

GPS アレイを利用した列島の応力増分分布や地域の構成則の推定 について

堀 宗 朗

東京大学地震研究所

Prediction of Regional Stress Increment and Constitutive Relations Using GPS Array Data

Muneo HORI

Earthquake Research Institute, The University of Tokyo

Abstract

A new inversion method of identifying stress is applied to the Japanese Islands to estimate regional stress distribution. This method finds a stress distribution from a strain distribution, by solving boundary value problems. Numerical simulation and model experiment verify the validity of the method. The deformation increment of Japan is measured by a global positioning system (GPS) network. We carry out the numerical computation of estimating regional stress increment distribution for the Japanese Islands, and obtain a self-equilibrating stress increment field. The regional constitutive relations are then estimated from the relation between the computed stress increment and the measured strain increment. Some discussions are made on the usefulness and limitation of the present inversion method.

key words: GPS network, inversion, stress distribution, constitutive relations, numerical computation

1. はじめに

高い空間分解能で列島の地殻変動を常時計測するため、約千近くの計測地点を持つグローバルポジショニングシステム (GPS) アレイが稼働している。GPS アレイ自体の地殻計測はそれ自体意義のあるものであるが、変位やひずみ増分に関する計測データは地震予知に対しても有益となりうる。GPS データを用いて地域の応力状態が推定されるのであれば、地震発生に貴重な情報をもたらすことになる。これは地震が断層の破壊によるものであり、それは応力によって引き起こされるからである。地域毎に応力場や応力-ひずみ関係を推定することが必要となるが、スケールが大きいためこのような物理量や構成則を計測することは難しく、また、地域毎の非均一性、異方性、そして非弾性挙動の影響もある。

一方、局所的な材料特性の推定は、さまざまな工学分野にまたがる共通の研究テーマである (文献 [1, 2] 参照)。近年、我々は応力推定の新しい逆解析手法を提案している (文献 [3, 4] 参照)。これは材料特性がわからない場合に、ひずみ分布から応力分布を推定す

るものである。この逆解析手法のポイントは、通常的手法のように構成則の形式を仮定したり、パラメタライズする必要がないことである。二次元の平面ひずみないし平面応力状態にしか適用できないという制限はあるものの、線形・非線形を問わず応力分布を直接計測することができる。

新しい応力逆解析手法を GPS によって得られるひずみ増分の分布に適用することで、日本列島における地域毎の応力増分の分布を同定することを試みる。さらに、推定された応力増分と計測されたひずみ増分を比較することで、地域毎の構成則の推定も試みる。このレポートでは、最初に基となる応力逆解析手法の定式化を説明する。ついで、手法の妥当性を検証するために行われた、数値シミュレーションとモデル実験の結果を示す。そして現在までに得られている、日本列島の応力増分分布に関する数値計算結果を整理する。地域毎の構成則の推定結果もあわせて示される。この結果をみて応力逆解析手法について考察し、限界と改良点について議論する。

このレポートでは、ベクトルやテンソルをインデックス表示する。直交座標系を用いるが、対象とする平面内に x_1 と x_2 の座標軸をとり、直交する方向に x_3 の座標軸をとる。総和規約も用いられる。また、コンマの後に続く添字は対応する座標軸での偏微分を表す。

2. 応力逆解析手法の定式化

最初に我々が提案する新しい応力逆解析手法を整理する（文献 [3, 4] 参照）。簡単のため、未知の弾塑性材料からなる材料サンプル V を考える。サンプルは薄く、平面応力状態にあるものとする。表面とその境界を S と ∂S とすると、それぞれにおいて変位 u_i とトラクション t_i が計測されるものとする（図 1 参照）。添字 i は 1 ないし 2 をとる。

最初に、面内ひずみ増分¹の 3 成分 ϵ_{ij} を考える。このひずみ成分は変位 u_i から決定され、ひずみ増分は弾性部分と塑性部分に分解することができる。すなわち、

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \dot{\epsilon}_{ij}^e + \dot{\epsilon}_{ij}^p$$

である。ここで上添字 e と p は弾性部分と塑性部分を示す。ここで弾性テンソル c_{ijkl} が既

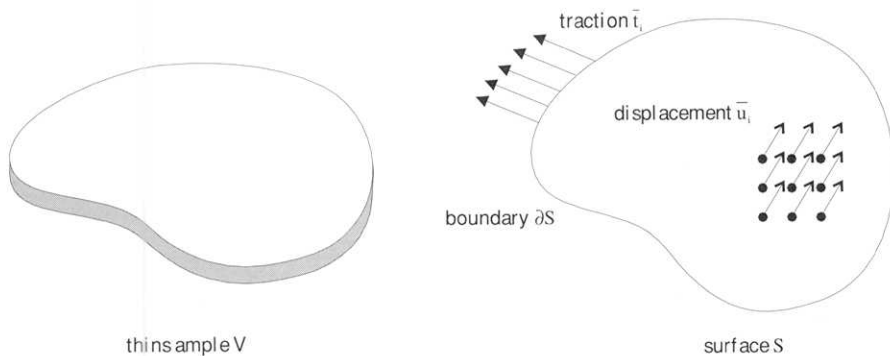


図 1. 平面応力状態にある材料サンプル

¹ ドットは増分を表し、時間微分ではない。

知であり、応力増分 $\dot{\sigma}_{ij}$ が

$$\dot{\sigma}_{ij} = c_{ijkl} \dot{\epsilon}_{kl}$$

として与えられることを仮定する。さらに塑性ひずみ増分は体積（面積）変化を伴わないことも仮定する。これは次の式で与えられる。

$$\dot{\epsilon}_{ii} = 0. \quad (1)$$

ここで添字 i は 1 と 2 の値をとる。より一般的な、添字 i が 1 から 3 までをとる場合に拡張することも可能であるが、表現が複雑になるため、ここでは省略する。

次に面内の応力の 3 成分を考える。塑性の構成則がいかなるものであれ、この 3 つの成分は 2 つの釣り合い式を満たさなければならない。したがって、応力の増分は次の式を満たすことになる。

$$\dot{\sigma}_{ij,i} = 0 \quad (j=1, 2). \quad (2)$$

応力増分が $\dot{\sigma}_{ij} = c_{ijkl} (\dot{\epsilon}_{kl} - \dot{\epsilon}_{kl}^p)$ として与えられることを利用すると、式(2)をひずみ増分と塑性ひずみ増分、 $\dot{\epsilon}_{ij}$ と $\dot{\epsilon}_{ij}^p$ 、によって書き直すことができる。例えば式(2)の左辺は $(c_{ijkl} \dot{\epsilon}_{kl})_{,i} - (c_{ijkl} \dot{\epsilon}_{kl}^p)_{,i}$ となる。表記を簡単にするため、 $\dot{\sigma}_{ij}^a = c_{ijkl} \dot{\epsilon}_{kl}$ と $\dot{\sigma}_{ij}^* = -c_{ijkl} \dot{\epsilon}_{kl}^p$ を定義し、 σ_{ij}^a を見かけの応力、そして σ_{ij}^* をアイゲン応力²と呼ぶことにする。仮定された式(1)を利用し、また、等方弾性を仮定することで、アイゲン応力 $\dot{\sigma}_{11}^* (= -\dot{\sigma}_{22}^*)$ と $\dot{\sigma}_{12}^*$ に対する次の支配方程式を導くことができる。

$$\dot{\sigma}_{11,1}^* + \dot{\sigma}_{12,2}^* = \dot{\sigma}_{11,1}^a - \dot{\sigma}_{12,2}^a, \quad (3)$$

$$\dot{\sigma}_{12,1}^* - \dot{\sigma}_{11,2}^* = \dot{\sigma}_{12,1}^a - \dot{\sigma}_{22,2}^a, \quad (4)$$

応力増分が $\dot{\sigma}_{ij} = \dot{\sigma}_{ij}^a + \dot{\sigma}_{ij}^*$ として与えられるため、境界上でのトラクションの増分からアイゲン応力に対する次の境界条件が設定される。

$$n_1 \dot{\sigma}_{11}^* + n_2 \dot{\sigma}_{12}^* = \dot{t}_1 - n_1 \dot{\sigma}_{11}^a - n_2 \dot{\sigma}_{12}^a, \quad (5)$$

$$n_1 \dot{\sigma}_{12}^* - n_2 \dot{\sigma}_{11}^* = \dot{t}_2 - n_1 \dot{\sigma}_{12}^a - n_2 \dot{\sigma}_{22}^a, \quad (6)$$

ここで n_i は境界の外向き法線である。直ちにわかるように、境界条件(5)と(6)とともに、式(3)と(4)はアイゲン応力 $\dot{\sigma}_{11}^*$ と $\dot{\sigma}_{12}^*$ に対する境界値問題となっている。

二つのアイゲン応力に連成した境界値問題を分解することは簡単である。得られる境界値問題は 2 階の偏微分方程式となるが、最終的に次の二つの境界値問題が導かれるのである。

$$\begin{cases} \dot{\sigma}_{11,ij}^* = -\dot{\sigma}_{11,11}^a + \dot{\sigma}_{22,22}^a & \text{on } S, \\ \dot{\sigma}_{11}^* = n_1 \dot{t}_1 - n_2 \dot{t}_2 - (n_1^2 \dot{\sigma}_{11}^a - n_2^2 \dot{\sigma}_{22}^a) & \text{along } \partial S, \end{cases} \quad (7)$$

$$\begin{cases} \dot{\sigma}_{12,ij}^* = -\dot{\sigma}_{12,11}^a + \dot{\sigma}_{12,22}^a - \dot{\sigma}_{11,11}^a - \dot{\sigma}_{22,22}^a & \text{on } S, \\ \dot{\sigma}_{12}^* = n_1 \dot{t}_1 - n_2 \dot{t}_2 - (n_1 n_2 (\dot{\sigma}_{11}^a + \dot{\sigma}_{22}^a) + \dot{\sigma}_{12}^a) & \text{along } \partial S, \end{cases} \quad (8)$$

アイゲン応力はこの二つの線形境界値問題を解くだけで得られることに注意してほしい。材料の線形性・非線形性は問わないのである。実際、アイゲン応力 $\dot{\sigma}_{11}^*$ と $\dot{\sigma}_{12}^*$ が計算されたのであれば、材料サンプル内の応力は次の式から決定される。

$$\begin{bmatrix} \dot{\sigma}_{11} \\ \dot{\sigma}_{22} \\ \dot{\sigma}_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\sigma}_{11}^a \\ \dot{\sigma}_{22}^a \\ \dot{\sigma}_{12}^a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{\sigma}_{11}^* \\ -\dot{\sigma}_{11}^* \\ \dot{\sigma}_{12}^* \end{bmatrix}. \quad (9)$$

² アイゲン応力ないし極性応力はマイクロメカニクスで用いられる（文献 [6, 7] 参照）。

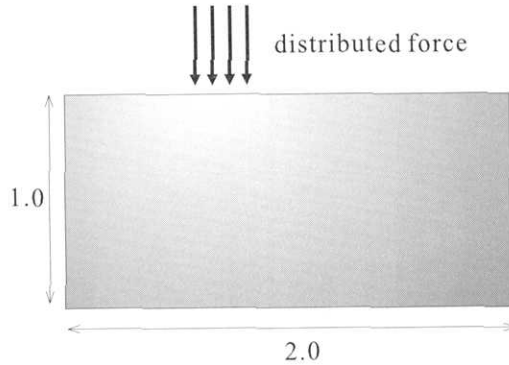


図 2. 材料サンプルの数値シミュレーションモデル

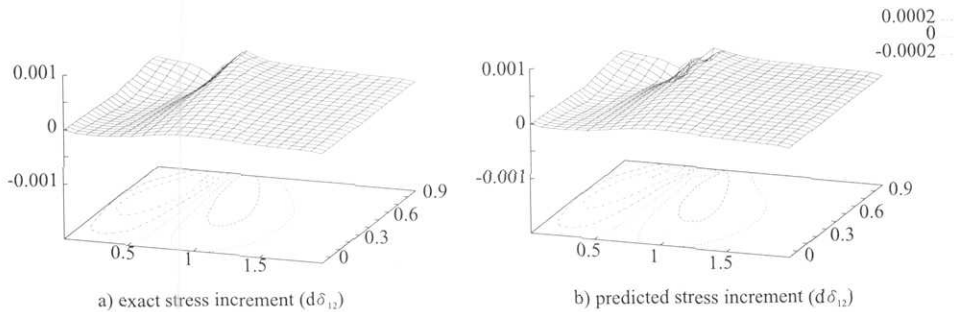


図 3. 応力分布の比較

3. 数値シミュレーションとモデル実験

提案された応力逆解析手法の妥当性を検証するため、我々は数値シミュレーションとモデル実験を行った。逆解析の結果を簡単にこの章でまとめることにする（文献 [4] 参照）。

3.1 数値シミュレーション

数値シミュレーションの対象は、未知の弾塑性材料からなる四角形の材料サンプルである。弾性は等方でありヤング率 E とポアソン比 ν は既知である。しかし、実際はミーゼス型の降伏関数によって支配されている塑性構成則に関しては、仮定された式 (1) が塑性ひずみ増分に対して成立すること以外、何も情報がないことを想定する。材料サンプルは上端の一部に鉛直荷重を受ける。下端は固定され、右端と左端はトラクションフリーである（図 2 参照）。数値シミュレーションでは、最初に変位とトラクションを計算し、それを逆解析の入力データとして用いる。数値解析には有限要素法を使用する。

荷重の各増分時に、式 (7) と (8) で示された境界値問題を解き、そして応力増分を式 (9) から計算する。応力増分の逆解析の典型例を図 3 に示す。ここで a) と b) は正解と逆解析されたせん断ひずみ増分 δ_{12} である。良好な一致が見受けられる。特に载荷点近くでの応力集中が逆解析ではうまく再現されている。この推定された応力分布と計測されたひずみ分布を用いて、局所的な構成則を同定することを試みた。一例として降伏面を図 4 に示す。ここで a) は正解を用いて主応力の平面に塑性ひずみ増分をプロットしたものであり、ミーゼ

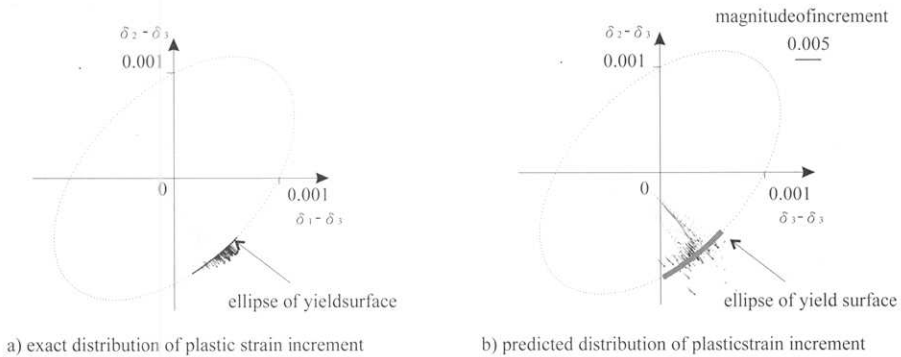


図 4. 降伏面の比較

ス型の降伏関数を用いられているため降伏面は楕円となる。また b) は逆解析の結果を同様にプロットしたものである。図 4 b) の楕円は明確なものではないが、楕円の一部と十分わかるものであり、降伏応力の推定も可能である。実際、この図から読みとれる降伏応力は 0.001 ± 0.0002 [MPa] であり、正解 0.001 [MPa] をほぼ正しく推定している。

3.2 モデル実験

モデル実験ではゼラチンサンプルを用いた (図 5 参照)。本来、このモデル実験の主要な目的は局所的な構成則を推定することである。材料サンプルは半径 30 [cm]、厚さ 1 [cm] の薄い円盤型であり、下面にねじれせん断を加えて载荷する。上面の変形の計測には画像解析を用いた。これは、上面の縦 7 [cm] 横 8 [cm] の四角形の領域に 0.5 [cm] 間隔でマーカーをつけ、そのマーカーを追うことで計測するものであり、CCD カメラを用いてマーカーを含む領域を撮影する。ねじれせん断によって亀裂が生じ、この亀裂がサンプル表面に現れるまでを計測する。亀裂計測の間に、荷重から決定された平均応力の増加が見られなかったため、境界のトラクションは 0 とした。またゼラチンの弾性構成則は単純せん断試験によって計測された。

計測されたひずみ分布から、応力逆解析手法を用いて応力分布を計算し、ついで計測されたひずみと推定された応力から局所的な構成則の推定を試みた。典型例を図 6 に示す。これは二つの要素のせん断ひずみとせん断応力の関係 ($\sigma_{12} - \epsilon_{12}$) をとったものである。ま

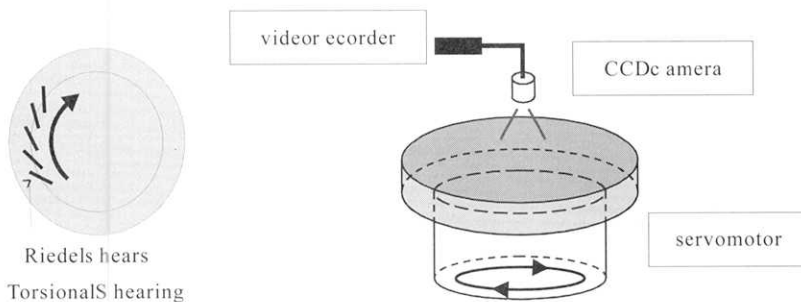


図 5. モデル実験の概念図

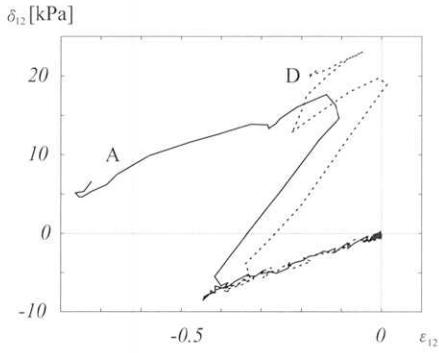


図 6. せん断ひずみ ϵ_{12} とせん断応力 σ_{12} の関係：
A と D は図 8 内の要素

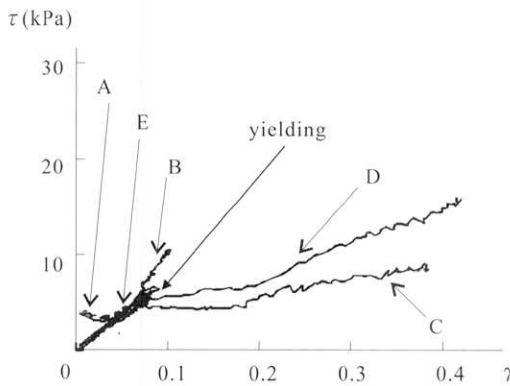


図 7. 最大せん断ひずみ γ と最大せん断応力 τ の関係：A～E は図 8 内の要素

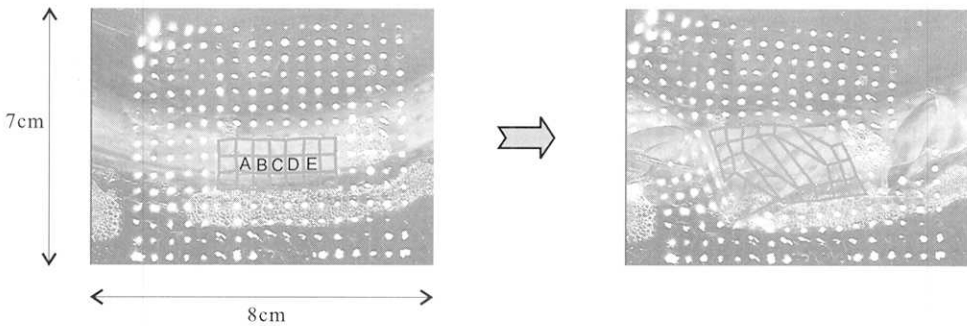


図 8. CCD カメラで計測された画像の例

た図 7 に最大せん断ひずみと最大せん断応力の関係 ($\gamma-\tau$) をプロットする. なお両図の A から D を CCD カメラの画像の図 8 に示す. せん断ひずみとせん断応力の関係は一見場所毎に違うように見受けられるが, 最大せん断ひずみと最大せん断応力の関係は共通するものがある. 実際, 亀裂が横切った要素では, 最大せん断応力は一定値となるものの最大せん断ひずみは増加していく. また, 亀裂が横切らなかった要素では最大せん断応力は最大せん断ひずみにほぼ比例して増加していく. 要素に共通する応力-ひずみ関係が得られたことは, 応力逆解析の妥当性を示唆するものである.

4. 日本列島への応力逆解析手法の適用

GPS アレイで計測された変位増分を用いて、応力逆解析手法を列島の地域応力増分の推定に適用する。なお、地表面はトラクションフリーの状態であるため、列島の応力場は3次元的に鉛直方向にも変化しているが、GPS アレイの計測時間では応力増分は平面応力状態に近いと仮定している。また最小自乗推定を適用してGPS データのノイズを除き、滑らかなひずみ増分分布を得ている（参考文献 [8] 参照）。

応力逆解析手法をGPS データに適用する際に、式(1)の仮定と式(5)と(6)の境界条件には注意をしなければならない。ひずみ増分の非弾性成分が体積（面積）成分を持たないという仮定は、せん断変形しか生じない断層の滑りによって列島の非弾性変形が引き起こされると考えると、妥当なものである。正確に地域応力場を推定するためには列島境界のトラクションを推定しなければならない。しかし、式(7)と(8)で記述された境界値問題は線形であるから、境界のトラクションの寄与を分離することができる。そこで現時点の解析では境界トラクションを $t_i=0$ とし、この影響を無視している。

GPS データを用いた境界値問題を数値解析するため、数値計算上のチェックを3種類行った。最初は数値解の収束性である。図9に最大せん断応力増分の分布を示す。ここでa)とb)は $\Delta=0.25$ と 0.125 度で離散化を行ったもので、十分収束していることがわかる。第2のチェックは境界条件である。列島の形状を変えた二つの領域に対して数値解析を行い、境界条件を指定した場所が境界値問題の解に与える影響を調べる。得られたせん断応力増分 $\hat{\sigma}_{12}$ の分布を図10に示す。全体の分布パターンはさほど変わらないことから、地域的

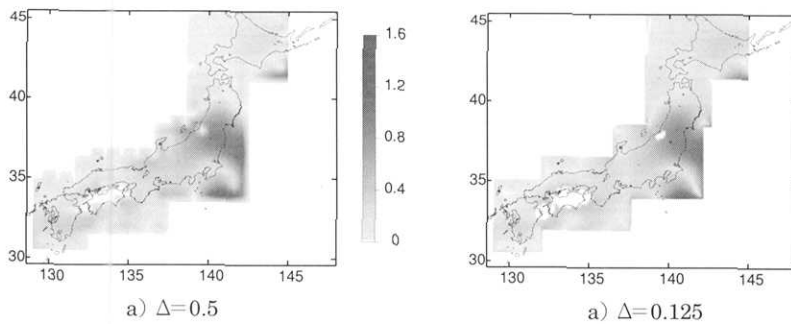


図9. 数値解析解の収束性

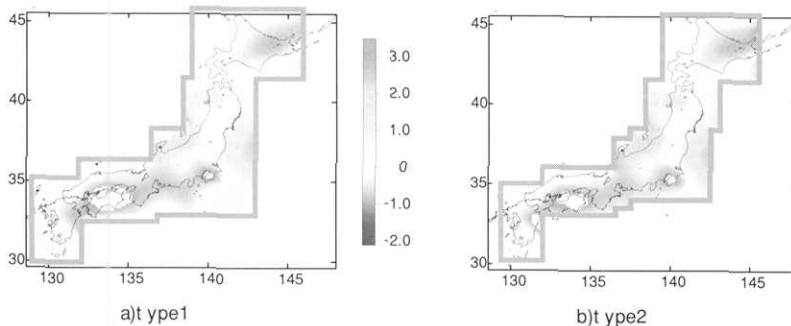


図10. 境界の影響

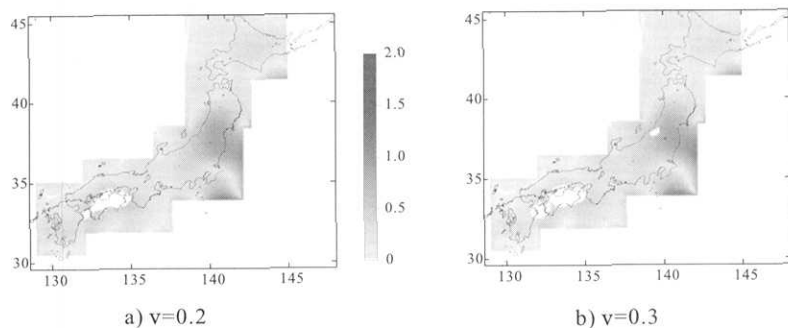
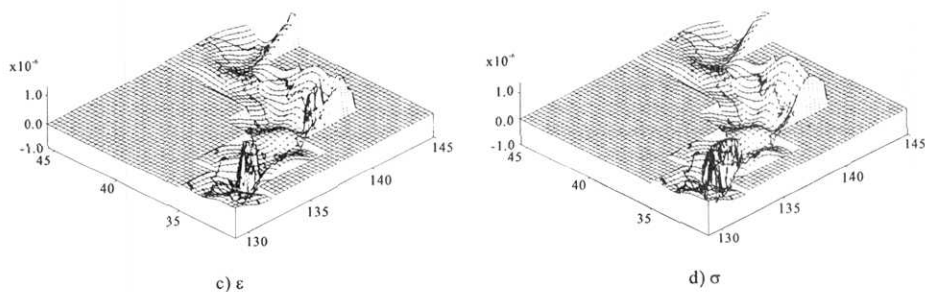


図 11. 基準弾性の影響

図 12. 体積ひずみ ϵ と圧力 σ の分布

な応力増分は付近のひずみによって決定され、境界条件にはさほど影響されないことがわかる。最後に応力を計算する基準弾性 c_{ijkl} の影響を調べた。見かけの応力とアイゲン応力分布は弾性によって変わるが式 (9) で与えられる応力分布は基準弾性によらない。ポアソン比が $\nu=0.2$ と 0.3 の場合を計算し、最大せん断応力増分分布を図 11 に示す。図 10 と同様、基準弾性はあまり影響がないことがわかる。

次に $\Delta=0.125$ 度の離散化、図 10 a) の Type 1 の境界、そしてポアソン比 $\nu=0.25$ を用いて応力増分を完全に計算した。図 12 と 13 に、それぞれ、ひずみ増分と応力増分の第 1 の不変量 $\dot{\epsilon}$ と $\dot{\sigma}$ 、第 2 の不変量である最大せん断ひずみ増分 $\dot{\gamma}$ と最大せん断応力増分 $\dot{\tau}$ をプロットした。ひずみ増分分布と応力増分分布の差は、見かけの応力増分 $\dot{\sigma}_{ij}^a = c_{ijkl} \dot{\epsilon}_{kl}$ が釣り合い式を満たさないためアイゲン応力場 $\dot{\sigma}_{ij}^*$ が生じ釣り合い式を満たす応力増分分布が決定されていることを明確に示している。地域毎の構成則は計測されたひずみ増分と推定された応力増分を比較することで推定できる。一例として図 14 に、最大せん断応力増分と最大せん断ひずみ増分の比 $\dot{\tau}/\dot{\gamma}$ と方向の差をプロットした。せん断応力増分とせん断ひずみ増分の比はせん断剛性に対応し、方向の差は異方性の度合いに対応する。列島の構成則は、地域毎に非均一であり、また、異方性があることがわかる。

図 12 と 14 には、高い応力集中が境界付近にあり、また、極めて高いせん断剛性 $\dot{\tau}/\dot{\gamma}$ があることを示している。少なくとも応力集中やせん断剛性の値は現実的ではなく、境界トラクションを 0 と置いたことや式 (1) の仮定があまり妥当でなかったことによると考えられ

GPS アレイを利用した列島の応力増分分布や地域の構成則の推定について

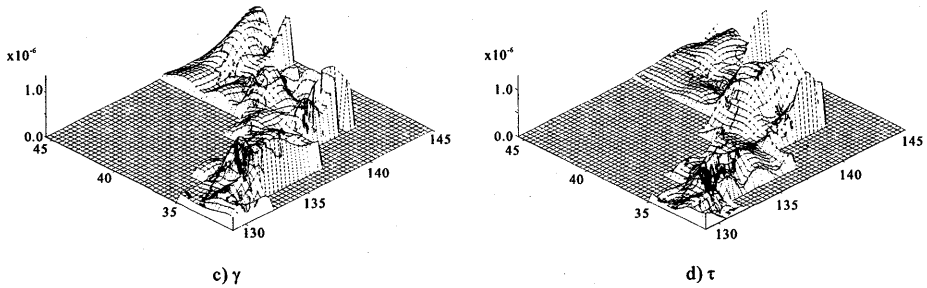


図 13. せん断ひずみ γ とせん断応力 τ の分布

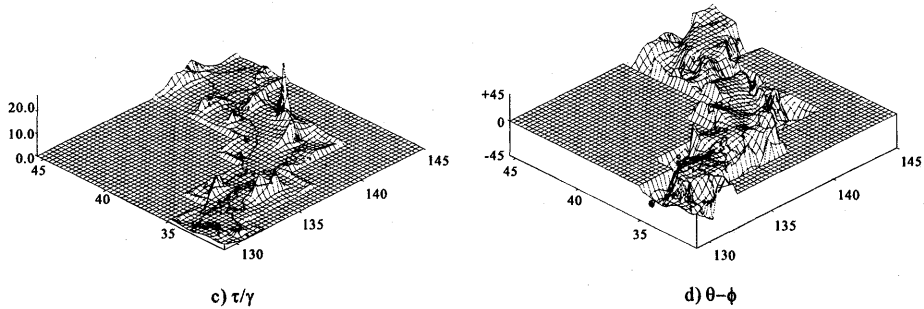


図 14. 地域毎の剛性と異方性の分布

る。境界トラクションは、数カ所での応力測定結果や、プレートの運動による地殻変動の度合いから推定することができるであろう。しかし、仮定された式 (1) はより一般的なものに換える必要がある。また、最小自乗法によって滑らかになった変位増分からひずみ増分を計算しているが、この方法では局所的な地域の変形を過小評価することも懸念される。しかし、現在の応力逆解析手法では変位増分の高階の微分を計算しなければならず、滑らかな分布が必要である。この二つの問題点を解決するため、応力逆解析手法の改良を考案中である (参考文献 [9] 参照)。

式 (1) の仮定は一様な弾性を持つ材料に有効である。実際、弾性が等方である場合、この仮定から体積 (面積) 弾性係数が一様となることが次のように示される。

$$\frac{\dot{\sigma}}{\dot{\epsilon}} = \frac{\dot{\sigma}_{11} + \dot{\sigma}_{22}}{\dot{\epsilon}} = \frac{\dot{\sigma}_{11}^a + \dot{\sigma}_{22}^a}{\dot{\epsilon}} = c_{1111} + c_{1122}.$$

図 14 からわかるように、列島は地域単位で非均一である。このため、式 (1) を仮定することは適当ではない。体積弾性係数を未知パラメータとすれば良いのであるが、この逆問題ははるかに難しく、より効率的な逆解析が行えるように逆解析手法を改良することが必要となる。簡単な改良は、アイゲン応力を用いる代わりに、エイリーの応力関数 a を推定する問題に換えることである。このエイリーの応力関数は

$$\sigma_{11} = a,_{22}, \quad \sigma_{22} = a,_{11}, \quad \sigma_{12} = -a,_{12},$$

として釣り合い式を満たす応力成分を与える。簡単のため、線形弾性、等方、しかし非均一の材料を考えてみる。ひずみ分布が与えられると、未知の体積弾性係数 κ を用いてエイ

リー応力関数の支配方程式を

$$a_{,ii} = \kappa \epsilon_{ii}$$

として導くことができる。エイリー応力関数の境界条件も境界トラクションから

$$n_i a_{,i} = -n_1 r_2 + n_2 r_1$$

として導かれる。ここで r_i は $r_i = \int t_i dl$ として定義された境界のレザルタントフォースである。この結果、エイリー応力関数に対して次の境界値問題を設定することが可能となる。

$$\begin{cases} a_{,11} + a_{,22} = \kappa (\epsilon_{11} + \epsilon_{22}) & \text{on } S, \\ n_1 a_{,1} + n_2 a_{,2} = -n_1 r_2 + n_2 r_1 & \text{along } \partial S. \end{cases} \quad (10)$$

エイリー応力関数の境界値問題はアイゲン応力の境界値問題(7)と(8)と同じような形式である。

ここでは定式化のみ示すが、エイリー応力関数を推定するよう改良された応力逆解析手法は、弾性が非均一な場合を扱うには有望である。これは境界値問題が計測された変位やひずみの高階の微分を必要としないことからわかる。実際、式(7)と(8)を式 Eq. (10)と比較すると、右辺の項は前者が変位の3階の微分であるのに対し、後者は1階の微分である。現在、体積弾性係数 κ を同時に推定する応力逆解析手法を開発中である。

5. おわりに

準備として行った数値解析のチェックや試行的に行った応力場推定の数値解析結果は、応力逆解析手法を列島に適用する際の基本的な妥当性を示していると思われる。応力逆解析手法は応力場が釣り合い式を満たすという条件を利用しており、計算された応力増分の分布は計測されたひずみ増分の分布と異なっている。より高度な数値解析は不可欠ではあるが、応力推定やその結果得られる構成則の推定は十分期待できると思われる。

数値解析の結果から、変位の高階の微分を計算しなければならない点、境界条件の影響、そして式(1)の仮定の妥当性等、応力逆解析手法の欠点や限界が示された。このような問題点を克服するため、応力逆解析手法の改良を試み、エイリー応力関数の推定を行う境界値問題の設定を行った。これは列島の応力推定にはより適した形式である(参考文献 [9] 参照)。また、推定された構成則を既知の列島地殻構造と比較し、地質学的な立場から推定の妥当性を検討することを予定している。

参考文献

- BUI, H.D., 1994, Inverse problems in engineering mechanics: an introduction, CRC Press, 204 p.
- TANAKA, M. and G.S. DULIKRACH (eds.) 1998, Inverse problems in engineering mechanics: International symposium on inverse problems in engineering mechanics 1998, Elsevier, 622 p.
- HORI, M., T. KAMEDA, 1998, Formulation of inverse problem of identifying material properties based on equivalent inclusion method in "Inverse Problems in Engineering Mechanics" edited by M. TANAKA and G.S. DULIKRACH, Elsevier, pp. 225-234.
- HORI, M., T. KAMEDA and N. HOSOKAWA, 1999, Formulation of identifying material property distribution based on equivalent inclusion method, *Structural Eng./Earthquake Eng., JSCE*, 16, 21-30.
- KATO, T., G.S. EL-FIRKY, E.N. OWARAE and S. MIYAZAKI, 1998, Crustal strains in the Japanese

GPS アレイを利用した列島の応力増分分布や地域の構成則の推定について

- islands as deduced from dense GPS array, *Geophys. Res. Lett.*, **25**, 3445-3448.
- NEMAT-NASSER, S. and M. HORI, 1998, *Micromechanics: Overall Properties of Heterogeneous Materials*, Second Edition, North-Holland, London.
- ESHELBY, J.D., 1957, The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion, and related problems, *Proc. Roy. Soc.*, **A241**, 376-396.
- EL-FIKY, G.S. and T. KATO, 1999, Interplate coupling in the Tohoku district, Japan, deduced from geodetic data inversion, *J. Geophys. Res.*, **104**, 20361-20377.
- Hori, M. and T. Kameda: Inversion of stress from strain without fully knowing constitutive relations, (in review process, 2000).

(Received February 29, 2000)

(Accepted July 5, 2000)