

スタッガード・グリッドを用いた3次元不均質球内電磁誘導問題の有限差分法～BiCGSTAB化と多周波求解

藤 浩明¹⁾・SCHULTZ Adam²⁾・上嶋 誠³⁾

¹⁾ 富山大学理学部

²⁾ Earth Sciences Department, Cardiff University

³⁾ 東京大学地震研究所

Electromagnetic Induction in Fully Heterogeneous Spheres Using the Staggered Grid Finite Difference Method

Hiroaki TOH¹⁾, Adam SCHULTZ²⁾ and Makoto UYESHIMA³⁾

¹⁾ Dept Earth Sciences, Toyama University

²⁾ Earth Sciences Department, Cardiff University, Wales, UK.

³⁾ Earthquake Research Institute, University of Tokyo

Abstract

Electromagnetic induction in three-dimensional spheres can now be solved by finite difference methods using staggered grids. Using well-defined staggered grids has an obvious advantage over normal finite difference schemes in the sense that the staggered grids give an ideal representation of divergent and/or rotational differential relations.

The finite difference relations at each node can be formulated into a matrix equation with a large sparse coefficient matrix. Recent progress of relaxation methods in matrix inversions has enabled us to solve the system of a large number of linear equations using the stabilized biconjugate gradient method (BiCGSTAB). The BiCGSTAB method used in this study was proved to be faster than other conjugate or biconjugate gradient methods.

It was also found that substituting previously obtained solutions into the next frequency greatly improved the rate of convergence of the relaxation process. Parallelizing the newly-devised code over multiple frequencies enhanced the convergence speed as well. It is now quite possible to apply the BiCGSTAB solver to spherical conductivity inversions, because a combination of the BiCGSTAB method, utilization of previous solutions, and frequency parallelization sums up to a speed of one order of magnitude difference.

Key Words: Electromagnetic induction, electrical conductivity, matrix inversion, BiCGSTAB

1. はじめに

最も確からしい地球の電気伝導度モデルの確立は、全マントル地震波速度トモグラフィに劣らず重要である。何故なら、地球内部電気伝導度は、温度・物質の状態（溶けているかいないか）・組成（上部マントルでは水、下部マントルでは鉄）・相転移等に敏感な物理量であり、変動地球の原動力たるマントル対流を決定づける「粘性」や地球の熱的進化過

程と密接な関係にあるからである。また、地震・電磁気両分野のグローバル・モデルの比較から、新たに学際領域が開拓される可能性も高い。

しかし、1970年前後に球対称モデルについては一応の決着を見た(BANKS, 1969)にも関わらず、グローバル・インダクション分野では未だに1次元モデルが議論される事が多い。その主な理由として、

- 現存する地磁気全球データは、3次元解釈に堪えるには、空間分布と観測の継続性に難がある。
- 3次元計算は高価であるにも関わらず、既存の3次元コードは、1次元・2次元コードに比べ計算精度に劣る。

の2つが挙げられる。

ところが、偏った観測点分布から導体地球レスポンスの不偏推定量を求めるデータ解析法の進歩(FUJII and SCHULTZ, 1998)や3次元コードの改良(AVDEEV *et al.*, 1997; MARTINEC, 1998; TARITS *et al.*, 1995; WEISS and EVERETT, 1998)により、3次元全マントル電気伝導度モデルを作るに足るデータと計算法が出揃いつつある。

本稿では、スタaggerド・グリッドを用いた有限差分3次元球コード(UYESHIMA and SCHULTZ, 2000)の加速と、その多周波問題への応用を論じた後、新しいフォワード・ソルバーを用いた3次元全球電気伝導度インバージョンの今後の見通し、について述べる。

2. 解くべき問題

自然の外部磁場擾乱を利用した電気伝導度探査の支配方程式は、次の準静的マクスウェル方程式;

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{E} &= i\omega\mu_0 \mathbf{H}, \\ \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \sigma \mathbf{E}, \end{aligned}$$

である。ここで、 \mathbf{E} と \mathbf{H} は各々電場と磁場であり、 i は虚数単位、 σ は電気伝導度を表す。場の時間変化として、角周波数 ω の $e^{-i\omega t}$ を仮定した。また、地球内部の透磁率変化は殆ど無視できるので、これを真空の透磁率 μ_0 に等しいとしている。これらの式の両辺の発散を取れば分かる様に、自然の電場・磁場は元々非発散であるという性質を持つ。UYESHIMA and SCHULTZ (2000)に従い、この支配方程式を各ノードでスタaggerド・グリッドを用いた13点差分に展開し、図1の球座標について解いた。

UYESHIMA and SCHULTZ (2000)の球コードは、MACKIEら(MACKIE and MADDEN, 1993, 1994)のデカルト座標における3次元有限差分プログラムに基づいている。前処理法として元の係数行列の対角小行列からなる行列の不完全コレスキー分解を採用したMACKIEのコードは、積分方程式を用いた3次元コードと比べても、精度・速度共に遜色無い事が知られており(MACKIE *et al.*, 1993)、地球内部電磁誘導分野では広く利用されている。対象とする物体の形状が直方体であろうと球であろうと、解くべき順問題は結局、複素対称大規模疎行列を係数行列として持つ次の行列方程式を解く事に帰着する:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}.$$

ここに \mathbf{x} は求めるべき電場 \mathbf{E} または磁場 \mathbf{H} の各成分からなる解ベクトル、 \mathbf{b} は場の境界値を成分として持つ定数ベクトル、である。差分法にスタaggerド・グリッドを用いる利点の一つは、磁場で解いても電場で解いても基本的に同じ解を与える事で、これが場の3

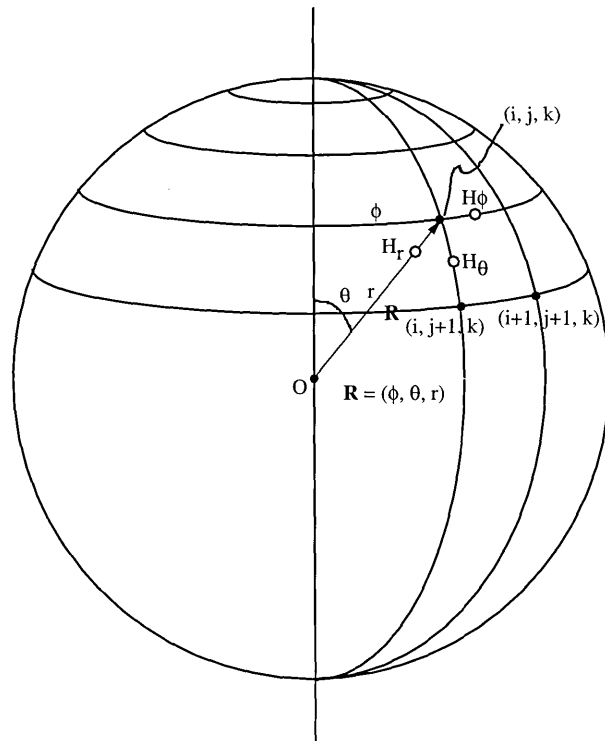


Fig. 1. The staggered grid in a sphere. Node (i, j, k) corresponds to a spherical co-ordinate (ϕ, θ, r) . The tangential components of the magnetic field H_ϕ and H_θ lie halfway to the adjacent nodes in the east and the south directions, respectively. The vertical component H_r locates a half shell thickness below the tangential components along the radial direction.

成分を同じノードに定義する通常の有限差分グリッドだと、電場で解く場合と磁場で解く場合とで異なる解に収束する事もあり得る。本研究では、最上部の球面と最下部の球面上に磁場の接線成分を境界条件として与え、残りの領域で磁場を求める方法を採用した。MARTINEC (1999)によれば、これは磁場に関する拡散方程式を *Dirichlet* 問題として解く事に相当する。最下部の球面はコア・マントル境界 (CMB) 以深の核内に取り、核は完全導体、すなわち最下部球面上の磁場の接線成分は 0 とした。最上部の球面に与える外部磁場擾乱としては、赤道環電流の作る磁場を単位強さの P_1^0 磁場で近似し、地球の 10 倍の半径を持つ球面上に配置した。また、大気の電気伝導度を 10^{-10} S/m と仮定した。これにより、上部・下部境界で挟まれた球殻内で *Laplace* 方程式を解く必要はなくなり、全ての領域で *Helmholtz* 方程式 (ここでは「磁場についての拡散方程式」) のみを解けば良い事になる。地球半径の 10 倍程度の所では、導体地球の存在により誘導される 2 次磁場は減衰して、十分小さくなっているとみなす事ができる。(この辺りの事情及び大気の電気伝導度を 10^{-10} S/m と仮定する事の妥当性については、UYESHIMA and SCHULTZ, 2000 の Appendix を参照されたい。)

Table 1. Comparison of the three SGFD algorithms.

BiCG	MRA	BiCGSTAB
<p>x_0 is an initial guess. Find $\underline{LU} \approx A$. Solve $(LU)p_0 = b - Ax_0$. $r_0 = b - Ax_0$ Do $i = 1, 2, 3, \dots$</p> $\alpha_i = \frac{r_{i-1}^T p_{i-1}}{p_{i-1}^T A p_{i-1}}$ <p>$x_i = x_{i-1} + \alpha_i p_{i-1}$ $r_i = r_{i-1} - \alpha_i A p_{i-1}$ Perform <u>SDC</u> if necessary. If \underline{x}_i is accurate enough then quit.</p> <p>Solve $(LU)p_i = r_i$.</p> $\beta_i = \frac{r_i^T p_i}{r_{i-1}^T p_{i-1}}$ $p_i = p_i + \beta_i p_{i-1}$ End do	<p>x_0 is an initial guess. Find $\underline{LU} \approx A$. Solve $(LU)p_0 = b - Ax_0$. $r_0 = b - Ax_0$ Do $i = 1, 2, 3, \dots$</p> <p>Solve $(LU)q_i = A p_{i-1}$.</p> $\alpha_i = \frac{r_{i-1}^T A p_{i-1}}{(A p_{i-1})^T q_i}$ <p>$x_i = x_{i-1} + \alpha_i p_{i-1}$ $r_i = r_{i-1} - \alpha_i A p_{i-1}$ Perform <u>SDC</u> if necessary. If \underline{x}_i is accurate enough then quit.</p> <p>Solve $(LU)p_i = r_i$.</p> $\beta_i = \frac{(A p_i)^T q_i}{(A p_{i-1})^T q_i}$ $p_i = p_i + \beta_i p_{i-1}$ End do	<p>x_0 is an initial guess. Find $\underline{LU} \approx A$. Solve $(LU)p_0 = b - Ax_0$. $r_0 = (LU)^{-1}(b - Ax_0)$ Do $i = 1, 2, 3, \dots$</p> <p>Solve $(LU)q_i = A p_{i-1}$.</p> $\alpha_i = \frac{r_0^T r_{i-1}}{r_0^T q_i}$ $s_i = r_i - \alpha_i q_i$ <p>Solve $(LU)t_i = A s_i$.</p> $\omega_i = \frac{t_i^T s_i}{t_i^T t_i}$ <p>$x_i = x_{i-1} + \alpha_i p_{i-1} + \omega_i s_i$ $r_i = s_i - \omega_i t_i$ Perform <u>SDC</u> if necessary. If \underline{x}_i is accurate enough then quit.</p> $\beta_i = \frac{\alpha_i r_0^T r_i}{\omega_i r_0^T r_{i-1}}$ $p_i = r_i + \beta_i (p_{i-1} - \omega_i q_i)$ End do

3. 双共役勾配法

前節で述べた順問題の主たる困難は、解くべき行列方程式の係数行列が、エルミートでも正定値でもなく、また、行列の最大固有値と最小固有値の比、すなわち、条件数が極端に大きい事に起因している。MACKIEらの定式化では、係数行列は、対角成分のみが複素数であり、非対角成分は全て実数なので、明らかにエルミートでなくなってしまう。非常に大きな条件数になるのは、大気層と導体地球との間の強い電気伝導度コントラストが存在する為である。

しかし、行列数値解法の最近の進歩により、条件数の大きな行列についても、共役勾配法を始めとする反復緩和法を用いて、逆行列を迅速かつ精度良く求められる様になっている。MACKIE and MADDEN (1993)でも彼らは、共役勾配法の一つである Minimum Residual Accelerated (MRA) 法を用いている。但し、MRA 法は、厳密には正定値実対称行列にのみ有効な反復緩和法である為、与える電気伝導度構造によっては必ずしも収束しない恐れがある。順問題解をインバージョンへ応用する事を考えると、これは余り好ましい事ではない。そこで、問題のエルミート性を回復するべく、SMITH (1996 b) に従って、複素対称行列に対しても有効な双共役勾配法 (BiConjugate Gradient Method; BiCG 法) に書き換える事とした。

表1に、本研究で使用した3つの計算アルゴリズムを掲げる。これら3つの反復緩和法アルゴリズムの比較に入る前に、表1に登場する3つの事柄について解説を加えておく。1つは収束判定法、2つ目は発散補正 (SDC; Static Divergence Correction)、3つ目は前処理法、すなわち、係数行列 A の不完全コレスキー分解、の3つである。

行列の反復解法における収束判定基準は、計算速度に直に反映するので、慎重に選ばなければならない。表1左欄の残差 r_i が、真の残差;

$$r_i = b - Ax_i$$

である事は、数学的帰納法を用いれば簡単に示せるので、これを右辺の定数ベクトルで規格化した量;

$$\frac{\|r_i\|^2}{\|b\|^2}$$

を、判定基準の1つとして選んだ。

また、1つ前の繰り返しループでの解との差;

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x_{i-1}\|} = \frac{\|x_i - x_{i-1}\|}{\|x_{i-1}\|}$$

も、収束判定基準としてよく使われる。しかし、計算結果と比べるべき観測データは地表面にしかない事が分かっているので、地表付近の計算精度が十分高ければ解の反復修正を打ち切っても構わない、とも言える。反復修正を早く打ち切る事ができれば、それだけ収束の加速につながる。この先験情報を収束判定基準に組み込む事は可能で、それには重み関数 w を導入して Δx の加重平均;

$$\frac{\|w' \Delta x\|}{\|x_{i-1}\|}$$

を新たな判定基準とすれば良い。ここでは、 w は地表面からの距離の関数とし、地表から

離れるに従って指数関数的に減少する様に選んだ。但し、 w を非常にきつくかけると地表から遠く離れた点での解成分が、全ての制約を失って発散し始める事も考えられるので、 Δx の加重平均に解のラフネス（第2階差）の罰則項を加えた次の量；

$$\frac{\|w' \Delta x\|}{\|x_{i-1}\|} + \alpha \frac{\partial^2 x_{i-1}}{\partial R^2}$$

を、残差に対応する第2の判定基準とした。上式で、 α は Δx の加重平均と解のラフネス間の相対比、 R は位置ベクトルである。 α は経験的に0から1の間から選んだ。本研究では、これら2つの判定基準の内どちらかが与えた閾値 ε を下回るまで、解の反復修正を繰り返した。その結果、 ε を 10^{-7} から 10^{-9} の範囲を指定すれば、0.1% 程度の計算精度を達成できた。

発散補正は、電場の非発散性を明示的に保証する為に SMITH (1996b) により初めて導入されたものである。前節で一言触れた様に、能動的な電流源を持たない自然電磁場は、もともと非発散である。また、スタッガード・グリッドには、場に保存関係があればそれを自動的に充たす機能が本来備わっている。にも関わらず、非発散性を明示的に保証する必要があるのは、誘導起電力が弱まり支配方程式が仮定している「電磁場の拡散方程式」から逸脱してくる場合、すなわち、DC Limit である $\omega \rightarrow 0$ の極限と、絶縁体中と見なせる $\sigma \rightarrow 0$ の極限、の2つの場合である。実際、非常に低い周波数や大気中での計算では、有限の発散を持つ解に収束する現象が多く見られ、非発散の条件を明示的に入れてこれを除去してやらなければならない。SMITH (1996b) では、電場についてクーロン・ゲージ $\nabla \phi_e$ を導入する事で、 $\omega \rightarrow 0$ の極限に対処した。磁場で解く場合には、同様の事が $\sigma \rightarrow 0$ の極限で現れる。MACKIE and MADDEN (1994) では、磁場についてのゲージ $\nabla \phi_m$ を導入する事で、大気層中に現れた有限の磁場発散を除去する事に成功した。これらの発散補正は、解の収束速度と精度を飛躍的に向上させる効果がある為、本研究でも $\nabla \phi_m$ を用いて磁場の発散補正を露わに行う事とした。

表1の解説の最後は、「前処理法」である。一般に係数行列 A は、絶縁的な大気層と伝導的な固体地球間の強い電気伝導度コントラストにより、非常に大きな条件数を持つ。従って、 A の逆行列を反復解法で求めるには、 A に近いけれども A より条件数の小さな、すなわち、固有値の大きさが揃った行列 A' をまず求め、 A' を使って反復修正するのが有効である。MACKIE and MADDEN (1993) では、 A の対角小行列からなる

$$A' = \begin{pmatrix} B_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & B_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & B_{zz} \end{pmatrix}$$

が用いられた。ここで、各対角小行列 B_{xx} , B_{yy} , B_{zz} は、解ベクトル x 中に $x' = (h_x, h_y, h_z)$ として含まれている磁場の各成分ベクトル h_x , h_y , h_z に各々対応している。MACKIE and MADDEN (1993) の前処理法の一つの利点は、この対角小行列からなる行列が正定値である為、その不完全コレスキー分解が真の逆行列に非常に近い事である。

JACOBS (1981) は、共役勾配法で A を良く近似する A' の持つべき性質として、次の3つを挙げている。

- A と A' の行和が各行で一致する事.
- A' の疎密は, A と同じである事.
- A' の対角成分の実部は, 非負である事.

この指針に従い, 筆者らは, 対角小行列を用いる事なく, 前処理法として A の不完全コレスキー分解 (GOLUB and VAN LOAN, 1983, p 530) を試みた. しかし, この前処理法では, 行列の分解に非常に時間が掛かるにも関わらず, 条件数の有意な改善が見られなかった. そこで, 本研究でも MACKIE and MADDEN (1993) の前処理法を採用した. 具体的には, 球座標での対角小行列 $B_{\phi\phi}, B_{\theta\theta}, B_{rr}$ の不完全コレスキー分解により,

$$A \approx A' = LU = U'U$$

なる上三角行列 U を求め, U 及び U_i を用いて表 1 中の前進・後退代入を実行した. 対角小行列を用いる前処理法のもう 1 つの利点は, JACOBS (1981) の指針による不完全コレスキー分解より記憶域がずっと少なく済む点である. 行列の前処理における記憶容量の事だけ考えると, 係数行列 A の対角成分を実数と見なせれば, 更に記憶域の節約になる. A の対角成分は, ρ_n を隣接ノードの比抵抗値 (電気伝導度の逆数) として

$$\Sigma \rho_n + i\omega\mu_0$$

の形に書き表す事ができるので, 大気中以外では $\Sigma \rho_n \gg \omega\mu_0$ としても悪い近似ではない. 実際, 対角小行列からなる行列を実対称行列として取り扱った前処理法でも, 行列の反復解法は収束して同じ程度の精度の解を与える. しかし, 収束速度は格段に遅くなる. この事は, 大気層中の求解が, やはり収束の律速段階である事を示している.

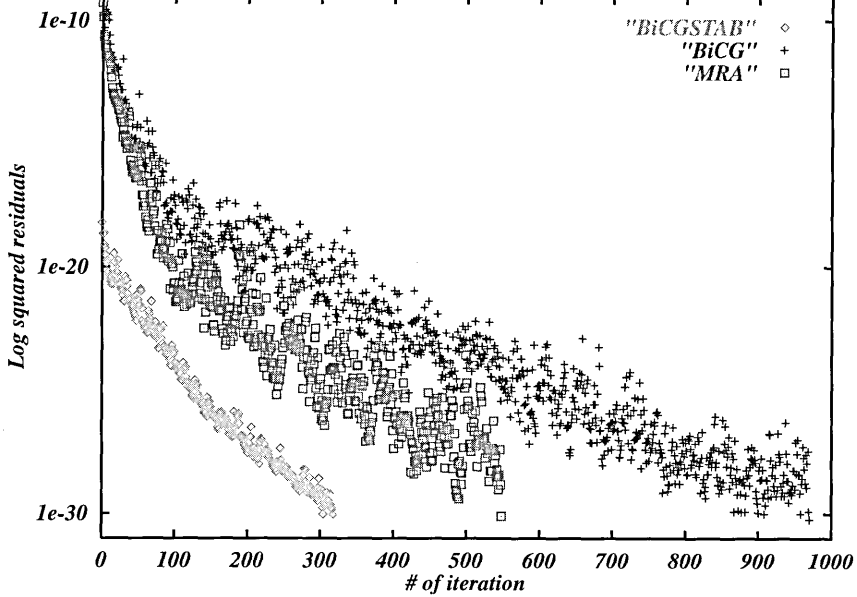
表 1 の解説が長くなったが, ここで 3 つの計算アルゴリズムの検討に移る. 双共役勾配法は, もともと LANZOS (1952) による共役勾配法の拡張であり, 次式のように解くべき連立一次方程式の数を 2 倍にする代わりに, 問題全体のエルミート性を回復しよう, というものである.

$$\begin{pmatrix} 0 & A \\ A^h & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}' \\ \mathbf{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{b} \\ \mathbf{b}' \end{pmatrix}$$

上式で, h は複素共役を取ってから転置を施す事を表し, \mathbf{b}' は (今の所は) 任意のベクトルと思って差し支えない. JACOBS (1981) は, A が対称行列である場合には, 双共役勾配法も通常の共役勾配法と同様なアルゴリズムに帰着する事を示した. 表 1 で BiCG 法と MRA 法がほぼ相似なのはこの為である. また表 1 から, どのアルゴリズムも行列とベクトルの積 A_p を (BiCGSTAB 法の場合には A_s も) 必要としている事が分かる. また, LU 分解された係数行列を持つ行列方程式 $(LU)\mathbf{u} = \mathbf{v}$ を前進・後退代入を用いて解く局面が出て来る事も見てとれる. これら「行列・ベクトルの積演算」と「前進・後退代入」が, どのアルゴリズムでも総 CPU 時間の 6 割以上を占め, 本研究における数値計算上のホットスポットを構成している.

双共役勾配法は, 共役勾配法に比べて原理的に 2 倍の数の連立方程式を解かなければならないので, エルミート性の回復によりロバストなインバージョンにより適した解が得られるという利点はあるものの, 一般に共役勾配法より収束が遅くなる. しかし, 自乗 (双) 共役勾配法 (SONNEVELD, 1989) や双共役勾配安定化法 (BiCGSTAB 法; VAN DER VORST,

Comparison of the three different relaxation algorithms for Martinec's nested spheres



Comparison of the three different relaxation algorithms for Martinec's nested spheres

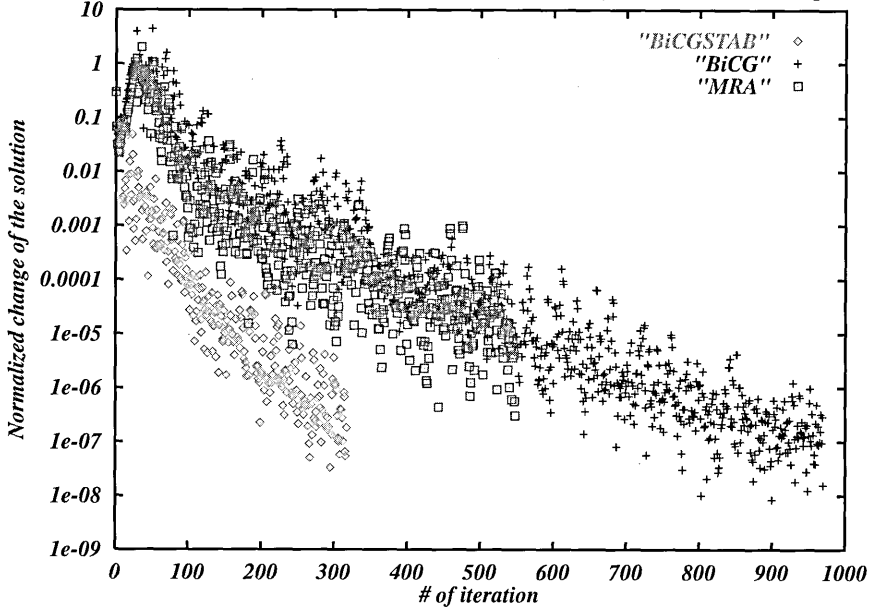


Fig. 2. Convergence curves of the three SGFD solvers. for the same 3D model. (a) The normalized squared residuals vs the number of iterations required in each relaxation for exactly the same convergence criteria. (b) Same as (a), but for the weighted and normalized norm of the solution change vector, where α was set to 0.1.

1992) の様な収束の速い双共役勾配法の変種も存在する. そこで本研究では, 最終的に反復緩和の論理を BiCGSTAB 法に書き改める事とした.

BiCGSTAB 法のアルゴリズムも, 表1の一番右の欄に収録してある. 図2に3つのアルゴリズムの収束曲線を各々示す. これらの収束曲線を描くのに使用した3次元モデル及び収束条件は, 3つのアルゴリズム全てに共通である. この図から, BiCGSTAB 法は最も急な収束勾配を持つのに加えて, 非常に安定した収束特性を有している事が分かる. 表1に出ている通り, BiCGSTAB 法は, 時間のかかる前進・後退代入を1ループ当たり2度やらなければならないにも関わらず, 収束に要する繰り返し数が減っている為, 3つの中で最速のアルゴリズムになっている. 例えば, 図2の計算に BiCGSTAB 法は334秒, MRA 法は364秒, BiCG 法は541秒を要した. グリッド数は, $36 \times 36 \times 32$, 使用した計算機は, 625 MHz のデジタル・アルファ Ev56 プロセッサの単一CPU (ピーク性能1.2 GFLOPS 相当) である. 図2で面白いのは, MRA 法と BiCG 法の比較で, 確かに速度は MRA 法の法が優っているが, 精度は, MRA 法の残差 (図2a) が収束基準に達した時点での図2b (1つ前の解との差) で比べると, MRA 法は必ずしも十分な収束レベルに到達していない. BiCG 法が収束した時点での「解の差」の方が, 1桁程優れているからである. それに対して, BiCGSTAB 法は「残差」・「解の差」どちらについても, 満足すべきレベルに達していると言う事ができる.

計算精度に対して BiCGSTAB 法の持つ潜在能力は満足できるものであるにせよ, 数値グリッドの設計はまた別問題である. SMITH (1996a) は, 可変グリッドがもたらすギップス現象が最も危険である, と指摘している. 図3にその影響を図示する. この図は, 球対称モデルに対する導体地球のCレスポンス;

$$C(R) = \frac{R_E}{2} \tan(\theta) \frac{H_r}{H_\theta}$$

の地表での値をプロットしたものである. ここに, θ は余緯度, R_E は地球半径, である. 1次元モデルに対する同一球面上でのCレスポンスは一定値を取るべき, であるにも関わらず, 左の図には $\pm 1\%$ に達するゾーナル・パターンが見られる. これは, 左図の数値グリッドが, 緯度方向にのみ可変なバリエブル・メッシュであったからに他ならない. これを, グリッド総数から言うとむしろ疎な等間隔グリッドに修正すると (右図), 数値グリッドによる計算誤差は $\pm 0.1\%$ 程度に押さえる事ができる.

4. 多周波求解

反復緩和の初期値は, 一般に任意であって構わない. しかし, 収束を加速しようとする場合には, 考慮の余地がある.

図4は, 適切な解の初期化が, 極めて高い効果を発揮した例である. ここでは, 1つ前の周波数での収束解を, 次の周波数の初期解として代入したもの (b) と, 代入しなかったもの (a) とを比較している. (c) は, 2番目の周波数に対して, 初期化の有無を実繰り返し数で比較したものである. これらの図から明らかな様に, 1つ前の周波数での収束解を次の周波数の初期解として逐次代入する事で, 不必要なオーバーヘッドを大幅に縮小する事が可能である. 16周波数を用いたこの例では, 総反復回数の51.5%を節約できた.

逆問題の求解では, 多数の周波数を効率良く取り扱う方法を確立するのが必須だが, 多

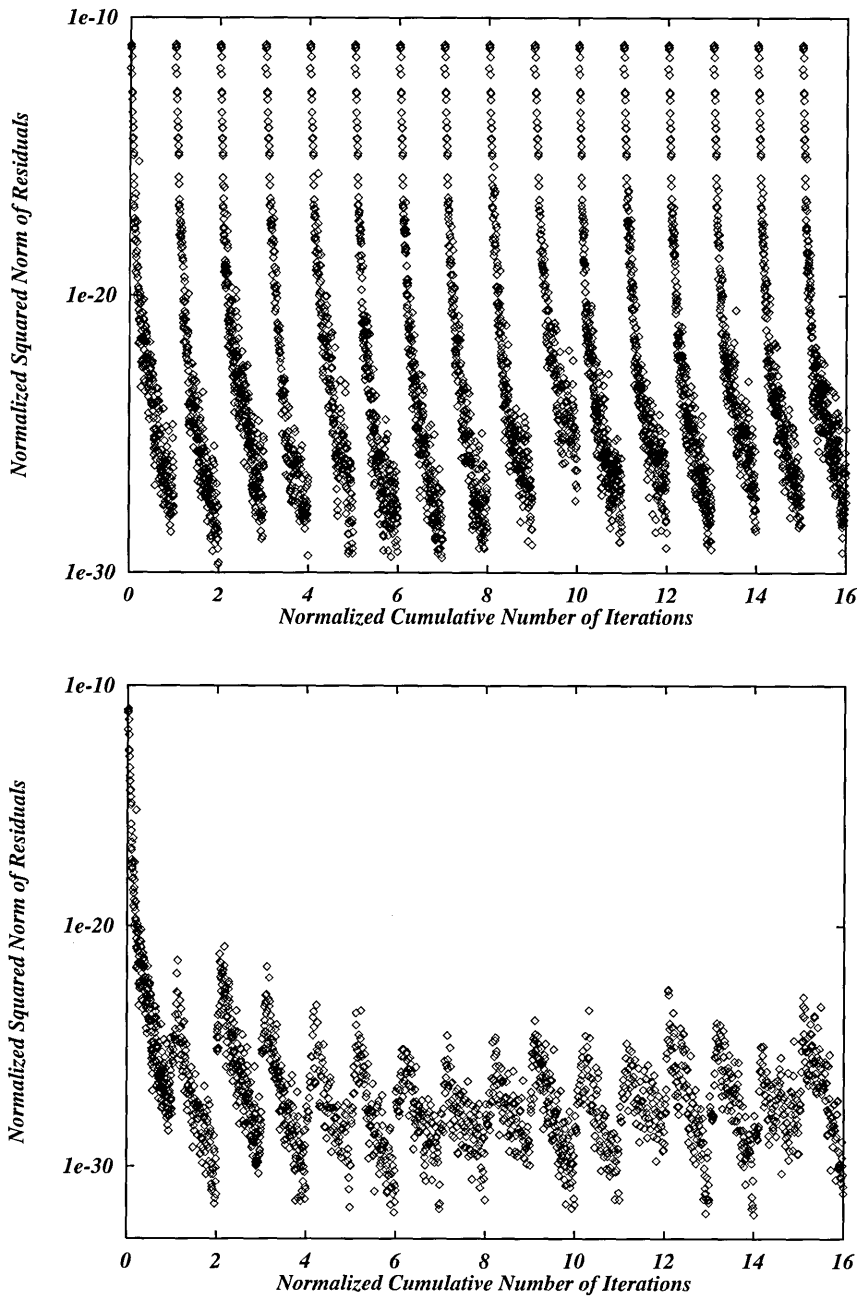


Fig. 4. Convergence curves for (a) non-initialized (upper) and (b) initialized (lower) relaxations over 16 frequencies. Note that using the previous solution as the initial solution for the next frequency remarkably reduced the number of iterations in the lower diagram.

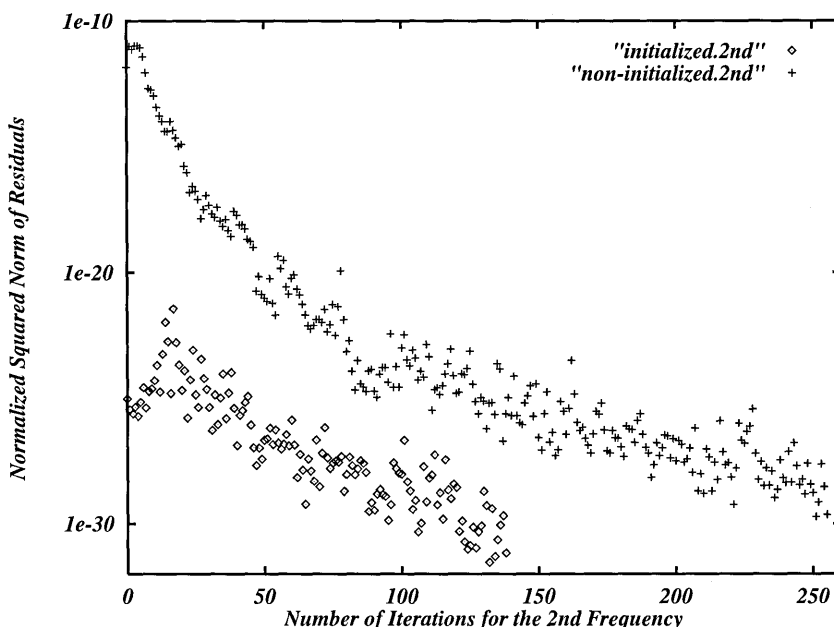


Fig. 4. (c) Comparison of number of iterations required in initialized (diamonds) and non-initialized (plus) relaxation for the 2nd frequency. Normalized squared norms of residuals are shown though the iterations were repeated until solution changes reached convergence.

周波問題で解の逐次代入を行う際、周波数を昇順に並べるのか、それとも、降順に並べた方が良いのかは、考えてみると面白い問題である。

正解は、昇順、すなわち、最も低い周波数から反復緩和を開始するのが、計算速度・精度共に成績が良い。その理由は、マルチ・グリッド法になぞらえて考えると理解し易い。限られた記憶域を用いて空間分解能を上げる必要がある場合に、マルチ・グリッド法はよく用いられる。この時、まず広い領域を粗いメッシュで離散化してから、徐々に目的の異常体付近にズームインし、目的とする分解能に達するまでメッシュを逐次密にしてゆく、という方法が取られる。周波数の昇順ソートも物理的には同じ事で、まず長周期、すなわち、長波長解から先に求めておいて、徐々に短波長の情報を抽出してゆく、という方が賢明なのである。

反復緩和論理をBiCGSTAB法に変更し、多周波問題で解の初期化と周波数の昇順ソートを行う事で、UYESHIMA and SCHULTZ (2000) の3次元不均質球有限差分コードを数倍程度加速する事に成功したが、更に次の様な周波数毎の並列化を行い、最終的に十数倍程度の加速を得た。

まず、全ての周波数を昇順にソートし、それをほぼ同じ数だけの周波数を含む幾つかの組に分け、各組を異なるCPUノードに振り分けた。周波数の昇順ソートも解の初期化も、CPUノード毎に実施すれば、効果は失われない。

この単一命令マルチデータ(SIMD)型の並列化のアムダール限界は、次式で近似できる：

EARTH_REF_MPI model1000

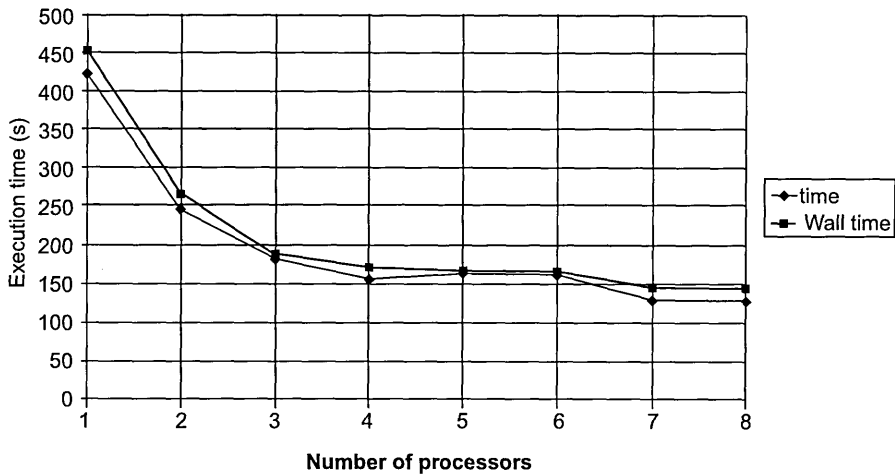


Fig. 5. Execution time vs number of processors of our SIMD model. The execution time is approximately proportional to $1/m$ and asymptotic to a . See text for details.

$$t = a + b \left(\frac{n}{m} - 1 \right).$$

ここで、 t は計算に要する総 CPU 時間、 a は各ノードで最初の周波数を緩和させるのに必要な CPU 時間、 b は各ノードで 2 番目以降の周波数を緩和させるのに必要な CPU 時間、 n は全周波数の数、 m は使った CPU ノードの数、である。ここで、 a のノード依存性を無視し、図 4 より b は 2 番目以降の周波数についてはほぼ一定、と仮定した。図 5 に、最大 8 CPU ノード 16 周波数を使った並列化曲線を示す。この図から、上式が、この SIMD モデルのアムダール限界の良い近似である事が見てとれる。この並列モデルでは、周波数の数より多い CPU ノードを用いる事は意味が無いので、 t は a より小さくできない。この事は、最初の周波数に対する初期解の与え方が、収束速度を最終的に左右する事を意味している。電気伝導度のグローバル・インバージョンの場合には、SCHULTZ and LARSEN (1990) で求められている全球 1 次元モデルに対する磁場分布が、最も確からしい初期解の候補になるものと思われる。

5. 今後の問題

グローバル・インダクション分野において、 P_1^0 ソースが最も有用なソースである事は間違いないが、全マントル電気伝導度トモグラフィ実現の為には、ゾーナル・ソース以外にもっと多様なソースを取り入れる事が望ましい。ゾーナル・ソースばかりに頼って、電気伝導度インバージョンを行う事は、不十分な波線を使って地震波トモグラフィをやる様なものだからである。上部マントルに強い不均質が存在する事が分かっている以上、地磁気日変化 S_q の様な短周期の非ゾーナル・ソースを加える事が、将来的には必要である。

数日以上の上長周期では、海の影響は無視できる事が知られている。しかし、 S_q について

は場所により海の影響を非常に強く受けている地磁気観測所もある。従って、ソースの多様性を増す為には、どうしても海底地形を含む「地形」のモデル化を迫られる。現時点では、記憶容量の許す限り地表付近のメッシュを細かくするしか方法がないが、もしこれが非実用的になった場合には、海陸分布を良く近似する事が知られている「薄層」を地表面に貼り付ける様に問題を拡張するのが、現実的であろう。

BiCGSTAB法による反復緩和過程に発散補正をどう組み込むかも、今後考慮すべき問題の1つである。現在N回反復する毎に発散補正を行っているが、発散補正により $\{r_0, Ar_0, A^2r_0, \dots\}$ で張られる Krylov 空間がリセットされてしまい、 r_0 を再度計算して BiCGSTAB 緩和を再開しなければならない。しかし、実際には N と収束速度との間には強い依存関係があり、また、N は与えられた構造の関数でもある。従って、インバージョンの際にどうやって最適な N を見つけるかは、今後の重要課題である。

幾つかの例は試みたものの、前処理法の研究は未だ不十分である。採用した反復緩和論理と前処理法の組み合わせが適当でない為に、収束が遅くなっている可能性は否定できない。やはり JACOBS (1981) の指針に従って、最適な前処理法を見つけ出す努力を今後もっとすべきであろう。

新しい BiCGSTAB ソルバーは、C レスポンスの他にも求めた磁場を微分して作る等価電流系 ($rot \mathbf{H}$) や、次式で与えられる D レスポンスも計算する様にプログラムされている：

$$D(\mathbf{R}) = \frac{R_E}{2} \cos(\theta) \frac{H_\phi}{H_\theta}$$

図6に等価電流系、図7にDレスポンスの計算例を示す。この計算に使用した3Dモデルは、半径6,371 km、一様な電気伝導度1 S/mを持つ球内の、主子午線上(余緯度45度、深さ600 km)の位置に埋め込んだ半径100 km、電気伝導度10 S/mの球からなる。核は、完全導体とした。等価電流系表示は、直観に訴えて非常に分かり易いので、フォーワード・モデリングではモデルの診断に活用できる。また、ゾナル・ソースは元々 H_ϕ を成分として持たない為、ゾナル・ソースに対して真に3次元性を示すインデックスは、C レスポンスではなく D レスポンスである。モデルの解像度を上げるには、通常よく計算される C レスポンスだけでなく、D レスポンスも併用する事が鍵になると考えられる。

効率的な自動メッシュ生成は、インバージョンが実用的に機能する為には重要な問題になる。第3節で触れた様に、可変グリッドの使用は精度上問題があるので、できる限り避けた方が安全である。しかし、限られた記憶容量しかない場合には、電気伝導度のコントラストが強い所でより細かいメッシュを切る必要が出て来る。UYESHIMA and SCHULTZ (2000) では、各電気伝導度セル内で動径方向に浸透深さの4分の1よりグリッドを細かく切る自動メッシュ生成法が考案されている。電磁誘導問題における浸透深さは、必ずしも最適な長さの尺度ではないが、現在の所「浸透深さの4分の1」は、非常に良い経験則として機能する様である。

最後に、本研究で有限差分法を用いた理由について述べておきたい。有限差分法より進んだ数値解法の代表として、有限要素法がある。一般に、有限要素法が有限差分法に優る点として、(1)保存則が成立し易く精度が良い、(2)現実的な形状を表現し易い、の2点が挙げられる。しかし、保存則については、本研究ではスタaggerド・グリッドを採用した為、グリッド内の各プリズム毎に保存則が成り立つ事が保証されている。また、(2)は本研究の

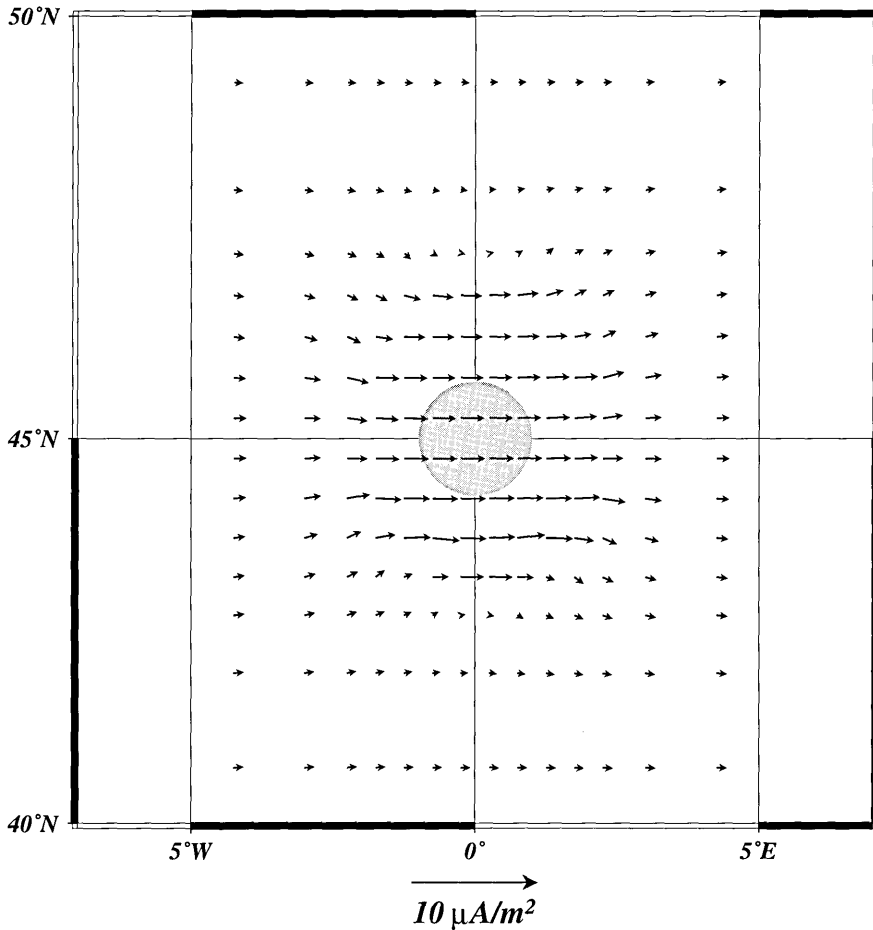


Fig. 6. Horizontal electric current density around the buried conductive sphere at a depth of 600 km. Real part alone is plotted for a frequency of 4.774649×10^{-7} Hz.

様なグローバル・スケールの問題では、今のところ致命的な差にはなっていない。以上の事から、本研究では定式化が容易で簡明な有限差分法を用いる事とした。

但し、一般に有限要素法が有限差分法より精度が良い事は衆目の一致する所であり、本研究で取り扱った問題においても例外ではない。更に、行列方程式全体を陰解法で解く事は、ソース近傍の局所的計算を徐々に広げてゆけばよい為、計算量が有限要素法に比べ著しく少なくて済む、という有限差分法の長所を損なう事にもつながる。本研究の最終目的は、地球の現実的な3次元電気伝導度構造を求める事にあるので、順問題解法はインバージョン法に最も適したものであればそれでよく、有限差分法に固執する必要はない。将来は、有限要素法その他の方法を取り入れる事も視野に置くべきであろう。

以上の様に、まだまだ改善の余地はあるものの、BiCGSTAB法の採用により、3次元不均質球内の電磁誘導問題を有限差分法を用いても高速かつ精度良く計算する事が可能になった。このBiCGSTABソルバーは、地球内部電磁気学の様々な問題に応用が可能、と

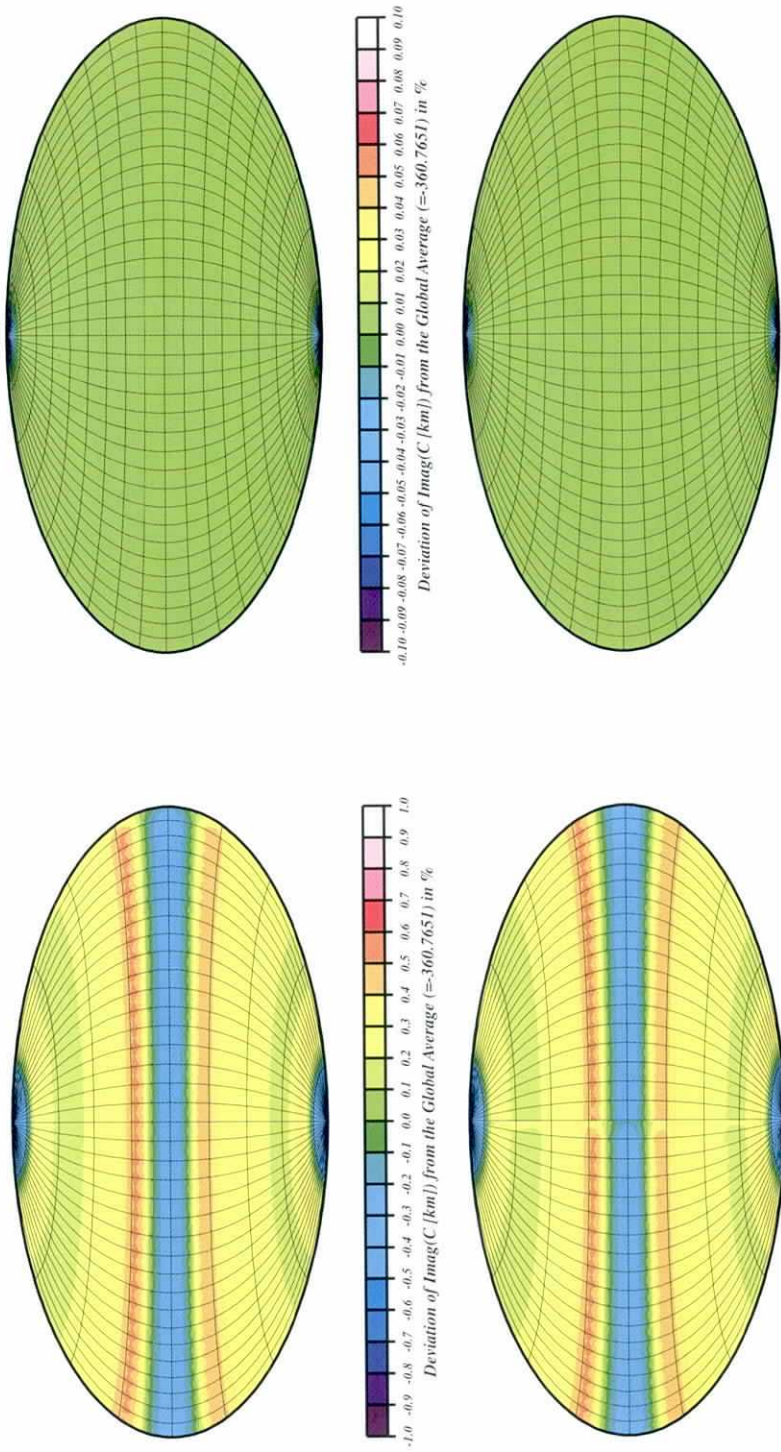


Fig. 3. Color Hammer plots of the imaginary part of C-response for a 1D earth computed on a variable mesh (left) and on an equi-distant (10 deg x 10 deg) mesh (right), respectively. The former is variable only in the latitudinal direction and symmetric on both sides of the equator, viz., 90, 85, 80, 70, 60, 50, 40, 30, 20, 10, 5, 1.5, 0.25, 0 degrees from the north pole.

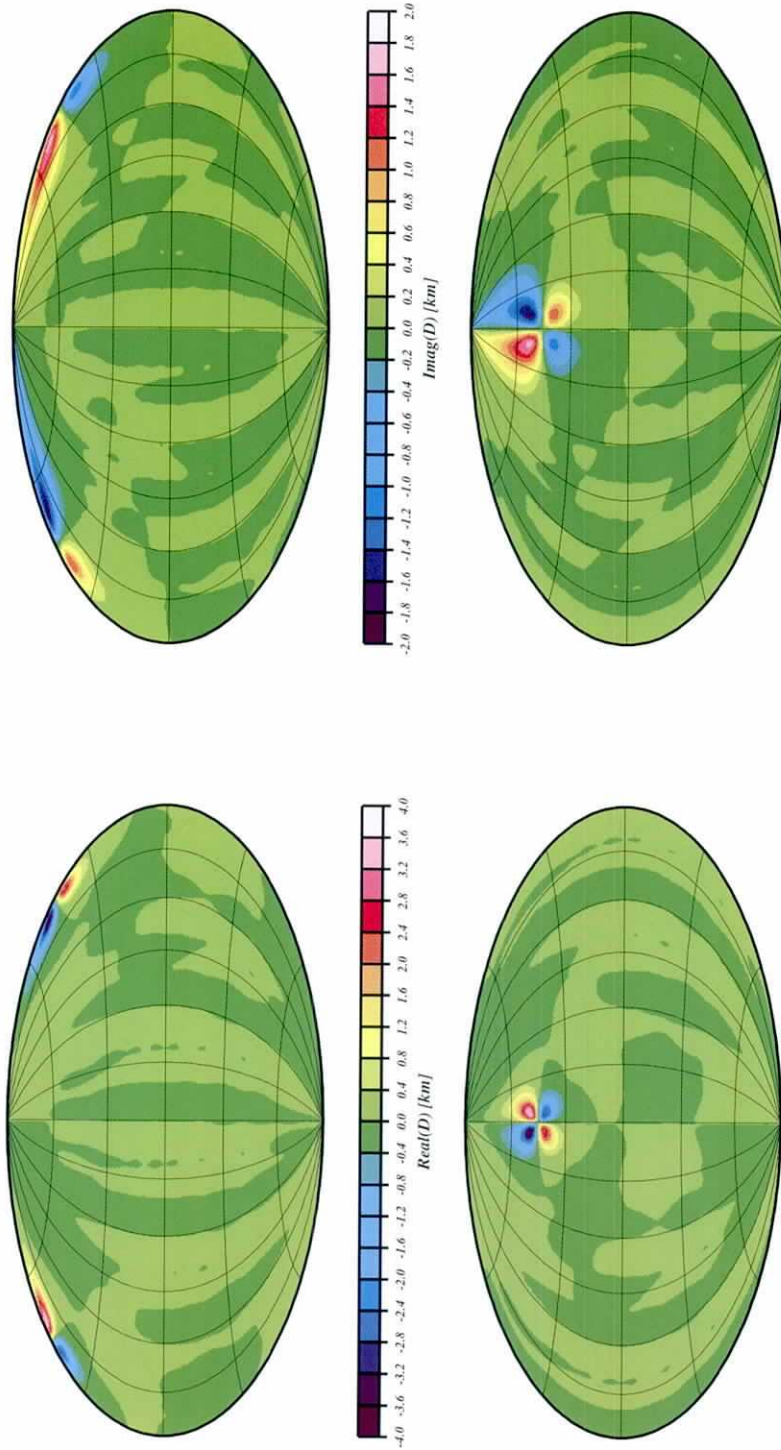


Fig. 7. Color Hammer plots of the real (left) and imaginary (right) part of D-response for the same model and frequency as Fig. 6.

考えられる。1つの可能性は、地磁気永年変化のマントルによるスクリーニングの計算である。これは、核内の接線成分=0ではなく、CMBでの磁場の接線成分を境界値として与え、与えた磁場が地表にどのような形で現れたか、を計算すれば容易に実現できる。地磁気数十年変動のマントル・スクリーニング効果の見積もりから、下部マントルの電気伝導度の上限の推定が可能である、と予想される。

6. まとめ

UYESHIMA and SCHULTZ (2000) のスタaggerド・グリッドを用いた3次元不均質球有限差分コードを、双共役勾配安定化法 (BiCGSTAB 法) を用いて書き換え、精度を保持したままで数倍の加速とよりロバストでインバージョンに適した方法に変換した。これは、BiCGSTAB 法の採用により、収束に必要な反復回数を約2分の1に減らす事ができた事に加えて、問題のエルミート性が回復できた為である。

多周波問題において、適切な解の初期化と周波数の昇順ソートに加え、周波数毎の並列化を取り入れる事により、更に数倍、計十数倍の加速を見た。これにより、この順問題解を用いて「全マントル電気伝導度トモグラフィ」を逆問題として定式化する準備が整った。

謝 辞

本研究の主な内容は、藤が文部省在外研究員として、英国ケンブリッジ大学地球科学科理論地球物理学講座滞在中に行われた。英国滞在中に文部省及びケンブリッジ大から藤に与えられた援助に対し、感謝の意を表したい。本稿は、この英国滞在中に得られた研究成果を、『平成11年度東京大学地震研究所共同利用・研究集会 (課題番号: 1999-W-06) 「地球電磁気学的イメージングから地殻内の流体相について何がわかるか」』において発表し、そこで議論された成果を更に発展させてまとめたものである。また、図の幾つかは Generic Mapping Tools (WESSEL and SMITH, 1995) を用いて描かれた。

文 献

- AVDEEV, D.B., KUSHINOV, A.V., PANKRATOV, O.V. and NEWMAN, G.A., 1997, High-performance three-dimensional electromagnetic modeling using modified Neumann series: Wide-band numerical solution and examples, *J. Geomag. Geoelectr.*, **49**, 1519-1539.
- BANKS, R.J., 1969, Geomagnetic variations and the electrical conductivity of the upper mantle, *Geophys. J.R. astr. Soc.*, **266**, 123-192.
- FUJII, I. and SCHULTZ, A., 1998, The sensitivity of mantle electrical modelling to the spatial distribution of the global magnetic observatory system - a new requirement for an old network, *EOS-Trans. Amer. Geophys. U.*, **79**, 276-276.
- GOLUB, G.H. and VAN LOAN, C.F., 1983, Matrix computations, Baltimore, John Hopkins Univ. Press, pp642.
- JACOBS, D.A.H., 1981, The exploitation of sparsity by iterative methods in *Sparse matrices and their uses*, ed. Duff, I.S., Berlin, Springer-Verlag, 191-222.
- LANCZOS, C., 1952, Solution of systems of linear equations by minimized iterations, *J. Res. Nat. Bur. Stand.*, **49**, 33-53.
- MACKIE, R.L. and MADDEN, T.R., 1993, Conjugate direction relaxation solutions for 3-D magnetotelluric modeling, *Geophysics*, **58**, 1052-1057.
- MACKIE, R.L. and MADDEN, T.R., 1994, Three-dimensional electromagnetic modeling using finite difference equations: The magnetotelluric example, *Radio Science*, **29**, 923-935.
- MACKIE, R.L., MADDEN, T.R. and WANNAMAKER, P.E., 1993, Three-dimensional magnetotelluric

- modeling using difference equations - Theory and comparisons to integral equation solutions, *Geophysics*, **58**, 215-226.
- MARTINEC, Z., 1998, Geomagnetic induction in multiple eccentrically nested spheres, *Geophys. J. Int.*, **132**, 96-110.
- MARTINEC, Z., 1999, Spectral-finite element approach to three-dimensional electromagnetic induction in a spherical Earth, *Geophys. J. Int.*, **136**, 229-250.
- SCHULTZ, A. and LARSEN, J.C., 1990, On the electrical conductivity of the mid-mantle -II. Delineation of heterogeneity by application of extremal inverse solutions, *Geophys. J. Int.*, **101**, 565-580.
- SMITH, J.T., 1996 a, Conservative modeling of 3-D electromagnetic fields, Part 1: Properties and error analysis, *Geophysics*, **61**, 1308-1318.
- SMITH, J.T., 1996 b, Conservative modeling of 3-D electromagnetic fields, Part 2: Biconjugate gradient solution and an accelerator, *Geophysics*, **61**, 1319-1324.
- SONNEVELD, P., 1989, CGS: a fast Lanczos-type solver for nonsymmetric linear systems, *SIAM J. Sci. Stat. Comput.*, **10**, 36-52.
- TARITS, P., WAHR, J. and LOGNONNE, P., 1995, A solution to the problem of international external electromagnetic induction in a spherical heterogeneous Earth, *EOS-Trans. Amer. Geophys. U.*, **76**, 165-166.
- VAN DER VORST, H.A., 1992, Bi-CGSTAB: a fast and smoothly converging variant of Bi-CG for the solution of nonsymmetric linear systems, *SIAM J. Sci. Stat. Comput.*, **13**, 631-644.
- UYESHIMA, M. and SCHULTZ, A., 2000, Geoelectromagnetic induction in a heterogeneous sphere: a new 3-D forward solver using a conservative staggered-grid finite difference method, *Geophys. J. Int.*, **140**, 636-650.
- WEISS, C.J. and EVERETT, M.E., 1998, Geomagnetic induction in a heterogeneous sphere: Three-dimensional test computation and the response of a realistic distribution of oceans and continents, *Geophys. J. Int.*, **135**, 650-662.

(Received June 10, 1999)

(Accepted December 1, 2000)