theta(1)}$ のモデル(2.4.6)式と相似のモデルである。また k/ε は乱流の時間スケールを表している。この時間スケールとして $\left\{ \left(2 \cdot \theta'^2 / \varepsilon_{\theta} \right) \langle k / \varepsilon \rangle \right\}^{1/2}$ を用いる場合があるが、この中の ε_{θ} を精度良く予測するのが困難であり一般的には(2.5.10)式のように時間スケールとして k/ε を用いる。

c) $\Phi_{\theta(2)}$

式(2.5.9)(B)項の最も一般的なモデルは以下の通りである。

$$\Phi_{\theta(2)} = -C_{\theta 2} \cdot P_{\theta(2)} \quad (2.5.11)$$

ここで、 $C_{\theta 2} = 0.5$ である。

式(2.5.11)は $\Phi_{\theta(2)}$ のモデル(2.4.20)式と相似のモデルであり、平均勾配速度による $\langle u \theta' \rangle$ の生産 $(P_{\theta(2)})$ を等方化するという性質を有している。

$\Phi_{\theta(2)}$ で行った近似((2.4.15)式参照)より、 $\Phi_{\theta(2)}$ は次式で表せる。

$$\Phi_{\theta(2)} = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial \langle u_k \rangle}{\partial x_i} \iiint_V \left[\frac{\partial^2 \langle \bar{u} \theta \rangle}{\partial \bar{x}_k \partial x_i} \right] \frac{dV}{r} \quad (2.5.12)$$

この式中の積分 $\iiint_V \left[\frac{\partial^2 \langle \bar{u} \theta \rangle}{\partial \bar{x}_k \partial x_i} \right] \frac{dV}{r}$ は前述のQIM((2.4.17)式参照)を用いれば温度フラックス $\langle u \theta' \rangle$ の線形和で表現でき、またIPMの概念に基づいて速度勾配による $\langle u \theta' \rangle$ の生産項 $(P_{\theta(2)})$ で整理したものが、(2.5.11)式であると理解される。

(4) $\Phi_{\theta(3)}$

最も一般的な $\Phi_{\theta(3)}$ のモデルは以下の通りである。

$$\Phi_{\theta(3)} = -C_{\theta 3} \cdot G_{\theta} \quad (2.5.13)$$

ここで、 $C_{\theta 3} = 0.3$ である。

このモデルについても $\Phi_{\theta(3)}$ のモデル化((2.4.21)式)と相似であり、浮力による生産・消散 (G_{θ}) を等方化するという性質を有している。

(5) $\Phi_{\theta 0}^*$ (Wall Reflection 項)

(2.5.6)式中の表面積分項(S)に起因する項((2.5.9)式(C)項)、すなわち $\Phi_{\theta 0}^*$ をここで考える。 $\Phi_{\theta 0}^*$ は次式で表現できる。

$$\Phi_{\theta 0}^* = \frac{1}{4\pi} \iiint_V \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial n} \left(\bar{\rho} \frac{\partial \theta}{\partial x_i} \right) - \left(\bar{\rho} \frac{\partial \theta}{\partial x_i} \right) \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) \right] d\tilde{S} \quad (2.5.14)$$

ここで、 $\partial/\partial n$ は壁表面での法線方向微分を、 dS' は表面要素を表している。この項は $\Phi_{i0(1)}$ 、 $\Phi_{i0(2)}$ および $\Phi_{i0(3)}$ のそれぞれに対応する項により構成されるものと考えられ、おのおのを $\Phi_{i0(1)}^w$ 、 $\Phi_{i0(2)}^w$ 、 $\Phi_{i0(3)}^w$ と記す。すなわち、

$$\Phi_{i0}^w = \Phi_{i0(1)}^w + \Phi_{i0(2)}^w + \Phi_{i0(3)}^w \quad (2.5.15)$$

この Φ_{i0}^w の一般性のあるモデル化は非常に困難であり、 Φ_{ij}^w のモデル (2.4.25) ~ (2.4.27) 式との相似から、現在以下のようなモデルが一般的に用いられている。

$$\Phi_{i0(1)}^w = - \sum_{(w)=1}^{w_0} C'_{i01} \frac{\varepsilon}{k} \langle u_k \theta \rangle \cdot n_k^{(w)} n_i^{(w)} \times \hat{f} \left(\frac{l}{x_n^{(w)}} \right) \quad (2.5.16)$$

$$\Phi_{i0(2)}^w = - \sum_{(w)=1}^{w_0} C'_{i02} \Phi_{i0(3)} \cdot n_k^{(w)} n_i^{(w)} \times \hat{f} \left(\frac{l}{x_n^{(w)}} \right) \quad (2.5.17)$$

$$\Phi_{i0(3)}^w = - \sum_{(w)=1}^{w_0} C'_{i03} \Phi_{i0(3)} \cdot n_k^{(w)} n_i^{(w)} \times \hat{f} \left(\frac{l}{x_n^{(w)}} \right) \quad (2.5.18)$$

ここで、 $C'_{i01} = 0.5$ 、 $C'_{i02} = 0.0$ 、 $C'_{i03} = 0.0$ である。

上添字 (W) は存在する壁の番号を指し、 W_0 は壁の総和である。また $n_k^{(w)}$ は W 番目の壁に垂直な単位ベクトル $n^{(w)}$ の k 成分を意味する。また $x_n^{(w)}$ は W 番目の壁からの垂直距離である。

(2.4.25) ~ (2.4.27) 式に現れる $\hat{f}(l/x_n^{(w)})$ は Φ_{ij}^w の場合と同様、次式が通常用いられる。

$$\hat{f} \left(l/x_n^{(w)} \right) = \frac{k^{3/2}}{C_l \cdot \varepsilon \cdot x_n^{(w)}} \quad (2.5.19)$$

2. 5. 3 温度フラックスの拡散項 (D_{θ})

GGDHが一般に用いられる。

$$\langle u_i \theta' u_i' \rangle = -C_{\theta} \frac{k}{\varepsilon} \langle u_i' u_i' \rangle \frac{\partial \langle u_i \theta' \rangle}{\partial x_i} \quad (2.5.20)$$

ここで、 $C_{\theta} = 0.2$ である。

すなわち、温度フラックスの拡散項 (D_{θ}) は次式となる。

$$D_{\theta} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left(C_{\theta} \frac{k}{\varepsilon} \langle u_i' u_i' \rangle \frac{\partial \langle u_i \theta' \rangle}{\partial x_i} \right) \quad (2.5.21)$$

このモデルでは(2.5.9)式の(F)部分の $\langle u_i' u_i \theta' \rangle$ 以外の項、例えば $\langle p \theta \rangle / \rho \cdot \delta_{ik}$ 等の影響は定数 C_{θ} の調整によって考慮されている。

2. 5. 4 温度フラックスの散逸項 (ε_{θ})

温度フラックスの散逸項 (ε_{θ}) は、以下の考察によりゼロである。

$$\varepsilon_{\theta} = 0 \quad (2.5.27)$$

分子粘性並びに分子拡散が働く領域は非常に小さなスケールであると考えられる。このようなスケールでは乱れはほぼ等方的となり(コルモゴロフの局所等方性理論)、 ε_{θ} の中の項 $\left\langle \frac{\partial u_i'}{\partial x_k} \frac{\partial \theta'}{\partial x_k} \right\rangle$ の $\frac{\partial u_i'}{\partial x_k}$ と $\frac{\partial \theta'}{\partial x_k}$ は殆ど無相関となる。従って ε_{θ} はゼロであると推測される。

2. 5. 5 $\langle \theta'^2 \rangle$ のモデリング

G_{θ} ((2.5.4)式(D)部分)には温度変動強度 ($\langle \theta'^2 \rangle$) が現れる。従って $\langle u_i \theta' \rangle$ の輸送方程式を close させるためにはこの $\langle \theta'^2 \rangle$ のモデル化が必要となる。以下、 $\langle \theta'^2 \rangle$ のモデル化について検討する。まず、 $\langle \theta'^2 \rangle$ の輸送方程式を導出する。 θ の輸送方程式 (式(2.2.3)) の両辺に θ' を乗じ、平均化操作を施す。

式(2.2.3)左辺第1項:

$$\left\langle \theta' \frac{\partial \theta}{\partial t} \right\rangle = \left\langle \theta' \frac{\partial \theta'}{\partial t} \right\rangle = \frac{1}{2} \frac{\partial \langle \theta'^2 \rangle}{\partial t} \quad (2.5.28)$$

式(2.2.3)左辺第2項:

$$\begin{aligned} \left\langle \theta' \frac{\partial u_i \theta}{\partial x_k} \right\rangle &= \left\langle \theta' \frac{\partial}{\partial x_k} (\langle u_i \rangle + u_i') (\langle \theta \rangle + \theta') \right\rangle = \left\langle \theta' \frac{\partial}{\partial x_k} \langle u_i \rangle \theta' \right\rangle + \left\langle \theta' \frac{\partial}{\partial x_k} u_i' \theta' \right\rangle + \left\langle \theta' \frac{\partial}{\partial x_k} u_i' \langle \theta \rangle \right\rangle \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_k} \langle u_i \rangle \langle \theta'^2 \rangle + \langle u_i' \theta' \rangle \frac{\partial}{\partial x_k} \langle \theta \rangle + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_k} \langle u_i' \theta'^2 \rangle \end{aligned} \quad (2.5.29)$$

式(2.2.3)右辺第1項:

$$\left\langle \theta' \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\alpha \frac{\partial \theta}{\partial x_k} \right) \right\rangle = \alpha \left\langle \theta' \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_k^2} \right\rangle = \frac{1}{2} \alpha \frac{\partial^2 \langle \theta'^2 \rangle}{\partial x_k^2} - \alpha \left\langle \frac{\partial \theta'}{\partial x_k} \frac{\partial \theta}{\partial x_k} \right\rangle \quad (2.5.30)$$

(2.5.28)~(2.5.30)より $\langle \theta'^2 \rangle$ の輸送方程式は次式となる。

$$\frac{\partial \langle \theta'^2 \rangle}{\partial t} + \frac{\partial \langle u_k \rangle \langle \theta'^2 \rangle}{\partial x_k} = -2 \langle u'_k \theta' \rangle \frac{\partial \langle \theta \rangle}{\partial x_k} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\alpha \frac{\partial \langle \theta'^2 \rangle}{\partial x_k} - \langle u'_k \theta'^2 \rangle \right) - 2 \alpha \left\langle \frac{\partial \theta'}{\partial x_k} \frac{\partial \theta}{\partial x_k} \right\rangle \quad (2.5.31)$$

(A) (B) (C) (D)

式(2.5.31)の(A)部分は $\langle \theta'^2 \rangle$ の実質微分項、(B)部分は $\langle \theta'^2 \rangle$ の生産項(P_θ と略記する)、(C)部分は $\langle \theta'^2 \rangle$ の拡散項(D_θ と略記する)、(D)部分は $\langle \theta'^2 \rangle$ の散逸項である($2 \cdot \varepsilon_\theta$ と略記する)。

式(2.5.31)で示した $\langle \theta'^2 \rangle$ の輸送方程式(A)、(B)部分はモデル化の必要はない。また(C)部分の乱流拡散項については前述のGGDHを用いて次式でモデル化できる。

$$D_\theta = \frac{\partial}{\partial x_m} (C_\theta \langle u'_m u'_k \rangle \frac{k}{\varepsilon} \frac{\partial \langle \theta \rangle}{\partial x_k}) \quad (2.5.32)$$

ここで $C_\theta = 0.15$ である。

$\langle \theta'^2 \rangle$ の輸送方程式には、更に ε_θ という未知数が式(2.5.31)の輸送方程式(D)部分に現れる。この ε_θ を求めるための輸送方程式として以下のようなものが提案されている³⁰⁾。

$$\frac{\partial \varepsilon_\theta}{\partial t} + \frac{\partial \langle u_k \rangle \varepsilon_\theta}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left(C_{\varepsilon\theta} \frac{k}{\varepsilon} \langle u'_k u'_m \rangle \frac{\partial \varepsilon_\theta}{\partial x_m} \right) + \left(C_{\varepsilon\theta 1} \frac{P_\theta}{\langle \theta'^2 \rangle} + C_{\varepsilon\theta 2} \frac{P_k}{k} - C_{\varepsilon\theta 3} \frac{\varepsilon_\theta}{\langle \theta'^2 \rangle} - C_{\varepsilon\theta 4} \frac{\varepsilon}{k} \right) \quad (2.5.33)$$

ここで $C_{\varepsilon\theta} = 0.2, C_{\varepsilon\theta 1} = 0.9, C_{\varepsilon\theta 2} = 0.72, C_{\varepsilon\theta 3} = 2.2, C_{\varepsilon\theta 4} = 0.8$ である。

以上で $\langle \theta'^2 \rangle$ 、 ε_θ が求めることができ、 $\langle u'_k \theta' \rangle$ の輸送方程式はcloseさせることができた。

しかし、上に示した ε_θ の輸送方程式はまだ十分には一般性を有するモデルとはいえない。また一方で解くべき輸送方程式の数を減らすという観点から以下に示す単純なモデルが提案されている。

スカラー変動の時間スケールと速度変動の時間スケールの比を次式で定義する。

$$R = \frac{\langle \langle \theta'^2 \rangle \rangle / (2 \cdot \varepsilon_\theta)}{(k / \varepsilon)} \quad (2.5.34)$$

この R を一定であると仮定すると ε_θ は次のように表される。

$$\varepsilon_\theta = \frac{\langle \theta'^2 \rangle}{2 \cdot R} \cdot \frac{\varepsilon}{k} \quad (2.5.35)$$

一般に $R = 0.8$ と仮定される。

本論文では、 $\langle \theta'^2 \rangle$ 輸送方程式が解かれるときには ε_θ には式(2.5.35)のモデルが用いられる。

2.5.6 代数応力方程式モデル

DSMの簡易バージョンの一つである代数応力方程式モデル(ASM)では、レイノルズ応力の場合と同じように、乱流熱フラックス $\langle u'_k \theta' \rangle$ の輸送方程式中に現れる $\langle u'_k \theta' \rangle$ の空間微分を含む項である移流項($C_{\theta 0}$)と拡散項($D_{\theta 0}$)を次式のように単純化し、 $\langle u'_k \theta' \rangle$ の輸送方程式を代数化する。

$$C_{\theta\theta} - D_{\theta\theta} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k} (P_k + G_k - \varepsilon) + \frac{1}{\langle \theta'^2 \rangle} (P_\theta - 2 \cdot \varepsilon_\theta) \right) \langle u_i \theta' \rangle = P_{\theta(1)} + P_{\theta(2)} + G_{\theta\theta} + \phi_{\theta\theta} \quad (2.5.36)$$

このモデルについてもレイノルズ応力の代数式と同じく、局所平衡から大きく外れた流れ場において不適当な近似となることが指摘されている（第5章参照）。

以上のようなモデル化により、2次モーメントの輸送方程式はクローズすることができる。これらのうち現在最も一般的に用いられている標準型 DSM の基礎方程式と数値定数を表 2.2 に再掲する。

表 2.2 標準型 DSM の基礎方程式（非等温）

$$\langle u_i' u_j' \rangle \text{ 方程式} \quad \frac{D \langle u_i' u_j' \rangle}{Dt} = D_{ij} + P_{ij} + \phi_{ij} + G_{ij} - \varepsilon_{ij} \quad (2-1)$$

$$\langle u_i' \theta' \rangle \text{ 方程式} \quad \frac{D \langle u_i' \theta' \rangle}{Dt} = D_{i\theta} + P_{\theta(1)} + P_{\theta(2)} + G_{i\theta} + \phi_{i\theta} \quad (2-2)$$

$$\langle \theta \rangle \text{ 方程式} \quad \frac{D \varepsilon}{Dt} = D_\varepsilon + \frac{\varepsilon}{k} (C_{\varepsilon 1} P_k + C_{\varepsilon 3} G_k - C_{\varepsilon 2} \varepsilon) \quad (2-3)$$

$$\langle \theta'^2 \rangle \text{ 方程式} \quad \frac{D \langle \theta'^2 \rangle}{Dt} = D_\theta + P_\theta - 2 \cdot \varepsilon_\theta \quad (2-4)$$

$$k = \frac{1}{2} \langle u_i' u_i' \rangle \quad (2-5) \quad P_k = \frac{1}{2} P_{ii} \quad (2-6)$$

$$D_{ij} = \frac{\partial}{\partial x_m} (C_k \langle u_m' u_i' u_j' \rangle \frac{k}{\varepsilon} \frac{\partial \langle u_i' u_j' \rangle}{\partial x_l}) \quad (2-7) \quad D_k = \frac{\partial}{\partial x_m} (C_k \langle u_m' u_i' u_i' \rangle \frac{k}{\varepsilon} \frac{\partial k}{\partial x_l}) \quad (2-8)$$

$$D_\varepsilon = \frac{\partial}{\partial x_m} (C_\varepsilon \langle u_m' u_i' u_i' \rangle \frac{k}{\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_l}) \quad (2-9) \quad D_{i\theta} = \frac{\partial}{\partial x_m} (C_{i\theta} \langle u_m' u_i' u_i' \rangle \frac{k}{\varepsilon} \frac{\partial \langle u_i' \theta' \rangle}{\partial x_l}) \quad (2-10)$$

$$D_\theta = \frac{\partial}{\partial x_m} (C_\theta \langle u_m' u_i' u_i' \rangle \frac{k}{\varepsilon} \frac{\partial \theta}{\partial x_l}) \quad (2-11)$$

$$P_{ij} = - \langle u_i' u_k' \rangle \frac{\partial \langle u_j \rangle}{\partial x_k} - \langle u_j' u_k' \rangle \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_k} \quad (2-12)$$

$$P_{\theta(1)} = - \langle u_i' u_k' \rangle \frac{\partial \langle \theta \rangle}{\partial x_k} \quad (2-13) \quad P_{\theta(2)} = - \langle u_k' \theta' \rangle \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_k} \quad (2-14)$$

$$G_{ij} = - \langle u_i' \theta' \rangle g_j \beta - \langle u_j' \theta' \rangle g_i \beta \quad (2-15) \quad G_k = - \langle u_i' \theta' \rangle g_i \beta \quad (2-16)$$

$$G_{\theta\theta} = - g_i \beta \langle \theta'^2 \rangle \quad (2-17) \quad P_\theta = - \langle u_i' \theta' \rangle \frac{\partial \langle \theta \rangle}{\partial x_i} \quad (2-18)$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{2}{3} \varepsilon \delta_{ij} \quad (2-19) \quad \varepsilon_\theta = \frac{1}{2R} \frac{\langle \theta'^2 \rangle}{k} \varepsilon \quad (2-20)$$

$$\phi_{ij} = \phi_{ij(1)} + \phi_{ij(2)} + \phi_{ij(3)} + \phi_{ij(4)} + \phi_{ij(5)} \quad (2-21)$$

$$\phi_{ij(1)} = - C_1 \frac{\varepsilon}{k} \langle u_i' u_j' \rangle - \frac{2}{3} k \delta_{ij} \quad (2-22)$$

$$\phi_{ij(2)} = - C_2 (P_{ij} - \frac{2}{3} P_k \delta_{ij}) \quad (2-23)$$

$$\phi_{ij(3)} = - C_3 (G_{ij} - \frac{2}{3} G_k \delta_{ij}) \quad (2-24)$$

$$\phi_{ij(1)}^{(w)} = \sum_{m=1}^{w_0} C_1' \frac{\varepsilon}{k} \langle u_k' u_m' \rangle n_k^{(w)} n_m^{(w)} \delta_{ij} - \frac{3}{2} \langle u_k' u_i' \rangle n_k^{(w)} n_j^{(w)} \\ - \frac{2}{3} \langle u_k' u_j' \rangle n_k^{(w)} n_i^{(w)} \frac{k^{3/2}}{C_i h_n^{(w)} \varepsilon} \quad (2-25)$$

$$\phi_{ij(2)}^{(w)} = \sum_{m=1}^{w_0} C_2' \frac{\varepsilon}{k} (\phi_{km(2)} n_k^{(w)} n_m^{(w)} \delta_{ij} - \frac{3}{2} \phi_{kij(2)} n_k^{(w)} n_j^{(w)}) \\ - \frac{2}{3} \phi_{kij(2)} n_k^{(w)} n_i^{(w)} \frac{k^{3/2}}{C_i h_n^{(w)} \varepsilon} \quad (2-26)$$

$$\phi_{i\theta} = \phi_{i\theta(1)} + \phi_{i\theta(2)} + \phi_{i\theta(3)} + \phi_{i\theta(1)}^{(w)} \quad (2-27)$$

$$\phi_{i\theta(1)} = -C_{i\theta 1} \frac{\varepsilon}{k} \langle u_i' \theta' \rangle \quad (2-28) \quad \phi_{i\theta(2)} = -C_{i\theta 2} P_{i\theta(1)} \quad (2-29)$$

$$\phi_{i\theta(3)} = -C_{i\theta 3} G_{i\theta} \quad (2-30)$$

$$\phi_{i\theta(1)}^{(w)} = \sum_{m=1}^{w_0} C_{i\theta 1}' \frac{\varepsilon}{k} \langle u_k' \theta' \rangle n_k^{(w)} n_i^{(w)} \frac{k^{3/2}}{C_i h_n^{(w)} \varepsilon} \quad (2-31)$$

$$\begin{array}{llllllll} C_1 : 1.8 & C_2 : 0.6 & C_3 : 0.6 & C_1' : 0.5 & C_1' : 0.5 & C_2' : 0.0 & C_k : 0.22 & C_e : 0.16 \\ C_{e1} : 1.44 & C_{e2} : 1.92 & C_{e3} \text{ は } G_k > 0 \text{ の場合 } 1.44 & G_k < 0 \text{ の場合 } 0.0 & C_{i\theta} : 0.15 & C_{\theta} : 0.15 & & \\ C_{i\theta 1} : 3.0 & C_{i\theta 2} : 0.5 & C_{i\theta 3} : 0.3 & C_{i\theta 1}' : 0.5 & C_i : 2.5 & R : 0.8 & & \end{array}$$

第2章 参考文献

- 1) Reynolds, O. (1895) : On the dynamical theory of incompressible viscous fluid and the determination of the criterion. : Philos. Trans. R. Soc. London Ser. A186, pp.123-164
- 2) Bossinesq, J. (1877) : Theorie de l'ecoulement tourbillant. Mem. Presentes per divers Savants Acad. Sci. Inst. Fr., 23 : pp.46-50
- 3) Prandtl, L. (1925) : Über die ausgebildete Turbulenz. ZAMM, 5 : pp.136-139
- 4) Prandtl, L. (1945) : Über ein neues Formelsystem für die ausgebildete Turbulenz. : Nachr. Akad. Wiss. Goettingen, Math. Phys., Kl., pp.6-19
- 5) Rotta, J. C. (1951): Statistische theorie nichthomogener turbulenz. Zeitschr Phys. 129, pp.547-572
- 6) Davidov, B. I. (1961) On the statistical dynamics of an incompressible fluid. : Doklady Academy Nauka SSSR., 136: 47.
- 7) Hanjalic, K. (1970) : Two dimensional asymmetric turbulents flow in ducts (Ph.D. thesis), University of London
- 8) Rodi, W. (1971) : On the equation govering the rate of turbulent energy dissipation. Mech. Eng. Dept. Imperial College. Rep., TM/TN/A/14
- 9) Launder, B.E. and Spalding, D.B. (1974) : The numerical computation of turbulent flows. : Comp. Meth. Appl. Mech. Eng., 3. pp.269-289
- 10) Daly, B. J. and Harlow, F. H. (1970): Transport equations of turbulence. Phys. Fluid, 13, pp.2634-2649
- 11) Launder, B. E., Reece, G. J. and Rodi, W. (1975): Progress in the development of a Reynolds stress turbulence closure. J. Fluid Mech. 68, pp.537-566
- 12) Schumann, U. 1977 : Realizability of Reynolds stress turbulent models : Phys. Fluids 20: pp.721-25
- 13) Lumley, J.L. 1978 : Computational modeling of turbulent flows. Adv. Appl. Mech. 18: 123-176
- 14) Yoshizawa, A. (1984) : Statistical analysis of deviation of the Reynolds stress from its eddy viscosity representation. Phys. Fluids, 27 : pp.1377-1387.
- 15) Yakhot, V. and Orszag, S.A. (1986) : Renormalization group analysis of turbulence, I. Basic theory. J. Sci. Comput., 1 : pp.3-51
- 16) Speziale, C.G. (1991) : Analytical methods for the development of Reynolds stress closures in turbulence. Annu. Rev. Fluid Mech., 23 : pp.107-157
- 17) Murakami, S., Mochida, A. and Ooka, R. : Numerical Simulation of Flowfield over Surface-mounted Cube with Various Second-moment Closure Models, 9th Symposium on Turbulent Shear Flows Preprint pp.13-1-13-1-6, August. 1993, Kyoto, Japan
- 18) Champagne, F. H., Harris, V.G., and Corrsin, S. C. (1970) : Experiments on nearly homogeneous shear flow, J. Fluid Mech., 41: pp.81-141.
- 19) Shir, C.C. (1973) A preliminary numerical study of atmospheric turbulent flow in the idealized

- planetary boundary layer, *J. Atmos. Sci.* 30, 1327
- 20) Gibson, M.M., Launder, B.E.: Ground Effects on Pressure Fluctuations in The Atmospheric Boundary Layer, *J. Fluid Mech.*, 86, pp.491-511, 1978
- 21) 近藤靖史、村上周三、加藤信介: 応力方程式モデルによる室内気流解析 (その1、2)、日本建築学会学術講演梗概集 (環境工学)、pp.757-760, 1988, 10
- 22) 長野靖尚、島田昌也 (1993): DNS データベースに基づく低レイノルズ数型 $k-\epsilon$ モデルの再構築、第7回数値流体力学シンポジウム講演論文集: pp.307-310
- 23) 河村洋、川島紀英 (1993): 壁乱流型 $k-\epsilon$ 2 方程式モデル (続報)、第7回数値流体力学シンポジウム講演論文集: pp.315-318
- 24) Mellor, G.L., and Herring, H.J. (1973) A survey of mean turbulent field closure. *AIAA J.* 11, pp.590-599
- 25) Hanjalic, K. and Launder, B. E. (1972): A Reynolds-stress model of turbulence and its application to thin shear flows, *J. Fluid Mech.* 52, pp.609-638
- 26) Launder, B. E. (1971): Imperial College Mech. Eng. Dpt. Rep. No. TM/TN/A/9
- 27) Rodi, W. (1976): A new algebraic relation for calculating the Reynolds stresses. *ZAMM*, 56, T219
- 28) Launder, B. E. (1982): A generalized algebraic stress transport hypothesis. *AIAA Journal* 20, p.436
- 29) Launder, B. E. (1983): Second moment closure, methodology and practice, Univ. Manchester Institute of Sci. and Tech. Rep. No. TFD/82/4
- 30) 長野靖尚、金哲晃 (1987): 温度場 2 方程式モデルによる乱流伝熱の解析、日本機学会論文集 (B 編) 53 巻 490 号、pp.1773-1780

第三章

乱流モデリング手法と高次DSM

第3章 乱流モデリング手法と高次DSM

3.1 テンソル解析と不変量

1978年にLumley¹⁾は不変量概念を導入し、高次精度RSMの基礎を作った。不変量概念は乱流の非等方性効果のモデリングに有効である。またこの概念は低レイノルズ数型RSMのモデリングに際しても利用される。

DSMで変数となるレイノルズストレス $\langle u_i^* u_j^* \rangle$ は2階の対称テンソルである。テンソル解析におけるケーリー-ハミルトンの定理によれば、2階の対称テンソル τ_{ij} は次の等式を満たす²⁾

3)

$$\tau_{im}\tau_{mn}\tau_{nj} - I\tau_{im}\tau_{mj} + II\tau_{ij} - III\delta_{ij} = 0 \quad (3-1)$$

$$I = \tau_{kk} \quad (3-2)$$

$$II = \frac{1}{2!}(\tau_{kk}\tau_{ll} - \tau_{kl}\tau_{lk}) \quad (3-3)$$

$$III = \frac{1}{3!}(\tau_{kk}\tau_{ll}\tau_{mm} - 3\tau_{kk}\tau_{lm}\tau_{ml} + 2\tau_{kl}\tau_{jm}\tau_{mk}) \quad (3-4)$$

I, II, IIIはそれぞれ τ_{ij} の第一、第二および第三不変量と呼ばれ、その成分である τ_{ij} の1次、2次および3次の関数である。もちろんI, II, IIIの任意の組み合わせも不変量である。不変量とはスカラーでかつ座標の並進・回転・鏡映等によって値の変えない量のことである。

この定理より対称テンソル τ_{ij} の3次以上の積は2次以下の積で表されることになり、2階対称テンソル関数の2階対称テンソルによる展開近似は2次で打ち切られることになる。

一般に乱流のモデリングでは等方状態を基準にし、それからのずれを評価することが多いので、次の無次元非等方テンソル a_{ij} が評価尺度としてしばしば重要な役割を果たす。

$$a_{ij} = \frac{\langle u_i^* u_j^* \rangle - 2/3 k \delta_{ij}}{k} \quad (3-5)$$

Launderらは、 a_{ij} を用いて、次の二つの不変量を定義している。

$$A_2 = a_{ik}a_{ki} \quad (3-6)$$

$$A_3 = a_{ik}a_{km}a_{mi} \quad (3-7)$$

それぞれ特に、第二不変量、第三不変量と呼ばれる。なお第一不変量は $A_1 = a_{kk} = 0$ となる。さらにLumleyは量 A_2, A_3 からなる次の変数を導入した。

$$A = 1 - 9/8(A_2 - A_3) \quad (3-8)$$

これはflatness parameterと呼ばれるもので2次元乱流で0、等方乱流で1となる。これも非等方性が問題となる流れ場において重要なパラメータである。2次元乱流とは、速度変動が2次元になった状態の乱流を云う。これはいわば仮想的流れで、例えば壁に非常に近い位置で壁法線方向の速度変動が減衰してしまった流れがこれに相当する。

3. 2 圧力-歪相関項の一般形と高次モデリング

3. 2. 1 圧力-歪相関項と realizability

高次精度の圧力歪相関項のモデル化において重要な条件となっているものに、Lumley、Schumann^{4,5}によって提示された realizability の概念がある。これは、例えばモデルの計算結果において、 $\langle u_1'^2 \rangle, \langle u_2'^2 \rangle, \langle u_3'^2 \rangle \geq 0$, $\langle u_1'^2 \rangle \cdot \langle u_2'^2 \rangle \geq \langle u_1' u_2' \rangle^2$ などが常に保障されなければならないという制約である。また例えば、壁の極く近い位置での2次元壁乱流における $\langle u_2'^2 \rangle$ 方程式において $\langle u_2'^2 \rangle = 0$ となるとき（ここで x_2 は壁法線方向をさす） $\partial \langle u_2'^2 \rangle / \partial t = 0$ とならなければならないという要請が与えられる。また Lumley は realizability の要請より、 $\langle u_2'^2 \rangle = 0$ である2次元乱流では次の関係式が成り立つ必要があることを示している。

$$\Phi_{22(1)} - \varepsilon_{22} = 0 \quad (3-9)$$

$$\Phi_{22(2)} = 0 \quad (3-10)$$

3. 2. 2 $\Phi_{ij(1)}$ の高次モデリング

3. 2. 2. 1 $\Phi_{ij(1)}$ の高次表現

$\Phi_{ij(1)}$ の分類・定義の仕方には種々の議論があるが、ここでは慣例に従い、平均速度勾配を含まない変数で構成された項であるとする。従って Second-moment Closure のレベルで $\Phi_{ij(1)}$ はせいぜい $v, k, \varepsilon, \langle u_k' u_j' \rangle$ の関数で近似しようとみなしてよい。

$$\Phi_{ij(1)} = \varepsilon F_{ij}(v, k, \varepsilon, \langle u_k' u_j' \rangle) \quad (3-11)$$

ここで F_{ij} は slow term のメカニズムを表す無次元テンソル関数である。また $\Phi_{ij(1)}$ は本来非等方なストレスを等方的にする機能を与えられているので、等方状態からのずれを表す無次元非等方テンソル a_{ij} を展開パラメータとして用いるのが自然である。この場合、ケーリー-ハミルトンの定理より $\Phi_{ij(1)}$ の展開は2次の項までで打ち切られてよいので式(3-12)となる。式(3-12)が非線形表現された $\Phi_{ij(1)}$ の高次モデルである。

$$\Phi_{ij(1)} = -\varepsilon \left(\alpha_1 a_{ij} + \alpha_2 \left(a_{ik} a_{jk} - \frac{1}{3} a_{kk} a_{ij} \right) \right) \quad (3-12)$$

ここで α_1, α_2 はモデル係数であり、 $v, k, \varepsilon, \langle u_k' u_j' \rangle$ を変数にもつ無次元スカラー関数である。また $v, k, \varepsilon, \langle u_k' u_j' \rangle$ によって形成される独立な無次元スカラーは次の3つである。

$$R_1 = k^2 / \varepsilon v, \quad A_2, \quad A_3$$

従って α_1, α_2 は R_1, A_2, A_3 を変数にもつ無次元スカラー関数であるとみなすことが可能である。

式(3-12)において線形項のみを残したものは式(3-13)となり、いわゆる Rotta モデルの形に帰着する。

$$\Phi_{ij(1)} = -C_1 \frac{\varepsilon}{k} \left(\langle u_i' u_j' \rangle - \frac{2}{3} \delta_{ij} k \right) \quad (3-13)$$

ここで $C_1 = 1.8$

3. 2. 2. 2 $\Phi_{(1)}$ の高次モデルと realizability

式(3-13)の線形モデルが式(3-9)の realizability の要請を満たさないことは明らかである。即ち、 $\langle u_2'^2 \rangle = 0$ となる 2 次元乱流では

$$\Phi_{22(1)} - \varepsilon_{22} = \frac{2}{3}(C_1 - 1)\varepsilon > 0 \quad (3-14)$$

となるので、式(3-9)の realizability の要請は満たさない。但し ε_{22} を評価する際、ここでは次の局所等方性の仮定に基づく ε_{ij} の近似式を用いた。

$$\varepsilon_{ij} = \frac{2}{3}\varepsilon\delta_{ij} \quad (3-15)$$

式(3-9)を満たすための簡単な改善方法の一つは式(3-14)に 2 次元乱流で 0 となる Lumley の flatness parameter A 、あるいはその冪乗 A^n ($n > 0$) を乗ずることである。この簡単なモデルの一つに Launder-Shima⁵⁾ の準線形モデルがある。これは式(3-13)において

$$C_1 = 1 + 2.58AA_2^{1/4} \left(1 - \exp \left[- (0.0067R_f)^2 \right] \right) \quad (3-16)$$

としたものである。これを式(3-14)に代入すれば次のようになる。

$$\Phi_{22(1)} - \varepsilon_{22} = \frac{2}{3} \left(2.58AA_2^{1/4} \left(1 - \exp \left[- (0.0067R_f)^2 \right] \right) \right) \varepsilon \quad (3-17)$$

したがってこのモデルは $\langle u_2'^2 \rangle = 0$ の 2 次元乱流において $A \rightarrow 0$ となることより、 $\Phi_{22(1)} - \varepsilon_{22} = 0$ となり realizability を満たす。

非等方性が強い流れ場では式(3-15)で用いた ε_{ij} の等方性近似式は成立せず、非等方成分を持つようになる。レイノルズ応力輸送方程式中の ε_{ij} は非線形テンソル a_{ij} の線形テンソル関数として次のように表現される場合もある。

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon \cdot \left(\frac{2}{3}\delta_{ij} + f \cdot a_{ij} \right) \quad (3-18)$$

ここで f は乱流レイノルズ数 R_f や不変量 A 、 A_2 等の関数である。2 次元乱流の極限 ($\langle u_2'^2 \rangle = 0$) では f は 1 になると仮定される場合があり、この時

$$\varepsilon_{ij} = \frac{\langle u_i' u_j' \rangle}{k} \varepsilon \quad (3-19)$$

となる。一方次に示される ε_{ij} の非等方部分

$$\left(\varepsilon_{ij} - \frac{2}{3}\varepsilon\delta_{ij} \right) = f \cdot a_{ij}\varepsilon \quad (3-20)$$

を圧力-歪相関項の slow term に組み込み、 ε_{ij} 自身には式(3-15)の局所等方性近似を課してモデル化する場合もある。即ち式(3-16)中右辺第一項の 1 は 2 次元乱流の極限において ε_{ij} の非等方部分に対応していると考えられる。従って ε_{ij} の表現に式(3-16)を用いた場合には、式(3-16)の slow term の係数 C_1 は次の様になる。

$$C_1 = 2.58AA_2^{1/4} \left(1 - \exp \left[- (0.0067R_f)^2 \right] \right) \quad (3-21)$$

$\Phi_{(1)}$ の非線形モデル(式(3-12))で realizability を満たすものに Fu-Launder-Tselepidakis

⁶⁾ モデルがある。これは式(3-12)において係数 α_1 、 α_2 を次のように定めたものである。

$$\alpha_1 = 3.1(A_2 A)^{1/2} + 1 \quad (3-22)$$

$$\alpha_2 = 3.72(A_2 A)^{1/2} \quad (3-23)$$

もちろんこのモデルにおいても ε_{ij} の表現に式(3-18)を用いた場合には、係数 α_1 は次のようになる。

$$\alpha_1 = 3.1(A_2 A)^{1/2} \quad (3-24)$$

また Speziale-Sarkar-Gastki⁷⁾ は不変量理論 (invariance theory) より別の非線形モデルを提案している。これは式(3-12)において係数 α_1 、 α_2 を次のように定めたものである。

$$\alpha_1 = 1.7 + 0.9 P_k / \varepsilon \quad (3-25)$$

$$\alpha_2 = -1.05 \quad (3-26)$$

Speziale-Sarkar-Gastki の係数 α_1 、 α_2 (式(3.1.25)、(3.1.26)) は 2 次元乱流の極限で 0 にはならない。従って式(3-9)の realizability の要請は満たさない。このことに対する解釈について次節で述べる。

3. 2. 3 $\Phi_{ij(2)}$ の高次モデリング

3. 2. 3. 1 $\Phi_{ij(2)}$ の高次表現

平均速度勾配がほぼ均質と見なせる流れ場において、前節で導入した rapid term のメカニズムを表す 4 階無次元テンソル M_{ijkl} の表式を再掲する。

$$kM_{ijkl} = -\frac{1}{2\pi} \iiint_V \left[\frac{\partial^2 \langle \tilde{u}_i' \tilde{u}_j' \rangle}{\partial \tilde{x}_k \partial \tilde{x}_l} + \frac{\partial^2 \langle \tilde{u}_i' \tilde{u}_j' \rangle}{\partial \tilde{x}_k \partial \tilde{x}_l} \right] \frac{dV}{r} \quad (3-27)$$

このような流れ場では、 $\Phi_{ij(2)}$ は次式のようにになる。

$$\Phi_{ij(2)} = kM_{ijkl} \frac{\partial \langle u_k \rangle}{\partial x_l} \quad (3-28)$$

M_{ijkl} が $\nu, k, \varepsilon, \langle u_k' u_l' \rangle$ のテンソル関数であると仮定して、 M_{ijkl} を非等方テンソル a_{ij} で展開し、その 3 次積までを示せば次のようになる。

$$\begin{aligned} M_{ijkl} = & \gamma_0 \delta_{ij} \delta_{kl} + \gamma_1 (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{jk} \delta_{il}) + \gamma_2 a_{ij} \delta_{kl} + \gamma_3 (a_{ik} \delta_{jl} + a_{jk} \delta_{il}) \\ & + \gamma_4 (a_{ij} \delta_{kl} + a_{kl} \delta_{ij}) + \gamma_5 a_{kl} \delta_{ij} + \gamma_6 a_{ij} a_{kl} + \gamma_7 (a_{ik} a_{jl} + a_{jk} a_{il}) \\ & + \gamma_8 a_{mi} a_{kn} \delta_{lj} + \gamma_9 a_{im} a_{mj} \delta_{kl} \\ & + \gamma_{10} (a_{im} a_{mj} \delta_{kl} + a_{jm} a_{mi} \delta_{kl}) + \gamma_{11} (a_{im} a_{mk} \delta_{lj} + a_{jm} a_{mk} \delta_{il}) \\ & + \gamma_{12} a_{ij} a_{kn} \delta_{ml} + \gamma_{13} (a_{ij} a_{kn} a_{jm} + a_{ij} a_{kn} a_{im}) \\ & + \gamma_{14} a_{ij} a_{im} a_{mj} + \gamma_{15} (a_{ik} a_{jm} a_{im} + a_{jk} a_{im} a_{im}) \\ & + \gamma_{16} a_{km} a_{in} a_{mn} \delta_{ij} + \gamma_{17} a_{im} a_{jn} a_{mn} \delta_{kl} \\ & + \gamma_{18} (a_{im} a_{jn} a_{mn} \delta_{kl} + a_{jm} a_{in} a_{mn} \delta_{kl}) \\ & + \gamma_{19} (a_{im} a_{kn} a_{mn} \delta_{lj} + a_{jm} a_{kn} a_{mn} \delta_{il}) \end{aligned} \quad (3-29)$$

ここで $\gamma_0 \sim \gamma_{19}$ は R_1 、 A_2 、 A_3 を変数にもつ無次元スカラー関数である。ここで変動速度場

の連続の式 ($\partial u_i / \partial x_i = 0$) により、 M_{ijk} に対して次のように力学的制約が課せられる。

$$M_{ijk} = 0 \quad (3-30)$$

さらに式(3-29)中の δ_{ij} に関する項は、式(3-29)を式(3-28)に代入した時、平均速度場の連続の式より、 $\delta_{ij} \partial < u_i > / \partial x_j = \partial < u_i > / \partial x_j = 0$ となるので除外される。式(3-29)を式(3-28)に代入すれば a_{ij} の3次積までを用いた $\Phi_{ij(2)}$ の一般形が次のように与えられる。

$$\begin{aligned} \Phi_{ij(2)} = & \beta_1 k S_{ij} + \beta_2 k (a_{ik} S_{jk} + a_{jk} S_{ik} - 2/3 a_{ik} S_{ik} \delta_{ij}) \\ & + \beta_3 k (a_{ik} \Omega_{jk} + a_{jk} \Omega_{ik}) \\ & + \beta_4 k (a_{im} a_{jk} S_{mk} + a_{jm} a_{ik} S_{mk} - 2/3 a_{im} a_{ik} S_{mk} \delta_{ij}) \\ & + \beta_5 k (a_{im} a_{mk} S_{jk} + a_{jm} a_{mk} S_{ik} - 2/3 a_{im} a_{mk} S_{ik} \delta_{ij}) \\ & + \beta_6 k (a_{im} a_{mk} \Omega_{jk} + a_{jm} a_{mk} \Omega_{ik}) \\ & + \beta_7 k (a_{ik} a_{jm} S_{km} + a_{jk} a_{im} S_{km} - 2/3 a_{ik} a_{jm} S_{km} \delta_{ij}) \\ & + \beta_8 k (a_{ij} a_{mk} S_{jk} + a_{jk} a_{im} S_{il} - 2/3 a_{ij} a_{mk} a_{im} S_{il} \delta_{ij}) \\ & + \beta_9 k (a_{ij} a_{jk} a_{im} \Omega_{km} + a_{ik} a_{jm} a_{im} \Omega_{lm}) \\ & + \beta_{10} k (a_{ij} a_{mk} a_{im} \Omega_{jk} + a_{jk} a_{mk} a_{im} \Omega_{il}) \\ & + \{ \beta_{11} k a_{ik} S_{ik} + \beta_{12} k a_{ik} a_{im} S_{km} \} a_{ij} \\ & + \beta_{13} k a_{ik} S_{ik} (a_{ik} a_{jk} - 1/3 a_{ik} a_{jk} \delta_{ij}) \end{aligned} \quad (3-31)$$

この場合、式(3-28)中の速度勾配 $\partial < u_i > / \partial x_j$ は対称テンソル S_{ij} と非対称テンソル Ω_{ij} に分離されて表現されている。そのため式(3-29)中の係数 γ_i も変化するので、新たな係数 β_i を用いて表現し直している。

3. 2. 3. 2 $\Phi_{ij(2)}$ の高次モデルと realizability

$\Phi_{ij(2)}$ のモデル化を行う際の一般的な指針として、式(3-32)のような実験事実に基づく $\Phi_{ij(2)}$ の表現式がある。即ち等方乱流の状態に対して急激に速度勾配が与えられた時、等方状態を維持すべく $\Phi_{ij(2)}$ が働きその形式は、実験結果から次式で表されることがわかっている。

$$\Phi_{ij(2)} = 0.4k \left(\frac{\partial < u_i >}{\partial x_j} + \frac{\partial < u_j >}{\partial x_i} \right) \quad (3-32)$$

式(3-31)において a_{ij} の展開を1次の項で打ち切り、(3-30)式等の制約や式(3-32)を考慮して導出したものが前節で紹介した QIM (式(3-19)) である。しかしながらこの QIM を始めとして $\Phi_{ij(2)}$ の a_{ij} に関する線形モデルは一般には、式(3-10)で与えられる realizability を満たさないことが明らかにされている。これについて以下に簡単に説明する。

式(3-29)において M_{ijk} を a_{ij} に関する一次の項で打ち切り、 δ_{ij} に関する項を除外すると次で表される。

$$\begin{aligned} M_{ijk} = & \gamma_1 (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{jk} \delta_{il}) + \gamma_2 (a_{ik} \delta_{jl} + a_{jk} \delta_{il}) \\ & + \gamma_3 (a_{ij} \delta_{kl} + a_{il} \delta_{jk}) + \gamma_4 a_{ij} \delta_{kl} \end{aligned} \quad (3-33)$$

また制約式(3-30)より

$$M_{ijk} = 2\gamma_1 \delta_{ik} + (2\gamma_3 + 2\gamma_4 + 3\gamma_5) \mu_{ik} = 0 \quad (3-34)$$

さらに式(3-34)が任意の k, l について成立するためには次のようになる。

$$\gamma_1 = 0, \quad 2\gamma_3 + 2\gamma_4 + 3\gamma_5 = 0 \quad (3-35)$$

また $\langle u_2'^2 \rangle = 0$ となる二次元乱流における realizability の要請式(3-9)は次の様になる。

$$kM_{22kl} \frac{\partial \langle u_k \rangle}{\partial x_l} = 0 \quad (3-36)$$

これが任意の速度勾配 $\partial \langle u_k \rangle / \partial x_l$ で成り立つためにはこの2次元乱流において次式が成立する必要がある。

$$M_{22kl} = 2\gamma_1 a_{2l} \delta_{kl} + 2\gamma_4 a_{2l} \delta_{k2} + \gamma_5 a_{kl} = 0 \quad (3-37)$$

また $\langle u_2'^2 \rangle = 0$ であるので $\langle u_1' u_2' \rangle = \langle u_2' u_3' \rangle = 0$ 。従って $a_{22} = -2/3$ 、 $a_{12} = a_{23} = 0$ である。これらを考慮すれば式(3-37)は次のように変形される。

(i) $k = l = 2$ のとき

$$M_{2222} = -4/3\gamma_3 - 4/3\gamma_4 - 2/3\gamma_5 = 0 \quad (3-38)$$

(ii) $k \neq 2, l \neq 2$ のとき

$$M_{22kl} = -a_{kl}\gamma_5 = 0 \quad (3-39)$$

式(3-35)、(3-38)、(3-39)より、結局

$$\gamma_1 = 0, \quad \gamma_4 = -\gamma_3, \quad \gamma_5 = 0 \quad (3-40)$$

となる。これらを式(3-33)に代入し、さらに式(3-28)に代入し、式(3-31)の形で整理すると結局次の $\Phi_{ij(2)}$ のモデルが得られる。

$$\Phi_{ij(2)} = C_2' (\overline{a_{ik} \Omega_{jk}} + \overline{a_{jk} \Omega_{ik}}) \quad (3-41)$$

しかしながら、このモデルには非等方テンソル a_{ij} を各項に含んでいるので、係数 C_2 を如何に設定しようとも、等方乱流に速度勾配を加えた時の実験式(3-32)を満たすことはない。従って $\Phi_{ij(2)}$ の線形モデルでは同時に式(3-32)と realizability を満たすことはないといえる。そこでレイノルズ応力の2次積を含み realizability を満たす次のようなモデルが Shih-Lumley⁸⁾により提案されている。

$$\begin{aligned} \Phi_{ij(2)} = & -0.6 \left(P_{ij} - \frac{2}{3} P_k \delta_{ij} \right) + 0.6 P_k a_{ij} \\ & - 0.2 \left[\frac{\langle u_k' u_j' \rangle \langle u_i' u_l' \rangle}{k} \left(\frac{\partial \langle u_k \rangle}{\partial x_l} + \frac{\partial \langle u_l \rangle}{\partial x_k} \right) - \frac{\langle u_i' u_k' \rangle}{k} \left(\langle u_k u_l \rangle \frac{\partial \langle u_l \rangle}{\partial x_j} + \langle u_j' u_k' \rangle \frac{\partial \langle u_l \rangle}{\partial x_i} \right) \right] \end{aligned} \quad (3-42)$$

しかしながら、このモデルは一様剪断乱流 $(\partial \langle u_1 \rangle / \partial x_2 \neq 0, \langle u_2 \rangle = \langle u_3 \rangle = 0)$ であるような流れ場において $\langle u_2'^2 \rangle < \langle u_3'^2 \rangle$ という実験事実に反する。そこで Fu-Lauder-Tselepidakis⁹⁾は、レイノルズ応力の3次積を含んだ次の項を式(3-42)に付加し、いわゆる cubic モデルを提案した。

$$\Phi_{ij(2)} = -F \left[A_2 (P_{ij} - d_{ij}) + 3a_{mn} a_{nj} (P_{mn} - d_{mn}) \right] \quad (3-43)$$

表 3-1 ϕ_j の係数 (式 (3-12), (3-31))

	α_1	α_2	β_1	β_2	β_3	β_4	β_5	β_6	β_7	β_8	β_9	β_{10}	β_{11}	β_{12}	β_{13}
IPM	1.8	0	0.8	0.6	0.6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
QIM	1.8	0	0.8	0.87	0.65	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
SSG	$1.7+0.9P_v/\varepsilon$	-1.05	0.8- $0.65A_2^{1/2}$	0.625	0.2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
FLT	$3.1(A_2A)^{1/2}$	$3.72(A_2A)^{1/2}$	0.8	0.6	$0.87+2FA_2$ *	-0.2	0.2	0.2	0	0	0	6F*	0	-0.6	0

*F=min{0.6,A}

ここで $F = \min\{0.6, A\}$ 、 P_{ij} はレイノルズストレスの生産項である。 d_{ij} は式(2.1.42)で与えられる。

$\Phi_{ij(1)}$ 並びに $\Phi_{ij(2)}$ の一般表現式 (3-12)、(3-31) における IPM、QIM、Fu-Launder-Tselepidakis⁸⁾ モデルの場合の係数 α_1 、 α_2 並びに $\beta_1 \sim \beta_{13}$ を表 3. 1 に示す。また Speziale-Sarkar-Gatski⁷⁾ も前述の $\Phi_{ij(1)}$ と組み合わせた形で $\Phi_{ij(2)}$ のモデルを提案している。

式(3-31)における Speziale-Sarkar-Gatski モデルの場合の係数も表 3. 1 に示す。表 3. 1 がわかるように Speziale-Sarkar-Gatski の $\Phi_{ij(2)}$ のモデルは a_{ij} に関して 1 次の部分で打ち切られている線形モデルである (但し $\Phi_{ij(1)}$ は 2 次)。従って Speziale-Sarkar-Gatski のモデルは、 $\Phi_{ij(1)}$ も $\Phi_{ij(2)}$ も realizability を満たしていない。これに関して、2 次元乱流という極限状態における制約によってモデルの一般形を決めたとしても、そのことが必ずしも理工学において通常現れる複雑な流れ場に対する高精度予測を行うモデルを与えることにはつながらないという見解もある。

3. 3 衝突領域を含む流れ場に適用可能な $\Phi_{ij(2)}^w$ のモデル

2. 4. 1 節の e) では、現在 $\Phi_{ij(2)}^w$ に対して一般的に用いられている Gibson-Launder 型モデルが impinging を含むような流れ場では物理的に正しく作用されないことが示された。そこで近年 Craft-Launder⁹⁾ は、衝突領域を含むような流れ場においても利用可能な $\Phi_{ij(2)}^w$ のモデルを提案している。

$$\begin{aligned}
 \Phi_{ij(2)}^w = & \sum_{k=1}^{w_2} C_2' \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_m} \langle u_k' u_m' \rangle (\delta_{ij} - 3n_i^{(W)} n_j^{(W)}) \\
 & + C_3' k a_{lm} \left(\frac{\partial \langle u_k \rangle}{\partial x_l} \cdot n_k^{(W)} \cdot n_m^{(W)} \cdot \delta_{ij} - \frac{3}{2} \frac{\partial \langle u_j \rangle}{\partial x_l} \cdot n_m^{(W)} \cdot n_l^{(W)} \right. \\
 & \quad \left. - \frac{3}{2} \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_l} \cdot n_m^{(W)} \cdot n_l^{(W)} \right) \\
 & + C_4' k \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_m} \cdot n_j^{(W)} \cdot n_m^{(W)} (n_i^{(W)} \cdot n_j^{(W)} - \frac{1}{3} \delta_{ij}) \frac{k^{3/2}}{C_\mu h_n^{(W)} \varepsilon}
 \end{aligned} \quad (3-44)$$

ここで $C_2' = -0.08$ 、 $C_3' = -0.1$ 及び $C_4' = -0.4$ 。

このモデルは impinging を含む流れ場で良好な結果をもたらすことが確認されている。また単純剪断流ではこのモデルは式(2.4.26)の Gibson-Launder モデルと係数の僅かな差を除き同型に帰着する。

3. 4 Poisson 方程式に基づいた圧力-歪相関項のモデリング

次に Poisson 方程式に基づく全く新しいタイプの Φ_{ij} のモデルについて述べる。今までに述べた Φ_{ij} のモデルはすべて、平均流の一樣性を仮定した 1 点完結型の乱流モデルであり、境界の存在による平均流の一樣性からのずれの効果については、wall reflection 項を加えることによって組み込んでいる。本来圧力は瞬時に（音速の速さで）流れ場の一樣性からのずれを察知し、その情報を運動方程式に伝えるため、即ち瞬時に自分自身以外の点の情報を取り入れるため、圧力-歪相関項等、圧力との相関を有するモデリングにおいて 1 点完結型のモデルを用いることは妥当でないように思える。近年 Durbin^[10] は、次式で示される 2 点間の相関を考慮した Poisson 方程式に基づいた Φ_{ij} のモデルを提案している（但し等温流れ場を対象とする）。

$$\Phi_{ij} = k f_{ij} \quad (3-45)$$

$$L^2 \nabla^2 f_{ij} - f_{ij} = -\Pi_{ij} \quad (3-46)$$

$$\Pi_{ij} = (1 - C_1) \frac{T}{k} \langle u_i' u_j' \rangle - \frac{2}{3} k \delta_{ij} - \frac{C_2}{k} (p_{ij} - \frac{2}{3} p_k \delta_{ij}) \quad (3-47)$$

$$L = C_L \max \left(\frac{k^{\frac{3}{2}}}{\varepsilon}, C_\eta \left(\frac{v^3}{\varepsilon} \right)^{\frac{1}{4}} \right) \quad (3-48) \quad T = \max \left(\frac{k}{\varepsilon}, C_T \left(\frac{v}{\varepsilon} \right)^{1/2} \right) \quad (3-49)$$

Durbin のモデルでは流体の境界内を Poisson 方程式を用いて解くため、境界の影響を自動的に組み込むことになり、他の 1 点完結モデルで必要とするような wall reflection 項は必要としない。以下に Durbin モデルにおける Poisson 方程式の物理的妥当性について簡単に説明する。

等温流れ場の圧力変動成分のポアソン方程式は次で示される。

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 p'}{\partial x_i^2} = - \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_l} (u_k' u_l' - \langle u_k' u_l' \rangle) - 2 \frac{\partial \langle u_k \rangle}{\partial x_l} \cdot \frac{\partial u_l'}{\partial x_k} \quad (3-50)$$

この式の自由空間における解は次の様に表現される。

$$\frac{p'(x)}{\rho} = \frac{1}{4\pi} \iiint_V \left[\frac{\partial^2}{\partial \bar{x}_k \partial \bar{x}_l} (\bar{u}_k' \bar{u}_l' - \langle \bar{u}_k' \bar{u}_l' \rangle) + 2 \frac{\partial \langle \bar{u}_k \rangle}{\partial \bar{x}_l} \cdot \frac{\partial \bar{u}_l'}{\partial \bar{x}_k} \right] \frac{dV}{|x - \bar{x}|} \quad (3-51)$$

ここで x が考察している圧力変動成分の点、 \bar{x} が積分内の空間上の各点である。従って圧力歪相関は以下になる。

$$\left\langle \frac{p'}{\rho} \frac{\partial u_i'}{\partial x_j} \right\rangle = \frac{1}{4\pi} \iiint_V \left[\left\langle \frac{\partial^2 \bar{u}_k' \bar{u}_l'}{\partial \bar{x}_k \partial \bar{x}_l} \frac{\partial u_i'}{\partial x_j} \right\rangle + 2 \frac{\partial \langle \bar{u}_k \rangle}{\partial \bar{x}_l} \cdot \left\langle \frac{\partial \bar{u}_l'}{\partial \bar{x}_k} \frac{\partial u_i'}{\partial x_j} \right\rangle \right] \frac{dV}{|x - \bar{x}|} \quad (3-52)$$

次に空間 2 点間の相関は、1 点相関に比べて、2 点間の距離に対して指数関数的に減衰すると仮定すると、次の (3-53) 式、(3-54) 式が得られる。

$$\left\langle \frac{\partial^2 \bar{u}_k' \bar{u}_l'}{\partial \bar{x}_k \partial \bar{x}_l} \frac{\partial u_i'}{\partial x_j} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial^2 \bar{u}_k' \bar{u}_l'}{\partial \bar{x}_k \partial \bar{x}_l} \cdot \frac{\partial \bar{u}_l'}{\partial \bar{x}_j} \right\rangle e^{-|x - \bar{x}|/L} \quad (3-53)$$

$$\left\langle \frac{\partial \bar{u}_l'}{\partial \bar{x}_k} \frac{\partial u_i'}{\partial x_j} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial \bar{u}_l'}{\partial \bar{x}_k} \cdot \frac{\partial \bar{u}_l'}{\partial \bar{x}_j} \right\rangle e^{-|x - \bar{x}|/L} \quad (3-54)$$

ここで L は乱流の特徴長さである。(3-53) 式、(3-54) 式を (3-52) 式に代入すると次のようにな

る。

$$\left\langle \frac{p}{\rho} \cdot \frac{\partial u_i'}{\partial x_j} \right\rangle = \frac{1}{4\pi} \iiint_V \left\langle \left[\frac{\partial^2 \tilde{u}_k' \tilde{u}_l'}{\partial \tilde{x}_k \partial \tilde{x}_l} \cdot \frac{\partial \tilde{u}_i'}{\partial \tilde{x}_j} \right] + 2 \frac{\partial \langle \tilde{u}_k \rangle}{\partial \tilde{x}_j} \left\langle \frac{\partial \tilde{u}_l'}{\partial \tilde{x}_k} \cdot \frac{\partial \tilde{u}_i'}{\partial \tilde{x}_j} \right\rangle \right] \frac{e^{-|\tilde{x}-\tilde{x}'|/L}}{|\tilde{x}-\tilde{x}'|} dV \right\rangle \quad (3-55)$$

Helm-holtz の積分公式によれば、(3-55)式は(3-56)式の楕円型微分方程式の一般解である。

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{L^2} \right) \left\langle \frac{p}{\rho} \cdot \frac{\partial u_i'}{\partial x_j} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial^2 u_k' u_l'}{\partial x_k \partial x_l} \cdot \frac{\partial u_i'}{\partial x_j} \right\rangle + 2 \frac{\partial \langle u_k \rangle}{\partial x_j} \left\langle \frac{\partial u_l'}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial u_i'}{\partial x_j} \right\rangle \quad (3-56)$$

これが Durbin モデルにおける Poisson 方程式 (式(3-46)) の原型となっている。

チャンネル流 DNS との比較によると、Durbin モデルは、従来の wall reflection 項を含む QIM に比べ壁面近傍での漸近挙動をはるかによく再現するということが報告されている¹¹⁾。しかしながら式(3-46)において境界条件の設定が困難なことから、高レイノルズ数でかつ複雑流れ場への適用は極めて少ない。

3. 5 ε 方程式の高次モデリング

3. 2 節で示した Φ_{ij} の高次モデリングの際に、非等方パラメータ a_{ij} を用いてその精度の向上を図った。同様な議論が ε 方程式の生成・消散項のモデリングに際しても利用できる。その代表的なものに Launder ら¹²⁾ による anisotropy-sensitized variant がある。通常の ε 方程式は次式で表される。

$$\frac{D\varepsilon}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left(C_\varepsilon \frac{k}{\varepsilon} \langle u_k' u_l' \rangle \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_l} \right) + \frac{\varepsilon}{k} (C_{\varepsilon 1} P_k - C_{\varepsilon 2} \varepsilon) \quad (3-57)$$

anisotropy-sensitized variant では式(3-57)において係数 $C_{\varepsilon 1}$ 並びに $C_{\varepsilon 2}$ を従来の値から次のように変化させる。

$$C_{\varepsilon 1} : 1.44 \rightarrow 1.00 \quad (3-58)$$

$$C_{\varepsilon 2} : 1.92 \rightarrow \frac{1.92}{1 + 0.63(AA_2)^{1/2}} \quad (3-59)$$

但し Launder のグループは係数 $C_{\varepsilon 2}$ について式(3-59)以外にも多くの値を提案している。このことは現在 anisotropy-sensitized variant が十分に確立された段階にないということを意味している。

3.6 低レイノルズ数型DSM

一般的な高レイノルズ数タイプの標準型DSMでは、壁面の存在に伴う乱流の減衰挙動を正確には再現できない。壁面近接効果 (echo 効果) や低レイノルズ数乱流にも対応し得るためには、低レイノルズ数型のDSMの確立が必要となる。壁面近傍においては乱流の非等方向性が顕著となるので、この領域における低レイノルズ数型DSMのモデリングの際には前述の高次精度RSMを利用する場合が多い。代表的な例として Lai-So¹³⁾ によるモデル、Launder-Shima⁵⁾ によるモデル並びに Launder-Tselepidakis¹²⁾ によるモデルがある。Launder-Shima によるモデルは前節で紹介した標準型DSMにおける圧力-歪相関項の線形モデルに対して、その係数を不変量 A_1, A_2 等で表わした準線形モデルである。また圧力-歪相関項と ε 方程式中の生成・消散に係る項には低レイノルズ効果を表す関数 (例えば $\Phi_{ij(1)}$ における R_i を含む項; 式 (3-16)) を施している。Launder-Tselepidakis モデルは本節で紹介した高次精度DSMを低レイノルズ数流れに対応するようにモデル化したものである。このモデルでは圧力-歪相関項 Φ_{ij} については本報3節で導入した Fu-Launder-Tselepidakis の高次モデルをそのまま用い、

ε 方程式の生成・消散項の係数には3.4節で紹介した anisotropy-sensitized variant を用いる。Launder-Tselepidakis が低レイノルズ数型モデルとするために、高レイノルズ数型モデルを修正したのは次の5点である。

① $\Phi_{ij(2)}$ 中 (式 (3-28)) の速度勾配 $\partial \bar{u}_k / \partial x_j$ を壁面による効果を考慮に入れ次の様に補正する。

$$\partial \langle u_k \rangle / \partial x_j|_{eff} = \partial \langle u_k \rangle / \partial x_j + 0.4 \cdot l \partial l / \partial x_m \cdot \partial^2 \langle u_k \rangle / \partial x_j \partial x_m \quad (3-60)$$

ここで $l = (k/\varepsilon) \langle u_p' u_q' \rangle / n_p n_q^{1/2}$ (但し n_p は壁面に垂直な単位ベクトルの p 方向成分) であり、壁面に垂直な長さスケールを表わしている。また $\Phi_{ij(2)}$ 効果はこの補正に含まれるものとして、このモデルにおいては $\Phi_{ij(2)}$ は除外している。

② $\Phi_{ij(1)}$ の効果は十分に小さいものとしてこれを無視する。

③ レイノルズ応力輸送方程式中の ε_{ij} について次のような非等方表示を採用する。

$$\varepsilon_{ij} = f_e \varepsilon_{ij}^* + 2/3 \cdot (1 - f_e) \varepsilon \delta_{ij} \quad (3-61)$$

ここで

$$\varepsilon_{ij}^* = \frac{\varepsilon}{k} \left(\langle u_i' u_j' \rangle + \langle u_i' u_k' \rangle n_j n_k + \langle u_j' u_k' \rangle n_i n_k + \langle u_k' u_l' \rangle n_i n_l n_j \right) / (1 + 3/2 \cdot \langle u_p' u_q' \rangle / n_p n_q / k) \quad (3-62)$$

$$f_e = \exp(-20A^2), \quad A \text{ は flatness parameter} \quad (3-63)$$

④ ε 方程式の生成・消散項に対して次のモデルを採用する。

$$P_\varepsilon - \Phi_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{k} (C_{\varepsilon 1} P_k - C_{\varepsilon 2} \varepsilon') + 2C_{\varepsilon 3} \nu \frac{k}{\varepsilon} \langle u_k' u_l' \rangle \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_k \partial x_j} \frac{\partial \langle u_l \rangle}{\partial x_i \partial x_j} \quad (3-64)$$

ここで

$$\varepsilon' = \varepsilon - 2\nu \left(\frac{\partial k^{1/2}}{\partial x_k} \right)^2 \quad (3-65)$$

また $C_{\epsilon 3} = 0.43$ 、 $C_{\epsilon 1}$ 、 $C_{\epsilon 2}$ については前節で紹介した anisotropy-sensitized variant の値を用いる。

⑤ $\langle u_i' u_j' \rangle$ 方程式並びに ϵ 方程式中の拡散項は通常の GGDH (式 (2.4.31)) にそれぞれ次の圧力拡散を表す付加項を加える。

$$D_{ij}^p = -1/3(d_{ik}^y n_k n_j + d_{jk}^y n_k n_i) + 1/3\delta_{ij} d_{kl}^y n_k n_l \quad (3-66)$$

$$D_\epsilon^p = \frac{\partial}{\partial x_k} \left(2C_{\epsilon 4} v \frac{\epsilon'}{k} \frac{\partial k}{\partial x_k} \right) \quad (3-67)$$

ここで d_{ij}^y は $\langle u_i' u_j' \rangle$ の分子拡散項であり、 $C_{\epsilon 4} = 0.92$ である。

上記の Launder-Tselepidakis モデルはチャンネル流等の単純な流れ場において DNS 等の結果とよい一致を示すことが確認されている。

最後に現在提案されている低レイノルズ数型 DSM は Launder-Tselepidakis モデルを始めとしてそのほとんどが壁乱流を対象としたものであり、自由空間における低レイノルズ数流れに対応し得るモデルに関する考察は殆ど見られない。自由空間における低レイノルズ数型 DSM の開発が将来の課題として期待される。

3章 参考文献

- 1) Lumley, J.L. 1978 : Computational modeling of turbulent flows. Adv. Appl. Mech. 18: 123-176
- 2) 大岡龍三、村上周三、加藤信介：乱流モデル開発のための数学的基礎（その1）ナビエ-ストークス方程式の座標変換不変性とテンソル解析の基礎：日本建築学会関東支部、pp.169-172、1993年1月
- 3) 大岡龍三、村上周三、加藤信介：乱流モデル開発のための数学的基礎（その2）流れ場解析におけるテンソル解析の応用：日本建築学会関東支部、pp.173-176、1993年1月
- 4) Schumann, U. 1977 : Realizability of Reynolds stress turbulent models : Phys. Fluids 20: pp.721-25
- 5) Launder, B. E., Shima, N. 1989 : Second moment closure for the near-wall sublayer : developmet and application. AIAA J. 27, pp.1319-1323
- 6) Fu, S., Launder, B.E. and Tselepidakis, D.P. (1987) UMIST Mech. Eng. Dept. Rep. TFD/87/5
- 7) Speziale, C.G., Sarkar, S. and Gatski, T.B. (1991) Modelling the pressure-strain correlation of turbulence J. Fluid Mech. 227, 245
- 8) Shih, T.-H., Lumley, J.L. (1985) Modeling of pressure correlation terms in Reynolds stress and scalar flux equations. Rep. No. FDA-85-3, Cornell Univ., Ithaca, N.Y.
- 9) Craft, T.J. and Launder, B.E. (1992) A New model of 'Wall-Reflection' Effects on the Pressure-Strain Correlation and its Application to the Turbulent Impinging Jet. AIAA J. 30, p.2970
- 10) Durbin, P. A., (1993) : A Reynolds stress model for near-wall turbulence : J. Fluid Mech. 249, pp.465-498
- 10) 三宅裕、辻本公一、別府秀樹 (1994) : 周期的圧力勾配を有する平板間乱流の DNS、第9回 NST シンポジウム講演論文集、pp.61-64
- 12) Launder, B.E. and Tselepidakis, D.P. (1991) Contribution to the Modelling Near-Wall Turbulence : Proc. 8th Symp. Turbulent Shear Flows., pp.81-96
- 13) Lai, Y.G. and So, R.M.C. (1990) : On near-wall turbulent flow modelling : J. Fluid Mech. 221, pp.641-673

第四章

応力方程式モデルの数値計算手法

第4章 応力方程式モデルの数値計算手法

4.1 はじめに

応力方程式モデル (DSM) を用いて数値計算を行う場合、計算途中で数値不安定が生ずる場合がある。本章ではこの計算上の数値不安定を抑える計算上の工夫等を説明する。本章では簡単に表 4.1 で示す等温型の標準 DSM の基礎方程式を解くときの工夫について説明する。

表 4.1 標準 DSM の基礎方程式 (等温・高レイノルズ数)

$$\langle u_i \rangle \text{ 方程式} \quad \frac{D \langle u_i \rangle}{Dt} = - \frac{\partial \langle p \rangle}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_j} \langle u_i' u_j' \rangle \quad (1)$$

$$\langle u_i' u_j' \rangle \text{ 方程式} \quad \frac{D \langle u_i' u_j' \rangle}{Dt} = D_{ij} + P_{ij} + \phi_{ij} - \varepsilon_{ij} \quad (2)$$

$$\langle \varepsilon \rangle \text{ 方程式} \quad \frac{D \langle \varepsilon \rangle}{Dt} = D_\varepsilon + \frac{\varepsilon}{k} (C_{\varepsilon 1} P_k - C_{\varepsilon 2} \varepsilon) \quad (3)$$

$$k = \frac{1}{2} \langle u_i' u_i' \rangle \quad (4) \quad P_k = \frac{1}{2} P_{ij} \quad (5)$$

$$D_{ij} = \frac{\partial}{\partial x_m} (C_k \langle u_m' u_i' \rangle \frac{k}{\varepsilon} \frac{\partial \langle u_i' u_j' \rangle}{\partial x_j}) \quad (6) \quad D_\varepsilon = \frac{\partial}{\partial x_m} (C_\varepsilon \langle u_m' u_i' \rangle \frac{k}{\varepsilon} \frac{\partial \langle \varepsilon \rangle}{\partial x_i}) \quad (7)$$

$$P_{ij} = - \langle u_i' u_k' \rangle \frac{\partial \langle u_j \rangle}{\partial x_k} - \langle u_j' u_k' \rangle \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_k} \quad (8) \quad \varepsilon_{ij} = \frac{2}{3} \varepsilon \delta_{ij} \quad (9)$$

$$\phi_{ij} = \phi_{ij(1)} + \phi_{ij(2)} + \phi_{ij(1)}^* + \phi_{ij(2)}^* \quad (10)$$

$$\phi_{ij(1)} = -C_1 \frac{\varepsilon}{k} \langle u_i' u_j' \rangle - \frac{2}{3} k \delta_{ij} \quad (11) \quad \phi_{ij(2)} = -C_2 (P_{ij} - \frac{2}{3} P_k \delta_{ij}) \quad (12)$$

$$\phi_{ij(1)}^* = \sum_{m=1}^{20} C_1' \frac{\varepsilon}{k} \langle u_k' u_m' \rangle n_k^{(w)} n_m^{(w)} \delta_{ij} - \frac{3}{2} \langle u_k' u_i' \rangle n_k^{(w)} n_j^{(w)} - \frac{2}{3} \langle u_k' u_j' \rangle n_k^{(w)} n_i^{(w)} \frac{k^{3/2}}{C_1 h_k^{(w)} \varepsilon} \quad (13)$$

$$\phi_{ij(2)}^* = \sum_{m=1}^{20} C_2' \frac{\varepsilon}{k} (\phi_{km(2)} n_k^{(w)} n_m^{(w)} \delta_{ij} - \frac{3}{2} \phi_{km(2)} n_k^{(w)} n_j^{(w)} - \frac{2}{3} \phi_{km(2)} n_k^{(w)} n_i^{(w)}) \frac{k^{3/2}}{C_2 h_k^{(w)} \varepsilon} \quad (14)$$

$$C_1 : 1.8 \quad C_2 : 0.6 \quad C_1' : 0.5 \quad C_2' : 0.0 \quad C_k : 0.22 \quad C_\varepsilon : 0.16$$

$$C_{\varepsilon 1} : 1.44 \quad C_{\varepsilon 2} : 1.92 \quad C_1' : 2.5$$

4.2 差分定義点

以下のように $\langle u_i \rangle$ 、 $\langle p \rangle$ 、 $\langle u_i' u_j' \rangle$ 、 $\langle u_i' \theta' \rangle$ 等の諸量を計算空間上に定義する。

(a) $\langle u_i \rangle$ 、 $\langle u_2 \rangle$ 、 $\langle u_3 \rangle$ 、 ε 、 $\langle p \rangle$ ：標準的なスタガードグリッド

(b) $\langle u_1' u_1' \rangle$ 、 $\langle u_2' u_2' \rangle$ 、 $\langle u_3' u_3' \rangle$ ：スカラー定義点 (セル中心) で定義する。

(c) $\langle u_1' u_2' \rangle$ 、 $\langle u_2' u_3' \rangle$ 、 $\langle u_1' u_3' \rangle$ ：例えば $\langle u_1' u_2' \rangle$ は $\partial \langle u_1 \rangle / \partial x_2$ 、 $\partial \langle u_2 \rangle / \partial x_1$ と同じ位置、すなわちセルのコーナーにおいて定義する。

(d) $\langle u_i' \theta' \rangle$ 、 $\langle u_2' \theta' \rangle$ 、 $\langle u_3' \theta' \rangle$ ：例えば $\langle u_1' \theta' \rangle$ は $\partial \langle \theta \rangle / \partial x_1$ と同じ位置、すなわちセルの界面において定義する。

以上の諸量の定義点を図 4.1、図 4.2 に示す。

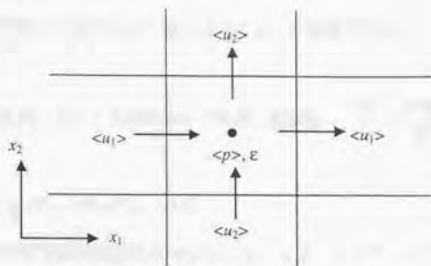


図 4.1 差分定義点 $\langle u_i \rangle, \langle p \rangle, \epsilon$

(2次元の場合)

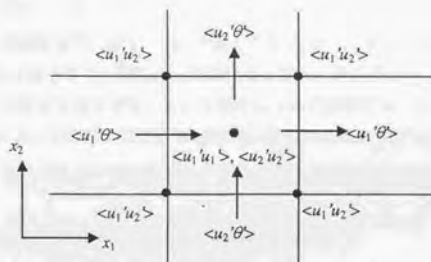


図 4.2 差分定義点 $\langle u_i' u_j' \rangle, \langle u_i' \theta' \rangle$

(2次元の場合)

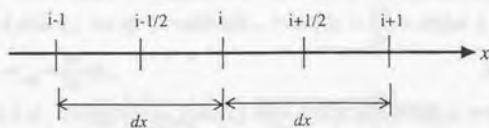


図 4.3 計算諸量の定義点 (1次元)

4.3 移流拡散方程式と数値安定性条件¹⁾

一次元空間において変数 Φ の移流拡散方程式は次のように表現される。

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + U \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \alpha \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \quad (4-1)$$

図 4.3 に示す一次元空間において輸送変数 Φ の移流・拡散項 $-U \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \alpha \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}$ が次の様に離散表現されたとする。

$$\left[-U \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \alpha \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \right]_i = A_{i-1} \Phi_{i-1} + A_{i+1} \Phi_{i+1} - A_i \Phi_i \quad (4-2)$$

Patankar によれば数値計算の安定化のためには、 A_{i-1}, A_i, A_{i+1} がすべて正であり、かつ

$$A_i = A_{i-1} + A_{i+1} \quad (4-3)$$

が成り立つことが要請されるとしている。 A_i が正であるということはいわゆる負のフィードバックセンシビリティが働くことと同義である。ここでこの条件を説明するために次のような時間発展型の輸送方程式を考える。

$$\frac{\partial \Phi_i}{\partial t} = A_{i-1} \Phi_{i-1} + A_{i+1} \Phi_{i+1} - A_i \Phi_i \quad (4-4)$$

式(4-4)において Φ_i の微小変化(擾乱) $\delta \Phi_i$ が起っても A_i が正であるために、それに対応する次の時点の $\partial(\delta \Phi_i)/\partial t$ は負となり、擾乱 $\delta \Phi_i$ を抑制する方向に向かう。

次に A_{i-1} と A_{i+1} が正でなければならないという条件について説明する。もしこれらの係数が負であれば、式(4-4)において隣接点における物理量の増大がそれに対応した次の時点の $\partial \Phi_i / \partial t$ を負にする、即ち、計算中心点の物理量を減少させるという物理的にみて不合理な状態を生み出すのである。

式(4-2)における拡散項 $\alpha \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}$ を離散表現すれば次のようになる

$$\left[\alpha \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \right]_i = \alpha \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = -\frac{\alpha}{dx^2} \Phi_{i-1} + \frac{\alpha}{dx^2} \Phi_{i+1} - 2 \frac{\alpha}{dx^2} \Phi_i \quad (4-5)$$

α が正ならば、(4-5)式中の係数はすべて正であるので、Patankar の安定条件は満足されている。従って、正の拡散係数を持つ拡散項は数値計算を安定化させる。また α が負の場合(負拡散という)には、上記 Patankar の安定条件が全て満たされないため計算不安定の原因となる。次に移流の場合を考える。中心差分で離散表現した移流項 $-U \frac{\partial \Phi}{\partial x}$ は次式のようにになる。

$$-U \frac{\partial \Phi}{\partial x} = -\frac{U}{2dx} \Phi_{i-1} + \frac{U}{2dx} \Phi_{i+1} \quad (4-6)$$

(4-6)式においては Φ_i が存在しない。このことは(4-4)式における係数 A_i が零であるのと同じである。それ故中心差分による移流のみの方程式では、負のフィードバックセンシビリティが働かない。即ち、(4-4)式を用いて説明したような擾乱 $\delta \Phi$ を減衰させるような機能がなく数値不安定を生じる原因となる。

また隣接点における係数についても、二つの項の片方は十の係数、他方には一の係数が乗じら

れているので、両方の係数のいずれかが一方が負となるような形式となっている。これらはいずれの場合も数値解の不安定の要因となり、移流項が数値不安定の原因となることを示している。

4.4 計算スキームによる安定化

4.4.1 一次風上差分スキームによる安定化²⁾

一次風上差分スキームとは、変数 Φ の輸送方程式中の移流項を表現する際に流れの風上側の点と自分自身の点で移流項中の空間勾配を表現するスキームである。即ち一次風上差分スキームでは、移流項中の空間勾配の定義点が風上方向に半セルずれることになる。図4.3において、 $U > 0$ ならば、 $\left[\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right]_{\text{風上}, i} = \frac{\Phi_i - \Phi_{i-1}}{dx}$ であり、 $U < 0$ ならば、 $\left[\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right]_{\text{風上}, i} = \frac{\Phi_{i+1} - \Phi_i}{dx}$ となる。

テーラー展開より

$$\left[\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right]_{\text{風上}, i} = \left[\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right]_i - \left[\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} dx + \dots\right]_i \quad \text{for } U > 0$$

$$\left[\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right]_{\text{風上}, i} = \left[\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right]_i + \left[\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} dx + \dots\right]_i \quad \text{for } U < 0$$

従って一次風上差分スキームを用いた場合、式(4-7)の右辺を用いて計算していることになる。

$$\left[-U \frac{\partial \Phi}{\partial x}\right]_{\text{風上}, i} = \left[-U \frac{\partial \Phi}{\partial x}\right]_i + \left[\frac{|U| dx}{2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}\right]_i + \dots \quad (4-7)$$

即ち、通常の中心差分以外に、 $\frac{|U| dx}{2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}$ のオーダーの誤差を持つ。この数値誤差は式(4-1)からわかるように拡散項の形をしており、数値計算上擬似的な拡散の働きを行い、一般に、数値拡散あるいは数値粘性と呼ばれる。特にこの数値拡散項の疑似拡散係数 $\frac{|U| dx}{2}$ は常に正である

ため4.3.1節の考察より数値計算上安定に寄与する。

次に一次風上差分の数値安定性を離散式で確認する。離散式で一次風上差分を表現すると次のようになる。

$$\left[-U \frac{\partial \Phi}{\partial x}\right]_{\text{風上}, i} = A_{i-1}^C \Phi_{i-1} + A_i^C \Phi_{i+1} \quad (4-8)$$

$$A_{i-1}^C = \text{Max}\left(\frac{U}{dx}, 0\right) \geq 0 \quad (4-9)$$

$$A_i^C = \text{Max}\left(\frac{U}{dx}, 0\right) \geq 0 \quad (4-10)$$

$$A_i^C = A_{i-1}^C + A_i^C \geq 0 \quad (4-11)$$

ここで $\text{Max}(a, b)$ は a 、 b のうち大きいほうを選ぶことを意味する記号である。式(4-8)~(4-11)により、係数 $A_{i-1}^C \sim A_i^C$ は移流速度 U が零以外のときには、常に正であり、Patankarの安定条件と負のフィードバックセンシティビティを満たす。移流速度 U が零の場合には、式(4-1)で示した移流・拡散方程式は拡散方程式に帰着され、安定性上の問題は回避される。

以上のように一次風上差分は数値安定性上非常に便利であるが、数値拡散(粘性)係数 $\frac{|U|dx}{2}$ は風速の大きな所、メッシュ分割の粗いところで非常に大きな値を取る可能性がある。特に数値拡散(粘性)係数 $\frac{|U|dx}{2}$ が実際の物理拡散(粘性)係数 α と同程度の値を取ってしまうと一体何を解いているのかわからなくなってしまう。従って一次風上差分を用いる場合には、流れ場に影響の少ない箇所で利用する、あるいはメッシュ分割を十分に細かくするなどの注意が必要となる。

4.4.2 QUICK スキームによる安定化²⁾

一次風上差分はその数値誤差項がちょうど拡散(粘性)項の形をしており、強力に数値安定性に寄与するが、その大きな数値誤差の故に問題になることが多い。従って数値誤差が小さくかつ安定性に寄与するような差分スキームがあれば有用である。一次風上よりも数値精度をあげた(即ち数値誤差のオーダーを小さくした)高次風上差分の一つに QUICK (Quadratic Upstream Interpolation for Convective Kinematics) スキームがある。

QUICK スキームの数値誤差を表す式を次に示す。

$$\left[-U \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right]_{QUICK_i} = \left[-U \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right]_i + \left[\frac{|U|dx}{16} \frac{\partial^3 \Phi}{\partial x^3} \right]_i + \dots \quad (4-12)$$

QUICK スキームの場合、数値誤差が Φ の 4 階微分となっており、一次精度風上の場合の 2 階微分(式(4-7))に比べて高精度差分となっていることがわかる。一般に正の係数をもつ偶数階微分項は、数値粘性として安定に働くと言われている。

次に QUICK スキームの数値安定性を離散式で確認する。図 3.1 において $U > 0$ のとき離散式で QUICK スキームを表現すると次のようになる。

$$\left[-U \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right]_{QUICK_i} = A_{i+1} \Phi_{i+1} - A_i \Phi_i + A_{i-1} \Phi_{i-1} + A_{i-2} \Phi_{i-2} \quad (4-13)$$

$$A_{i+1} = \frac{-3U}{8dx} < 0 \quad (4-14)$$

$$A_i = \frac{3U}{8dx} > 0 \quad (4-15)$$

$$A_{i-1} = \frac{7U}{8dx} > 0 \quad (4-16)$$

$$A_{i-2} = \frac{-U}{8dx} < 0 \quad (4-17)$$

Φ_{i+1} と Φ_{i-2} に掛かる係数が正ではないものの、 Φ_i に掛かる係数が正となり、自分自身の擾乱 $\delta \Phi_i$ を抑えるフィードバックセンシティビティーが働くため、中心差分よりは安定となる。

QUICK スキームにおいても数値粘性による数値誤差が生ずる³⁾。特に拡散係数 α の小さい低レイノルズ数流れの解析や LES や DNS では QUICK スキームの利用が数値解に大きな影響を及ぼす可能性がある。しかしながら RANS モデルによる高レイノルズ数解析では、一般に、実際の物理的な拡散効果は QUICK スキームによる数値拡散に比べて十分に大きいと見なされ、QUICK スキームを用いることに問題はないと考えられている。

4.4.3 一次精度後退差分による安定化

4.4.1 と 4.4.2 節では空間差分スキームによる数値安定性を得る試みを説明した。本節では時間差分スキームである一次精度後退差分による数値安定性について述べる。

移流・拡散方程式 (式(4-1)) を後退差分で離散化すると次のようになる。

$$\phi^{n+1} = \phi^n + \Delta t \cdot \left(-U \frac{\partial \phi^{n+1}}{\partial x} + \alpha \frac{\partial^2 \phi^{n+1}}{\partial x^2} \right) \quad (4-18)$$

式(4-18)の右辺の括弧内の第一項中の ϕ^{n+1} にもう一度式(4-18)を代入する。

$$\begin{aligned} \phi^{n+1} &= \phi^n + \Delta t \cdot \left(-U \frac{\partial}{\partial x} \left(\phi^n + \Delta t \cdot \left(-U \frac{\partial \phi^{n+1}}{\partial x} + \alpha \frac{\partial^2 \phi^{n+1}}{\partial x^2} \right) \right) + \alpha \frac{\partial^2 \phi^{n+1}}{\partial x^2} \right) \\ &= \phi^n + \Delta t \cdot \left(-U \frac{\partial \phi^n}{\partial x} + \alpha \frac{\partial^2 \phi^n}{\partial x^2} \right) + (\Delta t U)^2 \frac{\partial^2 \phi^{n+1}}{\partial x^2} + \dots \end{aligned} \quad (4-19)$$

式(4-19)の右辺第3項が正の係数 $\Delta t U^2$ をもつ拡散項として働く。4.3節で述べたように正の拡散係数をもつ拡散項は計算を安定化させる働きがあるため、一次精度後退差分は計算安定性に寄与する。更に時間差分スキームである一次精度後退差分の利点は、一次風上差分等の空間差分スキームと違い、定常解に至ればその数値誤差が消滅するという点である。すなわち RANS モデル等で定常計算する場合、各タイムステップ毎には数値拡散が働くが、定常解に至ればその数値拡散に基づく数値誤差が自然消滅する。一方一次風上差分等の空間差分スキームでは、定常解に至ってもその数値拡散に基づく数値誤差は残る。従って RANS モデル等による定常計算に対して一次精度後退差分の利用は非常に有用である。但し LES や DNS 等の非定常計算において一次精度後退差分を利用することは、各タイムステップ毎に数値拡散による誤差が働くことになり、流れ場の時間遅れ (位相のずれ) をまねくことになり、一般に不可能とされている。

4.5 運動方程式安定のための PSEUDO VISCOSITY の導入

一般に移流のある正の拡散係数をもつ拡散方程式は、適当な時間間隔とメッシュ間隔を選んでやれば時間積分により安定に解くことができる。一次元空間における正の拡散係数 α をもつ移流・拡散方程式 (4-1) を再記する。

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + U_1 \frac{\partial \phi}{\partial x_1} = \alpha \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1^2} \quad (4-20)$$

一方等温 DSM における運動方程式は同じく1次元の場合次のような単純な形になる (表 4.1 ①式)。

$$\frac{\partial \langle u_1 \rangle}{\partial t} + \langle u_1 \rangle \frac{\partial \langle u_1 \rangle}{\partial x_1} = - \frac{\partial \langle p \rangle}{\partial x_1} - \frac{\partial}{\partial x_1} \langle u_1' u_1' \rangle \quad (4-21)$$

(4-21)式は右辺に、正の拡散係数を有する輸送変数の空間二階微分項を含まないので拡散型であるとはいえない。従って、 $\langle u_1 \rangle$ や $\langle u_1' u_1' \rangle$ 等の DSM の方程式群を時間積分で解くに際して、運動方程式の数値不安定により収束解を得られない可能性が高い。これを避けるために運動方

程式中の $\langle u_i' u_j' \rangle$ に導入される工夫が PSEUDO VISCOSITY (正の見かけの拡散係数) と呼ばれるものである。即ち、(4-21)式中右辺の $\langle u_i' u_j' \rangle$ が v_e を用いて、 $\langle u_i' u_j' \rangle = v_e \partial \langle u_i \rangle / \partial x_j + \dots$ という形で表現できるならば、(4-21)式は次のようになる。(ここで、 v_e が PSEUDO VISCOSITY であり、正でなければならない)

$$\frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial t} + \langle u_i \rangle \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_i} = - \frac{\partial \langle p \rangle}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(v_e \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_i} + \dots \right) \quad (4-22)$$

式(4-22)は右辺に正の係数 v_e を有する空間二階微分項を含むので拡散方程式に準じた形をしており、この v_e が数値解析の安定性に寄与する。即ち、運動方程式の時間積分の過程においてストレス $\langle u_i' u_j' \rangle$ と速度ひずみ $\partial \langle u_i \rangle / \partial x_j$ との間をなんらかの関係で結びつけて、式(4-21)における $\langle u_i' u_j' \rangle$ を変形する工夫を考えた訳である。Huang と Leschziner⁵¹⁾ は $\langle u_i' u_j' \rangle$ の生産項 P_{ij} (表 4.1 ⑧式) 中に $\partial \langle u_i \rangle / \partial x_j$ が含まれることに着目して、この工夫、即ち PSEUDO VISCOSITY を導入する手法を定常解法である SIMPLE 法において考案した⁶⁾。平岡⁶²⁾ は $\langle u_i' u_j' \rangle$ を代数的に表現する工夫を用いて、その手法を非定常解法である MAC 法に適用している⁷⁾。以下その手法について図 4.3 に示す 1 次元空間において簡単に説明する。

一次元の場合、ストレスは $\langle u_i' u_i' \rangle$ のみである。 $\langle u_i' u_j' \rangle$ の時間微分項を無視すると表 4.1 ②式は次のように表すことができる。

$$C_{11} - (D_{11D} + D_{11C}) = P_{11} + \phi_{11} - \frac{2}{3} \varepsilon \quad (4-23)$$

ここで、 C_{11} は移流項、 D_{11D} は拡散項の直交成分、 D_{11C} はクロス成分である³¹⁾。ここでは移流項が一次風上差分の場合と QUICK スキームの場合について説明する。最初に一次風上差分の場合について述べる。図 4.3 に示した一次元空間での(4-23)式の離散式において $\langle u_i' u_j' \rangle$ を代数的に表現するための変形始す。拡散項の直交成分 D_{11D} 、移流項 C_{11} 及び再分配項 ϕ_{11} 中の Rotta 項 $\phi_{11(1)}$ とその wall reflection 項 $\phi_{11(1)}^*$ を図 4.3 に示す一次元空間で離散化³²⁾ し、計算中心点 i に関する $\langle u_i' u_i' \rangle$ を含む項を左辺にまとめると次式となる。なお、生産項は分解せずこれに含まれる $\langle u_i' u_i' \rangle$ は右辺に残す。

$$(A_{11}^C + A_{11}^D + A_{\Phi}) \langle u_i' u_i' \rangle_i = P_{11} - \varepsilon_{11} + D_{11C} + \phi_{11}^* + (A_{11}^C + A_{11}^D) \langle u_i' u_i' \rangle_{i+1} + (A_{11}^C + A_{11}^D) \langle u_i' u_i' \rangle_{i-1} \quad (4-24)$$

ここで二行目の $A_{11}^C - A_{11}^D$ は $\langle u_i' u_i' \rangle$ 方程式の C_{11} 及び D_{11D} の隣接点 (図 4.3 の $i+1, i-1$) における $\langle u_i' u_i' \rangle$ の係数であり、一行目の A_{11}^C, A_{11}^D はそれぞれの和である。また A_{Φ} は ϕ_{11} 中の計算中心のストレス $\langle u_i' u_i' \rangle$ に掛かる係数であり、 ϕ_{11}^* を次のように定義している³³⁾。

$$\phi_{11}^* = \phi_{11} + A_{\Phi} \langle u_i' u_i' \rangle_i \quad (4-25)$$

ここでは一次風上差分を仮定しているので 4.4.1 節で説明したように隣接点の $\langle u_i' u_i' \rangle$ に掛かる係数は正となり、また拡散項直交成分もその定義より、正の拡散係数をもつので上記係数 $(A_{11}^C - A_{11}^D)$ 及び A_{11}^C, A_{11}^D はすべて正であり、また注 3 で示すように A_{Φ} も正である。従って、(4-24)式は 4.3 節で説明した Patankar の安定条件を満たす。それ故数値解析上安定となること

が期待される。なお、拡散項クロス成分 D_{11D} はその物理的意味においては拡散項であるが、隣接点の係数が必ずしも正とはならないので、数値解析上では生成項 (Source Term: 生産項と消散項の和) の一部であると見なして計算を行なう³³⁾。

(4-24) 式の両辺を $(A_i^C + A_i^D + A_{\phi})$ で除すると求めるべき $\langle u_i' u_i' \rangle$ が得られる。

$$\langle u_i' u_i' \rangle_i = \frac{1}{A_i^C + A_i^D + A_{\phi}} \times (P_{11} + \phi_{11}^* - \varepsilon_{11} + D_{11C} + (A_{i-1}^C + A_{i-1}^D) \cdot \langle u_i' u_i' \rangle_{i-1} + (A_{i+1}^C + A_{i+1}^D) \cdot \langle u_i' u_i' \rangle_{i+1}) \quad (4-26)$$

(4-26) 式において PSEUDO VISCOSITY ν_e が定義される。同式において P_{11} は表 4.1 ⑧式に示す通り $-(u_i' u_i') \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_i}$ (を含んでおり、また ϕ_{11}^* も表 4.1 ⑩式に示すように係数 $-C_2$ を介して P_{11} を含んでいるので PSEUDO VISCOSITY ν_e は次式で表現される。

$$\nu_e = \frac{(1 - C_2) \langle u_i' u_i' \rangle_i^*}{A_i^C + A_i^D + A_{\phi}} \quad (4-27)$$

但し、ここで式(4-27)中の $\langle u_i' u_i' \rangle_i$ としては時間積分における前時点の値 $\langle u_i' u_i' \rangle_i^*$ を用いる。これは implicit の取り扱いを避けるためである。 $C_2 = 0.6$ であるから $1 - C_2 > 0$ 、及び $\langle u_i' u_i' \rangle^* > 0$ より ν_e が常に正であることが確認される。従って式(4-21)は拡散型の方程式となる。

移流項に一次風上差分を用い、拡散項のクロス成分を生成項の一部として取り扱うことによって、Patankar の条件は満たされる。ところが移流項に QUICK スキームを用いた場合には、4.4.2 節で示したように必ずしも移流項の離散表現における各係数が正とはならない。そこで QUICK スキームを利用する場合には、早瀬ら⁷⁾に従い、Patankar の示した安定条件を満たすよう QUICK スキームの一部を生成項として取り扱う。即ち、QUICK スキームによる移流項 $C_{ijQUICK}$ を一次風上差分による移流項とその他の部分に分解する。

$$C_{ijQUICK} = C_{ijUPWIND} + C_{ijother} \quad (4-28)$$

ここで $C_{ijother}$ が Patankar の条件を満たさない場合には拡散項のクロス成分と同様、生成項の一部として取り扱う。即ち、 $C_{ijother}$ の係数が正の場合そのままとし、負の場合には $C_{ijother}$ を生成項に含めて計算する³⁴⁾。

4.6 GGDHによる負拡散に対する処理

$\langle u_i' u_j' \rangle$ と ε の拡散項には GGDH (表 4.1 ⑥、⑦式) による近似をおこなっているが、この項はしばしば、負の拡散係数を持つ拡散項に対応し、このため安定な解の収束性が得られない場合がある。本論文における解析では、平岡の手法⁸⁾に従い、拡散係数に対応するシアストレスに適当な重み係数をかけ、拡散項全体で負拡散が生じないようにした。以下にその手法の概要について説明する。

スカラー Φ に対する GGDH による乱流拡散項 D (表 4.1 ⑥、⑦式) を 2 次元空間で展開す

れば次のように表せる。

$$D = C\left(\frac{k}{\varepsilon}\right)\langle u'_1 u'_1 \rangle \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + C\left(\frac{k}{\varepsilon}\right)\langle u'_2 u'_2 \rangle \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + C\left(\frac{k}{\varepsilon}\right)\langle u'_1 u'_2 \rangle \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \\ + \frac{\partial}{\partial x} \left(C\left(\frac{k}{\varepsilon}\right)\langle u'_1 u'_1 \rangle \right) \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left(C\left(\frac{k}{\varepsilon}\right)\langle u'_2 u'_2 \rangle \right) \frac{\partial \Phi}{\partial y} \\ + \frac{\partial}{\partial y} \left(C\left(\frac{k}{\varepsilon}\right)\langle u'_1 u'_2 \rangle \right) \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(C\left(\frac{k}{\varepsilon}\right)\langle u'_1 u'_2 \rangle \right) \frac{\partial \Phi}{\partial y} \quad (4-29)$$

一方Φに対する一般的な2変数2階の偏微分方程式は次式で表すことができる。

$$f(x, y) = a(x, y) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + b(x, y) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + c(x, y) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} + d(x, y) \frac{\partial \Phi}{\partial x} + e(x, y) \frac{\partial \Phi}{\partial y} \quad (4-30)$$

ここで、(4-29)式との対応より、 $a(x, y) > 0$ かつ $b(x, y) > 0$ であるとしておく。即ち、拡散項の展開式(4-29)は、2階偏微分関数の一般形をしていることがわかる。(4-30)式が拡散型(数学的には楕円型とも呼ばれる)に変形できるためには任意の実数 α, β に対して次の2次式

$$a(x, y)\alpha^2 + b(x, y)\beta^2 + c(x, y)\alpha\beta > 0 \quad (4-31)$$

を満たす必要がある。即ち、(4-31)式が成り立つときには、適当に座標変換してやれば(4-30)式は次のような楕円型偏微分方程式に変換できる。

$$f(x', y') = a'(x', y') \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x'^2} + b'(x', y') \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y'^2} + d'(x', y') \frac{\partial \Phi}{\partial x'} + e'(x', y') \frac{\partial \Phi}{\partial y'} \quad (4-32)$$

ここでプライム(')は座標変換後の数値を表す。(4-31)式が満たされない場合、(4-31)の左辺が零のときには、(4-30)式は次のような放物型偏微分方程式となる。

$$f(x', y') = a'(x', y') \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x'^2} + d'(x', y') \frac{\partial \Phi}{\partial x'} + e'(x', y') \frac{\partial \Phi}{\partial y'} \quad (4-33)$$

また(4-31)式の左辺が負のときには、次のような双曲型偏微分方程式となる。

$$f(x', y') = a'(x', y') \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x'^2} - b'(x', y') \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y'^2} + d'(x', y') \frac{\partial \Phi}{\partial x'} + e'(x', y') \frac{\partial \Phi}{\partial y'} \quad (4-34)$$

特に後者の場合、(4-34)式からわかるように空間2階微分項に負の係数が掛かっているのがこれが負拡散の働きをし、数値計算が不安定となる。(4-31)式が常に成り立つための条件は次で表される。

$$c^2(x, y) - 4a(x, y) \cdot b(x, y) < 0 \quad (4-35)$$

(4-35)式の関係は、(4-29)式において次の関係を満たすことに相当している。

$$\langle u'_1 u'_2 \rangle^2 < \langle u'_1 u'_1 \rangle \cdot \langle u'_2 u'_2 \rangle \quad (4-36)$$

すなわち、2次元空間でG G D Hによる拡散項を正の拡散係数をもつ拡散型にするための条件は、2つの変数の相関のノルムが、それぞれの自己相関のノルムの相乗平均よりも小さくなければならないというSchumanの realizability の要請⁹⁾と一致する。そこで(4-36)式を満たさないときには拡散項中の係数であるシアストレスに次のような重み係数 β を乗じる。

$$\beta = \text{Min} \left(\frac{\sqrt{\langle u'_1 u'_1 \rangle} \cdot \sqrt{\langle u'_2 u'_2 \rangle}}{\sqrt{\langle u'_1 u'_2 \rangle^2}}, 1 \right) \quad (4-37)$$

ここで $\text{Min}(a, b)$ は a, b のうち小さいほうを選ぶことを意味する記号である。これより

$\beta \langle u'_1 u'_2 \rangle$ のノルムは $\sqrt{\langle u'_1 u'_1 \rangle} \cdot \sqrt{\langle u'_2 u'_2 \rangle}$ より大きくなることはなく (4-36) 式は満たされる。従って (4-29) 式は拡散型に変形することができる。

3次元の場合はより複雑になる。結果だけを示すと拡散型になるためには (4-36) 式が成立する以外に次のような 3 次対称行列の行列式が正となることが要請される。

$$\begin{vmatrix} \langle u'_1 u'_1 \rangle & \langle u'_1 u'_2 \rangle & \langle u'_1 u'_3 \rangle \\ \langle u'_1 u'_2 \rangle & \langle u'_2 u'_2 \rangle & \langle u'_2 u'_3 \rangle \\ \langle u'_1 u'_3 \rangle & \langle u'_2 u'_3 \rangle & \langle u'_3 u'_3 \rangle \end{vmatrix} > 0 \quad (4-38)$$

これは (4-36) 式が他の成分、 $\langle u'_2 u'_3 \rangle$ 、 $\langle u'_1 u'_3 \rangle$ 成分についても満足されるという条件よりも更に厳しい制約である。この場合 (4-36) 式のようにシアストレスの大小関係について一意的な条件は求まらないので、本論文の計算では次の様に処理した。即ち、3成分 $\langle u'_1 u'_2 \rangle$ 、 $\langle u'_2 u'_3 \rangle$ 、 $\langle u'_1 u'_3 \rangle$ についてそれぞれに (4-36) 式の β に相当する重み係数を算出して乗じた後、数値不安定を起こす可能性の高い箇所で、更に安全率を掛けて計算をすすめた。

第4章 注

注1) 拡散項中の直交成分とクロス成分

ストレス $\langle u_i' u_j' \rangle$ の輸送方程式における拡散項の式 (表 4.1 ⑤式) において添字 $\ell = m$ のときが直交成分であり、 $\ell \neq m$ のときがクロス成分である。 D_{11C} は本文でとりあげた 1 次元空間においては当然存在しないが、2 次元、3 次元計算の場合を配慮して敢えて残しておいた。

また、本文で取り上げた拡散項の直交成分の離散表現は次のように表わされる。

$$D_{11D} = A_{i-1}^D \langle u_i' u_i' \rangle_{i-1} + A_{i+1}^D \langle u_i' u_i' \rangle_{i+1} - A_i^D \langle u_i' u_i' \rangle_i \quad (4-39)$$

$$A_{i-1}^D = C_s \left(\frac{k}{\varepsilon} \right)_{i-1/2} \frac{\langle u_i' u_i' \rangle_{i+1/2}}{dx^2} > 0 \quad (4-40)$$

$$A_{i+1}^D = C_s \left(\frac{k}{\varepsilon} \right)_{i+1/2} \frac{\langle u_i' u_i' \rangle_{i+1/2}}{dx^2} > 0 \quad (4-41)$$

$$A_i^D = A_{i-1}^D + A_{i+1}^D > 0 \quad (4-42)$$

スカラー量 k, ε , ノルマルストレス $\langle u_i' u_i' \rangle$ は常に正であるので式 (4-39) ~ (4-42) より係数 $A_{i-1}^D - A_{i+1}^D$ は正である。

注2) $\phi_{11(2)}$ については、 $\langle u_i' u_i' \rangle$ を含んではいるが、これは生産項 P_{11} に含まれているのでここでは離散化しない。

注3) 再分配項の離散表現と A_ϕ の正值性

表 4.1 式 ⑪, ⑫及び⑬を利用して、(4-25) 式における ϕ_{11}^* と A_ϕ を書き表わす。一次元の場合、式 ⑪~⑬は

$$\phi_{11(1)} = -C_1 \left(\frac{\varepsilon}{k} \right) \langle u_i' u_i' \rangle_i - \frac{2}{3} k \quad (4-43)$$

$$\phi_{11(2)} = -C_2 (P_{11} - \frac{2}{3} P_k) \quad (4-44)$$

$$\phi_{11(3)}^w = -C_1 \left(\frac{\varepsilon}{k} \right) \langle u_i' u_i' \rangle_i \cdot f(x) \quad (4-45)$$

ここで $f(x)$ は wall reflection 項に関する壁関数である。

$$f(x) = \Sigma \frac{k^{3/2}}{C_1 \varepsilon x} \quad (4-46)$$

ここで x は壁面からの距離である。(4-43) ~ (4-45) をたし合わせて ϕ_{11} は次のよう表現される。

$$\phi_{11} = -C_2 P_{11} + \frac{2}{3} C_2 P_k + \frac{2}{3} C_1 \varepsilon - (C_1 \left(\frac{\varepsilon}{k} \right) + C_1' \left(\frac{\varepsilon}{k} \right) f(x)) \langle u_i' u_i' \rangle_i \quad (4-47)$$

従って、

$$\phi_{11}^* = -C_2 P_{11} + \frac{2}{3} C_2 P_k + \frac{2}{3} C_1 \varepsilon \quad (4-48)$$

$$A_\phi = C_1 \left(\frac{\varepsilon}{k} \right) + C_1' \left(\frac{\varepsilon}{k} \right) f(x) \quad (4-49)$$

と表すことができる。ここで C_1, C_1', ε 及び k は正。また壁関数 $f(x)$ は (4-46) 式より正である。

従って A_0 は正となる。

注4) 移流・拡散項の一部を生成項に取り込むことの意味

ノルマルストレス等常に正値をとるべき変数の計算において考えてやればわかりやすい。式(4-24)中の ϕ_{11} を式⑪～式⑬及び式(4-25)を用いて書き下し、 P_{11}, P_k, ε についてまとめると式(4-24)は次のように表現にされる。

$$\begin{aligned} & (A_1^C + A_1^D + C_1 \left(\frac{\varepsilon}{k}\right) + C_1' \left(\frac{\varepsilon}{k}\right) \cdot f(x)) \langle u_1' u_1' \rangle_i \\ &= (1 - C_2) \cdot P_{11} + \frac{2}{3} C_2 \cdot P_k + \frac{2}{3} (C_1 - 1) \cdot \varepsilon + D_{11C} \\ &+ (A_{1-1}^C + A_{1-1}^D) \cdot \langle u_1' u_1' \rangle_{i-1} + (A_{1+1}^C + A_{1+1}^D) \cdot \langle u_1' u_1' \rangle_{i+1} \end{aligned} \quad (4-50)$$

$\langle u_1' u_1' \rangle_i$ の正値を保証するための工夫について説明する。まず(4-50)式第3行はノルマルストレスが正値を取ることより常に正となる。これらの係数が正値であることは既に4.4.1節並びに注3で説明した。第2行を正の部分 S_U と負の部分 S_P にわけて(4-50)式を次のように変形する。

$$\begin{aligned} & (A_1^C + A_1^D + C_1 \left(\frac{\varepsilon}{k}\right) + C_1' \left(\frac{\varepsilon}{k}\right) \cdot f(x)) \langle u_1' u_1' \rangle_i - \frac{1}{\langle u_1' u_1' \rangle_i} S_P \langle u_1' u_1' \rangle_i \\ &= S_U + (A_{1-1}^C + A_{1-1}^D) \cdot \langle u_1' u_1' \rangle_{i-1} + (A_{1+1}^C + A_{1+1}^D) \cdot \langle u_1' u_1' \rangle_{i+1} \end{aligned} \quad (4-51)$$

$$S_U = (1 - C_2) \cdot \text{Max}(P_{11}, 0) + \frac{2}{3} C_2 \cdot \text{Max}(P_k, 0) + \text{Max}(D_{11C}, 0) + \frac{2}{3} (C_1 - 1) \cdot \varepsilon \quad (4-52)$$

$$S_P = (1 - C_2) \cdot \text{Min}(P_{11}, 0) + \frac{2}{3} C_2 \cdot \text{Min}(P_k, 0) + \text{Min}(D_{11C}, 0) \quad (4-53)$$

ここで $\text{Min}(a, b)$ は a, b のうち小さいほうを選ぶことを意味する記号である。ここで、 $S_U > 0$ 、 $S_P < 0$ であるので、 $\langle u_1' u_1' \rangle_i$ が常に正の値をとることが満たされる。 D_{11C} は D_{11D} と異なり、常に正の係数を持つとは限らないので、数値計算上では、 P_{11} や P_k と同様に取り扱われている。即ち、正の係数を持つ隣接点の物理量の項以外は、例えその物理的意味が移流・拡散項であっても、数値計算上では生成項とみなす。この取り扱いが Q U I C K スキームにおける移流項の取り扱いについても同様に行う。即ち、式(4-28)において Q U I C K スキームを風上差分成分とその他の部分に分けたが、この風上差分成分は4.4.1節で見た通り常に正の係数(0を含めて)持つので、安定化の観点から移流・拡散成分として計算するが、その他の部分の係数は常に正になるとは限らないので、生成項の一部と見なして整理することにより安定に数値計算を進めることができる。

第4章 参 考 文 献

- 1) S. V. バタンカー (1980) : コンピュータによる熱移動と流れの数値解析 : 森北出版
- 2) Courant, R., Isaacson, E., and Rees, M. (1952) : On the solution of non-linear hyperbolic differential equations by finite differences, *Comm. Pure Appl. Math.*, vol.5, p.243
- 3) Leonard, B. P. (1979) : A stable and accurate convective modelling procedure based on Quadratic Upstream Interpolation, *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 19, North-Holland Publishing Company, 19, pp.59-98
- 4) 数値流体力学編集委員会編 (1995) : 数値流体力学シリーズ1 非圧縮性流体解析 : 東京大学出版界
- 5) Huang, P. G. and Leschziner, M. A. (1985) : Stabilization of recirculating flow computations performed with second moment closures and third order discretization, *Prep. 5th Symp. Turbulent Shear Flows, Cornell Univ.*, pp.20.7-20.12.
- 6) 平岡久司、中村泰人 (1992) : MAC 法による応力方程式モデルの解法、日本建築学会計画系論文報告集、第431号、pp.1-10
- 7) 早瀬敏幸、J.A.C. Humphry, R. Greif (1990) : 有限体積法に基づく安定な反復解法が得られる QUICK スキームの再定式化、第4回数値流体力学シンポジウム講演論文集
- 8) Schumann, U. 1977 : Realizability of Reynolds stress turbulent models : *Phys. Fluids* 20: pp.721-25

第五章

3次元室内等温・非等温気流の解析



第5章 3次元室内等温・非等温流れ場の解析

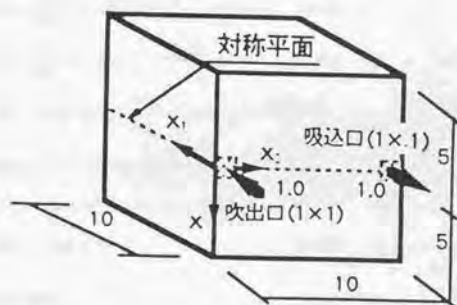
5.1 はじめに

本章では、3次元室内の等温・非等温流れ場を DSM、代数応力モデル（以降 ASM）と $k-\varepsilon$ モデルにより解析を行い、予測結果を実験結果と比較し、乱流モデルの構造の違いに関連して検討を行う。

5.2 等温流れ場の解析

5.2.1 計算概要

計算対象は図 5.2.1 に示す吹き出し口・吸い込み口をもつ立方体である。DSM と ASM の基礎方程式を表 5.2.1 に示す。また境界条件と計算条件をそれぞれ表 5.2.2 並びに表 5.2.3 に示す。



- 諸量は吹き出し口幅 L_0 、吹き出し風速 U_0 で無次元化。
- 模型実験においては $L_0=0.15\text{m}$ 、室は一辺 1.5m の立方体。
- 吹き出し Re 数は約 6×10^4

図 5-2-1 計算対象となる室内モデル

表 5.2.1 DSM・ASM の基礎方程式 (非等温)

DSM の場合

$$\langle u_i' u_j' \rangle \text{ 方程式 } \frac{D \langle u_i' u_j' \rangle}{Dt} = D_{ij} + P_{ij} + \phi_{ij} + G_{ij} - \varepsilon_{ij} \quad (5-1)$$

$$\langle u_i' \theta' \rangle \text{ 方程式 } \frac{D \langle u_i' \theta' \rangle}{Dt} = D_{i\theta} + P_{i\theta(1)} + P_{i\theta(2)} + G_{i\theta} + \phi_{i\theta} \quad (5-2)$$

ASM の場合

$$\langle k \text{ 方程式} \rangle \frac{Dk}{Dt} = D_k + P_k + G_k - \varepsilon \quad (5-3)$$

$$\langle u_i' u_j' \rangle \text{ 方程式 } (P_k + G_k - \varepsilon) \frac{\langle u_i' u_j' \rangle}{k} = P_{ij} + \phi_{ij} + G_{ij} - \varepsilon_{ij} \quad (5-4)$$

$$\langle u_i' \theta' \rangle \text{ 方程式 } \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k} (P_k + G_k - \varepsilon) + \frac{1}{\langle \theta'^2 \rangle} (P_\theta - 2 \cdot \varepsilon_\theta) \right) \langle u_i' \theta' \rangle \\ = P_{i\theta(1)} + P_{i\theta(2)} + G_{i\theta} + \phi_{i\theta} \quad (5-5)$$

DSM・ASM で共通

$$\langle \varepsilon \text{ 方程式} \rangle \frac{D\varepsilon}{Dt} = D_\varepsilon + \frac{\varepsilon}{k} (C_\varepsilon P_k + C_{\varepsilon k} G_k - C_{\varepsilon 2} \varepsilon) \quad (5-6)$$

$$\langle \theta'^2 \rangle \text{ 方程式 } \frac{D \langle \theta'^2 \rangle}{Dt} = D_\theta + P_\theta - 2 \cdot \varepsilon_\theta \quad (5-7)$$

$$k = \frac{1}{2} \langle u_i' u_i' \rangle \quad (5-8) \quad P_k = \frac{1}{2} P_{ii} \quad (5-9)$$

$$D_{ij} = \frac{\partial}{\partial x_m} (C_k \langle u_m' u_i' \rangle + \frac{k}{\varepsilon} \frac{\partial \langle u_i' u_j' \rangle}{\partial x_i}) \quad (5-10) \quad D_\varepsilon = \frac{\partial}{\partial x_m} (C_k \langle u_m' u_i' \rangle + \frac{k}{\varepsilon} \frac{\partial k}{\partial x_i}) \quad (5-11)$$

$$D_\varepsilon = \frac{\partial}{\partial x_m} (C_\varepsilon \langle u_m' u_i' \rangle + \frac{k}{\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i}) \quad (5-12) \quad D_{i\theta} = \frac{\partial}{\partial x_m} (C_k \langle u_m' u_i' \rangle + \frac{k}{\varepsilon} \frac{\partial \langle u_i' \theta' \rangle}{\partial x_i}) \quad (5-13)$$

$$P_{ij} = -\langle u_i' u_k' \rangle \frac{\partial \langle u_j' \rangle}{\partial x_k} - \langle u_j' u_k' \rangle \frac{\partial \langle u_i' \rangle}{\partial x_k} \quad (5-14)$$

$$P_{i\theta(1)} = -\langle u_i' u_k' \rangle \frac{\partial \langle \theta' \rangle}{\partial x_k} \quad (5-15) \quad P_{i\theta(2)} = -\langle u_k' \theta' \rangle \frac{\partial \langle u_i' \rangle}{\partial x_k} \quad (5-16)$$

$$G_{ij} = -\langle u_i' \theta' \rangle g_j \beta - \langle u_j' \theta' \rangle g_i \beta \quad (5-17) \quad G_k = -\langle u_i' \theta' \rangle g_i \beta \quad (5-18)$$

$$G_{i\theta} = -g_i \beta \langle \theta'^2 \rangle \quad (5-18) \quad P_\theta = -\langle u_i' \theta' \rangle \frac{\partial \langle \theta' \rangle}{\partial x_i} \quad (5-19)$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{2}{3} \varepsilon \delta_{ij} \quad (5-20) \quad \varepsilon_\theta = \frac{1}{2R} \frac{\langle \theta'^2 \rangle}{k} \varepsilon \quad (5-21)$$

$$\phi_{ij} = \phi_{ij(1)} + \phi_{ij(2)} + \phi_{ij(3)} + \phi_{ij(1)}^w + \phi_{ij(2)}^w \quad (5-22)$$

$$\phi_{ij(1)} = -C_1 \frac{\varepsilon}{k} \langle u_i' u_j' \rangle - \frac{2}{3} k \delta_{ij} \quad (5-23)$$

$$\phi_{ij(2)} = -C_2 (P_{ij} - \frac{2}{3} P_k \delta_{ij}) \quad (5-24)$$

$$\phi_{ij(3)} = -C_2 (G_{ij} - \frac{2}{3} G_k \delta_{ij}) \quad (5-25)$$

$$\phi_{ij(1)}^w = \sum_{w=1}^{w_0} C_1' \frac{\varepsilon}{k} \langle u_k' u_m' \rangle n_k^{(w)} n_m^{(w)} \delta_{ij} - \frac{3}{2} \langle u_k' u_j' \rangle n_k^{(w)} n_j^{(w)} \\ - \frac{2}{3} \langle u_k' u_j' \rangle n_k^{(w)} n_j^{(w)} \frac{k^{1/2}}{C_1 h_n^{(w)} \varepsilon} \quad (5-26)$$

$$\phi_{\theta(2)}^v = \sum_{i=1}^{w_1} C_i' \frac{\varepsilon}{k} (\phi_{i\theta(2)} n_i^{(w)} \delta_{ij} - \frac{3}{2} \phi_{i\theta(2)} n_i^{(w)} n_j^{(w)}) - \frac{2}{3} \phi_{i\theta(2)} n_i^{(w)} n_j^{(w)} \frac{k^{3/2}}{C_i h_n^{(w)} \varepsilon} \quad (5-27)$$

$$\phi_{\theta} = \phi_{\theta(1)} + \phi_{\theta(2)} + \phi_{\theta(3)} + \phi_{\theta(4)}^v \quad (5-28)$$

$$\phi_{\theta(1)} = -C_{\theta(1)} \frac{\varepsilon}{k} <u_i' \theta_i'> \quad (5-29) \quad \phi_{\theta(2)} = -C_{\theta(2)} P_{\theta(1)} \quad (5-30)$$

$$\phi_{\theta(3)} = -C_{\theta(3)} G_{\theta} \quad (5-31)$$

$$\phi_{\theta(4)}^v = \sum_{i=1}^{w_2} C_i' \frac{\varepsilon}{k} <u_i' \theta_i'> n_i^{(w)} n_j^{(w)} \frac{k^{3/2}}{C_i h_n^{(w)} \varepsilon} \quad (5-32)$$

$$\begin{array}{llllllll} C_1: 1.8 & C_2: 0.6 & C_3: 0.6 & C_4': 0.5 & C_5': 0.5 & C_6: 0.0 & C_7: 0.22 & C_8: 0.16 \\ C_{e1}: 1.44 & C_{e2}: 1.92 & C_{e3}: G_3 > 0 \text{ の場合 } 1.44 & G_3 < 0 \text{ の場合 } 0.0 & C_{\theta}: 0.15 & C_{\theta}': 0.15 \\ C_{\theta(1)}: 3.0 & C_{\theta(2)}: 0.5 & C_{\theta(3)}: 0.3 & C_{\theta(4)}: 0.5 & C_I: 2.5 \end{array}$$

表 5.2.2 境界条件 (表中の数字は無次元化されたもの)

(流入条件) $<u>_{in} = 1.0$ $k_{in} = \frac{3}{2} <u_1'^2>_{in} = \frac{3}{2} <u_2'^2>_{in} = \frac{3}{2} <u_3'^2>_{in} = 0.005$ $\ln = 0.1$

(流出条件) $<u>_{out} = -1.0$ ノルマルストレス、 k, ε ; フリースリップ

(壁面境界) 壁面上のシアストレスは①式。壁面速度勾配は②式。ノルマルストレスの輸送方程式中の壁面第一セルの $\varepsilon(\bar{\varepsilon})$ は③式。 ε 方程式中の壁面第一セルの $\varepsilon(e_1)$ は④式で与える。

$$\frac{<u_i'>}{(\tau_w / \rho)} (C_\mu^{1/2} k)^{1/2} = \frac{1}{\kappa} \ln \left[\frac{E \cdot h_n \cdot (C_\mu^{1/2} k)^{1/2}}{v} \right] \quad (1) \quad \left\{ (v + v_i) \frac{\partial <u_i'>}{\partial x_n} \right\}_{wall} = \tau_{w/2} \quad (2)$$

$$\bar{\varepsilon} = \frac{C_\mu^{3/4} k^{3/2}}{\kappa h_n} \cdot \ln \left[\frac{E \cdot h_n \cdot (C_\mu^{1/2} k)^{1/2}}{v} \right] \quad (3) \quad \bar{\varepsilon} = \frac{C_\mu^{3/4} k^{3/2}}{\kappa h_n} \quad (4)$$

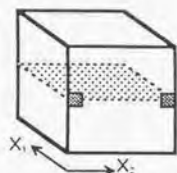
ノルマルストレスはフリースリップ $\kappa=0.4$, $C_\mu=0.09$, $E=9.0$, $v=1/Re=1.5 \times 10^{-5}$ 。

表 5.2.3 計算条件

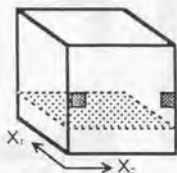
メッシュ分割は $35(x_1) \times 22(x_2) \times 19(x_3)$ 。最小メッシュ幅は 0.2、最大メッシュ幅は 1.0。計算は x_2 方向の対称性より、方向の半分のみを計算対象とした。時間差分は Adams-Bashforth スキーム。運動方程式、 $<u_i' u_j'>$ 、 ε の移流項は QUICK スキーム。但し吹き出し口・吸い込み口近傍で一時精度風上差分^(2.5.1)。圧力の解法は HSMAC 使用。

5.2.2 計算結果

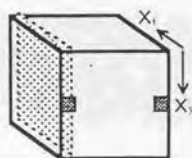
以下に示す断面（図 5-2-2）において k - ϵ , ASM, DSM の計算結果と実験結果を比較した。



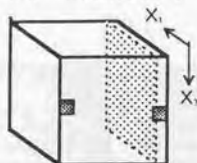
㊶断面 ($X_1 - X_2$ 断面、 $X_3 = 0.0$)



㊷断面 ($X_1 - X_2$ 断面、 $X_3 = 3.5$)



㊸断面 ($X_1 - X_3$ 断面、 $X_2 = 0.5$)



㊹断面 ($X_1 - X_3$ 断面、 $X_2 = 9.5$)

図 5-2-2 検討断面

5.2.2.1 平均風速ベクトルの比較 (図 5-2-3-1~5-2-3-4)

DSM 及び ASM の結果は、の結果とほぼ同じであり、また実験結果との対応も極めて良い。DSM の結果は、ASM、 $k-\epsilon$ と比較して壁面近傍でやや拡散的であるが、これは、DSM の計算において壁面近傍で風上差分を用いたことに起因するものと思われる。

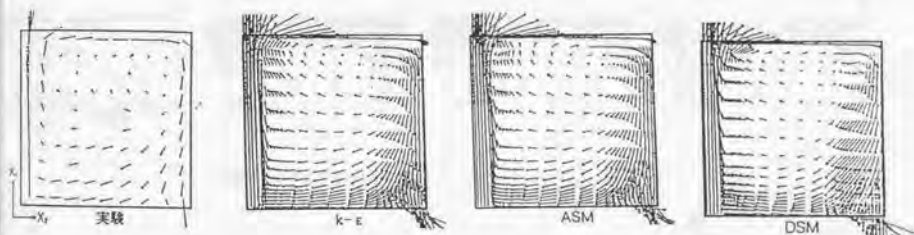


図 5-2-3-1 平均風速ベクトル (a 断面)

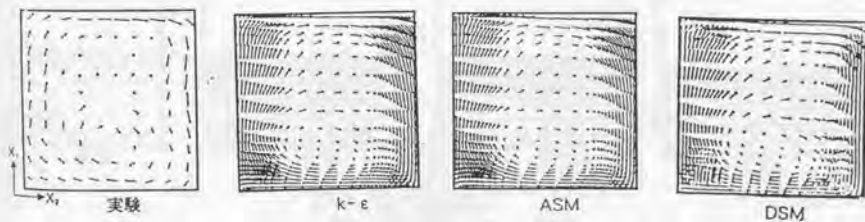


図 5-2-3-2 平均風速ベクトル (b 断面)

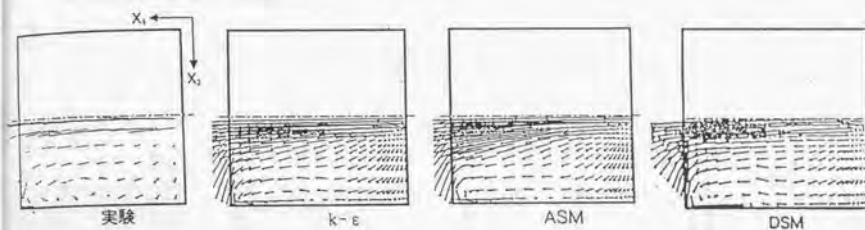


図 5-2-3-3 平均風速ベクトル (c断面)

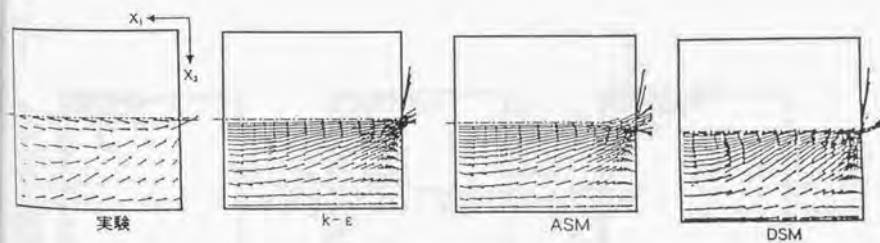


図 5-2-3-4 平均風速ベクトル (d断面)

5.2.2.2 乱流エネルギー k の分布の比較

k の分布形は DSM, ASM, $k-\varepsilon$ 共に実験結果とは異なるが、断面 a における $k-\varepsilon$ 結果 (図 5-2-4-1) では壁に衝突する領域および吸い込み口近傍で過大な k の値が見られるのに対して、DSM および ASM ではこれらの領域で $k-\varepsilon$ の結果より小さく実験結果に近づく傾向がある。また、DSM においては吹き出し口近傍の k のピークを小さく評価しまた下流方向に移動させる傾向を示す。これは、実験結果に近づいたといえる。これは、DSM がレイノルズストレスの移流拡散項を正確に評価しているためだと考えられる。また、これらの傾向は、他の断面についても同様である (図 5-2-4-2~図 5-2-4-4)。

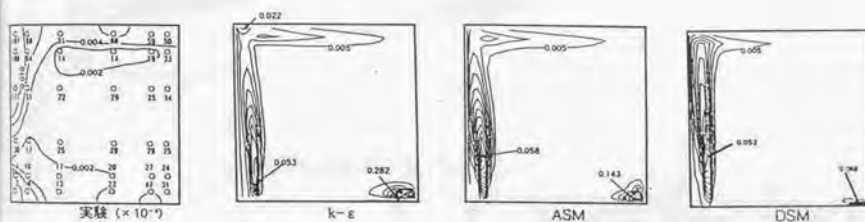


図 5-2-4-1 k の分布 (a 断面)

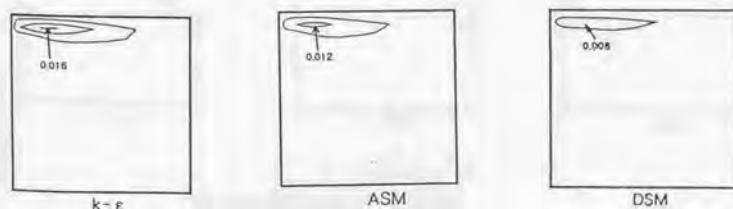


図 5-2-4-2 k の分布 (b 断面)

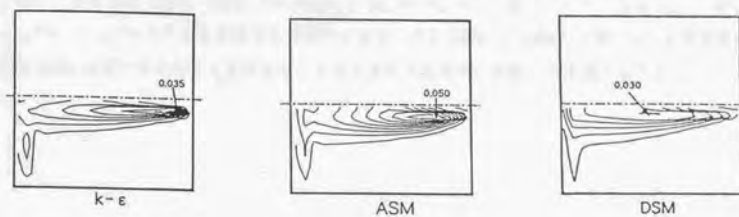


図 5-2-4-3 k の分布 (c 断面)

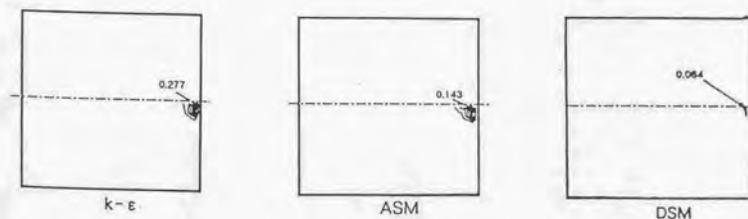


図 5-2-4-4 k の分布 (d 断面)

5.2.2.3 $\langle u_i' u_j' \rangle$ の分布の比較 (a 断面)

k-e の結果では壁面近傍のシアの大きい領域で $\langle u_1'^2 \rangle$, $\langle u_2'^2 \rangle$, $\langle u_3'^2 \rangle$ の値がほぼ様な大きさであり、これらノルマルストレスが等方的になっている (図 5-2-5-1)。これに対して、DSM および ASM では $\langle u_1'^2 \rangle$ が、 $\langle u_2'^2 \rangle$, $\langle u_3'^2 \rangle$ に比べて 2 倍以上大きく表現されており、非等方性が正しく現れている (図 5-2-5-2 ~ 図 5-2-5-3)。これは DSM、ASM では $\langle u_i' u_j' \rangle$ の生産項 P_{ij} を各成分について個々に正しく評価し、これに基づいて $\langle u_i' u_j' \rangle$ を計算するのに対して、

k-e では等方的な渦粘性の概念に基づいて $\langle u_i' u_j' \rangle = -\nu_t \left(\frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_j} + \frac{\partial \langle u_j \rangle}{\partial x_i} \right) + \frac{2}{3} k \delta_{ij}$ としてい

るため k の分布の強い影響を共通に反映し、ノルマルストレスの非等方性を十分に表現し得ていない。すなわち DSM、ASM では噴流域で P_{11} が P_{22} , P_{33} に比べて大きいため $\langle u_1'^2 \rangle$ が、 $\langle u_2'^2 \rangle$, $\langle u_3'^2 \rangle$ より大きな値をもつ結果となる。また DSM と ASM の比較では、 k の分布と同様 DSM はピークを小さく見積もり、またそれを下流方向に移動させる傾向を示す。

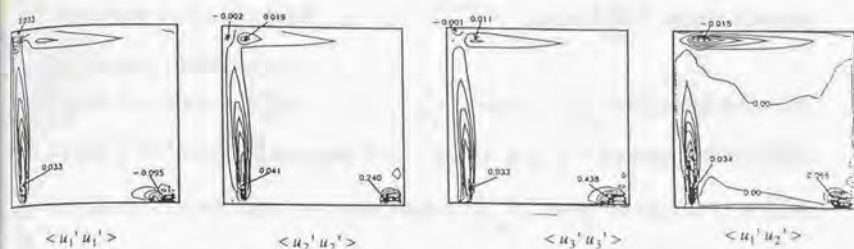


図 5-2-5-1 a 断面の $\langle u_i' u_j' \rangle$ の分布 (k-ε)

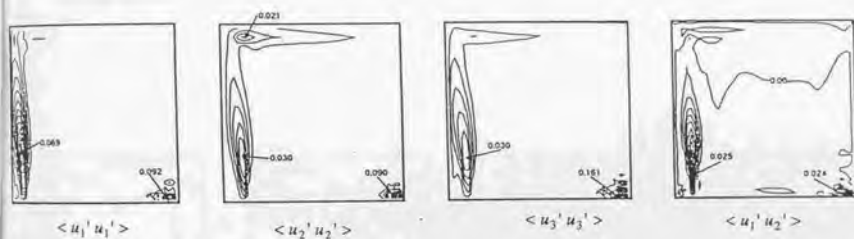


図 5-2-5-2 a 断面の $\langle u_i' u_j' \rangle$ の分布 (ASM)

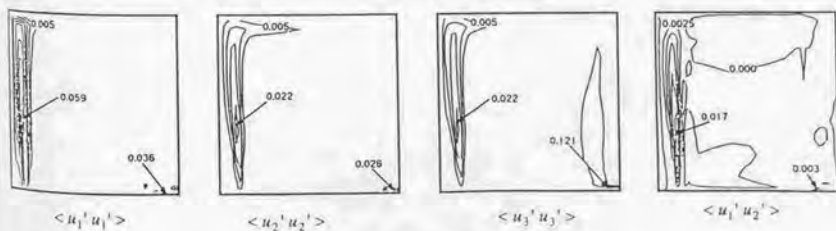


図 5-2-5-3 a 断面の $\langle u_i' u_j' \rangle$ の分布 (DSM)

5.2.2.4 P_{ij} の分布の比較 (図 5-2-6)

DSM における $\langle u_i' u_j' \rangle$ の生産項 $P_{ij} = -\langle u_i' u_j' \rangle \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_j} - \langle u_j' u_i' \rangle \frac{\partial \langle u_j \rangle}{\partial x_i}$ を考察する。吹き出し口近傍で P_{11} が極めて大きい。

これは $P_{11} = -2(\langle u_1'^2 \rangle \frac{\partial \langle u_1 \rangle}{\partial x_1} + \langle u_1' u_2' \rangle \frac{\partial \langle u_1 \rangle}{\partial x_2} + \langle u_1' u_3' \rangle \frac{\partial \langle u_1 \rangle}{\partial x_3})$ にこの場のメインシア

である $\frac{\partial \langle u_1 \rangle}{\partial x_2} < 0$ ($\langle u_1' u_2' \rangle > 0$) が含まれていることによる。また噴流が壁面に衝突する領域

についても P_{11} が大きな値をもつ。これはこの領域で $\frac{\partial \langle u_1 \rangle}{\partial x_1}$ が大きな負の値を持つためである。

また吸い込み口近傍では $P_{11} < 0$, $P_{22}, P_{33} > 0$ でかなり大きな値をもつ。この領域では $\frac{\partial \langle u_1 \rangle}{\partial x_1}$ が

大きな正値を持つため、 P_{11} が負となり、また連続式より、 $\frac{\partial \langle u_2 \rangle}{\partial x_2}$, $\frac{\partial \langle u_3 \rangle}{\partial x_3}$ が負の値を持ち、

P_{22} には $-\langle u_2'^2 \rangle \frac{\partial \langle u_2 \rangle}{\partial x_2}$ が、 P_{33} には $-\langle u_3'^2 \rangle \frac{\partial \langle u_3 \rangle}{\partial x_3}$ が含まれているため、 P_{22}, P_{33} が正の大

きな値をとることになる。

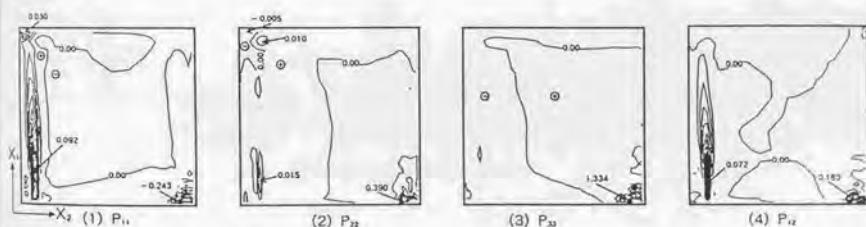


図 5-2-6 a 断面の P_{ij} の分布 (DSM)

5.2.2.5 P_k の分布の比較 (図 5-2-7)

a 断面の結果を見ると DSM、ASM についても k - ε についても速度勾配の大きい領域、すなわち噴流域、噴流が壁面に衝突する領域、および吸い込み口近傍で値が大きい。ただし、噴流が壁面に衝突する領域、および吸い込み口近傍では DSM、ASM の値は k - ε より小さい。これは DSM、ASM においては、これらの領域で P_{22} 、 P_{33} と P_{11} が逆符号になり、互いに打ち消し合い、これらの和である P_k の値が極端に大きくなることのないためである。一方 k - ε では EVM を用いるた

め、 $P_k = \frac{1}{2} \nu_t \left(\frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_j} + \frac{\partial \langle u_j \rangle}{\partial x_i} \right)^2$ と常に正となるため、成分間で打ち消し合うことがなく、

これらの領域で大きな値をもつことになる。したがって k - ε においてはこの領域で k の過大評価が現れることになる。

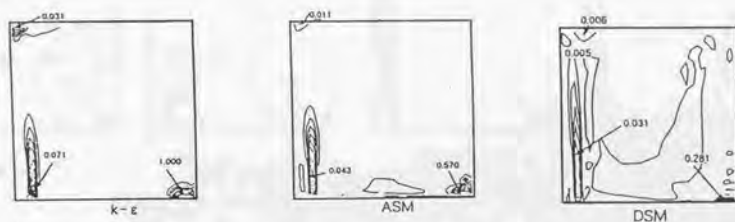
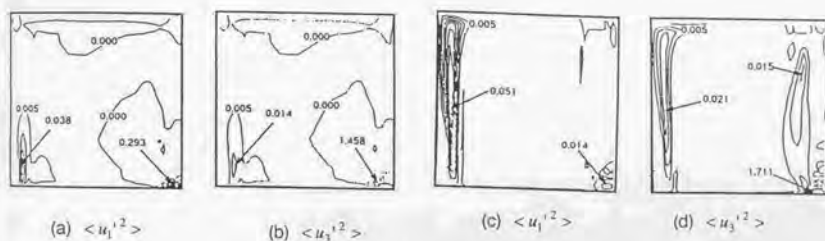


図 5-2-7 a 断面の P_k の分布

5.2.2.6 $\langle u_i' u_j' \rangle$ の移流・拡散項の比較 (図 5-2-8)

移流・拡散項 $(C_{ij} - D_{ij})$ (ASM の場合、 $\frac{\langle u_i' u_j' \rangle}{k} (C_k - D_k)$ とモデル化: C_{ij} , C_k はそれぞれ $\langle u_i' u_j' \rangle$ と k の移流項) のうちここでは $\langle u_1'^2 \rangle$ と $\langle u_3'^2 \rangle$ に関して示す。DSM と ASM では $(C_{ij} - D_{ij})$ の分布性状は大きく異なる。DSM は噴流部で ASM に比べて大きなピークをもっており、 $\langle u_i' u_j' \rangle$ のピークの抑制に大きな役割を果たしていることが示されている。また $\langle u_1'^2 \rangle$ と $\langle u_3'^2 \rangle$ ではその分布性状が大きく異なっている。一方 ASM による移流・拡散項の分布性状は各成分間でほとんど差がない。このことは各ストレスの分布性状に関して少なからず影響を及ぼすものと考えられる。



ASM

DSM

図 5-2-8 a 断面の $(C_{ij} - D_{ij})$ の分布

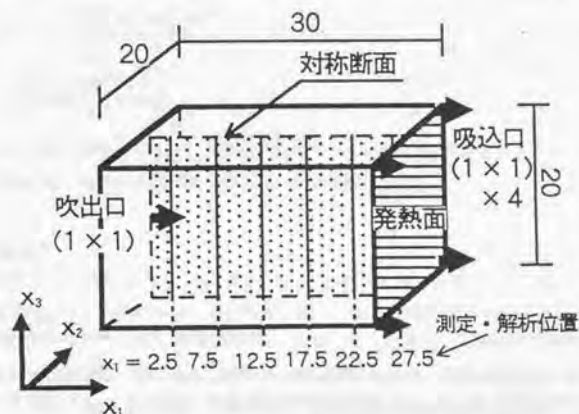
5.2.3 まとめ

①風速ベクトルについては DSM, ASM 共に実験結果とよく対応している。② k_t 等ほとんどの乱流統計量に関し、DSM は ASM より低い値を示す。③ DSM の小さい乱流統計量の見積もりは、全般に実験結果によく対応する傾向となっている。④壁面境界条件の取り扱いなどに対する安定性の問題を含めて今後検討する必要がある。

5.3 非等温流れ場の解析

5.3.1 計算概要

計算対象（図 5-3-1）とした室内モデルは、左側壁面中央部から冷気（cooling jet）を吹き出し、右側壁面が発熱面であつた 4 隅に吸込み口をもつ。基礎式は表 5-2-1 に示されている標準型 DSM のものである。境界条件を表 5-3-1 に計算条件を表 5-3-2 に示す。



- 諸量は吹き出し口幅 L_0 、吹き出し風速 U_0 、（吸込-吹出）温度差 $\Delta\theta_0$ で無次元化。
- 模型実験においては $U_0=1.0\text{m/s}$ 、 $L_0=0.04\text{m}$ 、 $\Delta\theta_0=12.2^\circ\text{C}$ で、 $Ar = \frac{-g_3\beta\Delta\theta_0 L_0}{(U_0)^2} = 0.016$
- 室寸法は $1.2\text{m}(x_1) \times 0.8\text{m}(x_2) \times 0.8\text{m}(x_3)$ 。
- 吹き出し Re 数は 2.7×10^3
- 計算では、 $U_0=L_0=\Delta\theta_0=1.0$ で、 $Ar = \frac{-g_3\beta\Delta\theta_0 L_0}{(U_0)^2} = -g_3\beta = 0.016$ としている。

図 5-3-1 実験・計算対象

表 5-3-1 境界条件 (表中の数字は無次元化されたもの)

(流入条件) $\langle u \rangle_{in} = 1.0$ $k_{in} = \frac{3}{2} \langle u_1'^2 \rangle_{in} = \frac{3}{2} \langle u_2'^2 \rangle_{in} = \frac{3}{2} \langle u_3'^2 \rangle_{in} = 0.0018$ $\text{fin} = 0.13$

(流出条件) $\langle u \rangle_{out} = 0.25$ ノルマルストレス, k, ε, θ : フリースリップ

(壁面境界) 壁面上のシアストレスは①式。壁面速度勾配は②式。ノルマルストレスの輸送方程式中の壁面第一セルの $\varepsilon(\bar{\varepsilon})$ は③式。 ε 方程式中の壁面第一セルの $\varepsilon(\varepsilon_1)$ は④式で与える。

$$\frac{\langle u_i \rangle}{(\tau_w / \rho)} (C_\mu^{1/2} k)^{1/2} = \frac{1}{\kappa} \ln \left[\frac{E \cdot h_n \cdot (C_\mu^{1/2} k)^{1/2}}{v} \right] \quad ① \quad \left\{ (v + v_t) \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_n} \right\} \bigg|_{wall} = \tau_w / \rho \quad ②$$

$$\bar{\varepsilon} = \frac{C_\mu^{3/4} k^{3/2}}{\kappa h_n} \cdot \ln \left[\frac{E \cdot h_n \cdot (C_\mu^{1/2} k)^{1/2}}{v} \right] \quad ③ \quad \bar{\varepsilon} = \frac{C_\mu^{3/4} k^{3/2}}{\kappa h_n} \quad ④$$

ノルマルストレスはフリースリップ。発熱面で $\langle u_i' \theta' \rangle = -0.0025$ の熱流を与える。その他の壁面では $\langle u_n' \theta' \rangle = 0.0$ 。 $\kappa=0.4$, $C_\mu=0.09$, $E=9.0$, $v=1/\text{Re}=1/(2.7 \times 10^3)$ 。

表 5-3-1 計算条件

メッシュ分割は $35(x_1) \times 22(x_2) \times 54(x_3)$ 。最小メッシュ幅は 0.25、最大メッシュ幅は 1.0。計算は x_2 方向の対称性より、方向の半分のみを計算対象とした。時間差分は Adams-Bashforth スキーム。圧力の解法は HSMAC 使用。運動方程式、 $\langle u_i' u_j' \rangle$ 、 $\langle u_i' \theta' \rangle$ 、 ε 、温度の移流項は QUICK スキーム。但し吹き出し口・吸い込み口近傍で一時精度風上差分。事前の検討により $\langle \theta'^2 \rangle$ による $\langle u_i' \theta' \rangle$ の生産 (G_{θ} 、(5-18)式) は温度勾配や速度勾配 ((5-15)、(5-16)式) による生産に比べ小さいことがわかったのでこれを無視した。

5.3.2 計算結果

5.3.2.1 平均風速の比較 (図 5-3-2, 5-3-3)

DSM と ASM の結果は $k-\varepsilon$ モデルより噴流の中心部でやや風速が小さく、実験結果に近づいている。これは運動方程式中に現れる $\langle u_i' u_j' \rangle$ の評価が DSM 並びに ASM のほうが妥当であることに起因すると考えられる (5.3.2.4 参照)。また、温度分布が DSM と ASM では $k-\varepsilon$ モデルより滑らかであるため、風速に対する浮力の影響が小さく、 $k-\varepsilon$ モデルより噴流の下降が小さくなる傾向が見られる。次に DSM と ASM を比較すると、DSM の結果は吹き出し口近傍の噴流の中心部で ASM よりわずかに風速が大きい。下流域では逆に DSM における風速が減衰して ASM よりやや小さくなる。これは DSM が $\langle u_i' u_j' \rangle$ を ASM に比べより正確に表現しているからである (5.3.2.4 参照)。また DSM は ASM に比べて噴流の浮力による効果が大きく、風速の最大の位置は ASM の場合よりも下方にあり実験と良い一致を示す。全般に見ると $k-\varepsilon$ モデルは吹き出し口近傍でほとんど拡散せず噴流がほとんど減衰しない。ASM は吹き出し口直後でよく拡散し実験に近づくが、やや拡散過剰の傾向をしめす。DSM は吹き出し口直後の拡散は ASM より小さいが噴流の下流域でよく拡散し実験結果と最も近くなる。これらの相違は各モデルの構造の相違に基づくものである (後述)。

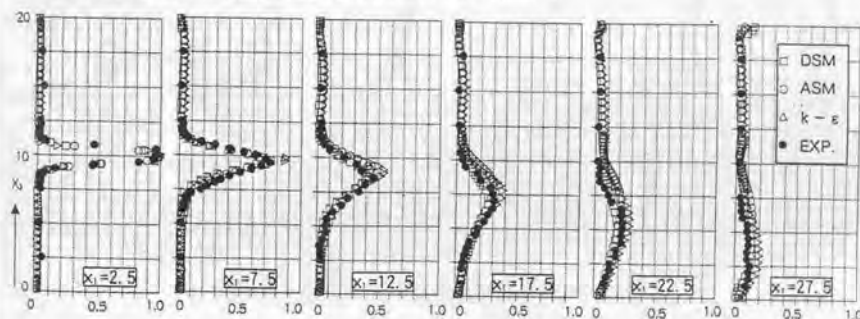


図 5-3-2 スカラ風速 ($\sqrt{\langle u_1'^2 \rangle + \langle u_2'^2 \rangle + \langle u_3'^2 \rangle}$) 分布の比較 (中心断面)

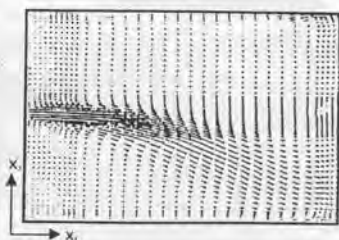


図 5-3-3 風速ベクトル (DSM, 中心断面)

5.3.2.2 平均温度分布の比較 (図 5-3-4, 5-3-5)

温度についても DSM と ASM は噴流中心部で $k-\epsilon$ モデルより実験値に近づいている。これは後述するように DSM と ASM が比べて温度フラックス $\langle u_i' \theta' \rangle$ の生産項を正しく評価しているためである。DSM と ASM では $\langle u_i' \theta' \rangle$ を大きく評価するため、温度の拡散がより活発になる。DSM と ASM との差はほとんどない。DSM は ASM に比べて吹きだし口近傍で温度の値がやや小さく実験との対応はわずかに悪くなる。逆に下流域では DSM がわずかに実験に近くなる。全般に見ると風速分布と $k-\epsilon$ モデルは吹き出し口近傍でほとんど拡散せず温度がほとんど減衰しない。ASM と DSM は吹き出し口直後で拡散し実験に近づくが、拡散の程度は、吹き出し口直後で ASM のほうがややよく、下流域においては DSM のほうが強くなる。これらの差はモデルの構造の差に基づくものである（後述）。また、領域の上下の壁面近くではすべてのモデルとも対応が悪い。

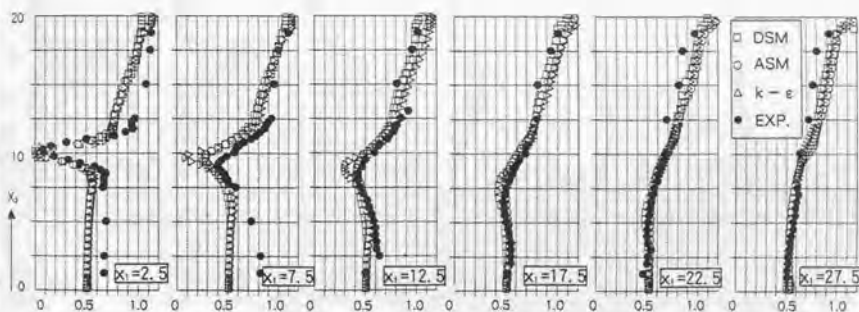


図 5-3-4 温度分布の比較（中心断面）

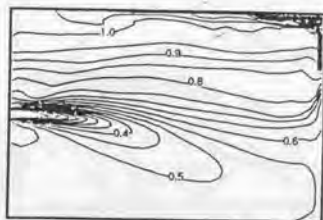


図 5-3-5 温度分布（DSM, 中心断面）

5.3.2.3 乱流エネルギー k の分布の比較 (図 5-3-6, 5-3-7)

吹き出し口のごく近傍の噴流部においては、DSM と ASM による k の値はその生産項を正しく評価しているのより大きい。一方この領域を除いては DSM と ASM の方が $k-\epsilon$ モデルより k の値が小さく、一般的に実験値と良い対応を示す。DSM と ASM の比較に対しては、吹き出し口直後で ASM のほうがわずかに大きい値を示し、下流域では DSM のほうがやや大きい値を示す。これは DSM が k を構成する $\langle u_i' u_j' \rangle$ の移流・拡散項の評価を正確に行っているためである(後述)。DSM の結果は実験値よりわずかに大きめに評価する傾向がある(注 5.2)。

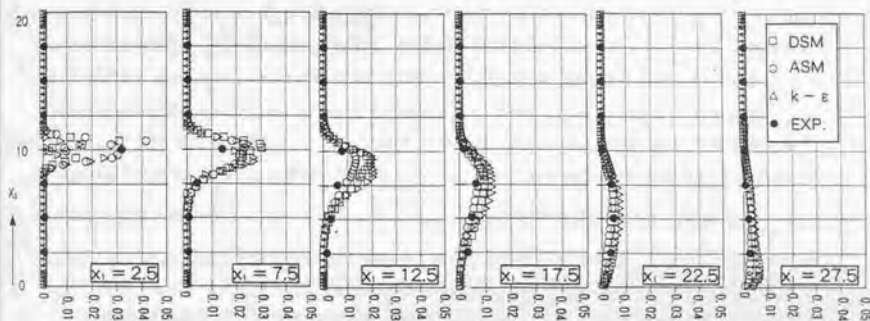


図 5-3-6 k の分布の比較 (中心断面)

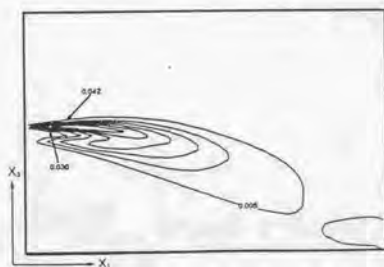


図 5-3-7 k の分布 (DSM、中心断面)

5.3.2.4 $\langle u_i' u_j' \rangle$ の分布 (図 5-3-8, 5-3-9)

DSM の結果では $\langle u_i' u_j' \rangle$ の各成分とも全般的に実験値と極めて良い一致を示す。特にレイノルズストレスの非等方性、即ち、この場合、 $\langle u_1'^2 \rangle > \langle u_2'^2 \rangle$ 、 $\langle u_3'^2 \rangle$ に比べて大きな値を示すことが実験結果に認められ、これを DSM は再現できている。これに対し、k-ε モデルではノルマルストレスを渦粘性の概念を用いて $\langle u_i'^2 \rangle = -2\nu_t \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_i} + \frac{2}{3}k$ (但し、縮約は取らな

い) で表すため、各ノルマル成分がほぼ同程度の値を持ち、等方的な結果となっている。これは DSM が $\langle u_i' u_j' \rangle$ のレベルに最も大きな影響を与えるその生産項 P_{ij} が正しく評価するためである。即ち、DSM では $\langle u_i'^2 \rangle$ の生産項 P_{ii} にこの流れ場におけるメインシアである $\frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_j}$

の項が含まれているため、 P_{ii} が大きくなり、その結果、 $\langle u_i'^2 \rangle$ が大きい値を持つ。DSM と ASM の比較に関しては、図 5-3-9 に主要なレイノルズストレスである $\langle u_1'^2 \rangle$ と $\langle u_1' u_1' \rangle$ の分布の比較を示す。DSM は ASM に比べて、吹き出し噴流上流で $\langle u_1' u_1' \rangle$ を小さく、下流域で大きく評価する。 $\langle u_1' u_1' \rangle$ に対する ASM と DSM の差異は移流・拡散項の差異のみであるから、

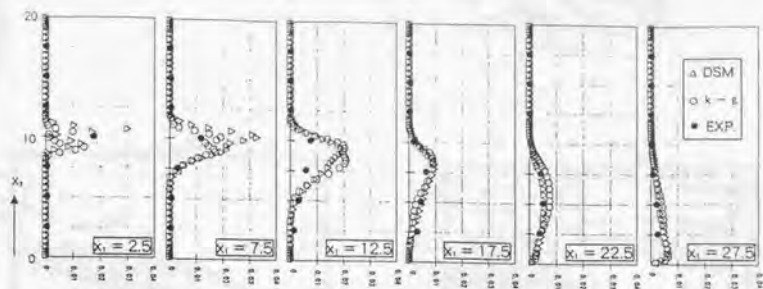
分布性状の差異は主にこの移流・拡散項の差異に起因している。即ち ASM で高く評価された $\langle u_1' u_1' \rangle$ の吹き出し直後のピークが、DSM では移流・拡散によって効果的に下流方向に流されるわけである。 $\langle u_1'^2 \rangle$ の移流・拡散項 $-(C_{11} - D_{11})$ の比較を図 5-3-10 に示す。但し ASM の

場合の移流・拡散項は $-(C_{11} - D_{11}) = \frac{\langle u_1'^2 \rangle}{k} (C_k - D_k)$ と代数化されている。ASM に比べて、

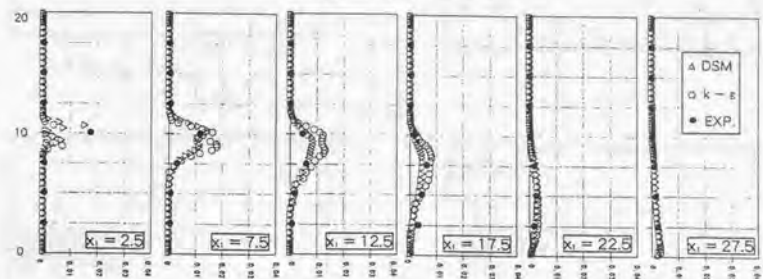
DSM の結果は吹き出し噴流のかなり下流域でも大きな値を示している。これは、DSM ではその下流域においても $\langle u_1'^2 \rangle$ の移流・拡散による輸送がより効果的に行われていることを示す。

それ故 DSM の結果は、吹き出し口近傍で相対的に小さい $\langle u_1'^2 \rangle$ を、下流域で相対的に大きな $\langle u_1'^2 \rangle$ を示す。図は省略するが他の $\langle u_i' u_j' \rangle$ の分布についてもほぼ同じ傾向を示す。従って、

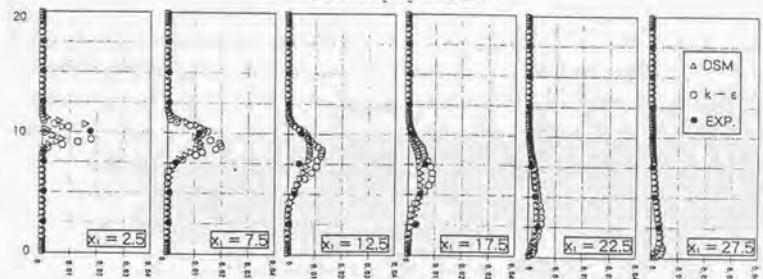
DSM は ASM と比べて、吹き出し口近傍でによる平均運動量の拡散が相対的に小さく、下流で大きくなる。それ故、前述のように ASM と比べて噴流上流で風速のピークが大きく、下流でピークが小さくなる。また DSM と ASM とで k の評価が異なるのはこの移流・拡散項に起因する $\langle u_i' u_j' \rangle$ の差異が k の生産項 P_k 等に還元されることが原因であると考えられる。



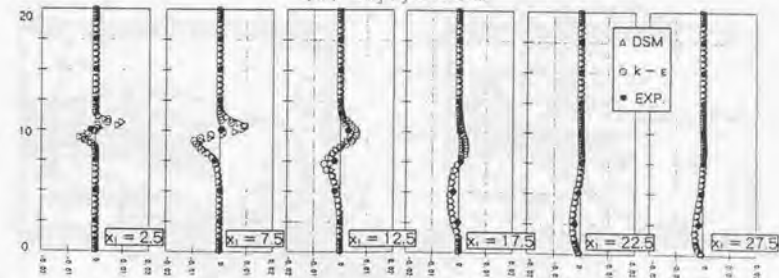
(1) $\langle u_1' u_1' \rangle$ の分布



(2) $\langle u_2' u_2' \rangle$ の分布

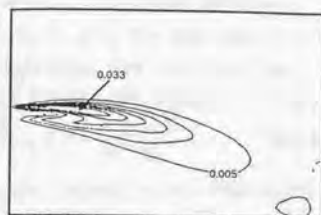


(3) $\langle u_3' u_3' \rangle$ の分布

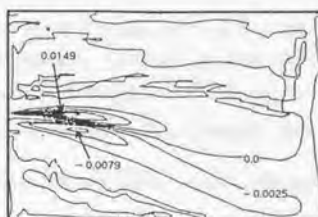


(4) $\langle u_1' u_3' \rangle$ の分布

図 5-3-8 $\langle u_i' u_j' \rangle$ の分布の比較 (DSM と k-ε, 中心断面)

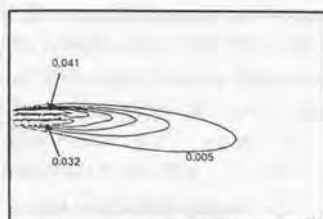


(1-a) $\langle u_1' u_1' \rangle$

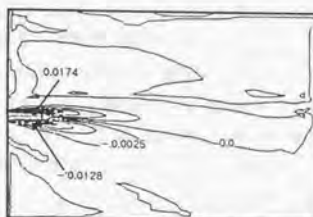


(1-b) $\langle u_1' u_3' \rangle$

(1) DSM



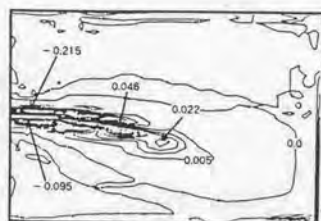
(2-a) $\langle u_1' u_1' \rangle$



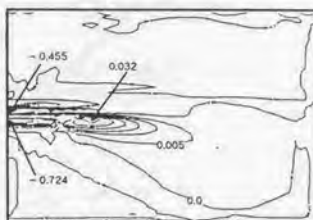
(2-b) $\langle u_1' u_3' \rangle$

(2) ASM

図 5-3-9 $\langle u_i' u_j' \rangle$ の分布の比較 (DSM と ASM, 中心断面)



(1) DSM



(2) ASM

図 5-3-10 $-(C_{11} - D_{11})$ の比較 (中心断面)

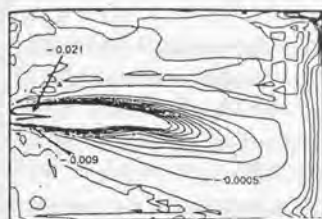
5.3.2.4 $\langle u_1'\theta' \rangle$ の分布 (図 5-3-11)

$\langle u_1'\theta' \rangle$ についても DSM, ASM と k-ε モデルでは大きな差異が見られる。特に $\langle u_1'\theta' \rangle$ の差が顕著である。即ち、k-ε モデルでは $\langle u_1'\theta' \rangle$ が小さく評価されているのに対して、DSM では、かなり大きな値を持ち、ピーク値については $\langle u_3'\theta' \rangle$ より大きい。これは k-ε では $\langle u_1'\theta' \rangle = -\frac{v_t}{\sigma_1} \frac{\partial \langle \theta \rangle}{\partial x_1}$ とし、この領域では $\frac{\partial \langle \theta \rangle}{\partial x_1}$ が小さいため値が小さい。これに対し DSM,

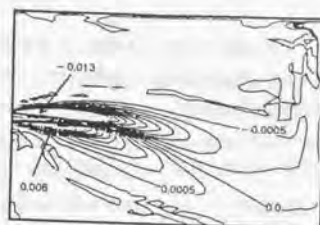
ASM では本来、 $\langle u_1'\theta' \rangle$ の輸送方程式 (表 5.2.1 (5-2)式) に現れる $\frac{\partial \langle \theta \rangle}{\partial x_k}, \frac{\partial \langle u_1 \rangle}{\partial x_k}$ 等による全ての生産項を正しく評価しているためである。この場合、 $\langle u_1'\theta' \rangle$ の生産項にこの場のメインシアである $\frac{\partial \langle u_1 \rangle}{\partial x_3}$ が含まれているため、 $\langle u_1'\theta' \rangle$ の値が大きくなる。また、 $\langle u_3'\theta' \rangle$ の値

に関しても同様に噴流近傍のピーク値は、DSM, ASM では k-ε モデルより大きな値を示している。この様に DSM, ASM では $\langle u_1'\theta' \rangle$ による温度の拡散の効果も、主流方向、上下方向とも k-ε モデルに比べて大きめに評価するため、この結果、前述の温度分布も実験結果に近づく。

DSM と ASM の比較に関しては、DSM は ASM に比べて吹き出し口近傍でその絶対値が小さく噴流の下流域で大きい。これは $\langle u_1'\theta' \rangle$ についても DSM のほうが移流・拡散項を正確に評価しているためである。図 5-3-12 に ASM との差が最も顕著な移流・拡散項 $-C_{10} + D_{10}$ を示す。但し ASM の場合の移流拡散項は $-C_{10} + D_{10} = -\frac{\langle u_1'\theta' \rangle}{k}(C_k - D_k)$ と近似されている。 $\langle u_1'^2 \rangle$ と同様、ASM に比べて、DSM の結果では $\langle u_1'\theta' \rangle$ の空間的な輸送が吹き出し噴流のかなり下流まで活発に行われていることが示されている。それ故 DSM による $\langle u_1'\theta' \rangle$ の評価は、吹き出し口近傍において ASM による結果より相対的に小さく、下流域で大きくなる。

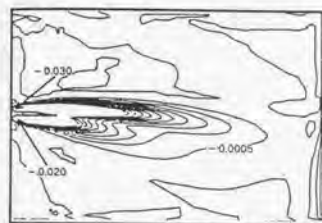


(1-a) $\langle u_1' \theta' \rangle$

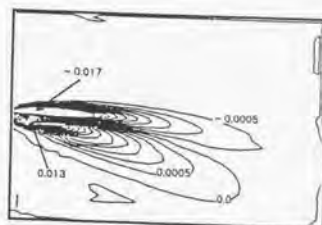


(1-b) $\langle u_3' \theta' \rangle$

(1) DSM



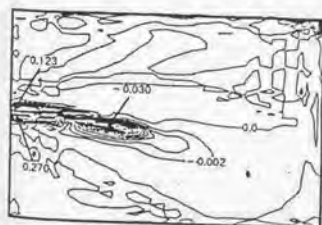
(2-a) $\langle u_1' \theta' \rangle$



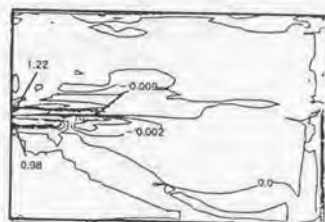
(2-b) $\langle u_3' \theta' \rangle$

(2) ASM

図 5-3-11 $\langle u_i' \theta' \rangle$ の分布の比較 (DSM と ASM, 中心断面)



(1) DSM



(2) ASM

図 5-3-12 $-(C_{10} - D_{10})$ の比較 (中心断面)

5.3.3 まとめ

- ①噴流中の平均風速分布に関しては DSM が最も実験結果によく対応し、次いで ASM がよく、 $k-\epsilon$ が最も対応の悪い結果となった。②平均温度分布に関しては DSM と ASM の結果は $k-\epsilon$ の結果を大きく改善し実験結果に近づく。DSM と ASM ではほとんど差がない。③平均風速並びに平均温度分布に関して DSM と ASM がの結果を大きく改善する理由は、DSM と ASM がレイノルズストレス ($\langle u_i' u_j' \rangle$) や温度フラックス ($\langle u_i' \theta' \rangle$) の生産項を正しく評価するためである。
- ④ともに DSM は ASM より吹き出し口近傍で小さく下流域で大きな値をとる。これは DSM のほうが移流・拡散効果をより正確に評価することに起因している。

5.4 結論

等温・非等温の室内気流に DSM を適用した結果として以下のまとめを示す。

- (1) 室内気流解析において DSM は非常によく実験と対応する結果を示す。全般的にみて $k-\epsilon$ 、ASM よりもよい結果といえる。
- (2) 特に second order の物理量予測において、ASM と同じく生産項を正しく評価するため、 $k-\epsilon$ が評価し得ない stream line curvature の効果を再現する。
- (3) 更に移流の影響が大きい噴流部において DSM は ASM の結果を改善する。これは ASM がストレスやフラックスの移流項を代数近似しているのに対し、DSM は忠実に輸送方程式を解いているためである。
- (4) 但し、室内気流において、1 次の物理量に関しては、 $k-\epsilon$ でもそこそこ妥当な結果をもたらす、全般にこれらのモデル間の差異は、実験値に予想される誤差のオーダーに比して小さいといえる。

注

注 5.1

当初、DSM も $k-\epsilon$ 、ASM と同じ計算条件で計算を行っていたが、衝突噴流域近傍で計算不安定を生じたので、壁面より、第三メッシュまで一次精度風上差分とした。これは上記の領域及び計算条件下での壁面境界条件としての generalized log law の適用が原因であると考えられる。

注 5.2

今回の実験では、 k の測定において 5cm スパンの超音波風速計を用いた。 k の測定値はこのスパン内で平均化されたものである。このスパンは吹き出し口幅 4cm に比べてかなり小さくなるのは上記のことも一因と考えられる。

第六章

建物周辺気流の解析 その1

立方体周辺気流の解析

第6章 建物周辺気流の解析 その1

-立方体周辺気流の解析-

6.1 はじめに

本章では立方体周辺の3次元流れ場を代数応力方程式モデル¹⁾²⁾ (Algebraic Stress Model, 以下ASM) や応力方程式モデル (以下DSM) をはじめとする様々な Second-moment Closure モデルにより解析した結果を示す。立方体等の bluff body まわりの流れ場の特徴は、変形速度テンソルの様々な成分を含み、この値が局所的に大きく変化し、乱れの非等方性が非常に強い点にある。既報では立方体周辺の流れ場について k-ε モデル、Large Eddy Simulation および風洞実験結果を比較した。このような流れ場を等方的な渦粘性の概念 (Eddy Viscosity Model, 以下EVM) に立脚する k-ε³⁾⁴⁾ モデルを用いて解析する場合、種々の問題が発生することは避けられない⁵⁾。一方、Large Eddy Simulation⁶⁾⁷⁾ (以下LES) はその予測精度の高さが知られているが⁵⁾、LES で算出されるデータの膨大さとハンドリングの難しさ、流入境界における速度変動の取り扱い等を考えると、LES の実用問題への適用は容易とは言えないのが現状である。ASM は、等方的な渦粘性の概念に基づいておらず、それに起因するの欠点を大きく改善する一方で、移流・拡散のさかんな領域でレイノルズストレス $\langle u_i' u_j' \rangle$ の輸送方程式の代数化に伴う誤差が生じやすいということも指摘されている⁸⁾。本章では $\langle u_i' u_j' \rangle$ の輸送方程式に代数近似を施さない DSM を立方体周辺の非等方性の顕著な3次元流れ場に適用し、同種の境界条件の下で ASM と LES の解析結果並びに風洞実験結果と詳細に比較する。更に DSM において $\langle u_i' u_j' \rangle$ の輸送方程式中の圧力歪相関項 ϕ_{ij} 、wall reflection 項 ϕ_{ij}^w 、拡散項 D_{ij} 等のモデル化に関して提案されている最新のモデルを使用し、各項のモデリングの差異が解析結果に及ぼす影響についても調べる。尚、以下に示す諸量は立方体高さ H_b と高さ H_b の流入風速 $\langle u_b \rangle$ で無次元化している。

6.2. 風洞実験の概要

模型は一辺 20 cm の立方体。境界層内の風速分布はべき指数 1/4 の指数則に従う。風速の測定にはタンデム型熱線風速計を使用した。模型高さにおける流入風速は約 6 m/s、模型高さ及び流入風速で定義されるレイノルズ数 Re は約 8.4×10^4 となる。

5.3 DSMの基礎方程式 (様々なDSMのモデリング)

高 Reynolds 数に対する $\langle u_i' u_j' \rangle$ の輸送方程式は次のように書くことができる。

$$\frac{D \langle u_i' u_j' \rangle}{Dt} = D_{ij} + P_{ij} + \phi_{ij} - \varepsilon_{ij} \quad (6-1)$$

ここで D_{ij} は $\langle u_i' u_j' \rangle$ の拡散項、 P_{ij} は $\langle u_i' u_j' \rangle$ の生産項、 ϕ_{ij} は圧力歪相関項、 ε_{ij} は散逸項である。 P_{ij} はモデル化を必要としないので、式(6-1)を閉じるためには ϕ_{ij} 、 D_{ij} 及び ε_{ij} のモデル化が必要とされる。これらの各項に対して現在多くのモデルが提唱されている。圧力歪相関項については $\phi_{(1)}$ に対する Rotta モデル^[29] と $\phi_{(2)}$ に対する Quasi Isotropic Model (QIM) や Isotropization of Production Model (IPM) 等の線形モデル^[30] が用いられることが一般的であったが、近年さらに高次の ϕ_{ij} のモデルが Fu-Launder-Tselepidakis^[31] (FLT) や Speziale-Sarkar-Gatski^[32] (SSG) によって提案されている。一方、wall reflection 項のモデル化に関しては、Shir^[33] による $\phi_{ij(1)}^w$ のモデルと Gibson-Launder^[34] (GL) による $\phi_{ij(2)}^w$ のモデルが長い間用いられてきた。しかし、この Gibson-Launder モデルは、impinging 領域で不適当な結果を与えることが明らかとなり^[35]、近年 Craft-Launder が impinging flow においても正しく作用する $\phi_{ij(2)}^w$ のモデル (CL) を提案している^[36]。また、 $\langle u_i' u_j' \rangle$ の輸送方程式中の拡散項 D_{ij} に対しては通常 Daly と Harlow^[37] (DH) による GGDH (General Gradient Diffusion Hypothesis) が広く用いられている。しかし、チャンネル流における $\langle u_i' u_j' \rangle$ の非等方性に関する検討結果によれば Mellor と Herring^[38] によるモデル (MH) のほうが DH よりも正しく再現するという報告もある^[39]。

以下に各項のモデリングについて述べる。

まず ϕ_{ij} のモデル化について述べる。 ϕ_{ij} は

$$\phi_{ij} = \phi_{(1)} + \phi_{(2)} + \phi_{ij(1)}^w + \phi_{ij(2)}^w \quad (6-2)$$

ここで $\phi_{(1)}$ は slow term と呼ばれ、一般に平均速度勾配の影響を含まない項であると考えられ、 $\phi_{(2)}$ は rapid term と呼ばれ、平均速度勾配の影響を含んだ項だと考えられている。また $\phi_{ij(1)}^w$ 、 $\phi_{ij(2)}^w$ はそれぞれ $\phi_{(1)}$ 、 $\phi_{(2)}$ に対する wall reflection の効果による項である。

$\phi_{(1)}$ 、 $\phi_{(2)}$ は $\langle u_i' u_j' \rangle$ のべきによって近似されるとするのが近年の一般的な考え方である。非等方テンソル a_{ij} を用いたとき $\phi_{(1)}$ 、 $\phi_{(2)}$ の a_{ij} の 3 次 (cubic) までの近似の一般形は以下の通りである。

$$\phi_{(1)} = -\alpha_1 \varepsilon a_{ij} - \alpha_2 \varepsilon (a_{ik} a_{kj} - 1/3 a_{kk} \delta_{ij}) \quad (6-3)$$

$$\begin{aligned} \phi_{(2)} = & +\beta_1 k S_{ij} + \beta_2 k (a_{ik} S_{jk} + a_{jk} S_{ik} - 2/3 a_{kk} S_{ij} \delta_{ij}) \\ & + \beta_3 k (a_{ik} \Omega_{jk} + a_{jk} \Omega_{ik}) \\ & + \beta_4 k (a_{im} a_{jk} S_{mk} + a_{jm} a_{ik} S_{mk} - 2/3 a_{im} a_{jk} S_{mk} \delta_{ij}) \\ & + \beta_5 k (a_{im} a_{mk} S_{jk} + a_{jm} a_{mk} S_{ik} - 2/3 a_{im} a_{mk} S_{ij} \delta_{ij}) \\ & + \beta_6 k (a_{im} a_{mk} \Omega_{jk} + a_{jm} a_{mk} \Omega_{ik}) \\ & + \beta_7 k (a_{ik} a_{jm} S_{km} + a_{jk} a_{im} S_{km} - 2/3 a_{ik} a_{jm} S_{km} \delta_{ij}) \\ & + \beta_8 k (a_{ik} a_{jm} a_{lm} S_{jk} + a_{jk} a_{im} a_{lm} S_{ik} - 2/3 a_{ik} a_{jm} a_{lm} S_{ij} \delta_{ij}) \\ & + \beta_9 k (a_{ik} a_{jm} \Omega_{km} + a_{jk} a_{im} \Omega_{km}) \\ & + \beta_{10} k (a_{ik} a_{jm} \Omega_{jk} + a_{jk} a_{im} \Omega_{ik}) \\ & + \{\beta_{11} k a_{ik} S_{jk} + \beta_{12} k a_{ik} a_{jm} S_{lm}\} a_{ij} \\ & + \beta_{13} k a_{ik} S_{jk} (a_{ll} a_{lj} - 1/3 a_{kk} \delta_{ij}) \end{aligned} \quad (6-4)$$

表 6-1 ϕ_{ij} の係数 (式 (6-3), (6-4))

	α_1	α_2	β_1	β_2	β_3	β_4	β_5	β_6	β_7	β_8	β_9	β_{10}	β_{11}	β_{12}	β_{13}
IPM	1.8	0	0.8	0.6	0.6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
QIM	1.8	0	0.8	0.87	0.65	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
SSG	$1.7+0.9P_v/\varepsilon$	-1.05	$0.8-0.65A_2^{1/2}$	0.625	0.2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
FLT	$3.1(A_2A)^{1/2}$	$3.72(A_2A)^{1/2}$	0.8	0.6	$0.87+2FA_2$	-0.2	0.2	0.2	0	0	6F*	0	-0.6	0	0

$$*F=\min\{0.6, A\}$$

但し、 a_{ij} , S_{ij} , Ω_{ij} の定義は記号参照。本報では、4 種類の ϕ_{ij} (ここでは $\phi_{ijk(1)}+\phi_{ijk(2)}$) のモデル (即ち IPM, QIM, SSG 及び FLT) を検討した。これらの 4 種類のモデルに対する定数をまとめて表 6-1 に示す。式(6-3), (6-4)と表 6-1 に示されるように、IPM は $\langle u_i' u_j' \rangle$ に対して線形の近似であり、SSG と FLT はそれぞれ 2 次及び 3 次の近似である。IPM, QIM 及び FLT の計算では通常、wall reflection 項 $\phi_{ij(1)}^w$ 及び $\phi_{ij(2)}^w$ を別途モデル化して計算を行う。一方 SSG ではチャンネル流において wall reflection 項を用いなくとも流れ場の特性を精度よく再現することが確認されている^(2, 3)。本章では $\phi_{ij(1)}^w$ が用いられる場合には、Shir による最も一般的なモデル^(2, 3) を用いる。

$$\phi_{ij(1)}^w = \sum_{n=1}^{w_1} C_1' \frac{\varepsilon}{k} \langle u_k' u_m' \rangle n_k^{(w)} n_m^{(w)} \delta_{ij} - \frac{3}{2} \langle u_k' u_j' \rangle n_k^{(w)} n_j^{(w)} - \frac{2}{3} \langle u_k' u_i' \rangle n_k^{(w)} n_i^{(w)} \frac{k^{3/2}}{C_1' h_n^{(w)} \varepsilon} \quad (6-5)$$

ここで $C_1'=0.5$ 及び $C_2=2.5$ 。

また本章では $\phi_{ij(2)}^w$ が用いられる場合には、Graft-Laundier によるモデル^(2, 6) を用いる。但し SSG は wall reflection 項を用いない形でモデル化されているので、SSG を用いる場合には $\phi_{ij(2)}^w$ は含まない (表 6-2 CASE2-2)。

$$\begin{aligned} \phi_{ij(2)}^w = & \sum_{n=1}^{w_2} C_2' \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_n} \langle u_j' u_m' \rangle (\delta_{ij} - 3n_i^{(w)} n_j^{(w)}) \\ & + C_3' k a_{ijn} \left(\frac{\partial \langle u_k \rangle}{\partial x_j} \cdot n_k^{(w)} \cdot n_m^{(w)} \cdot \delta_{ij} - \frac{3}{2} \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_j} \cdot n_k^{(w)} \cdot n_j^{(w)} - \frac{3}{2} \frac{\partial \langle u_j \rangle}{\partial x_i} \cdot n_k^{(w)} \cdot n_i^{(w)} \right) \\ & + C_4' k \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_n} \cdot n_i^{(w)} \cdot n_m^{(w)} (n_j^{(w)} - \frac{1}{3} \delta_{ij}) \frac{k^{3/2}}{C_1' h_n^{(w)} \varepsilon} \end{aligned} \quad (6-6)$$

ここで、 $C_3'=-0.08$, $C_4'=-0.1$ 及び $C_4'=-0.4$ 。

2 種類の拡散項モデル、DH (Daly and Harlow model) と MH (Mellor and Herring model) は以下のよう表せる。

$$DH; D_{ij} = \frac{\partial}{\partial x_m} (C_k \langle u_m' u_j' \rangle \frac{k}{\varepsilon} \frac{\partial \langle u_i' u_j' \rangle}{\partial x_i}) \quad (6-7)$$

MH;

$$D_{ij} = \frac{\partial}{\partial x_m} C_{k1} \frac{k^2}{\varepsilon} \left(\frac{\partial \langle u_i' u_j' \rangle}{\partial x_m} + \frac{\partial \langle u_m' u_j' \rangle}{\partial x_i} + \frac{\partial \langle u_i' u_m' \rangle}{\partial x_j} \right) \quad (6-8)$$

ここで $C_k=0.22$ 及び $C_{k1}=0.072$ 。

上記の方程式群は、(6-9)式と ε 輸送方程式によって閉じられる。

$$\varepsilon_{ij} = \frac{2}{3} \varepsilon \delta_{ij} \quad (6-9)$$

$$\frac{D\varepsilon}{Dt} = D_\varepsilon + \frac{\varepsilon}{k} (C_{\varepsilon 1} P_k - C_{\varepsilon 2} \varepsilon) \quad (6-10)$$

ここで $C_{\varepsilon 1}=0.16$, $C_{\varepsilon 2}=1.44$ 及び $C_{\varepsilon 3}=1.92$ 。

6.4 数値計算の概要

6.4.1 計算ケース

計算ケースを表 6-2 に示す。表 6-2 に示す計算ケースは 4 つの Phase に分類される。Phase 1 では ASM と標準型の DSM との比較を行い、 $\langle u_i' u_j' \rangle$ の輸送方程式の移流・拡散項の代数近似の問題について検討する。Phase 2 では wall reflection 項 ϕ_w^* の取り扱いについて検討する。CASE 2-1 と CASE 2-2 を除くすべての DSM は $\phi_{(12)}$ に Craft と Launder (CL) によるモデルを用いている。CASE 2-1 において $\phi_{(12)}$ が含まれていないのは、impinging flow における CL の $\phi_{(12)}$ の効果を検証するためである。Phase 3 では圧力垂相関項の ϕ_p のモデル化について、また、Phase 4 では拡散項 D_{ij} について各々検討する。なお本章で用いた ASM は Rodi による $\langle u_i' u_j' \rangle$ の輸送方程式の代数近似^{(6) (1)}を使用した。尚、LES は通例の Smagorinsky モデルを用い、Smagorinsky 定数 C_s は 0.12 とした。

表 6-2 DSM の計算ケース

Phase	計算ケース	モデル	$\phi_{(1)}$	$\phi_{(2)}$	$\phi_{(1)}^*$	$\phi_{(2)}^*$	D_{ij}	備考
Phase 1	CASE 1-1	ASM	Rotta	IPM	Shir	なし	なし	移流・拡散
	CASE 1-2	DSM	Rotta	IPM	Shir	なし	DH	効果の検討
Phase 2	CASE 2-1	DSM	Rotta	IPM	Shir	CL	DH	ϕ_w^* の
	CASE 2-2	DSM	Rotta	IPM	なし	CL	DH	比較
Phase 3	CASE 3-1	DSM	Rotta	QIM	Shir	CL	DH	ϕ_p の
	CASE 3-2	DSM	SSG		なし		DH	比較
	CASE 3-3	DSM	FLT		Shir	CL	DH	
Phase 4	CASE 4	DSM	Rotta	IPM	Shir	CL	MH	D_{ij} の比較

Rotta : Rotta model (式 (6-3))

IPM : Isotropization of Production model (式 (6-4))

QIM : Quasi Isotropic Model (式 (6-4))

SSG : Speziale, Sarker and Gatski model (式 (6-4))

FLT : Fu, Launder and Tselepidakis model (式 (6-4))

Shir : Shir model (式 (6-5))

CL : Craft and Launder model (式 (6-6))

DH : Daly and Harlow model (式 (6-7))

MH : Mellor and Herring model (式 (6-8))

6.4.2 計算領域

4 モデルともに $15.7(x_1) \times 9.7(x_2) \times 5.2(x_3)$ 。 x_2 , x_3 方向の計算領域の広さは風洞実験とはほぼ対応している。

6.4.3 メッシュ分割

上記の計算領域に対して k-ε モデル、ASM、DSM は $50(x_1) \times 49(x_2) \times 28(x_3) = 68600$ メッシュ、LES は $63(x_1) \times 49(x_2) \times 34(x_3) = 104958$ メッシュの分割を行った。但し、立方体コーナー部に接するメッシュ幅 h_p は 4 モデルともに $1/24$ である。

6.4.4 境界条件 (表 6-3)

LES の解析では別途チャンネル流を利用した境界層流の計算を行い、この結果をべき指数 $1/4$ の指数則 (風洞実験における平均風速分布) に正確に従うように調整し、その結果得られた各時刻の風速分布を非定常な流入条件として使用した^{2,2)}。ASM, DSM の流入の $k(x_3)$ は LES によるチャンネル流の計算結果 (図 6-1) を使用した。風洞実験値ではなく、LES の値としたのは、ASM, DSM と LES で流入の $k(x_3)$ を全く同一とした上で比較検討するためである。チャンネル流の計算より得られた k の鉛直分布はほぼ風洞実験と対応している (図 6-1)。DSM の場合、流入のノルマルストレスについては風洞実験に従い配分した。壁面境界条件は 4 モデルともに generalized log law より $\langle \tau_w \rangle$ を与えた⁹⁾。LES の場合、さらに、表 6-3 ④式にこの $\langle \tau_w \rangle$ を代入し、各時刻の τ_w を算出し²⁰⁾、これを境界条件として与えた。

6.4.5 差分スキーム

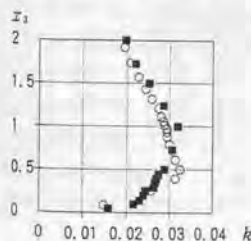
ASM と LES には時間差分に Adams-Bashforth、空間差分には 2 次精度中心差分を使用した。ただし、DSM には一次精度の Full Implicit 型時間スキームを用いた²³⁾。又、ASM, DSM の運動方程式及び、ASM の k, ε 輸送方程式の移流項には QUICK スキームを使用した²⁴⁾。又、DSM の $\langle u_i' u_j' \rangle$ 、 ε 輸送方程式の移流項についても QUICK スキームを用いた。

Re 数は実験と同様に 8.4×10^4 。境界条件を表 6-3 に示す。また DSM の時間差分スキームは一次精度の Full Implicit 型時間スキームを使用。比較に用いた LES の詳細については文 1) 参照。

表 6-3 境界条件

	ASM, DSM ²³⁾	LES
流入面	$\langle u_i(x_3) \rangle$: 風洞実験値 (べき指数 $1/4$ の指数分布) $\langle u_i(x_3) \rangle = 0, \langle u_j(x_3) \rangle = 0$ $k(x_3)$ はチャンネルの結果 (風洞実験とほぼ対応 (図 1)) $\nu_j(x_3) = k(x_3)^{1/4} \varepsilon(x_3), \varepsilon(x_3) = C_\mu k(x_3)^{3/2} / \ell(x_3)$ $\ell(x_3) = (C_\mu k(x_3))^{1/4} (\partial \langle u_i(x_3) \rangle / \partial x_3)^{-1/4} (P_k(x_3) = \varepsilon(x_3))$ $\langle u_i'^2(x_3) \rangle = \langle u_j'^2(x_3) \rangle = \langle u_k'^2(x_3) \rangle = 3/5 k(x_3)$	$\overline{u_{i3}}, \overline{u_{j3}}, \overline{u_{k3}}$: 各時刻のチャンネルの結果 (注 2)
流出面	$\langle u_i \rangle, \langle u_j \rangle, \langle u_k \rangle, k, \varepsilon; \partial / \partial x_1 = 0$	$\overline{u_{i3}}, \overline{u_{j3}}, \overline{u_{k3}}; \partial / \partial x_1 = 0$
上空面	$\langle u_i \rangle = 0, \langle u_j \rangle, \langle u_k \rangle, k, \varepsilon; \partial / \partial x_3 = 0$	$\overline{u_{i3}} = 0, \overline{u_{j3}}, \overline{u_{k3}}; \partial / \partial x_3 = 0$
側面	$\langle u_i \rangle = 0, \langle u_j \rangle, \langle u_k \rangle, k, \varepsilon; \partial / \partial x_2 = 0$	$\overline{u_{i3}} = 0, \overline{u_{j3}}, \overline{u_{k3}}; \partial / \partial x_2 = 0$
床面, 立方体, 壁面	壁面上のシアーストレス $\langle \tau_w \rangle$ は (1) 式, k 方程式中の壁面第一セルの $\varepsilon(\varepsilon_p)$ は (2) 式, k 方程式中の壁面第一セルの $\varepsilon(\varepsilon_p)$ は (3) 式で与える。 $\frac{\langle u_i \rangle_p}{\langle \tau_w \rangle} = \frac{C_\mu^{3/4} k_p^{1/2}}{E \cdot h_p \ln \left(\frac{E \cdot h_p (C_\mu^{1/4} k_p)^{1/4}}{\nu} \right)} \dots (1)$ $\varepsilon = \frac{C_\mu^{3/4} k_p^{3/2}}{K h_p \ln \left(\frac{E \cdot h_p (C_\mu^{1/4} k_p)^{1/4}}{\nu} \right)} \dots (2)$ $\varepsilon_p = \frac{C_\mu^{3/4} k_p^{3/2}}{1/5 K h_p} \dots (3) \quad k: \partial / \partial x_1 = 0$ $C_\mu = 0.09, \kappa = 0.4, E = 9.0$	$\tau_w = \langle \tau_w \rangle \times \frac{\langle \overline{u_i} \rangle_p}{\langle \overline{u_i} \rangle_p}$ $\dots (4)$ ここで、 $\langle \tau_w \rangle$ はその時刻以前の LES の結果より算出した $\langle u_i \rangle_p, k_p$ を用いて (1) 式より与える。

※ DSM の場合、流入面のノルマルストレスについては風洞実験に従い配分した。
又、床面、壁面のノルマルストレスの法線方向の勾配については 0 とした。



○ ASM, DSM
(LES による
チャンネル流の結果)

■ 風洞実験

図 6-1 流入境界における $k(x_3)$

6.5 計算結果

DSMの結果は全てのケースにおいて周期的な速度変動が立方体後方で確認されている。従って以下のDSMの結果については、周期的変動一周分分の時間平均を施して、周期的変動成分を通常の乱流変動成分に加えて掲載する²⁵⁾。

6.5.1 平均風速ベクトル (表 6-4、図 6-3)

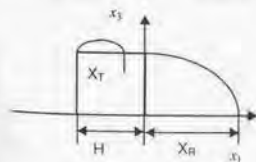
既往の研究⁵⁾で指摘した様に、LESの平均風速ベクトルは屋上面逆流の再付着距離 (図 6-2 X_T)、立方体後方循環流の再付着 (図 6-2 X_R) など風洞実験とかなりよい一致を示す (表 6-4、図 6-3 (2))。ASMは X_T 、 X_R をとやや大きめに予測する。これに対し、すべてのDSMの計算ケースは立方体後方循環流の大きさ X_R をかなり大きめに評価する (表 6-4、図 6-3 (3))。また $\phi_{y(1)}$ を無視したDSM CASE 2-2を除き、DSMでは風上コーナーで剥離した流れが屋上面で再付着せず、実験やLESに比べて、屋上面の逆流域が非常に大きくなる (表 6-4、図 6-3 (4))。CASE 2-2で再付着がでた理由については6.4.3節で詳述する。

表 6-4 再付着距離: X_T , X_R

(normalized by H)

	X_T	X_R
experiment	0.7	1.2
LES	0.6	1.4
ASM CASE 1-1	0.9	1.5
DSM CASE 1-2	>1.0*	2.0
DSM CASE 2-1	>1.0*	2.3
DSM CASE 2-2	0.5	2.0
DSM CASE 3-1	>1.0*	2.0
DSM CASE 3-2	>1.0*	2.1
DSM CASE 3-3	>1.0*	2.1
DSM CASE 4	>1.0*	1.9

*>1.0は再付着しないことを表す。



X_T は屋上面逆流の再付着点距離

X_R は立方体後方循環流の再付着点距離

図 6-2 再付着距離 X_T と X_R の定義

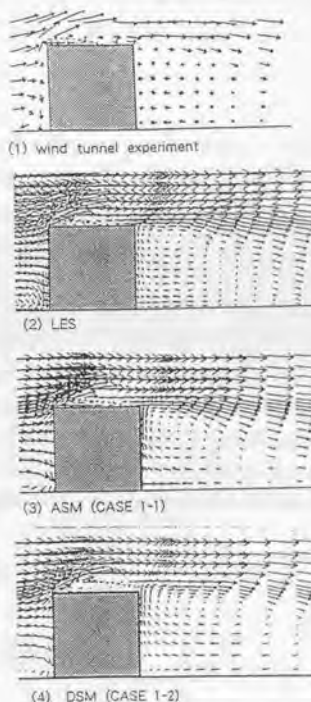


図 6-3 平均風速ベクトル

6.5.2 ASM と DSM の比較 - 移流・拡散項の代数近似の影響 - (Phase 1)

図 6-4 に立方体風上コーナー上方におけるノルマルストレスの 3 成分の和 ($2k$) に対する各成分の割合を示す。LES、DSM CASE1-2 の結果 (図 6-4 (4), (3)) は非等方的特徴をよく再現しているのに対して、ASM の結果 (図 6-4 (2)) は風上コーナー付近の速度勾配の大きい領域で各成分ともに実験にみられない異状な分布を示している。すなわち、実験や LES、DSM CASE1-2 では立方体風上コーナー上方では全般的に $\langle u_1'^2 \rangle > \langle u_3'^2 \rangle$ (図 6-4 (1), (3), (4)) であるのに対し、ASM の $\langle u_1'^2 \rangle$ や $\langle u_3'^2 \rangle$ の分布には実験にはみられない極小値、極大値が現れ (図 6-4 (2))、 $\langle u_1'^2 \rangle$ は $\langle u_3'^2 \rangle$ よりも小さくなっている。

DSM が ASM に比べノルマルストレスの分布性状を正しく改善する理由は次に示すように DSM が ASM に比べ、移流・拡散項をより正確に評価していることによるものと判断される。

次に、ノルマルストレス輸送方程式中の移流・拡散項、生産項の大きさを LES の計算で得られたデータを用いて定義通りに評価した結果と、LES のデータから ASM で用いられている Rodi のモデルによる近似 ($-\frac{\langle u_i' u_j' \rangle}{k} (P_k - \epsilon)$) で評価した結果を示す。また DSM の計算で得られた移流・拡散項も含めて示し、 $\langle u_i' u_j' \rangle$ 輸送方程式の移流・拡散項を代数化することの妥当性について検討する。尚、ASM での移流・拡散項は、右辺に移項した形 ($-(C_{ij} - D_{ij}) = \frac{\langle u_i' u_j' \rangle}{k} (P_k - \epsilon)$) で評価する。

図 6-5 に、DSM と ASM の $\langle u_i' u_j' \rangle$ の非等方性の差異が最も顕著であった立方体コーナー上方の領域における $\langle u_3'^2 \rangle$ 方程式の各項を示す。この領域では、ASM で用いられる $-(C_{33} - D_{33})$ のモデル $-\frac{\langle u_3'^2 \rangle}{k} (P_k - \epsilon)$ (図 6-5 X) は本来の $-(C_{33} - D_{33})$ (図 6-5 O) より絶対値がかなり小さくなっていることがわかる。コーナー部上方では生産項 P_{33} が正のピーク値を示しているが (図 6-5 Δ)、

$-\frac{\langle u_3'^2 \rangle}{k} (P_k - \epsilon)$ (図 6-5 X) の値が極めて過小となっている。このため ASM の場合、ここで生産された大きな $\langle u_3'^2 \rangle$ を上方や風下側に輸送し、この領域の $\langle u_3'^2 \rangle$ を減少させるという移流・拡散項の本来の役割が十分評価されず、ASM では P_{33} の大きな値がそのまま $\langle u_3'^2 \rangle$ の分布に反映し、実験や LES に比べて過大となっているものと推察される (図 6-4 (2))。一方、DSM の結果 (図 6-5 ■) は LES (図 6-5 O) に比べてその絶対値は小さいものの、ASM に比べると移流・拡散の効果を定性的には正しく再現しており、前述のようにこの部分のノルマルストレスの分布は ASM に比べてかなり改善され、 $\langle u_1'^2 \rangle$ 、 $\langle u_3'^2 \rangle$ の異常なピーク値は解消している (図 6-4 (3))。

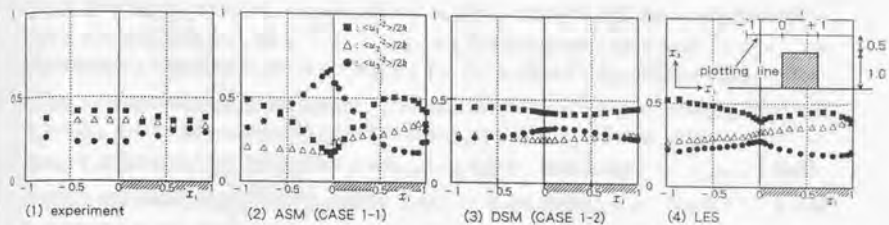
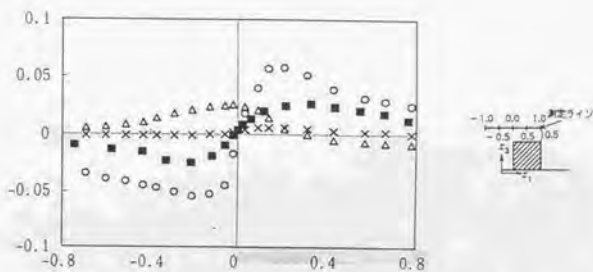


図 6-5 $\langle u_1'^2 \rangle / 2k, \langle u_2'^2 \rangle / 2k, \langle u_3'^2 \rangle / 2k$ (立方体上方)



○ : 定常通りの $-(C_M - D_M)$ の評価 (LESの結果から算出)

$$-\frac{\partial}{\partial x_i} (\langle u_i' u_3'^2 \rangle + 2 \langle \rho' u_3' \rangle \delta_{3i} + \langle u_i' \rangle \langle u_3'^2 \rangle)$$

■ : DSM の計算で得られた $-(C_M - D_M)$

× : ASM における Rodi モデルの評価 (LESの結果から算出)

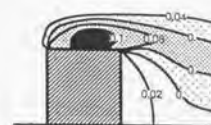
$$-\frac{\langle u_3'^2 \rangle}{R} (P_1 - \epsilon)$$

△ : P_{33} の評価 (LESの結果から算出)

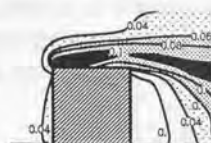
図 6-6 $\langle u_3'^2 \rangle$ 方程式の移流・拡散項の比較 (立方体上方)

6.5.3 wall refraction 項のモデル化の影響³⁶⁾ (Phase 2)

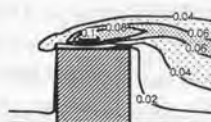
図 6-6 に k の分布を示す。 $\phi_{(2)}^w$ を無視した DSM CASE 1-2 の結果は風洞実験、LES、DSM CASE 2-1 ($\phi_{(2)}^w$ に C L 使用) に比べて風上コーナー周辺で大きめの k の値を示す。LES と DSM CASE 2-1 の場合、立方体前面で P_k が負となっているが (図 6-7 (1), (2))、DSM の CASE 1-2 はこの前面の領域における P_k の負値が現れない (図 6-7 (3))。図 6-7 と図 6-6 を比べると DSM CASE 1-2 では、この前面の領域で k の値が実験や LES よりやや過大となっている。従って、 $\phi_{(2)}^w$ の影響を考慮していない CASE 1-2 の場合の前面の P_k の過大評価が、この領域において k が過大となることの主要な要因と考えられる。この CASE 1-2 の P_k の過大評価の原因は $\phi_{(2)}^w$ を 0 としたことと密接に関連している³⁷⁾。図 6-8 に立方体前面における非等方パラメータ $\langle u_i'^2 \rangle / 2k$ を示す。DSM CASE 1-1 ($\phi_{(2)}^w$ に C L 使用) では立方体前面において急激に $\langle u_i'^2 \rangle$ が減衰しており、これは風洞実験とよい一致を示す。これに対して CASE 1-2 では、 $\langle u_i'^2 \rangle$ が他のノルマルストレスに比べて大きなままである。これは CASE 1-2 では $\phi_{(2)}^w$ を 0 としたことにより、壁に垂直方向のノルマルストレスの減衰及びそれ以外の方向のノルマルストレスへのエネルギーの再配分が不十分になったためであると考えられる³⁸⁾。また $\phi_{(2)}^w$ のみを残し $\phi_{(1)}^w$ を 0 としたケース (CASE 2-2) では屋上面の再付着が再現されているが (表 6-4、図 6-3 (4))、これは $\phi_{(1)}^w$ を省略したことによりシアストレスのレベルが変化したことによるものと推定される³⁹⁾。



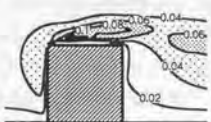
(1) 風洞実験



(2) LES

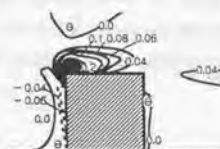


(3) DSM CASE 2-1

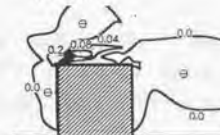


(4) DSM CASE 1-2

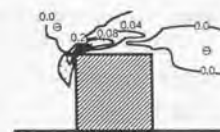
図 6-6 k の分布 (建物中心断面)



(1) LES

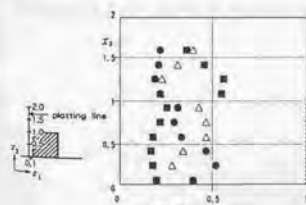


(2) DSM CASE 2-1

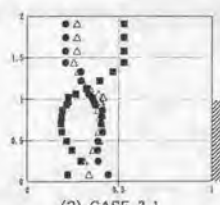


(3) DSM CASE 1-2

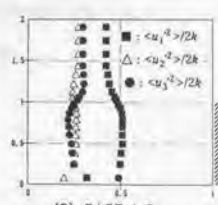
図 6-7 P_k の分布
(建物中心断面, Θ は負)



(1) Experiment



(2) CASE 2-1



(3) CASE 1-2

図 6-8 $\langle u_1^2 \rangle / 2k, \langle u_2^2 \rangle / 2k, \langle u_3^2 \rangle / 2k$ (立方体前面)

6.5.4 ϕ_{ij} のモデル化の影響 (ここでは $\phi_{(X1)} + \phi_{(X2)}$) (Phase 3)

表 6-4 に示すように再付着距離 X_T と X_R に関して、CASE 3-1 (QIM)、CASE 3-2 (SSG)、CASE 3-3 (FLT) は ϕ_{ij} の標準モデルである IPM の結果に含まれる問題点をなんら改善しなかった。即ち SSG と FLT は立方体後方循環流の大きさがかなり大きなままであり、屋上面再付着は一切再現されない。また、QIM (CASE 3-1) は IPM (CASE 2-1) と比べて殆ど差はみられない。

6.5.5 D_{ij} のモデル化の影響 (Phase 4)

CASE 4 では $\langle u_i' u_j' \rangle$ の輸送方程式中の拡散項に MH (Mellor - Herring) を用いた。図 6-9 は立方体後方における $\langle u_i' u_j' \rangle / 2k$ の分布を示している。MH の結果 (図 6-9 (4)) は DH (図 6-9 (3)) に比べて、立方体後方循環流内における $\langle u_i' u_j' \rangle$ の非等方性をよく再現しており、実験とよい一致を示す。図 6-10 は立方体後方における $\langle u_1'^2 \rangle$ と $\langle u_2'^2 \rangle$ の乱流拡散項の x_2 -成分 (それぞれ $D_{11}(x_2)$ 及び $D_{22}(x_2)$ と表記する) の分布を示す。図 7 の $D_{11}(x_2)$ と $D_{22}(x_2)$ は CASE 2-1 で得られた平均風速や $\langle u_i' u_j' \rangle$ の時間平均値を用いて DH と MH の各モデル (式(6-7), (6-8)) より算出したものである。MH の場合の $D_{11}(x_2)$ と $D_{22}(x_2)$ を CASE 4 でなく CASE 2-1 の結果から算出したのは、MH を用いた CASE 3 と DH を用いた CASE 1-1 では $\langle u_i' u_j' \rangle$ の分布に差が見られたので (図 6-9、図 6-11)、各々の結果を用いて拡散項を比較してもモデルの違いが直接的には比較できないためである。図 6-10 では MH の場合の D_{ij} も CASE 2-1 (DH) の結果より評価し、同一の平均風速、 $\langle u_i' u_j' \rangle$ の分布を用いた時に現れる両モデルの差を調べた。DH (GGDH) (図 6-10 (1)) の結果では、立方体背面コーナー ($x_2 \pm 0.8$) の後方の free shear layer で $D_{11}(x_2)$ は大きな負値を示す。またこの領域では $\langle u_1'^2 \rangle$ は、図 6-11 (1) に示すように大きな値を示す。このことはこの領域における $\langle u_1'^2 \rangle$ の大きな値が $D_{11}(x_2)$ によって循環流の中心方向に輸送されていることを示している。即ち DH で与えられた $D_{11}(x_2)$ は中心線近く ($x_2 \sim 0$) で正の値を示し (図 6-10 (1))、 $\langle u_1'^2 \rangle$ は MH の場合に比べて $x_2 \sim 0$ 付近で大きくなる (図 6-11)。MH の結果では、free shear layer ($x_2 \pm 0.8$) における $D_{11}(x_2)$ の負の絶対値は $D_{22}(x_2)$ の負の絶対値よりも小さい。また中心線近く ($x_2 \sim 0$) においても $D_{11}(x_2)$ の正の絶対値は $D_{22}(x_2)$ の正の絶対値よりも小さい (図 6-10 (2))。従って CASE 4 のほうが CASE 2-1 より立方体後方循環流内で $\langle u_2'^2 \rangle$ が $\langle u_1'^2 \rangle$ に比べて相対的に大きく、レイノルズ応力の非等方性をよく再現する結果となっている。この原因は MH と DH のモデルの差によるものであり、MH のモデルのほうが DH モデルに比べて妥当であるためと考えられる⁽³¹⁰⁾。

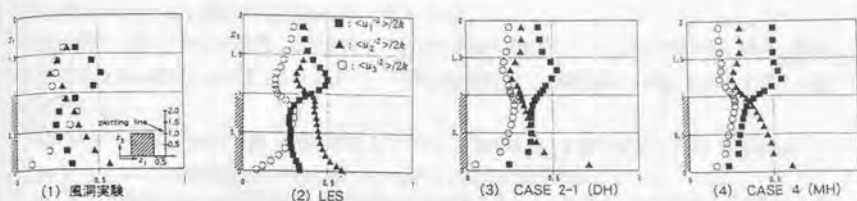


図 6-9 $\langle u_i'^2 \rangle / 2k$ の分布 (立方体後方循環流内)

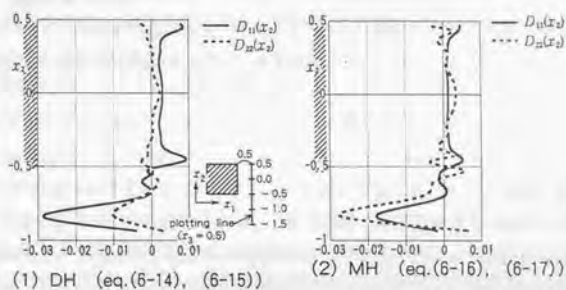


図 6-10 $D_{11}(x_2), D_{22}(x_2)$ の水平分布 (立方体後方)

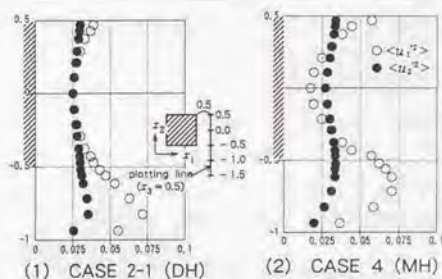


図 6-11 $\langle u_1'^2 \rangle, \langle u_2'^2 \rangle$ の水平分布 (立方体後方)

6.6 結論

本報では、境界層流中におかれた立方体周辺気流を現在提案されている種々の DSM で解析を行い、その結果を比較した。得られた結論は以下の通りである。

(1) ASM (CASE 1-1) の場合、立方体風上コーナー上方の $\langle u_1'^2 \rangle$ 、 $\langle u_3'^2 \rangle$ の分布等、移流・拡散の影響の大きい領域におけるノルマルストレスの分布に関しては風洞実験、LES と大きく異なる傾向を示した。

(2) 一方、DSM (CASE 1-2) は立方体風上コーナー上方の移流・拡散の影響の大きい領域におけるノルマルストレスの非等方性の再現に関して ASM の欠陥を大きく改善している。

(3) $\phi_{(2)}^*$ を無視した DSM CASE 1-2 の結果は立方体風上コーナー周辺の k の値を過大に評価する傾向がある。

(4) $\phi_{(2)}^*$ に Craft-Launder のモデルを組み込んだ DSM CASE 2-1 の計算結果では立方体前面の k の過大評価は著しく改善されている。

(5) Shir の $\phi_{(1)}^*$ のモデルを組み込んだ全てのケースの DSM の結果において風洞実験及び LES の結果に見られた屋上面再付着が全く再現されず、これを無視したケース (CASE 2-2) のみが屋上面付着を再現した。この原因の一つとして、 $\phi_{(1)}^*$ の有無により立方体コーナー周辺でシアストレスのレベルが変化することが考えられる。 $\phi_{(1)}^*$ のモデル化に関しては今後、さらに検討が必要である。

(6) Mellor と Herring によって提案された拡散項のモデル化 (MH) は Daly と Harlow (DH) による GGDH に比べて立方体後方循環流における $\langle u_i' u_j' \rangle$ の非等方性をより正しく再現する。

(7) 今回行った全ての DSM の解析結果において立方体後方循環流がかなり大きく評価される傾向にあり、 ϕ_0 に高次モデルを用いた場合にもこの傾向は全く改善されなかった。これは ϕ_0 の高次モデルが、単純剪断流や平板乱流など比較的単純な流れ場を対象にモデル化・係数チューニングされたためであると考ええる。本研究で示したような複雑流れ場に適用可能な DSM の開発のためには、今後詳細な LES や DNS 等による複雑乱流場におけるモデル検証用のデータの整備が望まれる^{注11)}。

注1) 本報のASMではRodiによるモデル(文献6)を使用し、 $\langle u_i' u_j' \rangle$ 輸送方程式中の移流項 C_{ij} と拡散項 D_{ij} をまとめて次式のように近似する。

$$C_{ij} - D_{ij} = \frac{\langle u_i' u_j' \rangle}{k} (C_k - D_k) = \frac{\langle u_i' u_j' \rangle}{k} (P_k - \varepsilon) =$$

ここで C_k 、 D_k は k の輸送方程式の移流項、拡散項である。

注2) LESによるチャンネル流を利用した境界層流作成の概要を以下に記す。本文と表記を統一するため、本注も $H_b, \langle u_b \rangle$ で無次元化した量で説明する。

(1) 解析領域: $6D(x_1) \times 3D(x_2) \times 2D(x_3)$ (但し、 D はチャンネル半幅)。

(2) メッシュ分割: $32(x_1) \times 32(x_2) \times 42(x_3) = 43008$ 。

(3) 境界条件:

① 流入・流出 (x_1 方向)、横方向 (x_2 方向): 周期境界条件 (但し、 x_1 方向には $\frac{\partial \langle \bar{p} \rangle}{\partial x_1} = -\frac{\langle \tau_w \rangle}{D}$ を課す。)

② 壁面境界条件:

$$\tau_w = \langle \tau_w \rangle \times \frac{\langle \bar{u}_t \rangle_p}{\langle \bar{u}_t \rangle_p} \quad (\text{表2(4)式})。但し、\langle \tau_w \rangle \text{は風洞内風速分布を対数速度分布にあて}$$

はめて推定。

(4) 壁面摩擦速度とチャンネル半幅から定義されるレイノルズ数 Re, τ は 5.6×10^4 。 D は立方体高さ H_b の5倍($D=5$)と仮定し、風洞実験における模型高さの流入風速と壁面摩擦速度の関係($\langle u_* \rangle = \langle u_b \rangle$ の約13% ($\langle u_* \rangle = 0.13$))を用いて、この Re, τ の値を Re に換算すると、風洞実験における Re の値(8.4×10^4)と対応する。

(5) 以上より得られた流れ場の平均風速プロファイルは $0.5 < x_3$ の範囲でほぼ実験(べき指数1/4の指数分布)と一致し、0.5以下では、多少低めの値を示す(図6-1参照)。

本研究で示すLESによる立方体周辺気流の計算では、各タイムステップで必要とされる非定常な流入境界条件として、各タイムステップのチャンネル流の結果を用いているが、高さ0.5以下でもべき指数1/4の指数分布と正確に一致するように流入風速を多少調整している。この操作は、連続式及び運動方程式を厳密に満足させた流入境界条件を与えるという観点からは多少の問題が残ると思われる。しかし、本研究では、風洞実験結果と詳細に比較するために、流入境界条件に関するLESと風洞実験との厳密な一致という点を優先的な条件とした。この取り扱いによる流入風速の補正量はかなり小さく、解の収束性への影響はほとんど認められない。LESの解析で必要となる非定常な流入風の人工的な作成に関しては現在検討中である^{20) 21)}。

注3) RANSモデルのような元々定常計算を目的としたモデルでは、Full Implicit型の時間スキームの数値粘性について、Kato & Launder²²⁾はより高次のCrank-Nicolson型時間スキームとの比較を行ったが、ほとんど差異はなかったと報告している。

注4) 計算の初期ではASM, DSMの運動方程式も中心差分としていたが、無視し得ぬ空間振動が発生したために、QUICKに変更した。

注5) DSMの結果は2次元角柱^{2.3)}の計算と同様、全てのケースにおいて周期的(periodic)な速度変動が立方体後方で確認されている。以下のDSMの乱流統計量の結果については、周期的定常に達した後、この周期的(periodic)変動成分の一周期分を採取し、周期的変動成分を乱流(stochastic)変動成分に加えたtotalな成分を時間平均して表示している。すなわち、本来DSMで用いるアンサンブル平均は、乱流(stochastic)変動に対する平均を意味しており、いわゆる時間平均とは区別すべきものであるが、ここでは周期的変動成分を含めた時間平均を用いて、すべての乱流統計量を算出している。但し本解析の場合、例えばDSMの乱れエネルギーの周期的変動成分の全変動成分に占める割合は立方体後方において最大2割程度である等の他は総じて小さかった。

注6) 最近のチャンネル流DNSデータベース等を参考にすると、これらのwall reflection項が本来のwall reflectionの効果のみをモデル化したものではなく、 $\phi_{(k1)}$ に対するRottaの近似や $\phi_{(k2)}$ に対するIPMやQIM等の近似と一体化してモデル化されているものと考えられる。将来的に $\phi_{(k1)}$ や $\phi_{(k2)}$ が高精度で近似されるようになれば現在のwall reflection項は大きくその形を変えることが予想される。

注7) 中心断面の P_k は流れの対称性から次式で表される。

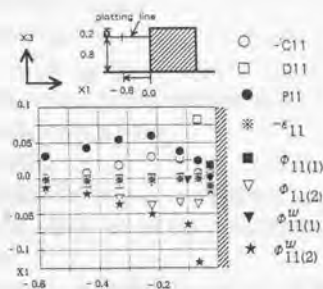
$$P_k \equiv -(\langle u_1'^2 \rangle - \langle u_3'^2 \rangle) \frac{\partial \langle u_1 \rangle}{\partial x_1} - \langle u_1' u_3' \rangle \left(\frac{\partial \langle u_1 \rangle}{\partial x_3} + \frac{\partial \langle u_3 \rangle}{\partial x_1} \right) \quad (6-11)$$

$P_{k,n}$

$P_{k,s}$

ここで $P_{k,n}$ は P_k 中のノルマルストレスに係わる成分、 $P_{k,s}$ はシアストレスに係わる成分である。風洞実験、DSM CASE 2-1(:CL)では風上壁面近傍では後述するように $\langle u_1'^2 \rangle < \langle u_3'^2 \rangle$ となる(図6-8(1)、(2))。これに対してDSM CASE 1-2では逆に $\langle u_1'^2 \rangle > \langle u_3'^2 \rangle$ となっており(図6-8(3))、かつこの領域では $\partial \langle u_1 \rangle / \partial x_1 < 0$ であるから、 $P_{k,n}$ はDSM CASE 2-1では負、CASE 1-2では正である。この影響がDSM CASE 1-2による立方体前面の P_k の過大評価に反映されたものと考えられる。DSM CASE 1-2においてノルマルストレス $\langle u_1'^2 \rangle$ と $\langle u_3'^2 \rangle$ の大きさが風洞実験やDSM CASE 1-1と比べて逆転することの主因の一つとして、ここに示したDSM CASE 1-2の計算においてwall reflection項中のrapid項に対応する項 $\phi_{(k2)}^*$ を0としたことが考えられる。即ちCASE 1-2では壁に垂直方向のノルマルストレスの減衰及びそれ以外の方向へのノルマルストレスへのエネルギーの再配分が不十分になったものであると考えられる。Craft-Launderson^{2.9)}による $\phi_{(k2)}^*$ を組み込んだDSM CASE 2-1では立方体前面における k の過大評価が著しく改善されている。図6-8(2)に示す様にDSM CASE 2-1では立方体前面において急激に $\langle u_1'^2 \rangle$ が減衰しており、立方体前面におけるノルマルストレスの再配分がうまく行われているといえる。従ってDSM CASE 2-1では $P_{k,n}$ の過大評価が改善されている。

注8) 補図に立方体前方における $\langle u_1'^2 \rangle$ の輸送方程式の各項の収支を示す。全般に他の項と比較して $\phi_{(k2)}^*$ (図中の★)は無視し得ぬ程大きな負値を示し、 $\langle u_1'^2 \rangle$ を減少させる方向に寄与している。この



補図1 $\langle u_1'^2 \rangle$ 輸送方程式の各項の収支

結果、図6-8に示すようにDSM CASE 2-1では、LESと同様、立方体前面で急激に $\langle u_1'^2 \rangle$ 成分が減衰している。これはCASE 2-1では $\phi_{(12)}^w$ によるノルマルストレスの再分配が十分に行われていることを意味しており、DSM CASE 2-1の場合、LESと同じく立方体前面近傍で $\langle u_1'^2 \rangle < \langle u_3'^2 \rangle$ となる。これにより、 k の生産項の P_k のノルマルストレスによる成分は負となり、これがこの領域での P_k の負値をもたらす。一方DSM CASE 2-2 ($\phi_{(12)}^w = 0$)の場合、 $\langle u_1'^2 \rangle < \langle u_3'^2 \rangle$ とはならず(図6-8(3))、 P_k の負値も現れない(図6-7(3))。

注9) これは $\phi_{(11)}^w$ を無視したためにシアストレス $\langle u_1' u_3' \rangle$ の絶対値のレベルが増加したためであると考えられる。一般に単純剪断乱流において $\phi_{(12)}^w$ はシアストレスの絶対値を増加させる作用があり、 $\phi_{(11)}^w$ はシアストレスの絶対値を減衰させる働きがある。このことを以下に、主流が x_1 方向で壁面と平行であるような2次元単純剪断流を例に説明する。このような流れ場では $\phi_{(11)}^w$ (式(6-5))のシア成分は次のようになる。 $\phi_{(12(1))}^w = -3/2 C_1' k / \epsilon f_2 \langle u_1' u_2' \rangle / f_2$ 。ここで $C_1' k / \epsilon f_2$ は正であるから、 $\langle u_1' u_2' \rangle$ が負の場合、 $\phi_{(12(1))}^w$ は正となり、負のシアストレス $\langle u_1' u_2' \rangle$ の絶対値を減衰させる働きがある。また $\phi_{(12(2))}^w$ (式(6-6))のシア成分は次のようになる。 $\phi_{(12(2))}^w = -3/2 C_4' (\langle u_2'^2 \rangle - 2/3 k) \partial \langle u_1 \rangle / \partial x_2 \cdot f_2$ 。また2節で示したように $C_4' < 0$ であり、単純剪断流では一般に $\langle u_2'^2 \rangle < 2/3 k$ かつ $\partial \langle u_1 \rangle / \partial x_2 > 0$ であるから、 $\phi_{(12(2))}^w < 0$ となる。これは負のシアストレス $\langle u_1' u_2' \rangle$ の絶対値を増大させる働きがある。従って、立方体風上コーナー付近で $\phi_{(11)}^w = 0$ としたCASE 1-2の場合、 $\phi_{(11)}^w$ を含めた他のケースと比べて、シアストレス $\langle u_1' u_2' \rangle$ の負の絶対値を増大させ、主流方向の運動量の下方への輸送が増大し、逆流が小さくなったものと考えられる。

注10) $D_{11}(x_2)$ と $D_{22}(x_2)$ の正確な表現はそれぞれ次式で与えられる。

$$D_{11}(x_2) = -\partial / \partial x_2 \langle u_1' u_1' u_2' \rangle \quad (6-12)$$

$$D_{22}(x_2) = -\partial / \partial x_2 (\langle u_2' u_2' u_2' \rangle + 2 \langle p' u_2' \rangle) \quad (6-13)$$

DHによりモデル化された $D_{11}(x_2)$ と $D_{22}(x_2)$ は以下のようになる。

$$D_{11}(x_2) = -\partial/\partial x_2 (C_1 k/\varepsilon \cdot \langle u_1' u_2' \rangle \partial \langle u_1' u_1' \rangle / \partial x_1 + \langle u_2' u_2' \rangle \partial \langle u_1' u_1' \rangle / \partial x_2 + \langle u_2' u_3' \rangle \partial \langle u_1' u_1' \rangle / \partial x_3) \quad (6-14)$$

$$D_{22}(x_2) = -\partial/\partial x_2 (C_1 k/\varepsilon \cdot \langle u_1' u_2' \rangle \partial \langle u_2' u_2' \rangle / \partial x_1 + \langle u_1' u_2' \rangle \partial \langle u_2' u_2' \rangle / \partial x_2 + \langle u_2' u_3' \rangle \partial \langle u_2' u_2' \rangle / \partial x_3) \quad (6-15)$$

一方 MH によりモデル化された $D_{11}(x_2)$ と $D_{22}(x_2)$ は次式で表される。

$$D_{11}(x_2) = -\partial/\partial x_2 (C_{k1} k^2/\varepsilon \cdot (\partial \langle u_1' u_1' \rangle / \partial x_2 + 2 \cdot \partial \langle u_1' u_2' \rangle / \partial x_1)) \quad (6-16)$$

$$D_{22}(x_2) = -\partial/\partial x_2 (C_{k1} k^2/\varepsilon \cdot (3 \cdot \partial \langle u_2' u_2' \rangle / \partial x_2)) \quad (6-17)$$

DH の場合には $D_{22}(x_2)$ (式 (6-15)) における $\langle u_2' u_2' \rangle$ の係数が $D_{11}(x_2)$ (式 (6-14)) の $\langle u_1' u_1' \rangle$ の係数と同じである。一方、MH の場合、 $D_{22}(x_2)$ (式 (6-17)) における $\langle u_2' u_2' \rangle$ の係数が $D_{11}(x_2)$ (式 (6-16)) の $\langle u_1' u_1' \rangle$ の係数の 3 倍となる。

一般にレイノルズストレス $\langle u_i' u_j' \rangle$ の k 方向の拡散項に含まれる 3 重相関項 $\langle u_i' u_j' u_k' \rangle$ を勾配拡散近似で表すと

$$\langle u_i' u_j' u_k' \rangle = -\alpha \frac{\partial \langle u_i' u_j' \rangle}{\partial x_k}$$

となる。ここで α は k 方向の拡散係数であり、 $u_i' u_j'$ と u_k' の相関が強ければ強いほど、 α が大きくなるものと推察される。 $D_{22}(x_2)$ に含まれる $\langle u_2' u_2' u_2' \rangle$ における $u_2' u_2'$ と u_2' の間の相関は自己 3 重相関の一部であるため、 $D_{11}(x_2)$ に含まれる $\langle u_1' u_1' u_2' \rangle$ におけるクロス 3 重相関の一部である $u_1' u_1'$ と u_2' の相関よりも強いと考えられる。したがって相関の強さに合わせて拡散係数を変化させる MH のモデルのほうが DH モデルに比べて妥当であると考えられる。

注 1) 既往の研究では、チャンネル流やバックステップ流れにおいて DSM の予測精度の高さが証明されている。今回立方体周辺流れ場の DSM の風速分布の予測精度が悪くなった一つの原因としては、立方体周辺における圧力歪み相関項中の wall reflection 項のモデルの構造的問題が考えられる。Shir や Craft-Laundrer による wall reflection 項は無限平板境界を対象にモデル化されたものであり、立方体コーナー等の隅各部を含むような流れ場に対応していない。即ち wall reflection 項は平板に対して垂直線上の点でのみ定義されており、平板に対して斜めの位置にある点においては考慮されていない。例えば補図 2 に示すような流れ場において a 点において Shir のモデルによるシア成分 $\phi_{12(1)}^w$ は次のように表される。

$$\phi_{12(1)}^w = -\frac{3}{2} \langle u_1' u_2' \rangle \left(\frac{k^{3/2}}{C_j h_n^{(1)} \varepsilon} + \frac{k^{3/2}}{C_l h_n^{(3)} \varepsilon} \right) \quad (6-18)$$

即ち補図 2 a 点においては、床面と立方体前面の壁面の影響を受けている。また補図 2 b 点においては Shir のモデルによるシア成分 $\phi_{12(1)}^w$ は次のように表される。

$$\phi_{12(1)}^w = -\frac{3}{2} \langle u_1' u_2' \rangle \frac{k^{3/2}}{C_l h_n^{(3)} \varepsilon} \quad (6-19)$$

補図 2 b 点においては、床面の影響だけを受け、立方体前面の影響を受けていないことがわかる。本来この点 b においても、斜め方向に存在する立方体前面壁面から何らかの影響を受けるものと考えられる。また補図 2 中の波線部を境に $\phi_{12(1)}^w$ の表現式が式(6-18)から式(6-19)に変化し、この波線部で不連続が生ずる。従って立方体コーナー周辺で wall reflection 項が物理的な妥当性を満たさないこと、並

びに数値的な連続条件を満たさないことが、立方体風上コーナーでの剥離域に影響を与え、ひいては立方体屋上面逆流域の大きさや立方体後方循環流の大きさに影響を与える大きな要因の一つになっていると推測される。但しバックステップ流におけるステップのコーナーにおいても同様のことは言えるが、バックステップのコーナーでは主流の流速が大きく殆どの物理量が移流によって流されと考えられる。一方立方体風上コーナー周辺においてはコーナーに主流が衝突し、圧力変動も激しく、相対的に圧力歪み相関項の影響がより顕著であると考えられる。従って DSM がバックステップにおいて高精度な風速分布の予測をするのに対し、立方体周辺において風速分布の予測精度が悪くなるものと考えられる。



補図2 wall reflection 項の不連続性

x_i : 空間座標の 3 成分

($i=1$ 主流方向, $i=2$ 横方向, $i=3$ 鉛直方向)

u_i : x_i 方向の風速 3 成分

p : 圧力

\bar{f} : 変数 f の格子平均

(ここでは filtering による格子平均)

$\langle f \rangle$: 変数 f の時間平均

f' : 時間平均値からのずれ

ν : 動粘性係数

H_b : 建物高さ

u_b : 高さ H_b における流入風速の u_1 成分

$\langle u_i' u_j' \rangle$: レイノルズストレス

k : 乱流エネルギー、 $1/2 \langle u_i' u_i' \rangle$

P_k : k の生産項

P_{ij} : $\langle u_i' u_j' \rangle$ の生産項

ε : k の散逸項

ε_{ij} : $\langle u_i' u_j' \rangle$ の散逸項

C_{ij} : $\langle u_i' u_j' \rangle$ の移流項、 $C_{ij} = \frac{\partial \langle u_i \rangle \langle u_j' \rangle}{\partial x_k}$

D_{ij} : $\langle u_i' u_j' \rangle$ の乱流拡散項、

$$D_{ij} = \frac{\partial}{\partial x_k} (-\langle u_i' u_j' u_k' \rangle - \langle p' u_j' \rangle \delta_{ik} - \langle p' u_i' \rangle \delta_{jk})$$

ASM では Rodi によるモデル (文献 6) を使用し、移流項と拡散項をまとめて次式のように近似

する。

$$C_{ij} - D_{ij} = \frac{\langle u_i' u_j' \rangle}{k} (P_k - \varepsilon)。$$

DSM の拡散項は表 1 (9) 式に示す勾配拡散近似を用いる。尚、本文 5 節において ASM, DSM の移流・拡散項のモデル化の妥当性を検討する際には方程式の右辺に移項した形 ($- (C_{ij} - D_{ij})$) で考える。

ϕ_j : 圧力歪相関項 (Slow 項 $\phi_{j(1)}$ 、Rapid 項 $\phi_{j(2)}$ 、Wall Reflection 項 $\phi_{j(1)}^*$ 、 $\phi_{j(2)}^*$ で構成)

ν_t : 渦動粘性係数、 $\nu_t = C_\mu k^2 / \varepsilon$

ℓ : 乱れの長さスケール

h_p : 壁面第 1 セルの壁面直交方向の幅

$(u_i)_p$: 壁面第 1 セルの接線方向速度成分

k_p : 壁面第 1 セルの k

ε_p : 壁面第 1 セルの ε

τ_w : 壁面のシアーストレス

u_* : 壁面摩擦速度

a_{ij} : 非等方テンソル : $a_{ij} = \frac{\langle u_i' u_j' \rangle - 2/3 k \delta_{ij}}{k}$

A_2 : 第二不変量 : $A_2 = a_{ij} a_{ji}$

A_3 : 第三不変量 : $A_3 = a_{ij} a_{jk} a_{ki}$

A : Lumley の flatness parameter : $A = 1.9/8(A_2 - A_3)$

S_{ij} : 平均歪テンソル : $S_{ij} = 1/2 \cdot (\partial \langle u_i \rangle / \partial x_j + \partial \langle u_j \rangle / \partial x_i)$

Ω_{ij} : 平均渦度テンソル : $\Omega_{ij} = 1/2 \cdot (\partial \langle u_i \rangle / \partial x_j - \partial \langle u_j \rangle / \partial x_i)$

"(w)" : w 番目の壁面

$h_w^{(w)}$: w 番目の壁面からの鉛直距離

"wo" : 全壁面数

D : チャンネル半幅

Re : $\langle u_b \rangle$, H_b で定義されるレイノルズ数 ($\langle u_b \rangle H_b / \nu$)

Re, τ : $\langle u_* \rangle$, D で定義されるレイノルズ数 ($\langle u_* \rangle D / \nu$)

本文中の諸量は $H_b, \langle u_b \rangle$ 及び密度 ρ で無次元化している。

第6章 参考文献

- 1) Rodi, W.: A New Algebraic Relation for Calculating The Reynolds Stresses, ZAMM, 56, pp.T219-T224, 1976
- 2) 村上周三, 持田灯, 近藤靖史, 田中忠範: 代数応力モデルによる2次元角柱周辺の乱流場の数値解析, 日本建築学会計画系論文報告集, 第419号, pp.1-9, 1991.1
- 3) Launder, B.E., Spalding, D.B.: The Numerical Computation of Turbulent Flows, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 3, pp.269-289, 1974
- 4) 村上周三, 持田灯, 林吉彦, 大和田淳: 型2方程式モデルによる建物周辺気流の数値解析, 日本建築学会計画系論文報告集, 第392号, pp.11-21, 1988.
- 5) 村上周三, 持田灯, 林吉彦: 立方体モデル周辺の非等方乱流場に関するk-εモデルとLESの比較, 日本建築学会計画系論文報告集, 第423号, pp.23-31, 1991.5
- 6) Deardorff, J.W.: A Numerical Study of Three-dimensional Turbulent Channel Flow at Large Reynolds Numbers, J. Fluid Mech., vol.41, pp.453-480, 1970
- 7) 村上周三, 日比一喜, 持田灯: Large Eddy Simulationによる建物周辺気流の3次元数値解析(その1), 日本建築学会計画系論文報告集, 第360号, pp.1-11, 1986.2
- 8) 大岡龍三, 村上周三, 持田灯, 林吉彦, 風洞実験及びLES, DSMとの比較によるASMの精度・問題点の検討 ASMによる立方体周辺の非等方乱流場の数値解析, 日本建築学会計画系論文報告集, 第495号, 1997.5
- 9) Rotta, J. C.: Statistische theorie nichthomogener turbulenz. Zeitschr Phys., 129: 547-572, 1951
- 10) Launder, B.E., Reece, G.J., Rodi, W.: Progress in The Development of A Reynolds-stress Turbulent Closure, J. Fluid Mech., vol.68, pp.537-566, 1975
- 11) Fu, S., Launder, B.E. and Tselepidakis, D.P. (1987) UMIST Mech. Eng. Dept. Rep. TFD/87/5
- 12) Speziale, C.G., Sarkar, S. and Gatski, T.B. (1991) Modelling the pressure-strain correlation of turbulence J. Fluid Mech. 227, 245
- 13) Shir, C.C. (1973) A preliminary numerical study of atmospheric turbulent flow in the idealized planetary boundary layer, J. Atmos. Sci. 30, 1327
- 14) Gibson, M.M., Launder, B.E.: Ground Effects on Pressure Fluctuations in The Atmospheric Boundary Layer, J. Fluid Mech., 86, pp.491-511, 1978
- 15) 近藤靖史, 村上周三, 加藤信介: 応力方程式モデルによる室内気流解析(その1, 2), 日本建築学会学術講演梗概集(環境工学), pp.757-760, 1988.10
- 16) Craft, T.J. and Launder, B.E. (1992) A New wall of 'Wall-Reflection' Effects on the Pressure-Strain Correlation and its Application to the Turbulent Impinging Jet. AIAA J. 30, 2970
- 17) Daly, B. J. and Harlow, F.H. (1970) Transport equations of turbulence, Phys. Fluids, 13, 2634
- 18) Mellor, G.L., and Herring, H.J. (1973) A survey of mean turbulent field closure. AIAA J. 11, 590
- 19) Demuren, A.O. and Sarkar, S. (1992) Systematic Study of Reynolds Stress Closure Models in the Computations of Plane Channel Flows, ICASE Report No.92-19
- 20) 近藤宏二, 村上周三, 持田灯: LESのための流入変動風の作成法に関する研究(その1) 周

波数スペクトルに基づく流入変動風を用いた等方性乱流の解析、第9回数値流体力学シンポジウム講演論文集、pp.213-214、1995.12

2 1) 飯塚悟、村上周三、持田灯、Sansang Lee: Dynamic LES による2次元角柱周辺流れの解析(第5報) 波数空間の3次元エネルギースペクトルに基づく流入変動風の作成、日本建築学会学術講演梗概集(環境工学)、1996.9

2 2) Kato, M., Launder, B.E.: Modelling Flow-Induced Oscillations in Turbulent Flow around a Square Cylinder, UMIST. Rep., No. TFD/92/13, 1992

2 3) Franke, R. and Rodi, W. (1991) Calculation of vortex shedding past a square cylinder with various turbulence models, Proc. 8th Sym. Turbulent Shear Flows, 189

第七章

建物周辺気流の解析 その2

2次元建物モデル周辺気流の解析

- 圧力歪み相関項の乱流の生産構造に与える影響の評価 -

第7章 建物周辺気流の解析 その2

2次元建物モデル周辺気流の解析

- 圧力歪み相関項の乱流の生産構造に与える影響の評価 -

7.1 はじめに

本章では境界層流中におかれた2次元角柱 (square rib) 周辺の気流を DSM で解析し、現有のモデルの精度、問題点を検討するものである。第6章において立方体周辺流れ場に DSM を適用したが、DSM は $k-\varepsilon$ モデルや ASM 等のより低次の乱流モデルの各種近似に基づく欠陥を改善するものの、屋上面の逆流域や立方体後方循環領域の広さを過大に評価する傾向があることが明らかとなった。立方体等の3次元物体周辺の流れは、乱流による stochastic な変動とともに vortex shedding 等の周期的変動を含み、かなり複雑である。本報では stochastic な乱流変動による運動量輸送の再現に関して、乱流モデルの性能を評価するという立場から、vortex shedding を伴わない境界層流中におかれた2次元角柱周辺気流に DSM を適用する。特に方程式中の圧力歪み相関項の詳細な検討を中心に報告する。

7.2 風洞実験の概要

模型は1辺5cm (H_b) の角柱、風速の測定にはタンデム型熱線風速計を使用。接近流は $\langle u_1(x_2) \rangle \propto x_2^{-1/4}$ の分布。模型棟高風速 ($\langle u_b \rangle$) は約 5m/s、 H_b と $\langle u_b \rangle$ による Re 数は約 18000。詳細は文献1, 2, 3 参照。

7.3 数値計算の概要

(1) 基礎方程式と計算ケース

DSM の基礎式を表7.1に示す。圧力歪み相関項中の Rapid 項は IPM^(*) (Isotropization of Production Model: 表1①式) を使い、wall reflection 項は Gibson-Launder のモデル^(*) (ケースI) 並びに Craft-Launder モデル^(*) (ケースII) を用いた。またケースIIに対してIPMの係数(表7.1①式)の C_2 を変化させた計算(ケースIII)も行った。DSM の計算ケースを表7.2に示す。また乱流拡散項は GGDH (Generalized Gradient Diffusion Hypothesis: 表7.1⑤式) を利用。Re 数 ($\langle u_b \rangle H_b / \nu$) は実験と同様に 18000。他の計算条件は注1参照。

(2) 計算格子

計算格子は、角柱1辺 (H_b) で無次元化して、模型中心から風上方向に5.5、風下方向に20.5、高さ方向に24の範囲を水平 x_1 方向137分割、高さ x_2 方向に69分割した2次元のメッシュで、最小格子幅は1/20である。本計算では風洞実験から求めた粗度長が0.1であるので、地表面と接する第1セルの x_2 方向の幅を0.3と若干粗くした。

(3) 境界条件

境界条件を表 7.3 に示す。リブの壁面境界では、Launder-Spalding 型の滑面用の generalized log law²⁾ を使用。一方、地表面では粗面用に generalized log law 中の係数 E を変更した (E=0.055)。

(4) 差分スキーム

移流項差分スキームに関し運動方程式、等の乱流量の輸送方程式とともに QUICK。時間差分について、DSM は一次精度の Full Implicit 型時間スキームを利用。

表 7.1 DSM の基礎方程式 (等温・高レイノルズ数)

$$\langle u_i' u_j' \rangle \text{ 方程式} \quad \frac{D \langle u_i' u_j' \rangle}{Dt} = D_{ij} + P_{ij} + \phi_{ij} - \varepsilon_{ij} \quad (1)$$

$$(\varepsilon \text{ 方程式}) \quad \frac{D\varepsilon}{Dt} = D_\varepsilon + \frac{\varepsilon}{k} (C_{\varepsilon 1} P_k - C_{\varepsilon 2} \varepsilon) \quad (2)$$

$$k = \frac{1}{2} \langle u_i' u_i' \rangle \quad (3) \quad P_k = \frac{1}{2} P_{ii} \quad (4)$$

$$D_{ij} = \frac{\partial}{\partial x_m} (C_i \langle u_m' u_j' \rangle - \frac{k}{\varepsilon} \frac{\partial \langle u_i' u_j' \rangle}{\partial x_l}) \quad (5) \quad D_\varepsilon = \frac{\partial}{\partial x_m} (C_\varepsilon \langle u_m' u_i' \rangle - \frac{k}{\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_l}) \quad (6)$$

$$P_{ij} = -\langle u_i' u_k' \rangle \frac{\partial \langle u_j' \rangle}{\partial x_k} - \langle u_j' u_k' \rangle \frac{\partial \langle u_i' \rangle}{\partial x_k} \quad (7) \quad \varepsilon_{ij} = \frac{2}{3} \varepsilon \delta_{ij} \quad (8)$$

$$\phi_{ij} = \phi_{ij(1)} + \phi_{ij(2)} + \phi_{ij(1)}^* + \phi_{ij(2)}^* \quad (9)$$

$$\phi_{ij(1)} = -C_1 \frac{\varepsilon}{k} \langle u_i' u_j' \rangle - \frac{2}{3} k \delta_{ij} \quad (10) \quad \phi_{ij(2)} = -C_2 (P_{ij} - \frac{2}{3} P_k \delta_{ij}) \quad (11)$$

$$\phi_{ij(1)}^* = \sum_{m=1}^N C_1 \frac{\varepsilon}{k} \langle u_k' u_m' \rangle n_k^{(w)} n_m^{(w)} \delta_{ij} - \frac{3}{2} \langle u_k' u_l' \rangle n_k^{(w)} n_l^{(w)} - \frac{2}{3} \langle u_k' u_j' \rangle n_k^{(w)} n_l^{(w)} - \frac{k^{3/2}}{C_1 h_n^{(w)} \varepsilon} \quad (12)$$

Gibson-Launder モデル

$$\phi_{ij(2)}^* = \sum_{m=1}^N C_2 \frac{\varepsilon}{k} (\phi_{ij(2)} n_k^{(w)} n_m^{(w)} \delta_{ij} - \frac{3}{2} \phi_{kl(2)} n_k^{(w)} n_l^{(w)} - \frac{2}{3} \phi_{kl(2)} n_k^{(w)} n_l^{(w)}) \frac{k^{3/2}}{C_1 h_n^{(w)} \varepsilon} \quad (13)$$

Craft-Launder モデル

$$\begin{aligned} \phi_{ij(2)}^* = & \sum_{m=1}^N C_2 \frac{\partial \langle u_i' \rangle}{\partial x_m} \langle u_j' u_m' \rangle (\delta_{ij} - 3 n_i^{(w)} n_j^{(w)}) \\ & + C_3 k a_{im} \left(\frac{\partial \langle u_k' \rangle}{\partial x_l} n_k^{(w)} n_m^{(w)} \delta_{ij} - \frac{3}{2} \frac{\partial \langle u_l' \rangle}{\partial x_l} n_m^{(w)} n_l^{(w)} - \frac{3}{2} \frac{\partial \langle u_j' \rangle}{\partial x_l} n_m^{(w)} n_l^{(w)} \right) \\ & + C_4 k \frac{\partial \langle u_j' \rangle}{\partial x_m} n_i^{(w)} n_m^{(w)} (n_l^{(w)} n_j^{(w)} - \frac{1}{3} \delta_{ij}) \frac{k^{3/2}}{C_1 h_n^{(w)} \varepsilon} \end{aligned} \quad (14)$$

$$C_1: 1.8 \quad C_2: 0.6 \text{ (I-II)}, 0.3 \text{ (I-III)} \quad C_1': 0.5 \quad C_2': 0.0 \quad C_k: 0.22 \quad C_\varepsilon: 0.16$$

$$C_{\varepsilon 1}: 1.44 \quad C_{\varepsilon 2}: 1.92 \quad C_3: 2.5 \quad C_3': -0.08 \quad C_4: -0.1 \quad C_4': -0.4$$

表 7.2 計算ケース

	$\Phi_{\psi(2)}$	$\Phi_{\psi(2)}^{**}$
ケース I	IPM	Gibson-Launder
ケース II	IPM	Craft-Launder
ケース III	IPM における係数変化	Craft-Launder

表 7.3 境界条件

流入面	$\langle u_1(x_2) \rangle = x_2^{1/4}$ (風洞実験値), $\langle u_2(x_2) \rangle = 0$. $k(x_2)$, $\langle u_1'(x_2)^2 \rangle^{1/2}$ は風洞実験値 $e(x_3) = C_\mu k(x_3)^{2/3} / l(x_3)$ $l(x_3) = (C_\mu k(x_3))^{1/2} (\partial \langle u_1(x_3) \rangle / \partial x_3)^{-1}$
流出面	$\langle u_1 \rangle$, $\langle u_2 \rangle$, ε , $\langle u_1' u_1' \rangle$: $\partial / \partial x_1 = 0$
上空面	$\langle u_2 \rangle = 0$, $\langle u_1 \rangle$, ε , $\langle u_1' u_1' \rangle$: $\partial / \partial x_2 = 0$
地表面	壁面のシアストレス(τ_w)は⑬式、壁面速度勾配は⑭式、 $\langle u_1' u_1' \rangle$ 方程式中の地表面第一セルの ε は⑮式、 ε 方程式中の壁面第一セルの $\varepsilon(\varepsilon_p)$ は⑯式で与える。 $\frac{\langle u_1' \rangle_p}{u_*} = \frac{1}{k} \ln \left(E \frac{1}{2} h_p \left(C_\mu \frac{1}{2} k_p \right)^{1/2} / v \right) \dots \textcircled{15} \quad \langle \tau_w \rangle / \rho = v_* \left. \frac{\partial \langle u_1 \rangle}{\partial x_n} \right _{wall} \dots \textcircled{16}$ $\varepsilon = \frac{C_\mu^{3/4} \cdot k_p^{3/2}}{k h_p} \ln \left(\frac{1/2 h_p}{z_0} \right) \dots \textcircled{17} \quad \varepsilon_p = \frac{C_\mu^{3/4} \cdot k_p^{3/2}}{1/2 k h_p} \dots \textcircled{18}$ $\langle u_1' u_1' \rangle$: $\partial / \partial x_2 = 0$ 建物壁面では、滑面用の generalized log law として $E=9.0$ を、 地表面では、粗面用の generalized log law として $E=0.055$ を用いた。 (粗面用の E は実験値の気流分布で与えられる粗度長 0.1 から推定した)

7.4 計算結果

7.4.1 k の分布 (図 7.1)

k と $\phi_{ij(2)}$ に Gibson-Lauder モデルを用いた DSM (ケース I) では、風上コーナー周辺の k の値をかなり大きく評価する²¹⁾。立方体周辺気流の解析 (第 6 章) と同様に、Craft-Lauder モデルを用いた DSM (ケース II) では Gibson-Lauder モデルの風上コーナー周辺での k の過大評価が解消し、大きな改善が認められる。しかし、リブ屋上面から後方にかけて実験と比較して k の値が全般にかなり小さくなるという問題があり、この点は 7.5 節で詳しく検討する。

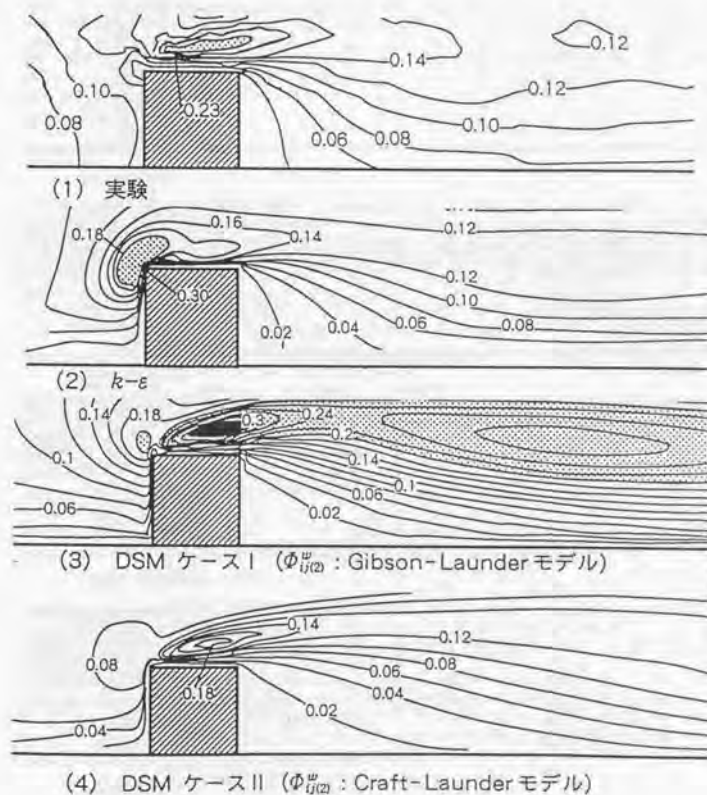


図 7.1 k の分布

7.4.2 平均風速ベクトル (図 7.2)

$k-\epsilon$ (図 7.2 (2)) では風洞実験結果に比べて屋上面の逆流域が大変小さい。また後方循環流域の広さは $k-\epsilon$ と Gibson-Lauder モデルを用いた DSM ケース I (図 7.2 (3)) は実験結果に比べ、やや小さめとなる。一方 Craft-Lauder モデルを用いた DSM ケース II (図 7.2 (4)) では後方再付着距離がかなり長めになる傾向がある。この原因の一つとして、DSM ケース II ではリブ屋上面から後方にかけて乱流エネルギーの値が実験よりも小さくなったため (図 7.1 (4))、乱流拡散の効果が不足し、リブ後方の逆流域とその上方との運動量の乱流拡散が過小となったことが考えられる。この点に関しては後で詳しく検討する。

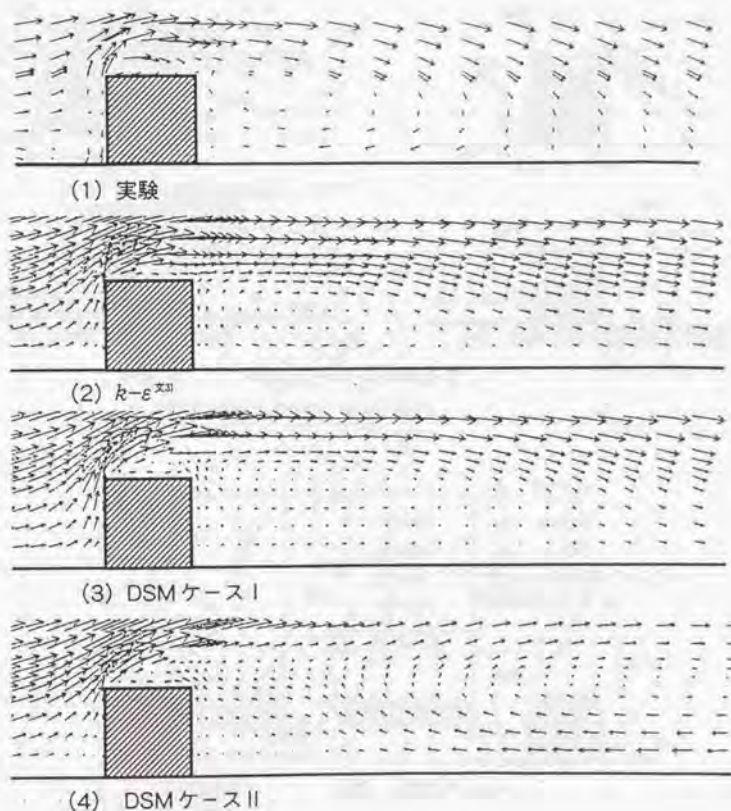


図 7.2 平均風速ベクトル

7.4.3 ノルマルストレス $\langle u_i' u_i' \rangle$ の分布 (図 7.3、図 7.4)

Craft-Launder モデルを用いた DSM ケース II の場合、 $\langle u_1' u_1' \rangle$ 、 $\langle u_2' u_2' \rangle$ の分布は k の分布と同様に実験と比較して全般に小さめとなる (図 7.3)。また DSM ケース II では屋上面近傍のノルマルストレスの主流方向成分 $\langle u_1' u_1' \rangle$ は鉛直方向成分 $\langle u_2' u_2' \rangle$ のおよそ 2.5 倍程度であるのに対して、実験では $\langle u_1' u_1' \rangle$ が $\langle u_2' u_2' \rangle$ の 3 倍以上である (図 7.4)。従って、DSM ケース II では屋上面付近においてノルマルストレスの再分配による等方化が過剰に行われていると考えられる。屋上面付近におけるこの過剰な等方化が k をはじめとする乱流統計量の過小評価と密接に関連している (次節参照)。

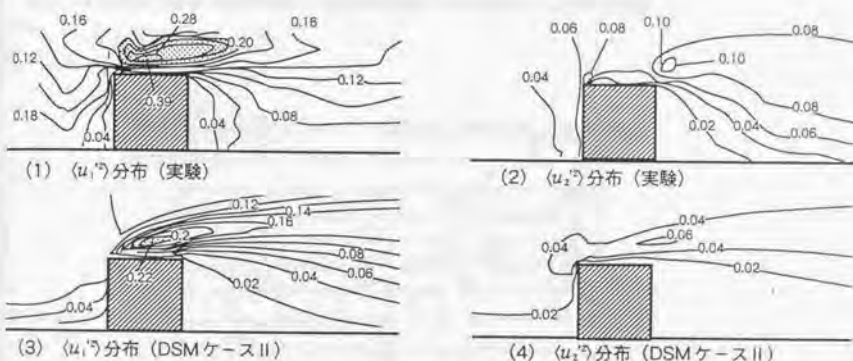


図 7.3 $\langle u_i' u_i' \rangle$ の分布

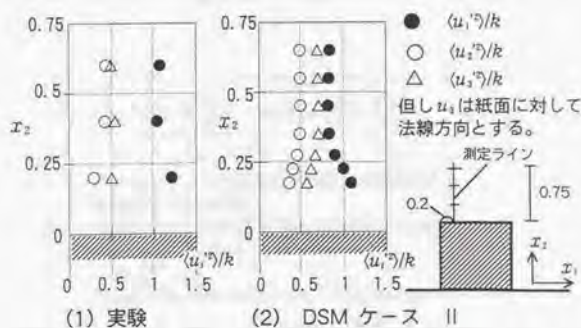


図 7.4 屋上面における構造パラメータ $\langle u_1'^2 \rangle/k$ の分布

7.5 DSMにおける P_k の過小評価の原因とその改善

7.5.1 P_k の過小評価の構造的考察 (表 7.4, 図 7.5)

屋上面の k の過小評価を P_{ij} の分布を通じて考察する。乱流エネルギー k の生産項 P_k は $P_k=1/2 \cdot (P_{11}+P_{22})$ で表すことができる。表 3 に屋上面における P_{11} 、 P_{22} 並びにそれらの構成要素の正負を示す。屋上面においては $P_{11}>0$ 、 $P_{22}<0$ である。前述した様に DSM の解析結果においては屋上面において $\langle u_1'u_1' \rangle$ と $\langle u_2'u_2' \rangle$ が実験結果と比較してかなり等方化されている (図 7.3、図 7.4)。従って表 3 からわかるように P_{11} は実際よりもその正値が小さく、 P_{22} は実際よりもその負値の絶対値が大きくなる。従って、 P_{11} と P_{22} の平均である P_k は実際よりも過小評価されることになる (図 7.5 参照)。

表 7.4 屋上風上コーナー付近における P_{11} 、 P_{22} の構成

P_{11}				P_{22}			
$-\langle u_1' \rangle \frac{\partial \langle u_1 \rangle}{\partial x_1}$	$-\langle u_1' u_2' \rangle \frac{\partial \langle u_1 \rangle}{\partial x_2}$	$-\langle u_2' \rangle \frac{\partial \langle u_2 \rangle}{\partial x_2}$	$-\langle u_1' u_2' \rangle \frac{\partial \langle u_2 \rangle}{\partial x_1}$				
$\langle u_1' \rangle \frac{\partial \langle u_1 \rangle}{\partial x_1}$	$\langle u_1' u_2' \rangle \frac{\partial \langle u_1 \rangle}{\partial x_2}$	$\langle u_2' \rangle \frac{\partial \langle u_2 \rangle}{\partial x_2}$	$\langle u_1' u_2' \rangle \frac{\partial \langle u_2 \rangle}{\partial x_1}$				
+	-	-	+	+	+	-	-
+		+		-		-	
+				-			

$$P_{11} = -2\langle u_1'^2 \rangle \frac{\partial \langle u_1 \rangle}{\partial x_1} - 2\langle u_1'u_2' \rangle \frac{\partial \langle u_1 \rangle}{\partial x_2}$$

$$P_{22} = -2\langle u_2'^2 \rangle \frac{\partial \langle u_2 \rangle}{\partial x_2} - 2\langle u_1'u_2' \rangle \frac{\partial \langle u_2 \rangle}{\partial x_1}$$

$$P_k = -\frac{(\langle u_1'^2 \rangle - \langle u_2'^2 \rangle) \frac{\partial \langle u_1 \rangle}{\partial x_1} - \langle u_1'u_2' \rangle \left(\frac{\partial \langle u_1 \rangle}{\partial x_2} + \frac{\partial \langle u_2 \rangle}{\partial x_1} \right)}{2}$$

P_{kx}
 P_{ky}

- ・ ノルマルストレスの非等方性の P_k への影響は P_{kx} を通じて行われる
- ・ ノルマルストレスの非等方性の再現が不十分
 $\Rightarrow \langle u_1'^2 \rangle - \langle u_2'^2 \rangle \rightarrow 0$
 $\Rightarrow P_{kx} \rightarrow 0$

図 7.5 ノルマルストレス等方化と P_k の過小評価

7.5.2 P_k 評価に対する圧力歪相関項 ϕ_{ij} の役割

圧力歪相関項 ϕ_{ij} に基づく乱流エネルギー k の過小評価のメカニズムを ϕ_{ij} のモデルに立ち戻って考察する。 $\langle u_i' u_j' \rangle$ の輸送方程式 (表1①式) の両辺に平均速度歪テンソル $S_{ij} (= \frac{1}{2} (\frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_j} + \frac{\partial \langle u_j \rangle}{\partial x_i}))$ を乗ずる。 k の生産項は $\langle u_i' u_j' \rangle S_{ij}$ で表されるので、厳密な形ではないが P_k の輸送方程式に準じた方程式を得ることができる。

$$\frac{DP_k}{Dt} = -P_{ij} S_{ij} - \phi_{ij} S_{ij} + \varepsilon_{ij} S_{ij} - D_{ij} S_{ij} \quad (7-1)$$

ここでは、 ϕ_{ij} のモデル化に含まれる誤差に起因する乱流エネルギー k の過小評価を考察するために、(7-1)式右辺第二項にのみ着目する。また簡単のために今回は slow 項と rapid 項についてのみ考察する。に Rotta の近似を、に IPM を用いた場合それぞれ次のように表すことができる。

$$\phi_{(k1)} = C_1 \varepsilon k \cdot \langle u_i' u_j' \rangle - 2/3 \cdot k \delta_{ij} \quad (7-2)$$

$$\begin{aligned} \phi_{(k2)} = & C_2 (P_{ij} - 2/3 \cdot P_k \delta_{ij}) \\ & + C_{21} k S_{ij} + C_{22} k (a_{ik} S_{jk} + a_{jk} S_{ik}) + C_{23} k (a_{ik} \Omega_{jk} + a_{jk} \Omega_{ik}) \end{aligned} \quad (7-3)$$

ここで $a_{ij} = \langle u_i' u_j' \rangle / k - 2/3 \delta_{ij}$ (非等方テンソル)

$\Omega_{ij} = 1/2 (\partial \langle u_i \rangle / \partial x_j - \partial \langle u_j \rangle / \partial x_i)$ (平均渦度テンソル)

$C_1 = 1.8, C_2 = 0.6, C_{21} = 0.8, C_{22} = 0.6, C_{23} = 0.6$

但し(7-3)式の右辺は IPM の表式も含んだの線形モデルの一般型である。(7-2)、(7-3)式よりは次のようになる。

$$-\phi_{(k1)} S_{ij} = +C_1 \varepsilon / k \cdot \langle u_i' u_j' \rangle S_{ij} = -C_1 \varepsilon / k \cdot P_k \quad (7-4)$$

$$\begin{aligned} -\phi_{(k2)} S_{ij} = & +C_2 P_{ij} S_{ij} \\ = & -C_{21} k S_{ij}^2 - 2C_{22} k a_{ik} S_{jk} S_{ij} - 2C_{23} k a_{ik} \Omega_{jk} S_{ij} \end{aligned} \quad (7-5)$$

但し(7-4)、(7-5)式の導出の際、連続の式 ($S_{ij} \delta_{ij} = 0$) 並びに S_{ij} が対称テンソルであるという特性 ($S_{ij} = S_{ji}$) を用いた。

(7-4)式からわかるように、 $\phi_{(k1)}$ の Rotta 近似に起因する項 ($-\phi_{(k1)} S_{ij}$) は P_k の輸送方程式 (式(7-1)) において sink term の役割を果たしている。また(7-5)式は 2次元流れ場において次のように変形される。

$$\begin{aligned} -\phi_{(k2)} S_{ij} = & -C_{21} k S_{ij}^2 - 2C_{22} k a_{11} (S_{11} S_{11} + S_{12} S_{12}) \\ & - 2C_{22} k a_{22} (S_{22} S_{22} + S_{12} S_{12}) \\ & - 2C_{23} k a_{11} (\Omega_{21} S_{12} - 2C_{23} k a_{22} \Omega_{12} S_{12}) \\ = & -C_{21} k S_{ij}^2 - 2C_{22} k (a_{11} + a_{22}) (S_{11} S_{11} + S_{12} S_{12}) \\ & + 2C_{23} k (a_{11} - a_{22}) \Omega_{12} S_{12} \end{aligned} \quad (7-6)$$

但し(7-6)式の導出の際、連続の式 ($S_{11} = -S_{22}$) を用いた。

(7-6)式の右辺第一項は常に負値をとる。また第二項も、今回のような2次元流においてはとなることが実験^{21) 21)} (図7.3, 7.4) 並びに数値計算においても確認されているので常に負値をとる。またこれらの項は速度勾配の自乗の項を含んでいるので剥離流や循環流等速度勾配の大きな流れ場において大きな負値をとる。従って、このような流れ場では $\phi_{(k2)} S_{ij}$ は全体として負の値をとる傾向がある。本報で考察しているリブ屋上面の剥離域では P_k は正值をとるので、式(7-1)より $\phi_{(k2)} S_{ij}$ は P_k の絶対値を

減ずる働きをする。それ故はリブ周辺気流において k の値を小さくするように働く。 $\phi_{(R)}$ と $\phi_{(L)}$ の上記の特性を考慮すると、剝離流や循環流においてこれら(7-4)式や(7-5)式の係数が実現象を正しく記述する数値よりも大きく、 ϕ_{ij} によるストレスの等方化の効果が過大評価されていることが2次元角柱周辺における過小評価の大きな要因の一つであると考えられる。

7.5.3 圧力歪相関項の検討

このような P_k の過小評価を改善するためには、剝離流や循環流において係数 C_1 ((7-2)式)、 C_2 ((7-3)式)の値を変化させることが一つの方法であると考えられる。一般に $C_1=1.8$ 、 $C_2=0.6$ が最適とされているが、これらの値はあくまで一様な剪断乱流等の非常に単純な流れ場に対して最適化され、その有効性が確認されている。従って、複雑な流れ場においてはこれらの係数は大きく変化する可能性がある。これらの係数を変化させた例として、河本ら²³⁾による循環流内での曲がり効果の導入がある。これは流線の曲率の大きな流れ場において、この曲率を考慮して Rotta モデル ((7-2)式)の係数 C_1 を変化させるものである。このモデルにより、DSMを用いたバックステップ流における循環流の再付着距離の予測が改善されたことが報告されている。但しこの曲がり効果のモデルは流線の曲率の存在する箇所において C_1 を増大させるものであり、(7-4)式より P_k を減少させる sink term を増大してしまうことになる。これはリブ周辺気流において現在我々が求めている効果とは逆の効果である。この原因はバックステップ流における単純な循環流と角柱周辺気流における剝離を伴う循環流の物理的メカニズムの差異に起因すると考えられる。図 7.6 に示すようにバックステップ流における循環流は圧力勾配によって誘引され、流れ方向と圧力勾配の方向が一致するのに対し、角柱周辺気流の風上コーナー付近における剝離流は流れ方向が圧力勾配の方向に対して逆向きである。長野ら²⁴⁾の逆圧力勾配流の実験によれば、主流方向のノルマルストレスは圧力勾配がないときに比べて減少する傾向にある。従って図 7.6 (2) に示すような剝離流の風上コーナー付近の風速鉛直成分 ($\langle u_z \rangle$) が卓越する領域では x_2 方向のノルマルストレス ($\langle u_2^2 \rangle$) が減少すると考えられる。ところがこの剝離流の領域においては既に ($\langle u_1^2 \rangle > \langle u_2^2 \rangle$) であるので、Rotta モデル ((7-2)式)を用いると ($\langle u_2^2 \rangle$) を増加させることになる。本報の DSM (ケースIII) では、 P_k の sink term を増大させないために C_1 の値を標準値 (=1.8) とし、 C_2 を標準値の半分の 0.3 として試行的に計算を行った。この計算による乱流エネルギー k の分布並びに平均風速ベクトルを図 7.7、図 7.8 にそれぞれ示す。乱流エネルギー k の分布はケースII (図 7.1 (4)) に比べてかなり実験値 (図 7.1 (1)) に近付いている。また後方循環流の再付着位置は実験値 (図 7.2 (1)) に対してまだ長めであるが、ケースIIの結果 (図 7.2 (4)) に対してはかなり改善されている。

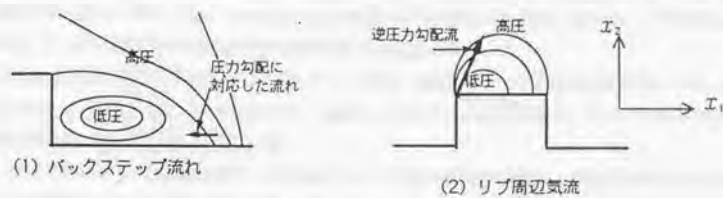


図 7.6 循環流の物理的メカニズム

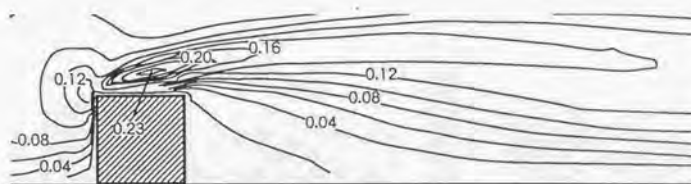


図 7.6 k の分布 DSM ケースⅢ

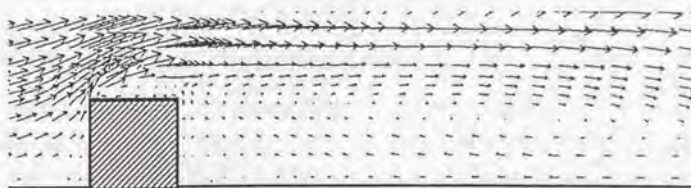


図 7.7 平均風速ベクトル DSM ケースⅢ

7.6 結論

(1) 立方体周辺気流の解析と同様に、2次元リブ周辺気流においても Craft-Launder のモデルを用いた DSM (ケースII) では、並びに Gibson-Launder のモデルを用いた DSM (ケースI) の結果に見られる風上コーナー周辺での過大評価の問題は大きく改善される。

(2) Craft-Launder のモデルを用いた DSM (ケースII) の結果は、リブ後方循環流の広さをかなり大きめに予測し、 k やノルマルストレスの値を全般にかなり小さめに見積もる。これらの傾向は立方体周辺気流解析においても確認されている。

(3) DSM (ケースII) における k やノルマルストレスの過小評価の問題は、圧力歪相関項によるリブ周辺の再分配のモデル化と密接に関連している。

(4) の係数を 0.6 から 0.3 に変更した DSM ケースIIIの結果は、平均風速ベクトル、の分布ともにケースIIの結果に対してかなりの改善がみられた。

第7章 注

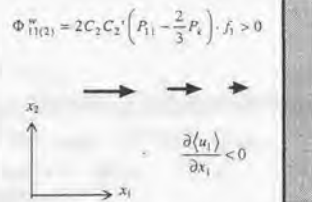
注1) これは Gibson-Lauder モデルが impinging 領域を含むような流れ場では適切な解を与えないためである。例えば、いま壁が方向にあり、平均流がこの壁に垂直に当たっている2次元衝突噴流を考える(補図1)。このとき $\Phi_{11(2)}^w$ 等は次のようになる。

$$\Phi_{11(2)}^w = 2C_2C_2' \left(P_{11} - \frac{2}{3}P_k \right) \cdot f_1$$

$$\Phi_{22(2)}^w = -C_2C_2' \left(P_{11} - \frac{2}{3}P_k \right) \cdot f_1$$

ここで $f_1 = k^{3/2} / (C_l \cdot \varepsilon \cdot x_1)$

$\Phi_{11(2)}^w$ は本来 $\langle u_1'^2 \rangle$ を減衰させる働きを示す項であるから、この場合 $\left(P_{11} - \frac{2}{3}P_k \right)$ は負である必要がある。しかし、衝突の中心軸上では P_{11} が大きく、 $\left(P_{11} - \frac{2}{3}P_k \right)$ は明らかに負にはならない。したがって $\Phi_{11(2)}^w$ は $\langle u_1'^2 \rangle$ を増加させる傾向の働きを示し矛盾が生ずる。



補図1

またこのような2次元流れ場においての生産項は次の様に表わすことができる。

$$P_k \equiv -(\langle u_1'^2 \rangle - \langle u_2'^2 \rangle) \frac{\partial \langle u_1 \rangle}{\partial x_1} - \langle u_1' u_2' \rangle \left(\frac{\partial \langle u_1 \rangle}{\partial x_2} + \frac{\partial \langle u_2 \rangle}{\partial x_1} \right)$$

impinging 領域においては $\frac{\partial \langle u_1 \rangle}{\partial x_1} < 0$ であり、Gibson-Lauder モデルを用いた場合には $\langle u_1'^2 \rangle$ が実

際よりも大きく評価されるので、 P_k は実現象に比較して大きな正値をとることになる。これが Gibson-Lauder モデルを用いた場合の風上コーナーにおける k の過大評価の原因である。Craft-Lauder のモデルは impinging 領域における Gibson-Lauder のこのような欠陥を避けることを目的として開発されたものである。

第7章 記号

x_i : 空間座標の成分 ($i=1$ 主流方向, $i=2$ 鉛直方向)

u_i : x_i 方向の風速成分 p : 圧力

\bar{f} : 変数 f の格子平均

(ここでは filtering による格子平均)

$\langle f \rangle$: 変数 f のアンサンブル平均

f^* : アンサンブル平均値からのずれ

ν : 動粘性係数

H_b : 建物高さ

u_b : 高さ H_b における流入風速の u_1 成分

$\langle u_i' u_j' \rangle$: レイノルズストレス

k : 乱流エネルギー、 $1/2 \langle u_i' u_i' \rangle$

P_k : k の生産項

P_{ij} : $\langle u_i' u_j' \rangle$ の生産項

ε : k の散逸項

ε_{ij} : $\langle u_i' u_j' \rangle$ の散逸項

D_{ij} : $\langle u_i' u_j' \rangle$ の乱流拡散項、

ϕ_{ij} : 圧力歪相関項 (Slow 項 $\phi_{(s)}$ 、Rapid 項 $\phi_{(r)}$ 、Wall Reflection 項 $\phi_{(r)}^w$ 、 $\phi_{(r)}^{w(2)}$ で構成)

ν_t : 渦動粘性係数、 $\nu_t = C_\mu k^2 / \varepsilon$

ℓ : 乱れの長さスケール

h_p : 壁面第1セルの壁面直交方向の幅

$(u_i)_p$: 壁面第1セルの接線方向速度成分

k_p : 壁面第1セルの k

ε_p : 壁面第1セルの ε

τ_w : 壁面のシアーストレス

u_w : 壁面摩擦速度

a_{ij} : 非等方テンソル: $a_{ij} = \frac{(\langle u_i' u_j' \rangle - 2k\delta_{ij})}{2k}$

S_{ij} : 平均歪テンソル: $S_{ij} = 1/2 \cdot (\partial \langle u_i \rangle / \partial x_j + \partial \langle u_j \rangle / \partial x_i)$

Ω_{ij} : 平均渦度テンソル: $\Omega_{ij} = 1/2 \cdot (\partial \langle u_i \rangle / \partial x_j - \partial \langle u_j \rangle / \partial x_i)$

"(w)": w 番目の壁面

$h_w^{(w)}$: w 番目の壁面からの鉛直距離

"wo": 全壁面数

Re : $\langle u_b \rangle$, H_b で定義されるレイノルズ数 ($\langle u_b \rangle H_b / \nu$)

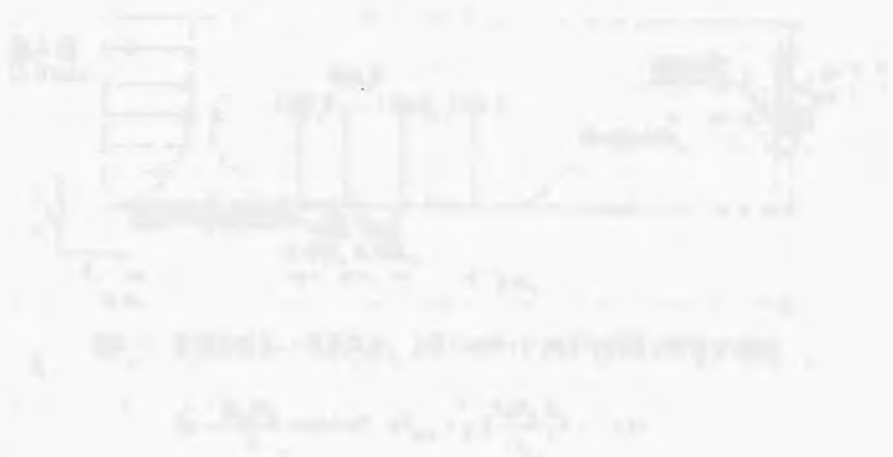
本文中の諸量は H_b , $\langle u_b \rangle$ 及び密度 ρ で無次元化している。

第7章 参考文献

- 1) 持田、村上、近藤、林 (1990) : 代数応力モデルによる2次元角柱周辺の乱流場の数値解析 第11回風工学シンポジウム講演論文集 pp.185-188
- 2) 村上、持田、近藤、田中 (1991) : 代数応力モデルによる2次元角柱周辺の乱流場の数値解析 日本建築学会計画系論文報告集 第419号 pp.1-pp.9
- 3) 近藤、村上、持田 (1994) : 改良 $k-\epsilon$ モデルによる2次元建物モデル周辺気流の数値計算 第13回風工学シンポジウム講演論文集 pp.515-520
- 4) Launder, B.E., Reece, G.J., Rodi, W.: Progress in The Development of A Reynolds-stress Turbulent Closure, J. Fluid Mech., vol.68, pp.537-566, 1975
- 5) Gibson, M.M., Launder, B.E.: Ground Effects on Pressure Fluctuations in The Atmospheric Boundary Layer, J. Fluid Mech., 86, pp.491-511, 1978
- 6) Craft, T.J. and Launder, B.E. (1992) A New wall of 'Wall-Reflection' Effects on the Pressure-Strain Correlation and its Application to the Turbulent Impinging Jet, AIAA J. 30, 2970
- 7) Launder, B.E. and Spalding, D.B. (1974) : The numerical computation of turbulent flows. : Comp. Meth. Appl. Mech. Eng., 3, pp.269-289
- 8) 河本他 (1992) : 応力方程式モデルを用いた高速型 G S M A C 有限要素法による乱流場の解析 第6回数値流体力学シンポジウム講演論文集 pp.631-634
- 9) 長野他 (1991) : 第23回乱流シンポジウム講演論文集 pp.8-11
- 10) Nagano, Y., Tagawa, M. and Tsuji, T. (1991) Effect of Adverse Pressure Gradients on Mean Flows and Turbulence Statistics in a Boundary Layer. Proc. 8th Sym. Turbulent Shear Flows. pp.7-21

第八章

DSM による不安定都市境界層の 乱流熱輸送の解析



第8章 DSMによる不安定都市境界層の乱流熱輸送の解析

8.1 はじめに

都市への人口集中に伴うエネルギー消費の増大、地表面の改変等により、ヒートアイランドをはじめとする都市気候と呼ばれる都市特有の現象が生ずることが確認されているが、都市における温熱気環境を正確に予測するためには、乱流熱輸送性状を正確に把握する必要がある。

本章では地表面に温度差のある都市空間の乱流熱輸送を、 $k-\epsilon$ モデルと DSM で解析し、風洞実験結果と比較する。この比較により単純な勾配拡散近似に基づく $k-\epsilon$ モデルの構造上の欠点を指摘し、不安定状態の流れ場における浮力の生産効果を組み込んだ改良型 $k-\epsilon$ モデルを提案し、その解析を行った。風洞実験並びに DSM との結果の比較から今回提案する改良型 $k-\epsilon$ モデルの限界及び今後の改善点についても考察する。

8.2 対象とする流れ (図 8.1)^{1)~3)}

—比較に用いた風洞実験の概要³⁾—

床面に高さ 10mm の roughness を 20mm 間隔で設置。境界層高さ $L_0 = 0.4\text{m}$ 、 $x_3 = L_0$ での風速 $\langle u_0 \rangle = 1.1\text{m/s}$ 、 $\langle \Delta\theta_0 \rangle$ 、(Hot Panel 表面温度—流入面空気温度) 112°C ¹⁾

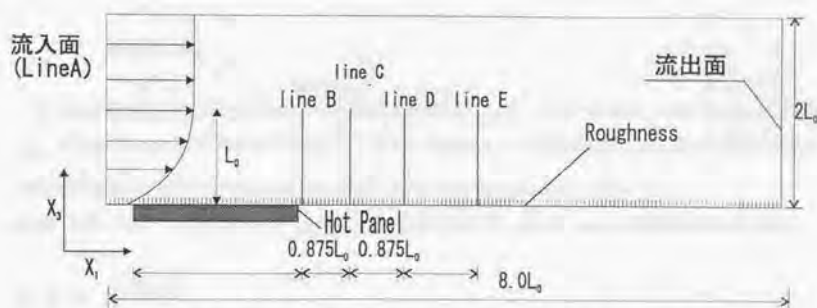


図8.1 計算対象 (L_0 : 境界高さ、上図lineB~lineEで実験と計算を比較)

$$Re = \frac{\langle u_0 \rangle L_0}{\nu} = 2.9 \times 10^4, \quad Ri_{bulk} = g_3 \beta \frac{\langle \Delta\theta_0 \rangle L_0}{\langle u_0 \rangle^2} = -1.21$$

8.3 数値計算の概要

8.3.1 計算ケース (表 8.1)

$k-\varepsilon$ (case1~case3) と D S M (case4) の計算を行った。 $k-\varepsilon$ では標準 (case1) と乱流熱フラックスの評価に改良を加えた改良型の計算ケース (case 2, case 3) を比較。

表 8.1 計算ケース

	乱流モデル	$\langle u_3 \theta' \rangle$ の評価方法。
case1	$k-\varepsilon$	通常の勾配拡散近似。 $\langle u_3 \theta' \rangle = -\frac{\nu_t \partial \langle \theta \rangle}{\sigma_\theta \partial x_3}$; $\sigma_\theta = 0.5$
case2	$k-\varepsilon$	通常の勾配拡散近似に浮力の影響を加味。(表 8.3(8-37) 式) 但し $\langle \theta'^2 \rangle$ の代数近似 (表 8.3(40) 式)
case3	$k-\varepsilon$	通常の勾配拡散近似に浮力の影響を加味。(表 8.3(8-37) 式) 但し $\langle \theta'^2 \rangle$ の輸送方程式を解く (表 8.2(8-5) 式)
case4	D S M	$\langle u_3 \theta' \rangle$ と $\langle \theta'^2 \rangle$ の輸送方程式を解く。(表 8.2 参照)

8.3.2 基礎方程式

D S M の基礎方程式を表 8.2 に示す。圧力歪み相関項 $\phi_{ij(2)}$ は I P M⁴⁾ を用い、wall reflection 項 $\phi_{ij(2)}^w$ は Graft-Launder のモデル⁵⁾ を用いた。また D S M において運動方程式以外の全ての輸送方程式の乱流拡散項には G G D H (General Gradient Diffusion Hypothesis) を用いる。
case1 で用いた $k-\varepsilon$ では Launder-Spalding の標準モデル⁶⁾。case2, case3 の詳細は表 8.3 参照。

8.3.3 計算条件

図 8.1 に示す $8.0L_0(x_1) \times 2.0L_0(x_3)$ の解析領域を、 $53(x_1) \times 17(x_3)$ のメッシュ分割、移流項差分スキームは全て Q U I C K スキームを使用。表 8.4 に境界条件を示す。Re は実験と同じく 2.9×10^4 。

表 8.1 標準型 DSM の基礎方程式 (非等温)

$$\langle u_i' u_j' \rangle \text{ 方程式} \quad \frac{D \langle u_i' u_j' \rangle}{Dt} = D_{ij} + P_{ij} + \phi_{ij} + G_{ij} - \varepsilon_{ij} \quad (8-1)$$

$$\langle u_i' \theta' \rangle \text{ 方程式} \quad \frac{D \langle u_i' \theta' \rangle}{Dt} = D_{i\theta} + P_{i\theta(1)} + P_{i\theta(2)} + G_{i\theta} + \phi_{i\theta} \quad (8-2)$$

$$\langle \varepsilon \rangle \text{ 方程式} \quad \frac{D \varepsilon}{Dt} = D_\varepsilon + \frac{\varepsilon}{k} (C_{\varepsilon 1} P_k + C_{\varepsilon 2} G_k - C_{\varepsilon 2} \varepsilon) \quad (8-3)$$

$$\langle \theta'^2 \rangle \text{ 方程式} \quad \frac{D \langle \theta'^2 \rangle}{Dt} = D_\theta + P_\theta - 2 \cdot \varepsilon_\theta \quad (8-4)$$

$$k = \frac{1}{2} \langle u_i' u_i' \rangle \quad (8-5) \quad P_i = \frac{1}{2} P_{ii} \quad (8-6)$$

$$D_{ij} = \frac{\partial}{\partial x_m} (C_1 \langle u_m' u_i' \rangle \frac{k}{\varepsilon} \frac{\partial \langle u_j' u_i' \rangle}{\partial x_i}) \quad (8-7) \quad D_k = \frac{\partial}{\partial x_m} (C_k \langle u_m' u_i' \rangle \frac{k}{\varepsilon} \frac{\partial k}{\partial x_i}) \quad (8-8)$$

$$D_\varepsilon = \frac{\partial}{\partial x_m} (C_\varepsilon \langle u_m' u_i' \rangle \frac{k}{\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i}) \quad (8-9) \quad D_{i\theta} = \frac{\partial}{\partial x_m} (C_{i\theta} \langle u_m' u_i' \rangle \frac{k}{\varepsilon} \frac{\partial \langle u_i' \theta' \rangle}{\partial x_i}) \quad (8-10)$$

$$D_\theta = \frac{\partial}{\partial x_m} (C_\theta \langle u_m' u_i' \rangle \frac{k}{\varepsilon} \frac{\partial \theta}{\partial x_i}) \quad (8-11)$$

$$P_{ij} = -\langle u_i' u_k' \rangle \frac{\partial \langle u_j \rangle}{\partial x_k} - \langle u_j' u_k' \rangle \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_k} \quad (8-12)$$

$$P_{i\theta(1)} = -\langle u_i' u_k' \rangle \frac{\partial \langle \theta \rangle}{\partial x_k} \quad (8-13) \quad P_{i\theta(2)} = -\langle u_k' \theta' \rangle \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_k} \quad (8-14)$$

$$G_{ij} = -\langle u_i' \theta' \rangle g_j \beta - \langle u_j' \theta' \rangle g_i \beta \quad (8-15) \quad G_k = -\langle u_i' \theta' \rangle g_i \beta \quad (8-16)$$

$$G_{i\theta} = -g_i \beta \langle \theta'^2 \rangle \quad (8-17) \quad P_\theta = -\langle u_i' \theta' \rangle \frac{\partial \langle \theta \rangle}{\partial x_i} \quad (8-18)$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{2}{3} \varepsilon \delta_{ij} \quad (8-19) \quad \varepsilon_\theta = \frac{1}{2R} \frac{\langle \theta'^2 \rangle}{k} \varepsilon \quad (8-20)$$

$$\phi_{ij} = \phi_{ij(1)} + \phi_{ij(2)} + \phi_{ij(3)} + \phi_{ij(1)}^w + \phi_{ij(2)}^w \quad (8-21)$$

$$\phi_{ij(1)} = -C_1 \frac{\varepsilon}{k} (\langle u_i' u_j' \rangle - \frac{2}{3} k \delta_{ij}) \quad (8-22) \quad \phi_{i\theta(1)} = -C_1 (P_{ij} - \frac{2}{3} P_i \delta_{ij}) \quad (8-23)$$

$$\phi_{ij(3)} = -C_2 (G_{ij} - \frac{2}{3} G_k \delta_{ij}) \quad (8-24)$$

$$\phi_{ij(1)}^w = \sum_{n=1}^{n_0} C_1 \frac{\varepsilon}{k} (\langle u_k' u_m' \rangle n_k^{(w)} n_m^{(w)} \delta_{ij} - \frac{3}{2} \langle u_k' u_i' \rangle n_k^{(w)} n_j^{(w)} - \frac{2}{3} \langle u_k' u_j' \rangle n_k^{(w)} n_i^{(w)}) \frac{k^{3/2}}{C_1 h_n^{(w)} \varepsilon} \quad (8-25)$$

$$\begin{aligned} \phi_{i\theta(1)}^w &= \sum_{n=1}^{n_0} C_1 \frac{\partial \langle u_j \rangle}{\partial x_m} \langle u_i' u_m' \rangle (\delta_{ij} - 3 n_i^{(w)} n_j^{(w)}) \\ &+ C_3 k a_{im} (\frac{\partial \langle u_k \rangle}{\partial x_i} n_k^{(w)} \cdot n_m^{(w)} \cdot \delta_{ij} - \frac{3}{2} \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_i} n_m^{(w)} \cdot n_j^{(w)}) - \frac{3}{2} \frac{\partial \langle u_j \rangle}{\partial x_j} n_m^{(w)} \cdot n_i^{(w)}) \\ &+ C_4 k \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_m} n_i^{(w)} \cdot n_m^{(w)} (n_i^{(w)} \cdot n_j^{(w)} - \frac{1}{3} \delta_{ij}) \frac{k^{3/2}}{C_1 h_n^{(w)} \varepsilon} \end{aligned} \quad (8-26)$$

$$a_{ij} = (\langle u_i' u_j' \rangle - 2/3 k \delta_{ij}) / k \quad (8-28)$$

$$\phi_{i\theta} = \phi_{i\theta(1)} + \phi_{i\theta(2)} + \phi_{i\theta(3)} + \phi_{i\theta(1)}^w \quad (8-29)$$

$$\phi_{i\theta(1)} = -C_{i\theta 1} \frac{\varepsilon}{k} \langle u_i' \theta' \rangle \quad (8-29) \quad \phi_{i\theta(2)} = -C_{i\theta 2} P_{i\theta(1)} \quad (8-30)$$

$$\phi_{i\theta(3)} = -C_{i\theta 3} G_{i\theta} \quad (8-31)$$

$$\phi_{i\theta(1)}^w = \sum_{n=1}^{n_0} C_{i\theta 1} \frac{\varepsilon}{k} \langle u_k' \theta' \rangle n_k^{(w)} n_i^{(w)} \frac{k^{3/2}}{C_1 h_n^{(w)} \varepsilon} \quad (8-32)$$

$C_1: 1.8 \quad C_2: 0.6 \quad C_3: 0.6 \quad C_4: 0.5 \quad C_5: 0.5 \quad C_6: -0.08 \quad C_7: -0.1 \quad C_8: -0.4$
 $C_9: 0.22 \quad C_{10}: 0.16 \quad C_{11}: 1.44 \quad C_{12}: 1.92 \quad C_{13} \text{ は } G_k > 0 \text{ の場合 } 1.44 \quad G_k < 0 \text{ の場合 } 0.0$
 $C_{14}: 0.15 \quad C_{15}: 0.15 \quad C_{16}: 3.0 \quad C_{17}: 0.5 \quad C_{18}: 0.3 \quad C_{19}: 0.5 \quad C_{20}: 2.5 \quad R: 0.8$

表 8. 3 浮力効果を含んだ $k-\varepsilon$ の導出

D S M の基礎方程式 (表 8.2) をもとに、本章で用いたアンサンブル平均型の乱流モデルを階層的に解析する。

Level A

階層の頂上にいる高精度型乱流モデル D S M (本章 case 4) がある。

D S M で用いる $\langle u_i' \theta' \rangle$ の輸送方程式 (表 8.2 (8-4) 式) を再配する。

$$\frac{D\langle u_i' \theta' \rangle}{Dt} = D_{i\theta} - \langle u_i' u_j' \rangle \frac{\partial \langle \theta \rangle}{\partial x_j} - \langle u_j' \theta' \rangle \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_k} - g_i \cdot \beta \cdot \langle \theta'^2 \rangle + \phi_{i\theta} \quad (8-33)$$

Level B (本章 case 3)

(33) 式において局所平衡かつ定常状態を仮定すると、実質微分項 $\frac{D\langle u_i' \theta' \rangle}{Dt}$ ならびに拡散項 $D_{i\theta}$ は消える。また $\phi_{i\theta}$ ((28) 式) において Wall reflection 項 $\phi_{i\theta(1)}^w$ ((8-32) 式) を無視して ((8-33) 式) を $\langle u_i' \theta' \rangle$ に関して整理すれば、

$$\langle u_i' \theta' \rangle = -\frac{k}{\varepsilon} \left\{ C_{\theta 1} \langle u_i' u_j' \rangle \frac{\partial \langle \theta \rangle}{\partial x_j} + C_{\theta 2} \langle u_j' \theta' \rangle \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_k} + C_{\theta 3} g_i \cdot \beta \cdot \langle \theta'^2 \rangle \right\} \quad (8-34)$$

これが W E T モデルの概念に基づく $\langle u_i' \theta' \rangle$ の高精度近似モデルの原形である。ここで数値定数の最適化より $C_{\theta 1} = C_{\theta 2} = C_{\theta 3} = 0.25$ である^{71,8)}。4 の結果より、(8-34) 式下線部 b の寄与はほとんど無視出来るのでこれを除外し、かつ $\langle u_i' \theta' \rangle$ のみに着目して ((8-34) 式) を変形すれば次式が得られる。

$$\langle u_i' \theta' \rangle = -\frac{k}{\varepsilon} \left\{ C_{\theta 1} \langle u_i' u_j' \rangle \frac{\partial \langle \theta \rangle}{\partial x_j} + C_{\theta 2} \langle u_j' \theta' \rangle \frac{\partial \langle \theta \rangle}{\partial x_3} + C_{\theta 3} g_i \cdot \beta \cdot \langle \theta'^2 \rangle \right\} \quad (8-35)$$

ここで、

$$\left| \frac{\partial \langle \theta \rangle}{\partial x_1} \right| \left| \frac{\partial \langle \theta \rangle}{\partial x_3} \right| \left| \left\langle u_i' u_j' \right\rangle \frac{\partial \langle \theta \rangle}{\partial x_1} \right| < \left| \langle u_i' u_j' \rangle \frac{\partial \langle \theta \rangle}{\partial x_3} \right|$$

と考えると (8-35) 式右辺第一項を無視することが出来る。

$$\langle u_i' \theta' \rangle = \frac{k}{\varepsilon} C_{\theta 1} \langle u_i' u_j' \rangle \frac{\partial \langle \theta \rangle}{\partial x_3} - \frac{k}{\varepsilon} C_{\theta 3} g_i \cdot \beta \cdot \langle \theta'^2 \rangle \quad (8-36)$$

(8-36) 式の $\langle u_i' u_j' \rangle$ を $\frac{2}{3} k$ で近似し、浮力効果を含んだ $\langle u_i' \theta' \rangle$ の渦粘性近似表現を得る。

$$\begin{aligned} \langle u_i' \theta' \rangle &= -\frac{2}{3} C_{\theta 1} \frac{k^2}{\varepsilon} \frac{\partial \langle \theta \rangle}{\partial x_3} - \frac{k}{\varepsilon} C_{\theta 3} g_i \cdot \beta \cdot \langle \theta'^2 \rangle \\ &= -\frac{\nu_t}{\sigma_\theta} \frac{\partial \langle \theta \rangle}{\partial x_3} - \frac{k}{\varepsilon} C_{\theta 3} g_i \cdot \beta \cdot \langle \theta'^2 \rangle \end{aligned} \quad (8-37)$$

(37)式の右辺第二項が今回新たに導入する浮力効果を考慮した付加項である。(8-37)式中の σ_θ と $C_{\theta 1}$ 、 C_μ の関係は、 $v_i = C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}$ であるから、

$$\frac{2}{3} C_{\theta 1} = \frac{C_\mu}{\sigma_\theta} \quad (8-38)$$

ここで $C_{\theta 1}=0.25$ 、 $C_\mu=0.09$ 、より $\sigma_\theta=0.5$ 。case 3では(8-37)式中の $\langle \theta'^2 \rangle$ は $\langle \theta'^2 \rangle$ の輸送方程式(8-5)式(表8.2)を解く。ただしcase 3は $k-\varepsilon$ を主体としているので $\langle \theta'^2 \rangle$ の輸送方程式中の拡散項 C_θ はGGDH(8-11)式ではなく、次の渦粘性近似表現を用いる。

$$D_\theta = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{v_i}{\sigma_{\theta 2}} \frac{\partial \langle \theta'^2 \rangle}{\partial x_i} \right) \quad (\sigma_{\theta 2}=1.0) \quad (8-39)$$

Level C (本章のcase 2)

case 2では $\langle \theta'^2 \rangle$ の輸送方程式において、移流拡散のない局所平衡($P_\theta = 2\varepsilon_\theta$)を仮定し、 $\langle \theta'^2 \rangle$ を(40)式で代数近似する。

$$\begin{aligned} \langle \theta'^2 \rangle &= -\frac{k}{\varepsilon} C_{\theta 4} \langle u'_i u'_j \rangle \frac{\partial \langle \theta \rangle}{\partial x_i} \\ &= -\frac{k}{\varepsilon} C_{\theta 4} \langle u'_i \theta \rangle \frac{\partial \langle \theta \rangle}{\partial x_i} = C_{\theta 4} \frac{k}{\varepsilon} \frac{v_i}{\sigma_\theta} \left(\frac{\partial \langle \theta \rangle}{\partial x_i} \right)^2 \end{aligned} \quad (8-40)$$

ここで、 $C_{\theta 4}=1.6$ ($\approx 2R$)。(8-40)式の導出の際、 ε_θ は表8.2(8-20)式で近似している。

表8.4 境界条件

	$k-\varepsilon$, DSM
流入面	$\langle u_i(x_3) \rangle$: 風洞実験値(べき指数1/2の指数分布) $\langle u_3(x_3) \rangle = 0$, $k(x_3)$, $\langle u'_i u'_j(x_3) \rangle^{1/2}$ は風洞実験値、 $\langle \Delta \theta \rangle = 0$, $v_i(x_3) = k(x_3)^{1/2} l(x_3)$ $\varepsilon(x_3) = C_\mu k(x_3)^{2/3} / l(x_3)$, $l(x_3) = \langle u'_i u'_j(x_3) \rangle^{1/2} \left(\partial \langle u_i(x_3) \rangle / \partial x_3 \right)^{-1}$ ここで、 $\langle u'_i u'_j(x_3) \rangle$ は風洞実験値(≈ 0.0003)
流出面	$\langle u_1 \rangle$, $\langle u_2 \rangle$, $\langle u_3 \rangle$, k , ε , $\langle \Delta \theta \rangle$, $\langle u'_i u'_j \rangle$, $\langle u'_i \theta \rangle$: $\partial / \partial x_3 = 0$
上空面	$\langle u_3 \rangle = 0$, $\langle u_1 \rangle$, $\langle u_2 \rangle$, k , ε , $\langle \Delta \theta \rangle$, $\langle u'_i u'_j \rangle$, $\langle u'_i \theta \rangle$: $\partial / \partial x_3 = 0$
地表面	地表面上のシアーストレス(τ_w)は(41)、(42)式、 $\langle u'_i u'_j \rangle$ 方程式中の地表面第一セルの $\varepsilon(\varepsilon)$ は(8-43)式で与える。 $\frac{\langle u'_i \rangle_p}{u_*} = \frac{1}{k} \ln \left(\frac{1/2 h_p}{z_0} \right) \dots (8-41)$ $\langle \tau_w \rangle = u_*^2 \frac{\langle u'_i \rangle_p}{\left \langle u'_i \rangle_p \right } \dots (8-42)$ $\varepsilon = \frac{C_\mu^{3/4} k_p^{3/2}}{k h_p} \ln \left(\frac{1/2 h_p}{z_0} \right) \dots (8-43)$ $\varepsilon_p = \frac{C_\mu^{3/4} k_p^{3/2}}{1/2 k h_p} \dots (8-44)$ k , $\langle \Delta \theta \rangle$, $\langle u'_i u'_j \rangle$: $\partial / \partial x_3 = 0$ 、発熱量では、 $\langle u'_i \theta \rangle = 0.013$

8.4 DSMの解析と標準k-εの問題点

8.4.1 平均温度分布 (図8.2)

k-εのcase1では、DSM(case4)、風洞実験に比べ、line B～Eの全てのlineで地表近傍の温度を大幅に過大に評価している。DSMは実験と大変よく一致している。

8.4.2 $\langle u_3'\theta' \rangle$ の分布 (図8.3)

DSMとk-εのcase1では、 $\langle u_3'\theta' \rangle$ の分布が大きく異なっている。温度分布 (図8.2) に関するDSMと実験との極めてよい対応関係から考えて、DSMの $\langle u_3'\theta' \rangle$ 分布の方がより正しいと考えるのが妥当である。図8.3に示す標準型のk-εのcase1では、Hot Panel直上で $\langle u_3'\theta' \rangle$ の値を、DSMに比べてかなり小さく評価する。したがって、標準型のk-εの場合、熱が上方に十分に拡散されず、パネル直上の温度がDSMに比べて過大となる。この過大な温度が移流により風下に輸送されて、case1ではline B～line Eの地表付近において温度の値が大きくなる (図8.2)。k-εのcase1がHot Panel直上の値を小さく評価する原因について以下で考察する。

8.4.3 kの生産メカニズムの検討 (図8.4)

表8.2(4)式に示す様に $\langle u_3'\theta' \rangle$ の輸送方程式には、3つの生産項がある。すなわち、 $P_{3\theta(1)}$ ：平均温度勾配によるもの (表8.2(8-13)式)、 $P_{3\theta(2)}$ ：平均速度勾配によるもの ((8-14)式)、 $G_{3\theta}$ ：浮力によるもの ((8-17)式) のおのおのである。通例のk-εで用いられる勾配拡散近似 ($\langle u_3'\theta' \rangle = -v_t/\sigma_\theta \cdot \partial\langle\theta\rangle/\partial x_3$) は、この3つの生産項の中で $P_{3\theta(1)}$ ($-\langle u_3'u_3' \rangle \cdot \partial\langle\theta\rangle/\partial x_3$) の寄与が卓越する場合にはある程度妥当な近似となるが、平均速度勾配や浮力による生産項が比較的大きな正の寄与をもつ場合には、それらによる $\langle u_3'\theta' \rangle$ (今回の流れでは正)の増加を直接的には表現できない。本解析の場合、DSMの結果からこれらの生産項の大きさを評価すると、Hot Panelの直上から直後の地表面付近では浮力生産項 ($-g\beta\langle\theta^2\rangle, G_{3\theta}$) の正の寄与が平均温度勾配による生産項 ($-\langle u_3'u_3' \rangle \cdot \partial\langle\theta\rangle/\partial x_3, P_{3\theta(1)}$) に比べて大きい (図8.4) ($P_{3\theta(2)}$ はほとんど0)。このような流れでは $\langle u_3'\theta' \rangle$ の浮力生産項の効果を組み込むことにより精度の向上が期待される。

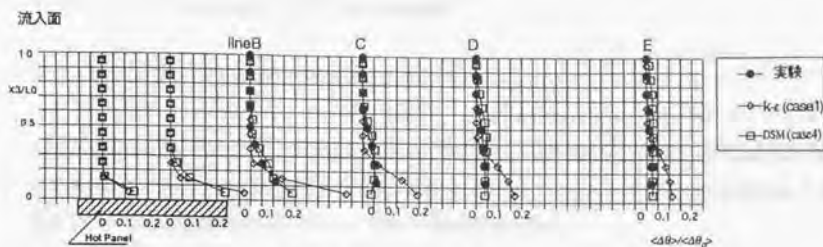


図 8.2 平均温度分布

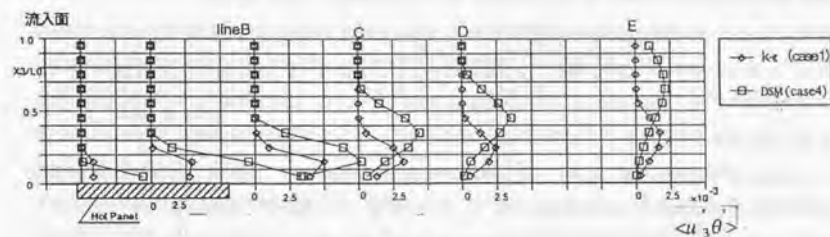


図 8.3 $\langle u_3 \theta \rangle$ の分布

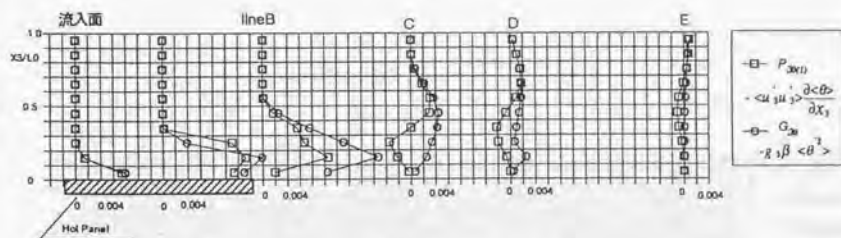


図 8.4 $\langle u_3 \theta \rangle$ の生産項の分布

8.5 $k-\varepsilon$ における $\langle u_3 \theta' \rangle$ のモデルの改良の効果

8.5.1 $\langle u_3 \theta' \rangle$ に浮力生産項の効果を組み込んだ改良型 $k-\varepsilon$

本章ではWE T^{7), 8)}の概念に基づき村上・加藤・近本モデル文⁹⁾における $\langle u_3 \theta' \rangle$ の評価式に現れる安定成層中の浮力によるdampingを表す項 f_{BB} の導出と同様のプロセスで、不安定流中の浮力による $\langle u_3 \theta' \rangle$ の増大の効果の組み込みを行った。表8.3に導出過程を示す。

8.5.2 平均温度分布 (図8.5)

$\langle u_3 \theta' \rangle$ のモデル化に浮力の影響を加味した $k-\varepsilon$ のcase2, case3とともに、通例の勾配拡散近似(case1)に比べて、Hot Panel 後方のline B～Eにおいて地表面近傍の温度が低下し、case1に比べて実験との対応に一定の改善が見られる。ただし、地表面付近の温度は依然として高めとなっている。また $\langle \theta'^2 \rangle$ のモデル化の差異に関しては、 $\langle \theta'^2 \rangle$ の輸送方程式を解いたcase3は、 $\langle \theta'^2 \rangle$ を代数近似したcase2に比べて実験にやや近付いている。この差異は、case2では $\langle \theta'^2 \rangle$ の輸送方程式の局所平衡を仮定あひて代数近似しており、移流や拡散の効果が考慮されてないため、Hot Panel 付近で生産される大きな $\langle \theta'^2 \rangle$ の値の後方への輸送が全く再現されないことにより生じる。この解析対象では移流項の効果が大きいものと予想されるので $\langle \theta'^2 \rangle$ を表8.3の(40)式で代数近似するcase2に比べ、輸送方程式を解くcase3の導出(表8.3)において無視した輸送方程式中の移流拡散の効果を考慮する必要があり、前述のように、これを組み込んだDSM(case4)の温度分布は実験とよく一致している(図8.2)。

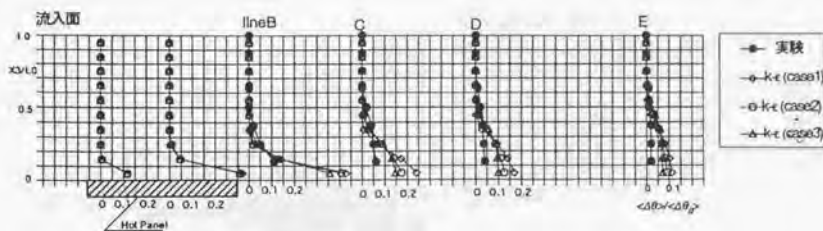


図8.5 平均温度分布

8.6 結論

(1) 本章で取り扱ったような不安定状態の都市境界層流では、 $\langle u_j' \theta' \rangle$ の生産項の中で浮力生産項の寄与が大きく無視出来ない。このような場合、 $k-\varepsilon$ で用いる通常の勾配拡散近似によるモデル化(case1)は全く妥当性を持ち得ない。

(2) 浮力の影響を加味して $\langle u_j' \theta' \rangle$ のモデル化を行った $k-\varepsilon$ の結果(case2,3)は、浮力効果を全く考慮していないcase1に比べて温度分布が実験に近づき、一定の改善が見られた。しかし実験との対応は依然としてDSMの一致のレベルには達していない。

(3) $\langle \theta'^2 \rangle$ を代数式で与えるcase2に比べて、 $\langle \theta'^2 \rangle$ の輸送方程式を解くcase3には温度分布の結果に改善が見られた。このことは本報のような流れ場では $\langle \theta'^2 \rangle$ の輸送方程式の局所平衡に基づく近似に問題があることを示している。

(4) DSM(case4)はHot Panel後方の温度分布を正しく予測し、改良により大幅に改善された結果を示す。したがって、本研究のような不安定状態の都市境界層を解析する場合、現在のRANSモデルの中では最も高精度なモデルとして位置付けることができる。

第8章 記号

x_i : 座標3成分 ($i=1$: 主流方向, $i=3$: 鉛直方向 (上向きが正))

u_i : 風速2成分

$\langle f \rangle$: 座標 f の時間平均

f' : 平均からのずれ

L_0 : 代表長さ (境界高さ)

Ri_{bulk} : バルクリチャードソン数 $\left(g\beta \frac{\langle \Delta\theta_0 \rangle L_0}{\langle u_0 \rangle^2} \right)$

$\langle u_0 \rangle$: 代表風速 (高さ L_0 における流入風速 u_i 成分の平均値)

$\Delta\theta$: 温度差 (各点の温度の一流入面での境界高さ L_0 の平均温度)

$\langle \Delta\theta_0 \rangle$: 代表温度差 (Hot Panel の温度一流入面での境界高さ L_0 における平均温度)

k : 乱流エネルギー

ε : エネルギー消散率

$\langle u_i' u_j' \rangle$: レイノルズストレス

P_{ij} : $\langle u_i' u_j' \rangle$ の速度勾配による生産項

G_{ij} : $\langle u_i' u_j' \rangle$ の浮力による生産項

D_{ij} : $\langle u_i' u_j' \rangle$ の拡散項

Φ_{ij} : 圧力歪相関項

ε_{ij} : $\langle u_i' u_j' \rangle$ の散逸項

$\langle u_i \theta' \rangle$: 温度フラックス

$P_{\theta(1)}$: $\langle u_i \theta' \rangle$ の温度勾配による生産項

$P_{\theta(2)}$: $\langle u_i \theta' \rangle$ の速度勾配による生産項

G_{θ} : $\langle u_i \theta' \rangle$ の浮力による生産項

D_{θ} : $\langle u_i \theta' \rangle$ の拡散項

$\langle \theta'^2 \rangle$: 温度変動強度

P_θ : $\langle \theta'^2 \rangle$ の生産項

ε_θ : $\langle \theta'^2 \rangle$ の散逸項

R : スカラ変動の時間スケールと速度変動の時間スケールの比

h_n : 壁面から第一セル差分定義点までの距離

ν_t : 渦動粘性係数

g_i : 重力加速度ベクトル (0, 0, -9.8m/s^2)

諸量は L_0 、 $\langle u_0 \rangle$ 、 $\langle \Delta\theta_0 \rangle$ 、密度 ρ で無次元化

謝辞

本研究は日本建築学会・地球環境建築特別研究委員会（安岡正人委員長）の「都市気候モデリング小委員会」（村上周三主査）の活動の一環として行われたことを付記する。また今回の改良の計算は東京大学大学院生（当時）の野口康仁君等によるものである。記してここに謝意を表します。

第8章 注

注1) これらのモニン・オブコフの相似条件を考慮した単純なモデルで変換するならば、実現象のおよそ、風速 5.0 m/s 、温度 43°C に相当する³⁾

第5章 参考文献

- 1) 野口、村上、持田、富永 (1993) : 都市の温熱環境の数値シミュレーション (その1) 日本建築学会大会学術講演会梗概集 環境工学, pp.779-780
- 2) 持田、村上、富永、野口 (1994) : 地表面に温度分布のある都市境界層流中の乱流熱輸送の数値解析。第9回NSTシンポジウム講演論文集, pp.77-80
- 3) 大場、村上 (1977) : 床面に温度差のある成層流の気流性状並びに拡散に関する風洞実験 その1-3、日本建築学会大会学術講演会梗概集 環境工学, pp.213-218
- 4) Launder, B.E., Reece, G.J., Rodi, W.: Progress in The Development of A Reynolds-stress Turbulent Closure, J. Fluid Mech., vol.68, pp.537-566, 1975
- 5) Craft, T.J. and Launder, B.E. (1992) A New wall of 'Wall-Reflection' Effects on the Pressure-Strain Correlation and its Application to the Turbulent Impinging Jet. AIAA J. 30, 2970
- 6) Launder, B.E. and Spalding, D.B. (1974) : The numerical computation of turbulent flows. : Comp. Meth. Appl. Mech. Eng., 3, pp.269-289
- 7) Launder, B.E. (1988) : On the computation of convective heat transfer in complex turbulent flows. J.Heat.Transfer vol.110, pp1112-1128
- 8) 村上、加藤、永野 (1990) : 温度フラックスに局所平衡型のWETモデルを用いた $k-\epsilon$ モデルによる非等温室内気流の数値解析、生産研究 第43巻1号, pp.57-60
- 9) 村上、加藤、近本 (1994) : 安定成層下の低 Re 数流れにおける $k-\epsilon$ モデル (その1)、日本建築学会大会学術講演会梗概集 環境工学, pp.17-18

第9章 結語

本研究は応力方程式モデル (Differential Stress Model あるいは Differential Second-moment Closure Model、以降 DSM と略す) を室内や建物周りなどの建築・都市空間の熱・気流解析に適用し、その有効性を DSM の簡略型である代数応力方程式モデル (Algebraic Stress Model、以降 ASM と略記)、Large Eddy Simulation (以降 LES と略記) や実験結果との比較から検討した成果をまとめたものである。特に DSM を利用する上での利点と問題点について考察を行うことがこの研究の目的である。具体的な結論は各章に譲り、ここでは主要な結論と今後の課題について述べる。

第二章では、RANS モデルの発展の歴史とレイノルズ平均の考え方を簡単に解説し、標準型 DSM においてレイノルズストレス ($\langle u_i' u_j' \rangle$) 及び乱流熱フラックス ($\langle u_i' \theta' \rangle$) の各輸送方程式をクローズするためのモデル化について説明した。

第三章では、DSM を中心とした RANS モデルのモデリングに利用されるテンソル解析の基礎について解説を行い、それを利用した圧力歪み相関項や粘性消散項等 DSM の高次モデルの紹介を行った。それ以外にも最新型の DSM の紹介、更には低レイノルズ数型 DSM の解説も行った。

第四章では、レイノルズストレス ($\langle u_i' u_j' \rangle$) 輸送方程式を解くための、具体的な数値計算法について説明した。まず最も簡単な移流・拡散方程式において安定な数値解を得るためには拡散項の働きが非常に重要であることを示し、代表的な数値安定化スキーム (一次風上差分、QUICK スキーム、一次精度後退差分) においてその安定度が数値拡散 (粘性) と言う形で評価できることを示した。またその利用の是非についても述べた。次に DSM において運動方程式を解く場合に、レイノルズストレス ($\langle u_i' u_j' \rangle$) を含む項が拡散項となるが、ここで PSEUDO VISCOSITY の概念を利用して $\langle u_i' u_j' \rangle$ を拡散型に変形することにより計算安定性を確保する手法について解説を行った。更に $\langle u_i' u_j' \rangle$ の輸送方程式中の GGDH による拡散項において負拡散が生ずる可能性を示唆し、それを回避する手法について解説を行った。

第五章では、DSM を実際の室内の等温・非等温気流に適用した例を示した。特に工学上広く用いられている $k-\epsilon$ モデルや DSM を簡略化した ASM との比較を詳細に行った。特に DSM と ASM はレイノルズストレス ($\langle u_i' u_j' \rangle$) や乱流熱フラックス ($\langle u_i' \theta' \rangle$) の生産項を正しく評価しているため 2 次モーメントの予測精度に関しては $k-\epsilon$ に比べて、格段に改善することが示された。更に、DSM は $\langle u_i' u_j' \rangle$ や $\langle u_i' \theta' \rangle$ の移流・拡散項を ASM に比べて正しく評価しているので、噴流域等移流の活発な領域において ASM の結果を改善することが示された。

第六章では、屋外建物周辺流れ場を想定して、立方体周辺3次元流れ場の解析に DSM を適用し、ASM、LES との比較により、その有効性をレイノルズストレス ($\langle u_i' u_j' \rangle$) の輸送方程式の各項のモデル毎に検討した。また従来より、DSM において問題となっていた Impinging を含む流れ場における Wall reflection 項の取り扱いについて、Craft-Launder のモデルが従来の Gibson-Launder のモデルを大きく改善する結果を示すことが確認された。検討する。また DSM は立方体風上コーナー部で ASM によるレイノルズストレスの異常な非等方分布の予測を改善するものの、屋上面逆流並びに立方体後方循環流の大きさを過大に評価する。この傾向は現在提案されている様々な DSM の高次モデルを適用したが変化がなかった。これは ϕ_i の高次モデルが、単純剪断乱流や平板乱流など比較的単純な流れ場を対象にモデル化・係数チューニングされたためであると考えられる。本研究で示したような複雑流れ場に適用可能な DSM の開発のためには、今後詳細な LES や DNS 等による複雑乱流場におけるモデル検証用のデータの整備が望まれる。

第七章では、屋外建物周辺等温流れ場のうち、境界層流中におかれた2次元建物モデルに DSM を適用し、k-ε モデルや実験との比較により、その有効性を検討した。2次元建物周辺気流においても立方体周辺気流と同様、DSM では特に本章では、屋上面逆流並びに後方循環流の大きさを過大に評価する傾向が見られた。前章の考察を受け、圧力歪み相関項の役割に着目し、そのモデリングが、乱流エネルギーの生産構造に及ぼす影響について考察した。圧力歪み相関項の物理的意味並びに、そのモデル係数を試行的に変化させた計算結果がある程度妥当な結果をもたらすことを鑑みて、この圧力歪み相関項のモデルの改善が、DSM を建物周辺等の複雑流れ場に適用可能にするキーポイントであると考えられる。

第八章では、不安定都市境界層に DSM を適用し、k-ε モデルと比較を行った。DSM は乱流熱フラックス ($\langle u_i' \theta' \rangle$) の浮力生産項を正しく評価するために、温度分布の実験との対応が非常によかった。一方単純な勾配拡散近似に基づく k-ε モデルは、浮力生産項を考慮していないため $\langle u_i' \theta' \rangle$ による熱の拡散が抑制され、温度分布の実験との対応は非常に悪い。本章ではこの k-ε モデルの構造的欠陥を考慮し、従来の単純な勾配拡散近似に浮力効果を組み込んだ新しい k-ε モデルを提案した。この新しい k-ε モデルを同じ不安定都市境界層に適用したところ、DSM には及ばないものの従来の k-ε モデルをある程度改善する結果を示した。以上の考察より、不安定都市境界層において RANS モデルの様々な階層のうち、DSM は最もすぐれたモデルであるといえることができる。

以上本論文の結論を総括すると以上のようになる。

- ① DSM はレイノルズストレスや温度フラックスの輸送方程式の生産項を忠実に再現するため、streamline curvature や不安定境界層など生産項の影響が卓越する流れ場において k-ε に比

べ非常によい結果を示す。このような流れ場は建築環境工学では室内循環流や不安定都市境界層にあたる。

- ②また DSM は ASM にくらべストレスの移流項を正確に評価するため、吹き出し噴流域や建物上空風など移流が卓越する流れ場において ASM よりもよく実験に一致する。
- ③しかしながら現状の標準型の DSM は Bluff Body による流れの剝離領域での予測精度に欠陥があり、このような領域を含む流れ場の予測に用いるには注意が必要である。
- ④ Bluff Body による流れの剝離領域に対応可能な DSM を開発するためには、現状の圧力歪み相関項になんらかの改良を加える必要がある。

現在、日本では乱流シミュレーションの基礎研究としては LES 及び DNS が全盛であり、エンジニアリングアプリケーションとしては $k-\epsilon$ モデルの利用が殆どであり、どちらの分野においても最近 DSM の利用は極めて少なくなっている。しかしながら世界的にみれば、特にその発祥の地であるヨーロッパにおいては、未だ DSM の利用に対する期待が大きいそうである。安価な計算機コストと容易なハンドリング性能で、ある程度の予測精度が期待できるからであろう。本研究ではそのような DSM が建築・都市環境工学分野で利用可能であるかの検討を行った。結果をいえば、室内気流や都市境界層等、比較的静穏な流れ場に対してはかなりの予測精度をもつといえる。しかしながら、建物周辺気流などの剝離をともなう比較的動的な流れ場では現在の所種々の欠陥をもつことが明らかとなった。これは DSM のモデリングがそもそも単純剪断乱流や平板乱流など比較的静穏な流れ場を対象にモデル化されたためであり、複雑流れ場において適用可能とするためには、そのような複雑流れ場において今一度モデルのリファインを行う必要があると考えられる。そのためには、LES や DNS などより高精度のシミュレーションによるデータベースが有用である。現在、筆者は複雑流れ場に適用可能な DSM の開発のための、そのデータベースの作成を検討中である。

謝 辞

謝辞

本論文は筆者が東京大学生産技術研究所研究生として村上研究室に来て以来、東京大学大学院博士課程・東京大学生産技術研究所助手にわたる期間行ってきた、建築・都市空間の熱・気流シミュレーションに関する研究を取りまとめたものである。

東京大学生産技術研究所・教授・村上周三先生からは、研究テーマの設定から結果のまとめかたに至るまでの研究のあらゆる局面において、終始懇切丁寧なご指導を賜りました。

東京大学生産技術研究所・助教授・加藤信介先生からは、数値解析手法、乱流モデルに関する研究全般を通じて、終始懇切丁寧なご指導を賜りました。

新潟工科大学・助教授・持田灯先生（当時東京大学生産技術研究所・講師）からは、研究全般はもちろんのこと、研究の進め方について終始懇切丁寧なご指導を賜りました。

東京大学生産技術研究所・教授・吉澤徹先生、教授・小林敏雄先生、助教授・谷口伸行先生、助教授・半場諒弘先生を始めとするNST研究グループのメンバーの方々からも貴重な御意見を頂きました。

京都大学工学部・助手・平岡久司先生には、乱流数値シミュレーションの面白さを教えて頂きました。また本研究を進めるにあたって終始、励ましのお言葉を頂きました。

また研究活動全般を通じ、東京大学生産技術研究所・技官・高橋岳生先生、建設省建築研究所・林吉彦博士（当時東京大学生産技術研究所・博士研究生）、日建設計（株）近本智行博士（当時東京大学大学院生）、済州大学・講師・崔棟皓先生（当時東京大学大学院生）、日産建設（株）張維博士（当時東京大学大学院生）、前田建設（株）森江龍一郎博士（当時東京大学生産技術研究所・民間等共同研究員）、三建設備（株）水谷国男博士（当時東京大学生産技術研究所・民間等共同研究員）、武蔵工業大学・助教授・近藤靖史先生、新潟工科大学・助手・富永義禎先生（当時東京大学大学院生）、大成建設（株）小林光博士を始めとして、東京大学生産技術研究所・村上加藤研究室関係の皆様から種々のご協力・ご助力を頂きました。

お世話になった方に、ここに記して心からの感謝の意を表します。

最後に、一度は就職への道を勧めながら、著者のわがままを聞き入れて、研究者としての道を進むことを許してくれた両親に感謝します。

Summary

Numerical Study on Air Flow and Heat Transfer in Building and Urban Space by means of Differential Stress Model

by Ryoza Ooka

In this paper, Differential Stress Model (DSM), which is considered the most accurate model of all RANS (Reynolds Averaged Navier Stokes Equation) model, has been applied for various typical flow fields (e.g. room airflow, flow around building and urban boundary layer, etc.) which often appear in the fields of Building Science and Urban Environmental Technology. And its accuracy and availability are examined in each flowfield.

This paper is composed of nine chapters. This paper can be mainly divided into two parts. One part is fundamental part which is from chapter 2 to chapter 4 and describes theoretical explanation of DSM ; the other part is application part which is from chapter 5 to chapter 8 and describes application for various flow fields in Building and Urban Environmental Technology.

In Chapter 1, the purpose and summary is described.

In Chapter 2, the closure problem of turbulence is described and the modeling methods are explained in order to close the equation of Reynolds stress $\langle u_i' u_j' \rangle$ and turbulent heat flux $\langle u_i' \theta' \rangle$ in the case of the standard type of DSM.

In Chapter 3, the modified DSM is introduced. In particular, new models for pressure-strain terms using the concept of tensor analysis and new models for

wall reflection term which can be available in the flow field including impingement.

In Chapter 4, numerical method is explained in order to get stable solution in the DSM computation. In particular, pseudo viscosity method in order to solve momentum equation and avoidance method of negative diffusivity of GGDH (Generalized Gradient Diffusion Hypothesis) in order to solve the equations of all turbulent quantities are explained precisely.

In Chapter 5, three dimensional room airflow with buoyancy and without buoyancy are analyzed by $k-\epsilon$, ASM (Algebraic Stress Model) and DSM. The results of numerical simulation are compared with the experimental results. The results of DSM present best agreement with the experimental results of all these three turbulent models.

In Chapter 6, turbulent flow around a surface mounted cube is analyzed by DSM. Results of the DSM computations are affected by the modeling of the pressure-strain correlation term, the wall reflection term and the turbulent diffusion term, etc. Seven cases of DSM computations are carried out in order to evaluate the treatment of these terms in the $\langle u_i' u_j' \rangle$ equations. The accuracy of these computations is assessed by comparing the results with those given by wind tunnel experiments and Large Eddy Simulation.

In Chapter 7, a two-dimensional turbulent flowfield around a square rib placed in a surface boundary layer is predicted using DSM. The results of this model are compared with those of wind tunnel tests. The usual forms of DSM which use the standard values of model coefficients overestimate the size of the recirculation behind the square rib. Furthermore, the value of k predicted by

DSM tends to be smaller than that of the experiment. The reasons which cause these discrepancies are examined precisely. It is shown that the accuracy is improved by varying the coefficient of pressure-strain term in the transport equations.

In Chapter 8, surface boundary layer over urban area with large temperature difference is analyzed by various RANS turbulence models, i.e., the standard $k-\epsilon$ model, two types of modified $k-\epsilon$ models including buoyancy effect and DSM. The results of these models are compared with those of wind tunnel experiment and the structural defects of these models are then examined.

In Chapter 9, the arrangement of the conclusions in all chapters is described.

