

高速多重極境界要素法による 広域地震動シミュレーションに関する考察

福井卓雄

福井大学工学部建築建設工学科

Discussion of Fast Multipole Boundary Element Method for Simulating Wide-area Seismic Ground Motions

Takuo FUKUI

Department of Architecture and Civil Engineering, Fukui University

Abstract

A quantitative simulation scheme to analyze wide-area seismic ground motions is discussed in the present paper. The ground is assumed to be a multi-zone elastic material as the first order approximation. The problem has a large number of freedom parameters and a large wavenumber because the area covers at least hundreds of wavelengths. The region is approximately semi-infinite. The boundary element method in the frequency domain elastodynamics is proposed to analyze this problem. To solve a large quantitative model the fast multipole method, which reduces the computing complexity of matrix-vector product to $O(N)$ by doing all computations on a tree structure, is introduced to accelerate the boundary element method with an iterative solver. To reduce computing time of large wavenumber problems the diagonal form of the fast multipole method is combined with the conventional fast multipole method. The boundary integral equation of Burton and Muller is introduced to avoid fictitious eigenvalues in exterior problems. For the iterative solver of the boundary element method, a preconditioning scheme using the Haar wavelet transformation and an algorithm on the tree structure is proposed. A block preconditioning for the boundary element equation in a multi-zone region is also proposed. The proposed method is expected to analyze problems of millions of elements with parallel computing. This method is applicable to viscoelastic ground motion analysis with complex wavenumbers.

Key Words: seismic ground motion, simulation, boundary element method, fast multipole method, preconditioning of iterative solver

1. はじめに

地中を伝播する地震波の挙動, とくに, 複雑な構成を持つ広範囲の地殻や大都市の基礎地盤における挙動, を明らかにすることは地震学および地震工学における基礎的で重要な課題の一つである。なかでも, 都市を支える平野部の地震波動を広域的に把握することは, 都市の防災計画を策定する上で最も基礎となる資料を提供することとなる。これらの広域的な波動問題の特徴は, 領域の大きさが対象とする波長に対して数 100 倍以上になること

である。解析は数値的に実行することになり、その精度を維持するためには波長に応じた離散化が必要となる。必然的に極めて自由度の高い問題の数値解析が必要とされる。地震波の挙動の解析は第一次近似として弾性波動問題として定式化されるが、本研究では、このような大規模弾性波動問題の解析を実現するための指針、とくに、解析の高速化と高精度化のための手法、を確立することを目的とする。

弾性波動問題の解析手法としては、差分法、有限要素法、境界要素法などがあり、それぞれに有用な特色を持っている。ここでは、広域的な地震動シミュレーションを目的としているので、問題の自由度を比較的小さくおさえることのできる境界要素法を用いる。境界要素法は場の基本特異解を解析のための基底とし、領域の境界だけを近似するので、無限空間を含む領域の解析にとくに有効であり、波動問題の解析に広く応用されている。また、粘弾性体、Biot 物体などの散逸を含む問題への適用も容易である(小林, 2000)。大規模問題を扱うための手法としては、N 体問題の解析に利用されている高速多重極法(GREENGARD, 1988)を境界要素法に应用する。これによって、計算速度を著しく高めると同時に計算に必要な記憶容量を著しく減少させることができ、数 10~数 100 万自由度の問題も通常の計算手段で扱うことができるようになる。高速多重極法を利用して効率化した境界要素法を高速多重極境界要素法とよぶ。

本論文は、著者のこれまでの高速多重極境界要素法、とくに波動問題、における研究を整理し、現実の問題への適用を実現するために考慮すべき要件とそのための諸手法の提案をまとめたものである。以下に本論文の内容を簡単に紹介する。まず、次節において、広域的な地震動を解析する場合の問題点を整理する。波動の問題の場合には、あつかう領域のサイズ・波の伝播速度・周波数によって問題の特性が変わり取り扱い方が異なる可能性がある。解析手法を設計する前に、問題の特徴を十分に把握しておくことが必要である。現在の問題の特徴は、かなり大きな波数をもつ大自由度の非均質領域問題であるといえる。3 節においては、高速多重極境界要素法について概説する。境界要素法の定式化、高速多重極法の考え方とその実現方法について述べる。4 節は、高い波数の問題の取り扱い方法について著者の研究成果を紹介する。通常の高速度多重極法では高い波数の場合の計算量が大きくなり過ぎて現実的な計算が不可能になるが、積形式の多重極表現を取り入れることにより計算可能な程度に計算量を縮小することができる。5 節では、境界要素法における反復法の効率化について述べる。高速多重極境界要素法においては、解析に反復法を使うことが必然となるが、適切な前処理を行なって収束性を高めてやるのが現実的な計算には是非必要である。Wavelet 変換を使った前処理法および非均質領域の前処理法について提案を行なう。最後に、以上のことをまとめて、広域地震動シミュレーションにおける動弾性問題の解析のための指針を示す。

2. 地震動シミュレーションのための計算モデル

まず、広域的な地震動を解析する場合に考慮すべき問題の諸点について整理しよう。波動の問題は、あつかう領域のサイズ・波の伝播速度・周波数によって問題の特性が変わる。すなわち、問題の特性にあった取り扱いが必要となる。解析手法を設計する前に、問題の特徴を十分に把握しておくことが必要である。以下では、都市を含む 50~100 km 平方程度の平野における地震動解析を行なうことを目標として、利用すべき計算モデルに

ついて考察する。さらに広域的な解析、たとえば日本列島全体を対象とした解析、においてはモデルを少し変更する必要があるが、モデル選定の基本的な考え方においては大きな違いはないものと考えられる。

2.1 解析モデルの選定

解析モデル選定のための基準は、解析領域の大きさ・媒質の材料のおよび幾何学的特性・対象とする周波数帯あるいは解析時間である。都市を対象としたときの地震波の解析における一般的な特徴は以下のようなものであると考えられる。

- 解析領域の大きさの選定。都市における地震波動をシミュレートするためには、震源域を含む都市周辺域の解析を実行する必要がある。解析対象領域は半空間に近い開領域であるが、数値解析に必要な離散化のために有限の大きさのモデルを使う。有限の領域を解析する場合には領域境界の影響が生じるので、境界において特別の工夫を行なうか、あるいは、解析対象領域を含めたかなり大きなモデルを考える必要がある。
- 地盤内部は多様である。一般には、地層によって弾性波に対する物性がことなる。すなわち、非均質領域を取り扱わなければならない。とくに、日本の都市は沖積平野に位置することが多いが、沖積層内部の地層は極めて複雑である。解析領域の大きさによっては簡略化したモデルが必要であろう。
- 地盤の物性は多様である。一般には粘弾性的性質やあるいは透水性物質（Biot 物質）としての性質を持っている。しかしながら、都市地盤を解析する場合には、その時定数は地震の波の周期と比較して一般には大きいので、ほとんどの場合は弾性解析で十分であると考えられる。ただし、解析時間が長期であったり、周波数が大きな場合には、これらの性質を考慮する解析は有効であろう。

これらを考慮し、問題をできるだけ単純化することにすれば、媒質として弾性体を仮定し、線形弾性波動解析を行えば、現象の一次近似の追跡としては十分であると考えられる。

解析領域が大きく、半空間に近い開領域であるので、解析手法としては、開領域のあつかいが容易な境界要素法を使う。また、線形問題をあつかうので、問題を周波数領域で解析し、時間領域解は Fourier 変換により求めることにする。周波数領域の境界要素法を使うもう一つの利点は、粘弾性問題や透水性物質の波動問題への拡張が容易であることである（たとえば船戸・福井, 1999; および福井他, 1996）。

境界要素法においては、離散化のために有限の大きさの地表モデルを使う。有限の地表の境界付近では境界端面の影響が生じるので、モデル地表は解析対象領域を含めたかなり大きなものを必要とする。余分の大きさは、地層の構成、対象とする周波数によっても異なるが、ここでは、2 倍の長さ程度をとるものとする。とくに、薄い地層を扱う場合には注意が必要である。無限に広がる薄い地層を波動が伝播する場合にはウェーブガイドとしての効果が現れる。すなわち、3 次元空間における波動と違って、薄い 2 次元的な板を伝播する波としての特性が現れて、有限の大きさの地層モデルでは誤差が大きくなる。これを完全に避けるには、地層の端までを含む領域を解析することが必要である。すなわち、基岩が地表付近に出る周辺の山岳あるいは海底部までを含める必要がある。もし地層の分布が広くそれができない場合には、該当する地層にウェーブガイドとしての特性を持たせる解析を行わなければならない。

2.2 解析パラメータの選定

都市を含む平野の地震動解析の具体的なイメージを描くために、一つのモデルケースについて解析パラメータを決めてみよう。

- 周波数と弾性波の伝播速度から波数（すなわち、波長）が決まる。離散化に必要なパラメータとしては、弾性係数の最も小さな場合、すなわち、沖積平野の都市であれば、都市地盤の最上層部の値を用いる。縦波速度が $c_L = 762.6 \text{ m/s}$ （福井市足羽山西部の実測値）であるとする、Poisson 比を 0.4 とすれば、横波速度は $c_T = \sqrt{(1-2\nu)/2(1-\nu)} \times c_L = 311.3 \text{ m/s}$ である。したがって、周波数が $f = 1 \text{ Hz}$ のときの波長は $L_T = c_T/f = 311.3 \text{ m}$ である。波数は $k_L = 2\pi f/c_L = 0.008239/\text{m}$ 、 $k_T = 2\pi f/c_T = 0.02018/\text{m}$ である。
- 波長から最小の要素サイズが決まる。一波長を何等分するかは解析の精度に直接に関係する。たとえば、横波の波長を $L_T = 300 \text{ m}$ として、半波長を 4 等分すれば要素の大きさは $\Delta = L_T/8 = 37.5 \text{ m}$ 、5 等分すれば $\Delta = 30 \text{ m}$ となる。これらは、時間領域解析において、Nyquist 周波数をそれぞれ $f_N = 4 \text{ Hz}$ 、 $f_N = 5 \text{ Hz}$ としたものに対応する。
- 領域の大きさから必要とする要素数が決まる。領域が $50 \text{ km} \times 50 \text{ km}$ であるとする、 $\Delta = 30 \text{ m}$ のときに必要な要素数は $N = (50/30)^2 \times 10^6 \approx 2.6 \times 10^6$ となる。領域が $100 \text{ km} \times 100 \text{ km}$ であれば、必要な要素数は $N = (100/30)^2 \times 10^6 \approx 1.1 \times 10^7$ である。地層を考慮する場合には、この数倍の要素が必要である。
- 波数と領域の大きさから扱うべき無次元波数が決まる。領域が $50 \text{ km} \times 50 \text{ km}$ 、横波波数が $k_T = 0.02/\text{m}$ であるとする、無次元波数は $k_T L = 0.02 \times 50\sqrt{2} \times 10^3 \approx 1400$ 、領域が $100 \text{ km} \times 100 \text{ km}$ 、横波波数が $k_T = 0.02/\text{m}$ であるとする、無次元波数は $k_T L \approx 2800$ である。
- 周波数解を重ね合わせて時系列解を得るのであれば、扱う周波数にはかなりの幅が必要である。具体的には Nyquist 周波数をいくつに選ぶかが問題となる。たとえば、Nyquist 周波数を $f_N = 5 \text{ Hz}$ とすると、時間ステップの大きさは $\Delta t = 0.1 \text{ s}$ となる。解析時間を 1~2 分とすれば、ステップ数は 600~1200 である。この程度のステップ数であれば FFT を使って時系列解を計算することは容易である。このとき、最小周波数は $f = 1/300 \sim 1/600 \text{ Hz}$ となる。

以上により、要素数が数 100~1000 万、無次元波数が 1000~3000 の非均質領域を境界要素法で解くことが現在の目標となる。

結局、広域的な地震動シミュレーションを実行するためには、要素数が極めて大きく、波数の大きい非均質領域問題の動弾性解析手法を準備することが必要である。ただし、上で求めた波数は全領域に対するもので、後に述べる高速多重極法においてはこの値の約 1/8、すなわち、200~400、が規準となる無次元波数となる。

3. 波動問題における高速多重極境界要素法

要素数の大きな問題を境界要素法で解くための手法として高速多重極境界要素法を用いる。ここでは、周波数領域の波動問題における境界要素法およびその発展形である高速多重極境界要素法について簡潔に紹介する。波動問題におけるこれらの解析法の詳細については、たとえば、小林（2000）を参照されたい。

3.1 境界要素法

(1) スカラー波動問題

まず、周波数領域におけるスカラー波の散乱問題を考える。散乱体の外部領域を B 、境界を ∂B とする。よく知られているように、波動場 u は Helmholtz 方程式を満足する。したがって、境界値問題は

$$\begin{aligned} \nabla^2 u + k^2 u &= 0 & \text{in } B \\ u &= \bar{u} \quad \text{on } \partial B_1, \quad \frac{\partial u}{\partial n} = \bar{s} \quad \text{on } \partial B_2 \end{aligned} \quad (1)$$

となる。ここに、 ∇^2 は Laplace 作用素、 k は波数、 $\partial/\partial n$ は外向き法線微分を示す。

この問題の解 u は、一般化された Green 公式

$$C(\mathbf{x}) u(\mathbf{x}) = \bar{u}(\mathbf{x}) + \int_{\partial B} \left[G(\mathbf{x}; \mathbf{y}) \frac{\partial u}{\partial n}(\mathbf{y}) - S(\mathbf{x}; \mathbf{y}) u(\mathbf{y}) \right] dS_y \quad (2)$$

により表される。ここに、 \bar{u} は入射波、 C は自由項と呼ばれる点 \mathbf{x} の位置に依存するパラメータで、 \mathbf{x} が領域内のとき $C=1$ 、領域外のとき $C=0$ 、滑らかな境界上にあるとき $C=1/2$ の値をとる。また、 G, S は基本特異解および第二基本特異解で

$$G(\mathbf{x}; \mathbf{y}) = \begin{cases} \frac{e^{ik|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}}{4\pi|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} = \frac{ik}{4\pi} h_0^{(1)}(k|\mathbf{x}-\mathbf{y}|) & \text{(3次元)} \\ \frac{i}{4} H_0^{(1)}(k|\mathbf{x}-\mathbf{y}|) & \text{(2次元)} \end{cases}, \quad S(\mathbf{x}; \mathbf{y}) = \frac{\partial G(\mathbf{x}; \mathbf{y})}{\partial n_y} \quad (3)$$

である。ここに、 $h_0^{(1)}$ は第1種0次の球 Hankel 関数、 $H_0^{(1)}$ は第1種0次の Hankel 関数である。一般化 Green 公式(2)は、点 \mathbf{x} が境界上にあるとき、境界値 $u, \partial u/\partial n$ に関する拘束条件となり、境界条件が与えられれば、未知の境界値に関する積分方程式となる。

式(2)において、境界上に適当な近似基底 $\phi_1(\mathbf{x}), \phi_2(\mathbf{x}), \dots, \phi_N(\mathbf{x})$ を導入して、境界値 $u, \partial u/\partial n$ を

$$u(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^N \phi_i(\mathbf{x}) u_i, \quad \frac{\partial u}{\partial n}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^N \phi_i(\mathbf{x}) s_i \quad (4)$$

で近似する。これを(2)に代入すると、(2)の離散形

$$u(\mathbf{x}) = \bar{u}(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^N A_i(\mathbf{x}) s_i - \sum_{i=1}^N B_i(\mathbf{x}) u_i \quad (5)$$

が得られる。ここに、 A_i, B_i は影響関数で

$$A_i(\mathbf{x}) = \int_{\partial B} G(\mathbf{x}; \mathbf{y}) \phi_i(\mathbf{y}) dS_y, \quad B_i(\mathbf{x}) = [C(\mathbf{x}) - 1] \phi_i(\mathbf{x}) + \int_{\partial B} S(\mathbf{x}; \mathbf{y}) \phi_i(\mathbf{y}) dS_y \quad (6)$$

で定義する。Green 公式の離散形(5)を境界上の選点 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N$ において満足させれば、代数方程式

$$-\sum_{j=1}^N A_j(\mathbf{x}_i) s_j + \sum_{j=1}^N [\phi_j(\mathbf{x}_i) + B_j(\mathbf{x}_i)] u_j = \bar{u}(\mathbf{x}_i) \quad (i=1, 2, \dots, N) \quad (7)$$

が得られる。境界条件が与えられているときには、上の方程式を解いて未知の境界値の近似値を得ることができる。さらに、未知の境界値が決定されれば、領域内部の値は(5)を使って求めることができる。有限要素法と同様に、近似基底として有限な台(要素)を持つものを選び、(5)、(7)を使って近似解を得ようとする数値解析法が境界要素法である。

(2) 弾性波動問題

弾性波動問題の場合にもスカラー波動問題と同様にして境界要素法を定式化することができる。ここでは等方等質の弾性体を仮定する。3次元波動場および2次元面内波動場における変位 u_i は Navier の方程式を満足する。境界値問題は

$$\begin{aligned} c_T^2 u_{i,jj} + (c_L^2 - c_T^2) u_{j,ji} + \omega^2 u_i + X_i &= 0 \quad \text{in } B \\ u_i &= \bar{u}_i \quad \text{on } \partial B_1, \quad n_j \sigma_{ji} = T_{ij}^n u_j = \bar{s}_i \quad \text{on } \partial B_2 \end{aligned} \quad (8)$$

となる(たとえば, FUNG (1965) の教科書を参照)。ここに, X_i は物体力, ω は角周波数である。 c_L, c_T は縦波速度および横波速度で, せん断弾性係数 μ , Poisson 比 ν および質量密度 ρ により

$$c_T = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}, \quad c_L = c_T \sqrt{\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}} \quad (9)$$

で与えられる。このときの縦波および横波波数は, それぞれ, $k_L = \omega/c_L, k_T = \omega/c_T$ である。また, 応力 σ_{ij} は変位により

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} u_{k,k} + \mu (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (10)$$

で与えられる。ここに, $\lambda = 2\nu\mu/(1-2\nu)$ は Lamé 定数である。 T_{ij}^n は変位に対して境界上の単位法線ベクトル n_i に垂直な面上の応力ベクトルを与える作用素である。

境界値問題(8)の解 u_i は Somigliana の公式

$$C_{ij}(\mathbf{x}) u_j(\mathbf{x}) = \bar{u}_i(\mathbf{x}) + \int_{\partial B} [G_{ij}(\mathbf{x}; \mathbf{y}) T_{jk}^n u_k(\mathbf{y}) - S_{ij}(\mathbf{x}; \mathbf{y}) u_j(\mathbf{y})] dS_y \quad (11)$$

により積分表現される。この式で, \bar{u}_i は入射波であり, C_{ij} は(2)の C と同様の自由項で, \mathbf{x} が領域内のとき $C_{ij} = \delta_{ij}$, 領域外のとき $C_{ij} = 0$, 滑らかな境界上にあるとき $C_{ij} = \delta_{ij}/2$ の値をとる。基本特異解および第二基本特異解は

$$\begin{aligned} G_{ij}(\mathbf{x}; \mathbf{y}) &= \frac{1}{\mu} \left\{ G_T(\mathbf{x}; \mathbf{y}) \delta_{ij} + \frac{1}{k_T^2} [G_T(\mathbf{x}; \mathbf{y}) - G_L(\mathbf{x}; \mathbf{y})]_{,ij} \right\} \\ S_{ij}(\mathbf{x}; \mathbf{y}) &= T_{jk}^n G_{ki}(\mathbf{y}; \mathbf{x}) \end{aligned} \quad (12)$$

で与えることができる。ここに, G_L, G_T は, それぞれ, 波数が $k = k_L, k_T$ のときの Helmholtz 方程式の基本特異解で, (3)に示したものと同一のものである。

Somigliana の公式(11)はテンソル性の違いを除いて Green 公式(2)と同等のものである。弾性波動場は本質的に4階の微分方程式に支配される場であるので, 基本特異解は複雑になるが, それでもスカラー波動の基本特異解をその構成要素として持つ。したがって,

弾性波動問題の境界要素法はスカラー波動問題の場合とほぼ同様に扱うことができる。

3.2 高速多重極境界要素法

境界要素法における一つの問題点は、離散化によって得られる代数方程式（スカラー波動問題の場合には(7)）の係数が密行列となり、直接にこれを解こうとすると、規模の大きな問題の場合には係数の計算および方程式の解法に大きな計算負荷がかかることである。この問題を回避する手段として、高速多重極法とよばれるアルゴリズムを利用して計算を進める方法が提案されている。以下では、高速多重極法を利用した境界要素法について述べる。

(1) スカラー波動問題

まず、スカラー波動問題について高速多重極境界要素法の要点を述べる。いま、点 \mathbf{y} の近くに点 \mathbf{y}_0 をとり、 $|\mathbf{x}-\mathbf{y}_0| > |\mathbf{y}-\mathbf{y}_0|$ であるとする。基本特異解(3)が

$$G(\mathbf{x}; \mathbf{y}) = \sum_n m_n(\mathbf{y}-\mathbf{y}_0) g_n(\mathbf{x}-\mathbf{y}_0), \quad S(\mathbf{x}; \mathbf{y}) = \sum_n \frac{\partial m_n}{\partial n_y}(\mathbf{y}-\mathbf{y}_0) g_n(\mathbf{x}-\mathbf{y}_0) \quad (13)$$

の形に表現できるものとする (Fig. 1)。Green 公式(2)の右辺の積分について考える。例として、 $G(\mathbf{x}; \mathbf{y})$ を核とする積分について考えよう。いま、点 \mathbf{x} とそれから離れた (\mathbf{x} を含まない) 部分境界 ∂B_0 を考え、積分核 (基本特異解) を上の展開形で表現すれば、積分は

$$\begin{aligned} u(\mathbf{x}) &= \int_{\partial B_0} G(\mathbf{x}; \mathbf{y}) \frac{\partial u}{\partial n}(\mathbf{y}) dS_y = \sum_n \left[\int_{\partial B_0} m_n(\mathbf{y}-\mathbf{y}_0) \frac{\partial u}{\partial n}(\mathbf{y}) dS_y \right] g_n(\mathbf{x}-\mathbf{y}_0) \\ &= \sum_n M_n(\mathbf{y}_0) g_n(\mathbf{x}-\mathbf{y}_0) \end{aligned} \quad (14)$$

という形で表わすことができる。 $S(\mathbf{x}; \mathbf{y})$ を核とする積分についても、係数 $M_n(\mathbf{y}_0)$ の値は異なるものの、形式的には上とまったく同じ表現が得られる。ここで、式(13)の表現は必ずしも一意ではないが、一般に関数 g_n として多重極 (たとえば, MORSE & FESHBACH (1953) p. 1276 および p. 1869 を参照) が用いられることが多い。このときには(14)は多重極展開と呼ばれ、係数 M_n は多重極モーメントと呼ばれる。

上の表現は部分境界 ∂B_0 上の積分を一つの級数で表現するものであり、級数を有限項 p

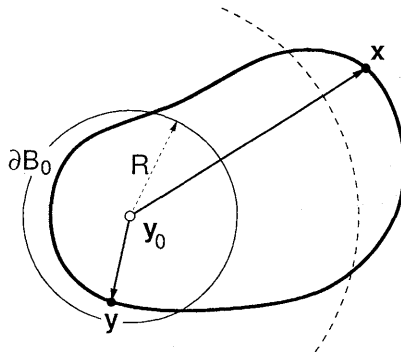


Fig. 1. Source point \mathbf{y} , field point \mathbf{x} , multipole point \mathbf{y}_0 , and source boundary ∂B_0 .

で近似できるならば、部分境界がいくら多くの要素を含んでいても、 p 個の数値の和だけで部分境界上の積分を評価することができる。また、部分境界 ∂B_0 から離れていれどどの点 \mathbf{x} についてもこの関係は成立ち、かつ、係数 $M_n(\mathbf{y}_0)$ は ∂B_0 だけに依存し \mathbf{x} には無関係であるので、一度 ∂B_0 について $M_n(\mathbf{y}_0)$ を求めてしまえば、部分境界から離れた多くの点 \mathbf{x} における積分値を同じ係数 $M_n(\mathbf{y}_0)$ を使って計算することができる。

さて、展開(14)により計算される $u(\mathbf{x})$ の精度を考慮すると、一般に、点 \mathbf{x} が部分境界 ∂B_0 から離れているほど一定の精度を維持するために必要な展開項数 p は小さくすむ。したがって、効率的な計算のためには、点 \mathbf{x} が条件

$$|\mathbf{x} - \mathbf{y}_0| > \gamma R(\partial B_0), \quad R(\partial B_0) = \max_{\mathbf{y} \in \partial B_0} |\mathbf{y} - \mathbf{y}_0|, \quad \gamma > 1 \quad (15)$$

を満足する必要がある (Fig 1)。ここで、 γ としては 2 に近い値がとられることが多い。これを点 \mathbf{x} についてみれば、点 \mathbf{x} の近傍には(14)によって積分を評価できない部分境界 ∂B_{near} が存在する。したがって、 $u(\mathbf{x})$ を評価するための全境界 ∂B 上の積分は、点 \mathbf{x} の近傍の境界 ∂B_{near} における直接積分と残りの境界 ∂B_0 に対する多重極展開の和

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\partial B_{\text{near}}} G(\mathbf{x}; \mathbf{y}) \frac{\partial u}{\partial n}(\mathbf{y}) dS_y + \sum_n M_n(\mathbf{y}_0) g_n(\mathbf{x} - \mathbf{y}_0) \quad (16)$$

として計算することができる。 ∂B_{near} にまだ多くの要素が含まれる場合には、さらに ∂B_{near} の中に条件(15)を満足する小さめの部分境界 ∂B_1 をとれば、新しい近傍境界 $\partial B_{\text{near}} = \partial B - (\partial B_0 + \partial B_1)$ を小さくすることができる。このようにして、要素数に応じて順に $\partial B_0 = \partial B_0, \partial B_1, \partial B_2, \dots$ をとっていけば、 ∂B_{near} を十分に小さくすることができて、積分(16)は

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\partial B_{\text{near}}} G(\mathbf{x}; \mathbf{y}) \frac{\partial u}{\partial n}(\mathbf{y}) dS_y + \sum_K \sum_n M_n(\mathbf{y}_K) g_n(\mathbf{x} - \mathbf{y}_K) \quad (17)$$

と表される。

離散化された系においては、(4)を上式に適用すれば、

$$u(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^N A_i(\mathbf{x}) s_i = \sum_{i \in \partial B_{\text{near}}} A_i(\mathbf{x}) s_i + \sum_K \sum_n M_n(\mathbf{y}_K) g_n(\mathbf{x} - \mathbf{y}_K) \quad (18)$$

となる。ここに、係数 M_n は

$$M_n(\mathbf{y}_K) = \sum_{i \in \partial B_K} \int_{\partial B_K} m_n(\mathbf{y} - \mathbf{y}_K) \phi_i(\mathbf{y}) dS_y \quad (19)$$

である。また、 $i \in \partial B_{\text{near}}$ ($i \in \partial B_K$) は i 要素が部分境界 ∂B_{near} (∂B_K) に含まれる意味に用いた。積分核が $S(\mathbf{x}; \mathbf{y})$ (影響関数 $B_i(\mathbf{x})$) の場合の積分およびその離散式についてもまったく同様の表現ができる。

式(18)において、近傍要素の数が N_{near} 、多重極展開で表現する部分境界の数が M 、展開項数が p であるとする、積演算の総数は $N_{\text{near}} + Mp$ である。したがって、要素数 N が大きく、 $N_{\text{near}} + Mp$ が N に比べて小さい場合には、(18)を N より小さい回数の積演算によって計算することができる。さらに、方程式(7)における行列ベクトル積 $\sum_j A_j(\mathbf{x}_i) s_j$ を計算する

場合には、 N 個の選点 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N$ について (18) を計算することになるから、 N_{near}, M が近傍要素および部分境界の平均個数であるとすると、 p が一定のとき、積演算の総数は $(N_{\text{near}} + Mp)N$ となる。また、計算すべき影響係数 $A_j(\mathbf{x}_i)$ の個数は NN_{near} である。一般に、 N が十分に大きければ、 N_{near} および M を N に比べてはるかに小さな数に押えることができるから、必要な多重極係数 $M_n(\mathbf{y}_K)$ を効率良く計算することさえできれば、行列ベクトル積を N^2 よりもはるかに小さな計算量で実行することができる。

上のようにして、離散方程式 (7) における係数行列とベクトルとの積の計算ができれば、代数方程式を反復法を使って解くことができる。したがって、境界要素法において、係数行列を計算することなく、方程式を直接に解いて未知の境界値を求めることができる。これが高速多重極境界要素法である。

(2) 木の構造の導入

上に述べたように、離散方程式 (7) における係数行列ベクトル積を高速に計算するためには、まず、多重極係数 $M_n(\mathbf{y}_K)$ を効率良く計算することが必要である。このために要素の集合にそれらの幾何学的関係を考慮した階層構造を導入し、その上で多重極係数を効率的に計算する手法を考える。

式 (17) あるいは (18) を計算する上でまず問題となるのは、部分境界 $\partial B_{\text{near}}, \partial B_0, \partial B_1, \partial B_2, \dots$ は点 \mathbf{x} の位置に依存して決定されなければならないことである。これを効率良く決めるために、境界を含む領域をある単位で分割し、単位領域の集合に含まれる境界部分としてこれらの部分境界を選ぶことにする。多重極展開で積分を表現するための部分境界（遠方境界） $\partial B_0, \partial B_1, \partial B_2, \dots$ はその数が少ない方が有利であるから、単位領域とそれによって構成される領域ブロックの集合に階層構造を導入して、できるだけ適切にこれらの領域を決定する。

2次元領域における4分木構造の模式的な例を Fig 2 に示す。境界を一つの正方形でおおい、それを順次4等分していくことにより、2次元の空間を正方形のセルで分割している。この場合、要素を含まないセルについてはそれ以上の分割はしない。右側の図は結果として得られる4分木である。この例では、最小セル（葉）は1個の要素点を含むようにとられているが、一般には、最小セルに数個～数10個の要素を含める方が計算効率上がる（福井他、1997）。同様にして、3次元空間の場合には、立方体セルを使って8分木の構造を導入することができる。

できるだけ大きな遠方境界を選ぶ手続きは根に近い第2レベルのセルから始める。点 \mathbf{x} を含むセルに対して、隣接する第1近傍（あるいは第2近傍まで）のセルを近傍領域とし、近傍領域に含まれないセルを遠方セルとして境界 $\partial B_{20}, \partial B_{21}, \dots$ を決める。つぎに、1段下のレベル（子のレベル）に移って、親のレベルの近傍領域の中で子のレベルの近傍領域に含まれないセルを遠方セルとして境界 $\partial B_{30}, \partial B_{31}, \dots$ を決める。これを繰り返して葉まで至ればすべての遠方境界を決めることができる。遠方セルに含まれないすべての葉のセルを近傍セルとして近傍境界が決まる。楕円境界を含む領域にセル分割を導入し、近傍境界と遠方境界とを選択した例を Fig 3 に示す。左側の図はすべてのセルをしめしており、中央の図に点 \mathbf{x} を含むある最小セルの遠方境界を定義するセル群を、右側の図に近傍境界を定義するセル群を示した。遠方境界は遠くの大きなセルと比較的近くの小さなセルとで決められている。また、この例では、境界要素は空間に均等に分布しているわけではない

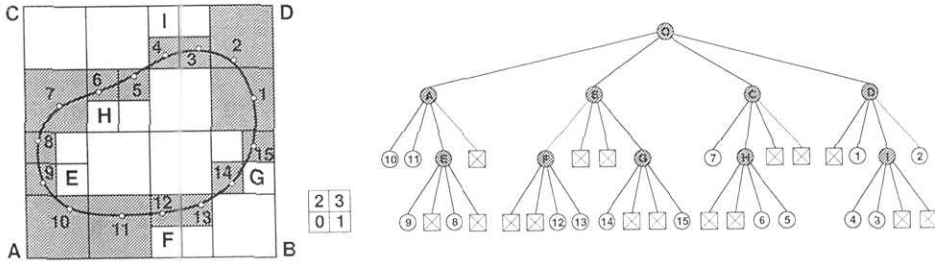


Fig. 2. Clustering boundary elements and resulting quad tree.

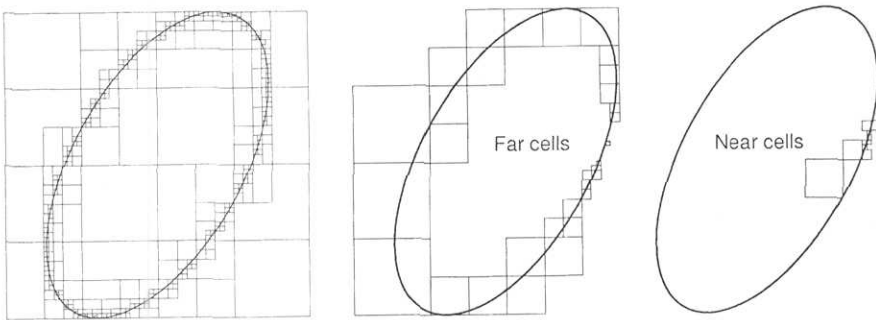


Fig. 3. All cells, far cells, and near cells of an elliptic boundary (2-neighbour rule).

ので、近傍境界を決定するセル群の中には比較的大きなセルも含まれている。この図では、第2近傍までを近傍領域としており、 $r=5/\sqrt{2}$ である。

さて、行列ベクトル積を計算するためには、このような階層構造上のすべてのセルについて係数 $M_n(\mathbf{y}_0)$ を計算する必要がある。これを定義(19)を直接に使って計算すると N^2 に比例する計算が必要になってしまうので、まず、葉のセルに含まれる境界について(19)を計算し、それを親のレベルのセルに継承する。多重極展開(14)は、展開中心を移動することによって再度展開しなおせるので、展開中心の移動による多重極係数の変換関係

$$M_n(\mathbf{y}_0) = \sum_m \Gamma_{nm}(\mathbf{y}_0' - \mathbf{y}_0) M_m(\mathbf{y}_0') \quad (\text{M2M}) \quad (20)$$

を使ってやれば、係数の親セルへの継承を容易に行うことができる。結局、すべてのセルにおける係数 $M_n(\mathbf{y}_0)$ の計算は、葉のセルにおける(19)の計算(要素数だけ必要)と木の節における変換(20)(要素数に比例する)とによって実行でき、その計算量は $O(N)$ である。

このようにして係数 $M_n(\mathbf{y}_0)$ を決定し、(18)を使って行列ベクトル積を計算する場合には、 $M \sim \log N$ となるので、計算量は $O(N \log N)$ となる。この計算法は BARNES & HUT (1986) によって提案された方法と等価である。

(3) 高速多重極アルゴリズム

式(18)を使って計算する方法では、 $M \sim \log N$ 個の多重極展開を直接計算しなければならない。その結果として、展開項数 p が大きくなると計算効率が落ちることが知られてい

る。そこで、多重極展開(14)に対応して $u(\mathbf{x})$ の \mathbf{x}_0 の近傍での局所展開

$$u(\mathbf{x}) = \sum_n L_n(\mathbf{x}_0) f_n(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \quad (21)$$

を導入する。すなわち、点 \mathbf{x} の方もグループ化して計算を進める。これによって、木の構造の上だけで計算できるシンメトリックなアルゴリズムが得られる。このアルゴリズムは高速多重極アルゴリズムと呼ばれ、ROKHLIN (1985) によりはじめて提案され、GREENGARD (1988) によってアルゴリズムとして確立されて、現在、N 体問題の解析に広く使われている (たとえば、WARREN & SALMON (1992), LEATHRUM (1992) など)。

アルゴリズムを構成するために、多重極展開から局所展開への変換

$$L_n(\mathbf{x}_0) = \sum_m \Omega_{nm}(\mathbf{y}_0 - \mathbf{x}_0) M_m(\mathbf{y}_0) \quad (M2L) \quad (22)$$

および、局所展開を親から子へ継承するための、局所展開の中心の移動による係数の変換関係

$$L_n(\mathbf{x}_0') = \sum_m \Lambda_{nm}(\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_0') L_m(\mathbf{x}_0) \quad (L2L) \quad (23)$$

が必要である。これらの変換関係を使って、(13), (20), (22), (23), (21) を Fig 4 に示すような経路をたどって適用してやることによって、 $G(\mathbf{x}; \mathbf{y})$ (あるいは $S(\mathbf{x}; \mathbf{y})$) の値を計算することができるようになる。影響関数の計算には(13)のかわりに(19)を使えばよい。

以上の準備のもとに、方程式(7)の係数行列ベクトル積は、次のような手順で実行することができる。

Step 1 葉のセルについて、そのセルに含まれる要素についてセル中心における多重極展開を求める (式(19))。つぎに、階層構造を一段階上がって、親のセルに含まれる子のセルの多重極展開を親セルの中心における多重極展開に変換する (M2M)。これを階層構造を順次上昇しながら実行すれば、すべての階層のセルにおける多重極展開の係数が得られる。

Step 2 遠方と近傍が類別できる最上部の階層 (木の構造の場合には第 2 レベル) において、同じ階層の遠方のセルの多重極展開を自セルの局所展開に変換する (M2L)。つぎに、階層を一段下がって子のセルに移り、親のセルの局所展開を自セルの局所展開に

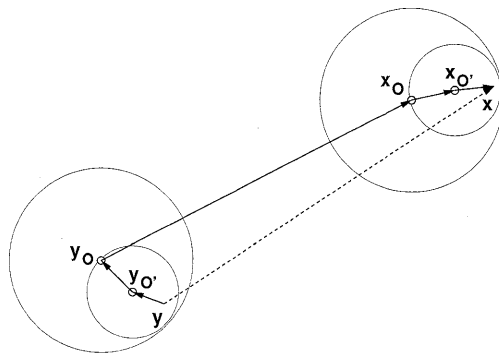


Fig. 4. Evaluation of field value by M2M, M2L, and L2L.

変換する (L2L), と同時に, 親のセルの近傍に含まれる自セルと同じ階層のセルのうち自セルから遠方にあるセルの多重極展開を自セルの局所展開に変換して重ねあわせる. 階層構造を順次下降しながらこれを繰り返すことによってすべてのセルにおける局所展開が得られる.

Step 3 葉のセルにおいては, 選点における局所展開の値を計算して多重極展開による積分値を求め, 残った近傍セルに含まれる要素からの影響を直接に計算して加えあわせる.

以上の計算はすべて与えられた階層構造の上で行なわれる. たとえば, 木の構造であれば計算は節の数だけ実行される. 要素が空間に均等に分布していれば節の数は要素の数に比例するから, このアルゴリズムの計算量はおよそ $O(N)$ の程度となる.

(4) 弾性波動問題

弾性問題の場合には, 変位の積分表現である Somigliana の公式 (11) を境界要素法の基礎としている. この問題における高速多重極法としては, CHEN, CHEW & ZEROUG (1997) による変位ポテンシャルを利用する方法, FUJIWARA (1998) および FUJIWARA (2000) による基本特異解の多重極展開の直接表現を用いる方法, 吉田・西村・小林 (2000) による基本特異解の多重極展開の改良表現を用いる方法などが提案されている. 一方, 著者ら (福井・井上, 1998) は動弾性場における Galerkin ベクトルの高速多重極法を利用する方法を提案した. 高速多重極法の構成という観点からは, スカラー波動問題の解となるようなポテンシャルを導入し, それについての高速多重極法を導いて使うのが, 計算コードの開発・管理の容易さという点においては, 便利である. 一方, 解析の基礎となる基本特異解は集中物体力による変位場であるので, そのポテンシャル場は与えられた物体力に対して閉じた解が得られるものでなければならない. この条件を満足するポテンシャルとして Galerkin ベクトルがある (たとえば, Fung (1965) を参照). ここでは, Galerkin ベクトルの場における高速多重極法を利用して動弾性場における行列ベクトル積を高速化することを考える.

縦波および横波の波動作用素を

$$\square_L \equiv \nabla^2 + k_L^2, \quad \square_T \equiv \nabla^2 + k_T^2 \quad (24)$$

で定義する. 与えられた物体力 X_i に対し, Galerkin ベクトル F_i は

$$\square_L \square_T F_i = \frac{1}{1-\nu} X_i \quad (25)$$

を満足する. Navier の方程式 (8)₁ を満足する変位 u_i は Galerkin ベクトルを使って

$$u_i = P_{ij} F_j = \frac{1}{\mu} [-F_{j,ij} + 2(1-\nu)\square_L F_i] \quad (26)$$

により, 対応する応力 σ_{ij} は

$$\sigma_{ij} = -F_{k,kij} + (1-\nu)\square_L (F_{i,j} + F_{j,i}) + \nu\delta_{ij}\square_T F_{k,k} \quad (27)$$

により与えられる. ここに, P_{ij} は Galerkin ベクトルに対して変位を与える作用素である. 物体力 X_i が与えられたとき, 基本特異解の場 $G_{ij}(\mathbf{x}; \mathbf{y}) X_j$ を生成する Galerkin ベクトル

ルは、(25)の特解から

$$F_i^G(\mathbf{x}; \mathbf{y}) = f(\mathbf{x}; \mathbf{y}) X_i \quad (28)$$

ここに

$$f(\mathbf{x}; \mathbf{y}) = \frac{2}{k_T^2} [G_T(\mathbf{x}; \mathbf{y}) - G_L(\mathbf{x}; \mathbf{y})] \quad (29)$$

である。また、食い違い量 U_i が与えられたときに第二基本特異解の場合 $S_{ij}(\mathbf{x}; \mathbf{y}) U_j$ を生成する Galerkin ベクトルは、(28)を点 \mathbf{y} について微分することにより得られて、

$$F_i^S(\mathbf{x}; \mathbf{y}) = -\frac{\partial f(\mathbf{x}; \mathbf{y})}{\partial y_j} [\lambda \delta_{ij} n_k U_k + \mu (n_i U_j + n_j U_i)] \quad (30)$$

となる。

F_i^G, F_i^S は関数 $f(\mathbf{x}; \mathbf{y})$ により表されるが、(29)により、 $f(\mathbf{x}; \mathbf{y})$ は縦波と横波に対応する Helmholtz 方程式の基本特異解の和となっている。したがって、スカラー波動場の基本特異解の展開(13)を考慮すれば、

Galerkin ベクトルの多重極展開を

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \sum_n \left[\mathbf{M}_n^T(\mathbf{y}_0) g_n^T(\mathbf{x} - \mathbf{y}_0) - \mathbf{M}_n^L(\mathbf{y}_0) g_n^L(\mathbf{x} - \mathbf{y}_0) \right] \quad (31)$$

と表すことができる。ただし、上式では添字の繁雑さを避けるためにベクトルを太字で表現した。式(31)において、Galerkin ベクトルの多重極展開は縦波と横波に対応するスカラー波動場の多重極展開の和であり、縦波・横波の展開係数はベクトルとなっている。結局、式(17)に対応する変位の表現は

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\mathbf{x}) = & \int_{\partial B_{\text{near}}} \mathbf{G}(\mathbf{x}; \mathbf{y}) \cdot \mathbf{T}^n \mathbf{u}(\mathbf{y}) dS_y \\ & + \mathbf{P} \left\{ \sum_K \sum_n \left[\mathbf{M}_n^T(\mathbf{y}_K) g_n^T(\mathbf{x} - \mathbf{y}_K) - \mathbf{M}_n^L(\mathbf{y}_K) g_n^L(\mathbf{x} - \mathbf{y}_K) \right] \right\} \end{aligned} \quad (32)$$

となって、スカラー波動場の高速多重極法をそのまま使って、弾性変位場における係数行列ベクトル積を計算することができる。

3.3 波動問題の高速多重極法

上のことより、弾性波動問題の高速多重極法もスカラー波動問題のそれに帰着されることが明らかになった。ここでは、2次元および3次元スカラー波動問題の高速多重極法について具体的に示し、計算例により計算量がほぼ $O(N)$ になることを実証する。

(1) スカラー波動場の多重極展開と移動定理

2次元問題 2次元波動問題の高速多重極法は ROKHLIN (1990) により提案された。基本特異解 (3)₂ は、 $\mathbf{x} - \mathbf{y}_0$ の極座標を (r, θ) 、 $\mathbf{y} - \mathbf{y}_0$ の極座標を (ρ, ϕ) とし、 $r > \rho$ のとき、次のように展開できる。

$$G(\mathbf{x}; \mathbf{y}) = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(k|\mathbf{x} - \mathbf{y}|) = \frac{i}{4} \sum_{n=-\infty}^{\infty} H_n^{(1)}(kr) J_n(k\rho) e^{in(\theta - \phi)} \quad (33)$$

ここに、 J_n は n 次の Bessel 関数である。この式より、多重極展開を

$$u(\mathbf{x}) = \frac{i}{4} \sum_{n=-\infty}^{\infty} M_n(\mathbf{y}_0) H_n^{(1)}(kr) e^{in\theta}, \quad g_n(\mathbf{x}-\mathbf{y}_0) = \frac{i}{4} H_n^{(1)}(kr) e^{in\theta} \quad (34)$$

で定義する。局所展開は

$$u(\mathbf{x}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} L_n(\mathbf{x}_0) J_n(kr) e^{in\theta}, \quad f_n(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0) = J_n(kr) e^{-in\theta} \quad (35)$$

で定義される。また、展開中心の移動による係数の変換関係は、Graf の加法定理 (たとえば、ABRAMOWITZ & STEGUN (1965)) を使って、

$$\begin{aligned} M_n(\mathbf{y}_0) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} M_m(\mathbf{y}_0') J_{n-m}(k\rho) e^{-i(n-m)\phi} & (M2M) \\ L_n(\mathbf{x}_0) &= \frac{i}{4} \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m M_m(\mathbf{y}_0) H_{n+m}^{(1)}(k\rho) e^{i(n+m)\phi} & (M2L) \\ L_n(\mathbf{x}_0') &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} L_m(\mathbf{x}_0) J_{m-n}(k\rho) e^{-i(m-n)(\phi+\pi)} & (L2L) \end{aligned} \quad (36)$$

のように得られる。上の三式で (ρ, ϕ) は、それぞれ、 $\mathbf{y}_0 - \mathbf{y}_0'$ 、 $\mathbf{y}_0 - \mathbf{x}_0$ 、および $\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_0'$ の極座標である。

3 次元問題 3次元波動問題の場合に高速多重極法に用いられる諸公式については EPTON & DEMBART (1995) に詳しく検討されている。基本特異解 (3)₁ は、 $|\mathbf{x} - \mathbf{y}_0| > |\mathbf{y} - \mathbf{y}_0|$ のとき、次のように展開できる。

$$G(\mathbf{x}; \mathbf{y}) = \frac{e^{ik|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}}{4\pi|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{(2n+1)ik}{4\pi} O_n^m(\mathbf{x}-\mathbf{y}_0) I_n^{-m}(\mathbf{y}-\mathbf{y}_0) \quad (37)$$

ここに、 I_n^m と O_n^m は EPTON と DEMBART によって導入された関数で、 \mathbf{x} の極座標を (r, θ, ϕ) とすると、

$$I_n^m(\mathbf{x}) = j_n(kr) Y_n^m(\theta, \phi), \quad O_n^m(\mathbf{x}) = h_n^{(1)}(kr) Y_n^m(\theta, \phi) \quad (38)$$

で定義される。 j_n は n 次の球 Bessel 関数で、 Y_n^m は球面調和関数

$$Y_n^m(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{(n-|m|)!}{(n+|m|)!}} (-1)^m P_n^{|m|}(\cos\theta) e^{im\phi} \quad (39)$$

である。 P_n^m は Legendre の陪関数である。

式(37)により、多重極展開を

$$u(\mathbf{x}) = \frac{ik}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n M_n^m(\mathbf{y}_0) O_n^m(\mathbf{x}-\mathbf{y}_0), \quad g_{n,m}(\mathbf{x}) = \frac{ik}{4\pi} O_n^m(\mathbf{x}) \quad (40)$$

で定義し、局所展開を

$$u(\mathbf{x}) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n L_n^m(\mathbf{x}_0) I_n^{-m}(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0), \quad f_{n,m}(\mathbf{x}) = I_n^{-m}(\mathbf{x}) \quad (41)$$

で定義する。

展開中心の移動による係数の変換関係はやや複雑になる。数値計算の場合には、多重極展開(40)および局所展開(41)の n に関する和は有限項 p で打ち切るので、その場合の変換関係を示せば以下ようになる。

$$M_n^m(\mathbf{y}_O) = \sum_{l=0}^p \sum_{n'=|n-l|}^{n+l} \sum_{j=j_{\min}}^{j_{\max}} \alpha(n, n', l) E \begin{pmatrix} -m & j & m-j \\ n & l & n' \end{pmatrix} I_n^{m+j}(\mathbf{y}_O - \mathbf{y}_{O'}) M_l^i(\mathbf{y}_{O'})$$

$$(ただし, j_{\min} = \max(-l, -n' + m), j_{\max} = \min(l, n' + m))$$

$$L_n^m(\mathbf{x}_O) = \frac{ik}{4\pi} \sum_{l=0}^p \sum_{n'=|n-l|}^{n+l} \sum_{j=j_{\min}}^{j_{\max}} \alpha(n, n', l) E \begin{pmatrix} m & j & -m-j \\ n & l & n' \end{pmatrix} O_n^{m+j}(\mathbf{x}_O - \mathbf{y}_O) M_l^i(\mathbf{y}_O) \quad (42)$$

$$(ただし, j_{\min} = \max(-l, -n' - m), j_{\max} = \min(l, n' - m))$$

$$L_n^m(\mathbf{x}_{O'}) = \sum_{l=0}^p \sum_{n'=|n-l|}^{n+l} \sum_{j=j_{\min}}^{j_{\max}} \alpha(n, n', l) E \begin{pmatrix} m & -j & -m+j \\ n & l & n' \end{pmatrix} I_n^{m-j}(\mathbf{x}_{O'} - \mathbf{x}_O) L_l^i(\mathbf{x}_O)$$

$$(ただし, j_{\min} = \max(-l, -n' + m), j_{\max} = \min(l, n' + m))$$

ここに、 $\alpha(n, n', l) = (2n+1)(2n'+1) i^{n+n'-l}/4\pi$ であり、 $E(\quad)$ は球面調和関数の積分で、

$$E \begin{pmatrix} i & j & k \\ l & m & n \end{pmatrix} = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} Y_l^i(\theta, \phi) Y_m^j(\theta, \phi) Y_n^k(\theta, \phi) \sin \theta d\theta d\phi$$

$$= 4\pi \varepsilon_l \varepsilon_j \varepsilon_k \begin{pmatrix} l & m & n \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l & m & n \\ i & j & k \end{pmatrix} \quad (43)$$

で定義される。ここで、上の右辺第2式のカッコは Wigner 3j 記号であり、 ε_m は

$$\varepsilon_m = \begin{cases} (-1)^m & m \geq 0 \\ 1 & m \leq 0 \end{cases} \quad (44)$$

で定義する。Wigner 3j 記号の性質により、(42)の和の内部は $n'+n+l$ が偶数のときだけ値をもつ。

(2) 計算時間と記憶容量

高速多重極境界要素法の実際の計算時間と使用記憶容量を確認するために、硬い散乱体による散乱問題(境界上で $\partial u / \partial n = 0$)を解いた。要素数と計算時間との関係を図に示す。

Fig 5 は、2次元スカラー波動の楕円散乱体解析の結果である。反復1回当たりの計算時間(左)および全計算時間(FMBEM)を通常境界要素法(BEM)と比較したもの(右)を示す。Fig 6 は、3次元スカラー波動の球形散乱体解析の結果である。前図と同様に、反復1回当たりの計算時間(左)および全計算時間(FMBEM)を通常境界要素法(BEM)と比較したもの(右)を示している。

反復1回当たりの計算時間は2次元、3次元ともに要素数にはほぼ比例しており、計算量は $O(N)$ であることが確認された。2次元問題の全計算時間は要素数が1000以上で従来法よりも短くなる。また、3次元問題の場合には要素数が2000以上で従来法よりも速くなるが、計算時間が要素数に比例するのは、要素数が4000以上からである。ここで扱ったの

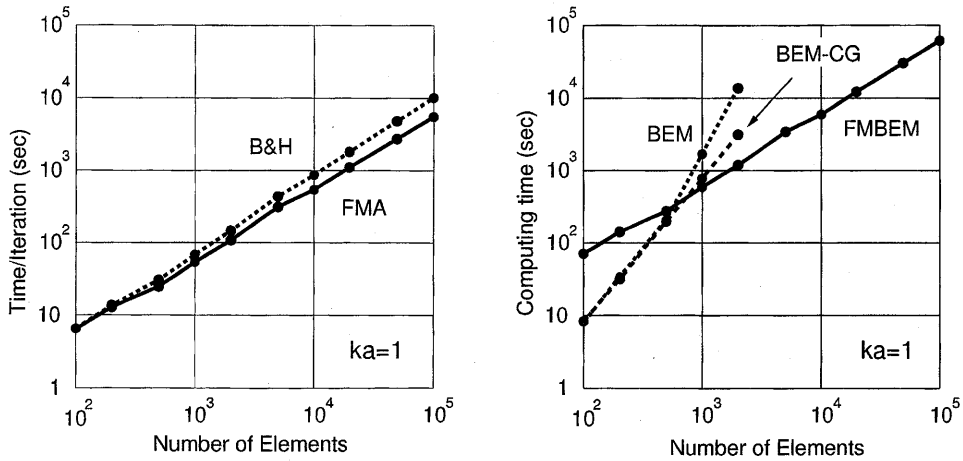


Fig. 5. Computing time of the fast multipole boundary element method for a two dimensional scattering problem : CPU time for iteration (left) and total CPU time compared to the original BEM (right).

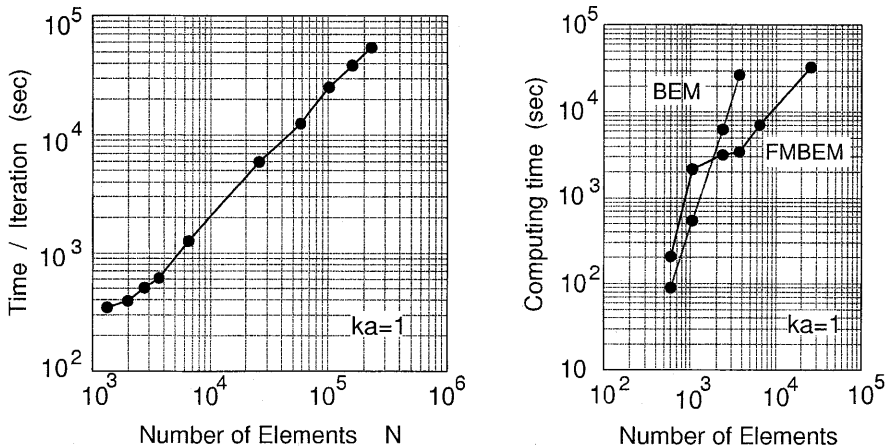


Fig. 6. Computing time of the fast multipole boundary element method for a three dimensional scattering problem : CPU time for iteration (left) and total CPU time compared to the original BEM (right).

は硬い散乱体 (Neumann 条件) の問題で、反復法の収束が比較的容易な問題である。複雑な問題では反復回数を減少させる工夫が必要になる。なお、計算に使用した記憶容量は要素数にほぼ比例した。すなわち、高速多重極境界要素法では、記憶容量も縮小できることが確認された。

4. 高い波数の問題の取り扱い

解析領域が広く、かつ、弾性波速度が小さい場合には、あつかう無次元波数が必然的に大きくなる。波数が高い場合には高速多重極境界要素法の解析において二つの問題が生じる。第一は、解析精度を満足させるためには多重極展開の項数を非常に大きくとらなければならない、したがって、計算負荷が大きくなることである。第二は、地震動解析ではほぼ半空間となる外部領域をあつかうが、境界要素法で外部領域をあつかう場合には仮想固有値（解法上現れる疑似的な固有値）が現れて、数値計算がうまくいかないことがあることである。ここでは、第一の問題を回避するために ROKHLIN (1990) によって定式化された積形式の高速多重極法を利用し、第二の問題を回避するために BURTON & MILLER (1971) によって提案された境界積分方程式を使うことにする。

4.1 積形式の高速多重極法の利用

数値計算においては、多重極展開(34), (40)は有限の項 p で打ち切って使用する。しかしながら、波数の高い問題において必要な精度を得るためには多くの項数 p が必要となる。このことは、多重極展開の係数が遠方における散乱振幅の Fourier 係数と等価であることから明らかである。波数が高い場合にはより多くの情報を必要とするので多くの係数が必要になる。変換関係(36), (42)は繰り込み型の変換であるので、その計算量は $O(p^2)$ または $O(p^{4+\alpha})$ となる。したがって、 p が大きいときには計算負荷が極めて大きくなる。この計算負荷を軽減するために積形式の変換式を使う。

(1) 2次元問題

2次元スカラー波動問題の積形式は ROKHLIN (1990) により提案された。以下では、積形式を利用した高速多重極アルゴリズムについて述べる(福井・勝本, 1998)。

多重極展開の係数 M_n および局所展開の係数 L_n を係数とする Fourier 級数を

$$M_{y_0}(\xi) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} M_n(\mathbf{y}_0) e^{in\xi}, \quad L_{x_0}(\xi) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} L_n(\mathbf{x}_0) e^{in\xi} \quad (45)$$

とする。また、Bessel 関数と Hankel 関数を係数とする Fourier 級数を

$$j(\xi; \rho) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(k\rho) e^{in\xi} = e^{i\rho \sin \xi}, \quad h(\xi; \rho) \sim \frac{i}{4} \sum_{n=-P}^P H_n^{(1)}(k\rho) e^{in\xi} \quad (46)$$

で定義する。ここで、(46)₂は発散級数であるので、有限項だけを利用している。数値計算上は M_n, L_n は有限項 $2p+1$ 個だけを使うので、Fourier 級数(45), (46)も有限項で打ち切られる。ただし、 $j(\xi)$ は関数形が解析的に得られるので、それを使うことにする。

関係(36)の Fourier 級数を計算し、上の関数を使って表現すれば、 $M_{y_0}(\xi), L_{x_0}(\xi)$ 間の関係

$$\begin{cases} M_{y_0}(\xi) = M_{y_0}(\xi) j(\xi - \phi; \rho) & (M2M) \\ L_{x_0}(\xi) = M_{y_0}(-\xi - \pi) h(\xi + \phi; \rho) & (M2L) \\ L_{x_0}(\xi) = L_{x_0}(\xi) j(-\xi - \phi - \pi; \rho) & (L2L) \end{cases} \quad (47)$$

が得られる。ここに、 (ρ, ϕ) は(36)のものと同じである。この関係が積形式である。上式では変換は関数どうしの積で表される。 $2p+1$ 個の点でこれらの関数を表現するとすれば、これらの計算量は $O(p)$ である。

関係(47)を使えば、 $\{M_n(\mathbf{y}_0)\} \Rightarrow M_{\mathbf{y}_0}(\xi) \Rightarrow M_{\mathbf{y}_0}(\xi) \Rightarrow \{M_n(\mathbf{y}_0)\}$ という手続きで係数変換(36)を実行することができる。他の係数の変換も同様である。この計算において、Fourier変換およびその逆変換

$$\{M_n(\mathbf{y}_0)\} \Leftrightarrow M_{\mathbf{y}_0}(\xi), \quad \{L_n(\mathbf{x}_0)\} \Leftrightarrow L_{\mathbf{x}_0}(\xi)$$

にFFTを使うと係数変換を高速に実行することができる。± p の有限和を計算する場合には、 ξ として単位円上に P 個の等分点 $e^{i\xi^1}, \dots, e^{i\xi^P}$ をとる。ここに、 P は $P=2^n > 2p+1$ (n 自然数)を満足する最小の整数とする。このときの一回の変換の計算量は $O(P \log P)$ となる。

実際の計算においては、FFTの使用による丸め誤差が入るので、利用できる項数に上下限が存在する。そこで、数値実験によって必要項数を求め、多重極展開を使う領域(セル)の大きさにあわせて展開項数を

$$p = \begin{cases} 20 & ka < 5 \\ 1.2ka + 15 & ka \geq 5 \end{cases} \quad (48)$$

で与えた。ここに、 a は領域(セル)の代表半径である。これによって高速多重極アルゴリズムに若干の変更が必要である。M2Mのときには、大きなセルへの変換であるので、親セルの P の大きさの配列に子セルの係数 $\{M_n(\mathbf{y}_0)\}$ を入れて残りを0詰めし、変換後、親セルの $2p+1$ 個分の係数 $\{M_n(\mathbf{y}_0)\}$ を取り出す。L2Lのときは、逆に小さなセルへの変換であるので、親セルの P の大きさの配列に $\{L_n(\mathbf{x}_0)\}$ を入れ、変換後、子セルの $2p+1$ 個分の係数 $\{L_n(\mathbf{x}_0)\}$ を取り出す。M2Lでは、同レベルであるので、項数は変化しない。波数が $ka=5$ 以下のときには、項数も少なく、また、積形式では計算精度が落ちてしまうので、通常の変換を行なっている。以上のようなアルゴリズムの改善により、波数の大きさにあまり影響を受けない計算コードを生成することができた。

Fig 7は、積形式の使用による計算の効率化を示している。対象とした問題は円孔による散乱問題である。左図は $ka=200$ (a は円孔の半径)を一定としたときの要素数に対する

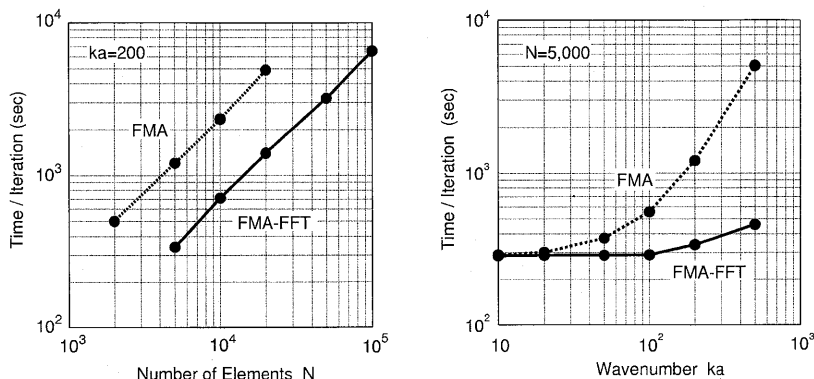


Fig. 7. Performance improvement with modified FMBEM: CPU time v.s. number of elements (left) and v.s. wavenumber (right).

1 反復の計算時間を、右図は要素数を一定として波数を変化させたときの計算時間を示す。積形式による解析 (FMA-FFT) の計算時間は、使わない解析 (FMA) と比較して、波数の大きさにあまり影響を受けていないことがわかる。

(2) 3次元問題

3次元スカラー波動問題の積形式は ROKHLIN (1993) によって提案された。また, EPTON & DEMBART (1995) により通常の繰り込み形式の変換式との関係が詳細に論じられている。ここでは, 2次元問題と対比した形で, 3次元問題の積形式の概要を述べる。

単位球面上の点を $\hat{\mathbf{x}} = (\theta, \phi)$ で表記する。2次元問題の Fourier 変換(45)に対応して, 遠方場関数を

$$M_{y_0}(\hat{\mathbf{x}}) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{1}{i^{n+1}} M_n^m(\mathbf{y}_0) Y_n^m(\theta, \phi) \tag{49}$$

$$L_{x_0}(\hat{\mathbf{x}}) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{1}{i^{n+1}} L_n^m(\mathbf{x}_0) Y_n^m(\theta, \phi)$$

で定義する。上式の逆変換は

$$M_n^m(\mathbf{y}_0) = \frac{2n+1}{4\pi} i^{n+1} \int_{S_1} Y_n^{-m}(\theta, \phi) M_{y_0}(\hat{\mathbf{x}}) d\Omega \tag{50}$$

$$L_n^m(\mathbf{x}_0) = \frac{2n+1}{4\pi} i^{n+1} \int_{S_1} Y_n^{-m}(\theta, \phi) L_{x_0}(\hat{\mathbf{x}}) d\Omega$$

となる。ここに, S_1 は単位球面を, $d\Omega$ は単位球面上の面素 (立体角素分) を表す。また, (46) に対応させて, 変換関数 j, h を, 球 Bessel 関数および球 Hankel 関数を係数にもつ級数として,

$$j(\hat{\mathbf{x}}; \mathbf{d}) = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) i^n j_n(k|\mathbf{d}|) P_n(\hat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{d}) = e^{ik\mathbf{d} \cdot \hat{\mathbf{x}}} \tag{51}$$

$$h(\hat{\mathbf{x}}; \mathbf{d}) = \sum_{n=0}^P (2n+1) i^n h_n^{(1)}(k|\mathbf{d}|) P_n(\hat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{d})$$

で定義する。ここに, \mathbf{d} は展開点の移動ベクトルである。ここでもまた, h は有限項の和として定義され, j は閉じた形で表現できる。ただし, 上式は移動方向を中心軸として展開された形であることに注意が必要である。3次元の極座標表現の複雑さを反映している。

上の定義(49), (51)を使って, 変換式(42)は

$$M_{y_0}(\hat{\mathbf{x}}) = M_{y_0'}(\hat{\mathbf{x}}) j(\hat{\mathbf{x}}; \mathbf{y}_0' - \mathbf{y}_0) = M_{y_0'}(\hat{\mathbf{x}}) e^{ik(\mathbf{y}_0' - \mathbf{y}_0) \cdot \hat{\mathbf{x}}} \tag{M2M}$$

$$L_{x_0}(\hat{\mathbf{x}}) = M_{y_0}(\hat{\mathbf{x}}) h(\hat{\mathbf{x}}; \mathbf{y}_0 - \mathbf{x}_0) \tag{M2L}$$

$$L_{x_0'}(\hat{\mathbf{x}}) = L_{x_0}(\hat{\mathbf{x}}) j(\hat{\mathbf{x}}; \mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_0') = L_{x_0}(\hat{\mathbf{x}}) e^{ik(\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_0') \cdot \hat{\mathbf{x}}} \tag{L2L}$$

のように書くことができる。定義は多少複雑ではあるが, 2次元の場合の積形式(47)と相似な形をしており, 同様の高速多重極アルゴリズムの構成が可能である。

4.2 仮想固有値の回避

境界積分方程式(2)または(11), とくにその同次方程式, は境界の情報だけしかもたない。すなわち, 擬人的な表現をすれば, 積分方程式には自分自身が境界の内部をあつかっている

るのか外部をあつかっているのかの区別がつかない。このことから、外部問題を解く場合にも、同じ境界をもつ内部問題の固有値が解に影響を与えることがある。外部問題には本来存在しないはずのこの固有値を仮想固有値という。波数の高い問題の場合には、与えた波数が仮想固有値に近くなるチャンスが増加し、正しい解が得られなかったり、反復法の収束が悪くなったりし、大きな問題となる。

仮想固有値を避ける手法としては、領域外部にいくつかの点を取り、それらの点における積分表現を付加条件として最小二乗解を求める SCHENCK (1968) の方法が広く使われるが、反復法で方程式を解く場合には使いにくい。ここでは、BURTON & MILLER (1971) の提案する境界積分方程式を利用する。

Green 公式(2)を境界の法線方向に微分して、点 \mathbf{x} を領域内部より境界に近付けると、境界上の法線勾配 $\partial u / \partial n$ の積分表現式

$$\frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial n}(\mathbf{x}) = \frac{\partial \bar{u}}{\partial n}(\mathbf{x}) + \int_{\partial B} \tilde{S}(\mathbf{x}; \mathbf{y}) \frac{\partial u}{\partial n}(\mathbf{y}) dS_y - \int_{\partial B} U(\mathbf{x}; \mathbf{y}) u(\mathbf{y}) dS_y \quad (53)$$

が得られる。ただし、境界は滑らかであるとする。積分核 \tilde{S} , U は、それぞれ、 G , S の法線勾配で

$$\tilde{S}(\mathbf{x}; \mathbf{y}) = \frac{\partial G(\mathbf{x}; \mathbf{y})}{\partial n_x}, \quad U(\mathbf{x}; \mathbf{y}) = \frac{\partial S(\mathbf{x}; \mathbf{y})}{\partial n_x} \quad (54)$$

である。

式(53)は、適当な境界条件が与えられれば、境界積分方程式となるが、この場合にもやはり仮想固有値は生じる。BURTON と MILLER は、(2) と (53) との線形結合から作った

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left[u(\mathbf{x}) + \alpha \frac{\partial u}{\partial n}(\mathbf{x}) \right] &= \left[\bar{u}(\mathbf{x}) + \alpha \frac{\partial \bar{u}}{\partial n}(\mathbf{x}) \right] \\ &+ \int_{\partial B} \left[G(\mathbf{x}; \mathbf{y}) + \alpha \tilde{S}(\mathbf{x}; \mathbf{y}) \right] \frac{\partial u}{\partial n}(\mathbf{y}) dS_y - \int_{\partial B} \left[S(\mathbf{x}; \mathbf{y}) + \alpha U(\mathbf{x}; \mathbf{y}) \right] u(\mathbf{y}) dS_y \end{aligned} \quad (55)$$

を境界積分方程式として使うことを提案した。ここに、 α は任意の複素数定数である。BURTON と MILLER は、 $Im[\alpha] \neq 0$ の場合に外部問題の境界積分方程式(55)が一意的な解を持つことを証明している。

式(55)は超特異核 $U(\mathbf{x}; \mathbf{y})$ を持つ積分方程式となっている。また、二種類の特異核を同時に使用しなければならない。しかし、高速多重極法を使う場合には、 u の値も $\partial u / \partial n$ の値も同じ局所展開係数 $L_n(\mathbf{x}_0)$ から計算できるので、この積分方程式を使うための負荷は、直接に係数を計算する場合よりも少なく済む。

Fig 8 は、円孔の散乱問題に(55)を使った例である。要素数は 256 で、波数を $ka = 0.1 \sim 20$ (a は円孔の半径) で 0.1 きざみで変えて計算した。左図は誤差の絶対値を、右図には Bi-CGSTAB 法の反復回数を、Green 公式を使う方法 (Green) および BURTON と MILLER の方法 (B & M) について比較している。横軸の上には仮想固有値の位置も示した。Green

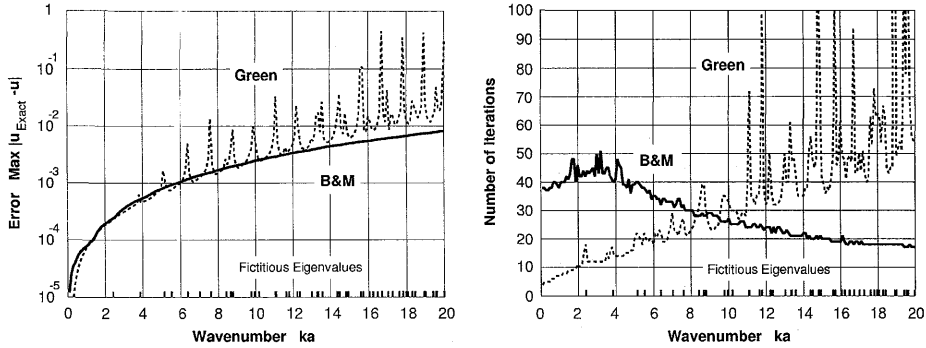


Fig. 8. Avoidance of fictitious eigenvalues using the boundary integral equation of Burton & Miller (1971) : numerical error (left) and iteration time (right).

公式による方法では波数が大きくなるほど誤差も反復回数も増加し、仮想固有値の近くでは増大が著しいが、BURTONとMILLERの方法ではそのようなことはなく、反復回数は波数の大きい方がむしろ減少している。B & Mの誤差のグラフも右上がりではあるが、これは波数にかかわらず要素数を一定としたためである。

弾性問題の場合には、(11)から、法線勾配のかわりに、境界上の応力ベクトルについて(53)と同様の積分式を作り、(11)との線形結合をすることにより、

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} [u_i(\mathbf{x}) + \alpha T_{ij}^n u_j(\mathbf{x})] &= [\tilde{u}_i(\mathbf{x}) + \alpha T_{ij}^n \tilde{u}_j(\mathbf{x})] \\ &+ \int_{\partial B} [G_{ij}(\mathbf{x}; \mathbf{y}) + \alpha \tilde{S}_{ij}(\mathbf{x}; \mathbf{y})] T_{jk}^n u_k(\mathbf{y}) dS_y \\ &- \int_{\partial B} [S_{ij}(\mathbf{x}; \mathbf{y}) + \alpha U_{ij}(\mathbf{x}; \mathbf{y})] u_j(\mathbf{y}) dS_y \end{aligned} \quad (56)$$

が得られる。ここに、積分核 \tilde{S}_{ij} , U_{ij} は、それぞれ、 G_{ij} , S_{ij} の境界応力ベクトルで

$$\tilde{S}_{ij}(\mathbf{x}; \mathbf{y}) = T_{ik}^n G_{kj}(\mathbf{x}; \mathbf{y}), \quad U_{ij}(\mathbf{x}; \mathbf{y}) = T_{ik}^n S_{kj}(\mathbf{x}; \mathbf{y}) \quad (57)$$

で定義する。

5. 境界要素反復解析の前処理法

自由度の極めて大きな問題を解析する場合に考慮すべき必要事項として、適切な時間内に計算が完了するべきであるということがある。高速多重極法はアルゴリズムの原理として行列ベクトル積の計算時間を短縮するものであるが、計算実行上の問題としては、反復法の反復回数を減少させることがどうしても必要である。反復法の効率を上げる方法として、与えられる行列に対して適切な前処理を行なう方法が用いられる。ここでは、高速多重極境界要素法に適した前処理法として wavelet 変換を利用した前処理法(福井, 1999)を紹介し、非均質領域の計算における前処理法についても考察する。

5.1 反復法と前処理

境界要素法における代数方程式は一般に非対称の係数行列を持つ。非対称行列に適した反復法としては、双共役勾配法 (Bi-CG 法) をもととする各種の方法とそれとは別の規準にもとづいて直交ベクトル列を計算する方法がある (たとえば BARRETT, et al. (1994))。前者の例としては VORST (1992) による Bi-CGSTAB 法があり、後者の例としては SAAD (1986) による GMRES 法がある。収束のための規準が違うので収束の傾向は異なるが、収束すべき方程式であれば、いずれの方法でもほぼ同じ程度の計算量で収束する。

反復法の収束速度は一般に係数行列の特性によって決まる。収束を早めるためには、与えられた方程式を、同じ解を持つがもっと性質の良い係数行列を持つ方程式に変換して反復法を適用する。係数行列を変換するこの操作を前処理という。

いま、方程式

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \tag{58}$$

が与えられているとする。係数行列 \mathbf{A} を行列 $\tilde{\mathbf{A}}$ に変換するために、左右から行列 \mathbf{M}_1^{-1} , \mathbf{M}_2^{-1} をかけて

$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{M}_1^{-1} \mathbf{A} \mathbf{M}_2^{-1}, \quad \tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{M}_2 \mathbf{x}, \quad \tilde{\mathbf{b}} = \mathbf{M}_1^{-1} \mathbf{b} \tag{59}$$

とすると、方程式 (58) は

$$\tilde{\mathbf{A}} \tilde{\mathbf{x}} = \tilde{\mathbf{b}} \tag{60}$$

となる。行列 $\tilde{\mathbf{A}}$ の性質が良ければ、方程式 (60) は (58) よりも早く収束解が得られる。実際に反復計算を実行するときには、行列 $\tilde{\mathbf{A}}$ を直接に計算する必要はない。反復計算の過程を整理すれば、行列 $\mathbf{M}^{-1} = (\mathbf{M}_1 \mathbf{M}_2)^{-1}$ とベクトルとの積を計算するだけでこれを実行することができる (BARRETT, et al. (1994) を参照)。

前処理行列 $\mathbf{M} = \mathbf{M}_1 \mathbf{M}_2$ としては、行列の性質を改善すると同時にその逆が容易に求まるものを選ぶ必要がある。また、高速多重極境界要素法の場合には全体の計算量を $O(N)$ におさえるために、任意のベクトル \mathbf{v} に対して $\mathbf{M}^{-1} \mathbf{v}$ を $O(N)$ で計算できることも重要な条件となる。一般的な考え方としては、 \mathbf{M} として与えられた係数行列 \mathbf{A} を近似するものが選ばれる。なぜならば、このときには

$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{M}_2 (\mathbf{M}^{-1} \mathbf{A}) \mathbf{M}_2^{-1} \approx \mathbf{I} \tag{61}$$

となって、方程式 (60) が容易に解けるからである。

もっとも簡単な前処理法は Jacobi 法である。このときには、前処理行列を

$$m_{ij} = \begin{cases} a_{ii} & \text{if } i=j \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \tag{62}$$

とする。いわゆる行や列のスケーリングとして知られる方法である。同様な考え方で、前処理行列として対角小行列を使うブロック Jacobi 法がある。

5.2 Wavelet 変換を用いた前処理

(1) Haar wavelet 変換

Wavelet 解析は、信号処理をはじめとするさまざまな分野で利用される数学的手法である (たとえば CHUI (1997))。ここでは、wavelet を多重解像度解析という面から利用して、係数行列の前処理を行なう。そのために、Haar 関数による wavelet 変換を一種の座標系の回転として使う。まず、変換の手順を簡単に解説する。

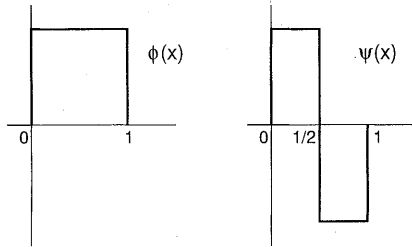


Fig. 9. Haar scaling function and wavelet.

Haar 関数とそれから導かれる wavelet は、Fig 9 に示すような関数である。 ϕ をある分割レベルの基底であるとすると、 ϕ を操作することによって、一段階細分された基底を生成することができる。あるいは、一段階細分された基底による関数表現を ϕ と ψ とを新たな基底として表現することができる。いま、 j レベルの基底により関数 $f_j(x)$ が

$$f_j(x) = \sum_k c_k^{(j)} \phi(2^j x - k) \quad (63)$$

で表されているとすると、

$$g_j(x) = \sum_k d_k^{(j)} \psi(2^j x - k) \quad (64)$$

で表される関数 $g_j(x)$ を使って、 $f_j(x)$ を一意的に分解して、

$$f_j(x) = f_{j-1}(x) + g_{j-1}(x) \quad (65)$$

と表すことができる。 $j-1$ は一つ上のレベルを表す。ここで、係数 $c_k^{(j-1)}$, $d_k^{(j-1)}$ は

$$c_k^{(j-1)} = (1/\sqrt{2}) (c_{2k}^{(j)} + c_{2k+1}^{(j)}), \quad d_k^{(j-1)} = (1/\sqrt{2}) (c_k^{(j)} - c_{2k+1}^{(j)}) \quad (66)$$

によって決められる。この式は分解アルゴリズムと呼ばれる。(65) を繰り返せば、結局、 f_j は

$$f_j(x) = f_0(x) + g_0(x) + \dots + g_{j-1}(x) \quad (67)$$

と書けることになる。また、逆に f_{j-1} , g_{j-1} が与えられていれば、(65) から f_j を決定でき、そのときの係数は

$$c_{2k}^{(j)} = (1/\sqrt{2}) (c_k^{(j-1)} + d_k^{(j-1)}), \quad c_{2k+1}^{(j)} = (1/\sqrt{2}) (c_k^{(j-1)} - d_k^{(j-1)}) \quad (68)$$

により決まる。この式は再構成アルゴリズムと呼ばれる。式(66), (68)において、係数 $1/\sqrt{2}$ は変換を正規化するためにつけたものである。

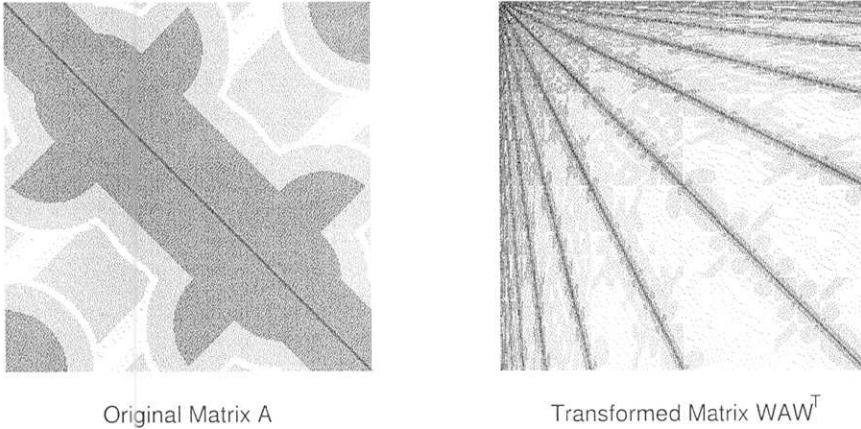


Fig. 10. Coefficient matrix $A = \{A_j(\mathbf{x}_i)\}$ (left) and its transformed matrix WAW^T (right).

さて、(67)において、左辺から右辺への変換は左辺の係数ベクトルを右辺の階層化されたベクトルへ変換する操作である。この変換を行列 W を使って

$$\tilde{\mathbf{c}} = W\mathbf{c} \tag{69}$$

で表そう。 \mathbf{c} は左辺の係数、 $\tilde{\mathbf{c}}$ は右辺の係数を表している。逆に、右辺から左辺への変換は W^{-1} であるが、(66)、(68)から明らかのように $W^{-1} = W^T$ である。すなわち、 W は直交行列である。変換 W およびその逆変換 W^{-1} は(66)、(68)を使えばベクトルの大きさ N の計算量で実行できる。

この変換を境界要素行列に作用させた例を Fig 10 に示す。図では、2次元 Laplace 方程式における離散方程式(7)の係数行列 $A_j(\mathbf{x}_i)$ (楕円境界) を絶対値のレベルで濃淡表示したもの(左)とその変換行列(右)を示している。変換(67)によって、行列成分の情報が階層化され、対角近傍成分および左上の方に行列全体の情報が集まっている。

(2) Wavelet 変換による前処理

Fig 10 によれば、wavelet 変換をほどこした係数行列では対角成分付近に行列の情報が集積されているように見受けられる。そこで、これらの行列を前処理に使うことを考えよう。

まず注意すべきことは、変換方程式

$$(WAW^T)(W\mathbf{x}) = W\mathbf{b} \tag{70}$$

は、そのままでは前処理に使用できないことである。なぜならば、 $WAW^T = I$ であるから、もとの方程式に I を作用させたのと同じになってしまうからである。したがって、(70)から何らかの情報を取り出してやって、それを前処理に使う必要がある。このことは実は大きな問題である。通常の前処理であれば、行列ベクトル積(69)あるいはその逆だけを実行すれば良いので、その計算量は $O(N)$ である。しかし、変換後の行列 WAW^T の情報を利用すると、何らかの工夫をしなければ、計算量は $O(N^2)$ になってしまう。ここでは、変換後の行列から Jacobi 法の前処理行列(62)を作る方法について考えてみる。

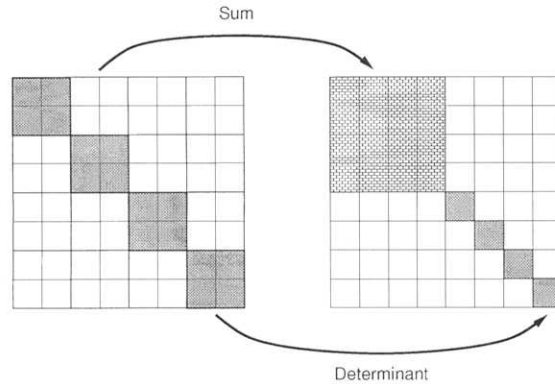


Fig. 11. Calculation of diagonal components of wavelet transformed matrix.

Jacobi 法を使うには $WA W^T$ の対角成分を求める必要がある。これは、分解アルゴリズム (66) を使って、Fig 11 のように計算することができる。まず、行列全体を 2×2 の小行列に区切り、 $1/4$ の大きさの小行列成分 $c_{kl}^{(j-1)}$ と対角成分 $d_{kk}^{(j-1)}$ とを

$$\begin{aligned} c_{kl}^{(j-1)} &= (1/2) \left(c_{2k,2l}^{(j)} + c_{2k,2l+1}^{(j)} + c_{2k+1,2l}^{(j)} + c_{2k+1,2l+1}^{(j)} \right) \\ d_{kk}^{(j-1)} &= (1/2) \left(c_{2k,2k}^{(j)} - c_{2k,2k+1}^{(j)} - c_{2k+1,2k}^{(j)} + c_{2k+1,2k+1}^{(j)} \right) \end{aligned} \quad (71)$$

により計算する。すなわち、 $c_{kl}^{(j-1)}$ は小行列の成分の総和となり、対角成分 $d_{kk}^{(j-1)}$ は対角部分の小行列の行列式である。これを左上の $1/4$ の行列について繰り返せばすべての対角成分が得られる。

上のアルゴリズムでは、記憶容量は減少するが計算量そのものはやはり $O(N^2)$ である。しかしながら、アルゴリズムの基本が小行列の成分の総和を順に作成していくことに着目すれば、高速多重極法の上でこれを効率的に計算することが可能となる。

(3) 高速多重極境界要素法への応用

2分木上の Haar wavelet 高速多重極法はすべての計算を木の構造の上で行なう。そこで、準備として、2分木の上の Haar wavelet について考えてみよう。分解 (66) と再構成 (68) とを2分木の上で実行することを考える。分解は個々の成分を集合させる操作であるから、葉から根への計算であり、逆に、再構成は根から葉への計算となる。個々の計算は2分木の構造に適合するから、問題は木のたどり方だけである。たとえば、Fig 12 の左図に示す手順で計算を行なえば、節ごとに Haar 係数が作られるから、係数の並び順はレベルの異なるものが混在することになる。この場合には、後ろから並べると、 $c_0^{(0)} d_0^{(0)} d_0^{(1)} d_0^{(2)} d_1^{(2)} d_1^{(1)} d_2^{(2)}$ となる。このような変換法により作った係数行列 $WA W^T$ のイメージを Fig 12 (右) に示す。Fig 10 と同じ係数行列を変換したものであるが、大きい要素が分散されイメージが違って見える。しかし、このような行列を使って前処理した反復法であっても、その効果は Fig 10 (右) の行列を使った場合とほぼ同じになる。

4分木または8分木上での対角項の計算 高速多重極法で使われる4分木(8分木)の1段は2段(3段)の2分木であるから、上の Haar wavelet をこれらの木構造の上に拡張する

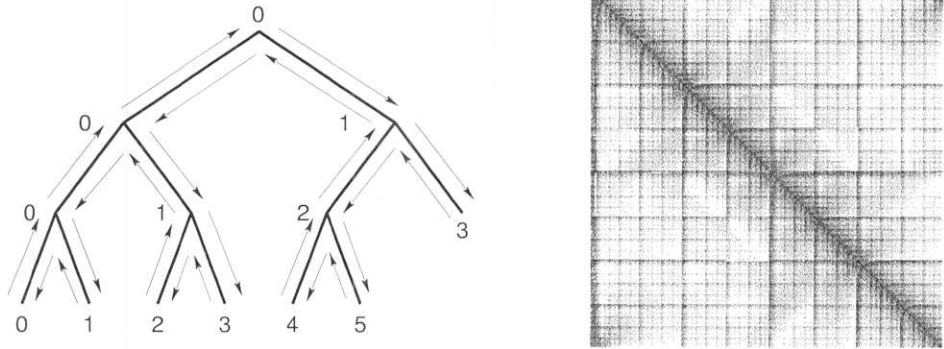


Fig. 12. Search path on a binary tree (left) and the resulting transformed matrix (right).

ことは容易である。したがって、要素に関連したベクトルについて分解・再構成の変換も容易に行なうことができる。残された課題は、係数行列を計算せずに、高速多重極法と同様に木の構造の上で前処理行列を計算することである。

ここでは、変換行列に Jacobi 法を適用することとし、変換行列の対角項を計算する手順について考察しよう。基本となるのは Fig 11 (式(71)) の計算である。近傍演算と遠方演算を木の構造の上で繰り返すことによりこれを実行すれば良い。

まず、遠方演算の方法を示そう。基本解の多重極表現と局所展開との間には相似の関係がある。たとえば、2次元波動問題であれば、(33), (34), (35)より、

$$M_n = J_n(kr) e^{-in\theta} \quad \text{基本解の多重極係数} \quad (72)$$

$$u(\mathbf{x}) = \sum_n L_n J_n(kr) e^{-in\theta} \quad \text{局所展開} \quad (73)$$

である。3次元波動問題の場合にも同様の関係が存在することは(37), (40), (41)より明らかである。さて、Fig 11 では 2×2 の小行列の成分の総和を求める計算を繰り返している。すなわち、すべて1の重みをもつある要素グループからある選点グループへの影響の総和である。したがって、計算すべきものは、要素グループを Y 、選点グループを X とすると、

$$\sum_{i \in X} u(\mathbf{x}_i) = \sum_n L_n(Y) \left[\sum_{i \in X} J_n(kr_i) e^{-in\theta_i} \right] \quad (74)$$

である。ここに、 $L_n(Y)$ は重み1の要素グループ Y により生成される場の局所展開係数である。(72)によれば、カッコ内は選点においた基本解による選点グループ X を含むセルの多重極係数 $M_n(X)$ から求められるから、 X と Y が互いに遠方であれば、上式は

$$\sum_{i \in X} u(\mathbf{x}_i) = \sum_n L_n(Y) M_n(X) \quad (75)$$

で計算することができる。Galerkin 法を使う場合には基本解の代わりに要素の影響関数を使えば同じことができる。

式(71)₂によれば、変換行列の対角成分の計算に使うのは変換途上に生成される和の行列の対角付近の成分だけである。すなわち、(75)の計算は、比較的近くにある X と Y についてだけ行うことになる。そこで、木の上の計算をできるだけ効率良く進めるために、各セ

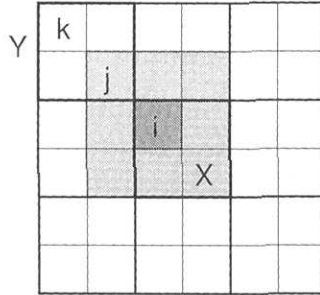


Fig. 13. Calculation of interactive coefficients on quad tree.

ルごとに、隣接するセルに対する相互作用係数 $C = \{c_0, c_1, \dots, c_M\}$ を持たせ、それを親セルに継承していくことにする。ここで、ベクトルの成分 c_i は、上で述べた和の行列の成分と同じものである。親セル X の隣接セル Y からの相互作用係数は、子セル i の相互作用係数と (75) から、

$$c_Y(X) = \sum_{i \in X} \left[\sum_{j \in Y} c_j(i) + \sum_{k \in Y, k \neq j} \sum_n L_n(k) M_n(i) \right] \quad (76)$$

によって計算することができる (Fig 13 参照)。

以上により、wavelet 変換行列の対角成分を計算するアルゴリズムは次のようになる。

(1) 重みを 1 として、要素による多重極係数、選点においた基本解による多重極係数をすべてのセルについて求める (高速多重極法の第 1 段階と同じ)。

(2) 葉のセルからはじめて上向計算を行なう。

(a) 分解アルゴリズムによる対角項の計算

- 子セルの相互作用係数を使って子セル間の相互作用行列を作り、その小行列の分解計算を行なう。
- 葉セルの場合には、含まれる小行列について分解計算を行なう。

この計算によりセルに含まれる小行列の成分の総和 c_0 が求まる。

(b) 隣接するセルについて相互作用係数 C を求める。

- 子セルの相互作用係数を利用して、(76) により相互作用係数を計算する。
- 葉セルの場合には、直接計算によって相互作用係数を求める。

(c) (a)–(b) を繰り返して根まで至る。

以上の計算により、Jacobi 法のための対角成分が求められる。ここで、分解計算 (71) により、レベル j の Haar 係数に対応する対角成分は、2 分木の深さを n とするとき、 $1/2^{n-j}$ 倍されなければならないことに注意すべきである。この計算においては、各セルにおける計算量は一定値で押えられるので、全計算量は $O(N)$ であると期待できる。

(4) 適用例

Wavelet 変換による前処理の効果を確認するために、Laplace 方程式の境界値問題をいく種類か解析した。結果を Table 1 に示す。反復法は Bi-CGSTAB の改良版である GPBi-CG (ZHANG, 1997) を使い、右辺のベクトルに対する解の相対誤差が 10^{-11} 以下になるまで

Table 1. Comparison of iteration time using Jacobi method and the present method for Dirichlet and mixed boundary value problems.

Shape	Prec.	Original matrix					Wavelet transformed matrix				
		128	256	512	1024	2048	128	256	512	1024	2048
Square	Jacobi	27	38	55	87	122	15	18	22	24	27
L-shape	Jacobi	27	40	58	86	120	18	21	24	28	29
Ellipse	Jacobi	15	15	14	15	15	18	20	23	25	28
Branches	Jacobi	23	35	54	79	115	15	18	22	25	28
Mixed	Jacobi	22	30	44	63	83	20	21	23	27	33

反復させている。正方形 (Square), L 形, 枝の出た領域 (Branches) における Dirichlet 問題および混合境界値問題 (正方形領域) においては, 要素数が増加するにつれて反復回数が著しく増大する。しかし, wavelet 変換と Jacobi 法を組み合わせた前処理を行なった場合には, 要素数が増加しても反復回数はそれほど増大しない。ここで提案する前処理法が有効であることがわかる。ただし, 楕円境界の場合だけは特例で通常の Jacobi 法の反復回数の方が小さくなっていることにも注意が必要である。

5.3 非均質領域における前処理法

非均質領域においては, 境界要素方程式 (7) に現れる係数行列が複数個組み合わされた線形方程式を解かなければならない。必然的に係数行列の非対角部分に比較的大きな値がはいることになる。高速多重極境界要素法においては, 行列ベクトル積を計算の単位として, 行列の成分そのものは計算しないので, このような行列の前処理には工夫が必要である。以下では, 3次元静弾性問題において試みた前処理法を紹介する。

(1) 非均質領域における空洞問題

Fig 14 に示すような, 2層の無限領域の一方に球形の空洞が存在する問題を考える。空洞の存在する領域を B_1 , 存在しない領域を B_2 とし, 空洞の境界を ∂B_0 , 領域 1 からみた接触境界を ∂B_1 , 領域 2 からみた接触境界を ∂B_2 とする。境界条件は

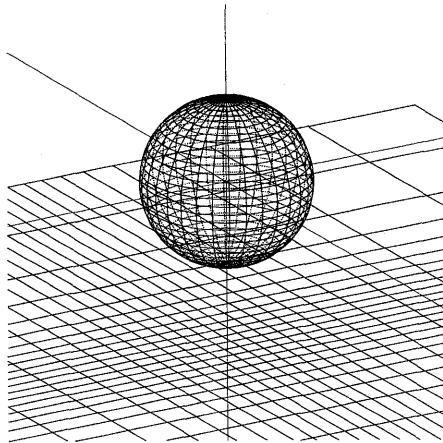


Fig. 14. A spherical cavity in two-zone infinite region.

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_0 &= \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}_0 && \text{on cavity} \\ \mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_2 &= 0, \quad \mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2 && \text{on interface} \end{aligned} \quad (77)$$

である。

一重層法を使って問題を解く。一重層法で境界上の変位 \mathbf{u}_i および応力ベクトル \mathbf{s}_i を表すと、次のようになる。

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_i &= \mathbf{A}_{i0} \phi_0 + \mathbf{A}_{i1} \phi_1, & \mathbf{s}_i &= \mathbf{E}_{i0} \phi_0 + \mathbf{E}_{i1} \phi_1 & \text{Domain 1 } (i=0, 1) \\ \mathbf{u}_2 &= \mathbf{A}_{22} \phi_2, & \mathbf{s}_2 &= \mathbf{E}_{22} \phi_2 & \text{Domain 2} \end{aligned} \quad (78)$$

ここに、 ϕ_i は境界上の一重層密度であり、 \mathbf{A}_{ij} 、 \mathbf{E}_{ij} の成分は

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \int_{\partial B_j} \mathbf{G}(\mathbf{x}; \mathbf{y}) dS_y, \quad \mathbf{E}(\mathbf{x}) = \mathbf{T}^n \int_{\partial B_j} \mathbf{G}(\mathbf{x}; \mathbf{y}) dS_y, \quad \mathbf{x} \in \partial B_j \quad (79)$$

により計算される。ここでは一定要素を使っている。

式(78)を境界条件(77)に代入すれば、境界要素方程式

$$\begin{bmatrix} \mathbf{E}_{00} & \mathbf{E}_{01} & 0 \\ \mathbf{E}_{10} & \mathbf{E}_{11} & \mathbf{E}_{22} \\ \mathbf{A}_{10} & \mathbf{A}_{11} & -\mathbf{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_0 \\ \phi_1 \\ \phi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}_0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (80)$$

が得られる。

(2) 前処理の方法

方程式(80)では、非対角項に \mathbf{E}_{22} や \mathbf{A}_{11} のような、対角項の大きな部分行列が入っており、反復計算の収束を遅くする原因になる。前処理によりこれらの部分行列の特性を弱めてやれば、反復法の収束性を向上させることができる。

高速多重極法を使う場合には、部分行列の行列ベクトル積しか計算しないので、部分行列を単位とする処理を行なう。方程式(80)において、部分行列 \mathbf{E}_{22} の対角項は $1/2$ であり、 \mathbf{A}_{11} の対角項は、Poisson 比による寄与を除けば、弾性係数に逆比例する。したがって、 \mathbf{E}_{22} の対角項を \mathbf{E}_{11} を使って、 \mathbf{A}_{11} の対角項を \mathbf{A}_{22} を使って消去してやることができる。ここでは、次のような前処理を行う。

$$\mathbf{KM}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_{00} & \mathbf{E}_{01} & -\mathbf{E}_{01} \\ \mathbf{E}_{10} & \mathbf{E}_{11} + \alpha \mathbf{E}_{22} & -\mathbf{E}_{11} + \mathbf{E}_{22} \\ \mathbf{A}_{10} & \mathbf{A}_{11} - \alpha \mathbf{A}_{22} & -\mathbf{A}_{11} - \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix} \quad \mathbf{M}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{I} & -\mathbf{I} \\ 0 & \alpha \mathbf{I} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (81)$$

ここに、 α は弾性係数の比 $\alpha = \mu_2/\mu_1$ である。接続境界が平面であり Poisson 比が両領域で同じ場合には、部分行列 $-\mathbf{E}_{11} + \mathbf{E}_{22}$ 、 $\mathbf{A}_{11} - \alpha \mathbf{A}_{22}$ は零行列となる。また、対角部分は強調される。

Table 2 に、Jacobi 法だけを使った場合と、ここで提案した前処理に Jacobi 法を併用した場合の反復回数の比較を示す。空洞と接触境界との距離は $2a$ (a は球の半径) とし、接触境界の大きさは $2L_1 \times 2L_1$ の正方形とした。 N_1 、 N_2 は領域 1 および 2 の境界要素数を表す。Poisson 比を $\nu = 0.3$ とし、部分領域の弾性係数比を与えて計算した。領域 1 に対して

Table 2. Comparison of iteration times using Jacobi method and present preconditionings for cavity problem in two-zone infinite region.

Material	Prec.	L_I	$2a$	$3a$	$4a$	$5a$	$8a$	$8a$	$10a$
		N_1	1345	1417	1497	1585	1785	6369	6969
		N_2	289	361	441	529	729	2209	2809
$E_2/E_1=4$	Jacobi		43	42	45	43	47	—	—
	Present		13	15	15	14	15	16	24
$E_2/E_1=1/4$	Jacobi		15	15	16	15	18	—	—
	Present		13	15	16	16	18	21	23

領域 2 が硬い場合に条件が悪くなり、通常の方法では反復回数が大きくなるが、(8)の前処理を行なうと反復回数が減少する。また、表の右側は大きな要素数に対する反復回数であるが、要素数を増やしても反復回数はそれほど増加しないことがわかる。

Green 公式(2)あるいは Somigliana の公式(1)をもとにした境界要素法（直接法）の場合にも、(8)と同様な前処理は可能である。ただし、その場合には係数行列が(8)とは転置の関係にあるので、前処理行列は左側から作用させる。

6. おわりに

広域的な地震動シミュレーションを実現するための計算手法について考察してきた。計算手法に課される条件は、自由度が極めて大きく、波数の大きい、非均質領域の動弾性解析の手法を提供することである。

これまでの考察により、広域地震動シミュレーションのための数値計算手法として、次の通りの要件を満たす手法を提案する。

- 高速多重極境界要素法を用いる。問題は開領域における波動問題であり、あつかう領域の大きさと波長との関係から、境界要素法が解法として適切である。また、自由度が極めて大きくなるので、高速多重極法を利用して効率の良い解析を実行することが不可欠である。
- 解析領域が大きいために、必然的に大きな波数をあつかわなければならない。このような問題に適した方法として、積形式を利用した高速多重極法を利用する。これによって波数の大きな問題に対しても計算負荷を増大させずに解析を実行することができる。
- 必要があれば外部問題の境界要素法において現れる仮想固有値を取り除く。高速多重極境界要素法においては、Burton と Miller の境界積分方程式を使う方法が有効である。
- 境界要素法を反復法を使って解くための前処理法として、wavelet 変換を使う方法を提案した。Wavelet 変換後の行列に対する処理が必要になるが、高速多重極法の枠組の中で計算を進めることができ、収束性が向上する。
- 非均質領域における反復法に対する前処理として、境界ブロックごとの部分行列を単位として、全体行列の非対角成分を減少させる方法を提案した。この方法は高速多重極境界要素法に適合しており、収束性を大きく向上させることができる。

以上の要件の他に、計算を並列化することが、全体の計算時間および計算に必要な容量という観点からは是非とも必要であろう。本論文においては検証ができなかったが、要件の一つに加えるべきであると考え。また、上で提案した方法は、波数を複素数として扱うだけで、線形粘弾性波動解析にもそのまま適用できることを付け加えておく。

上の要件を備える解析プログラムを現在開発中である。実地震についてのシミュレーションの結果が出たら、稿を改めて公表したいと考えている。

謝 辞

本論文は、1999年4月から2000年3月まで、著者が東京大学地震研究所の非常勤講師および客員教授として滞在した間の研究をまとめたものです。地震研究所の東原紘道教授ならびに堀宗朗助教授にはいろいろと便宜をはかっていただいたことを感謝します。また、堀助教授と東京大学大学院生市村強君にはこのテーマについていろいろと議論していただいたことに感謝します。とくに、wavelet変換による前処理法はこの議論の中から出たアイデアがもともなったものです。記して感謝いたします。

文 献

- ABRAMOVITZ, M. and I.A. STEGUN, 1965, *Handbook of Mathematical Functions*, Dover.
- BARRETT, R., M. BERRY, T.F. CHAN, J. DEMMEL, J. DONATO, J. DONGARRA, V. ELKHOUT, R. POZO, C. ROMINE and H. VAN DER VORST, 1994, *Templates for the Solution of Linear Systems: Building Blocks for Iterative Methods*, SIAM.
- BARNES, J. and P. HUT, 1986, A hierarchical $O(N \log N)$ force-calculation algorithm, *Nature*, **324** (4), pp. 446-449.
- BURTON, A.J. and G.F. MULLER, 1971, The application of integral equation methods to the numerical solution of some exterior boundary-value problems, *Proc. Roy. Soc. Lond.*, **A. 323**, pp. 201-210.
- CHEN, Y.H., W.C. CHEW and S. ZEROUG, 1997, Fast multipole method as an efficient solver for 2D elastic wave surface integral equations, *Comput. Mech.*, **20**, pp. 495-506.
- CHUL, C.K. (桜井明, 新井勉訳), 1997, 「ウェーブレット応用」, 東京電機大学出版局.
- EPTON, M.A. and B. DEMBART, 1995, Multipole translation theory for the three-dimensional Laplace and Helmholtz equations, *SIAM J. Sci. Comput.*, **16**, pp. 865-897.
- FUJIWARA, H., 1998, The fast multipole method for integral equations of seismic scattering problems, *Geophys. J. Int.*, **133**, pp. 773-782.
- FUJIWARA, H., 2000, The fast multipole method for solving integral equations of three-dimensional topography and basin problems, *Geophys. J. Int.*, **140**, pp. 198-210.
- FUNG, Y.C., 1965, *Foundations of Solid Mechanics*, Prentice-Hall.
- GREENGARD, L., 1988, *The Rapid Evaluation of Potential Fields in Particle Systems*, MIT Press.
- LEATHRUM, J.F., 1992, *Parallelization of the Fast Multipole Algorithm: Algorithm and Architecture Design*, PhD thesis, Duke University.
- MORSE P.M. and H. FESHBACH, 1953, *Methods in Theoretical Physics*, McGraw-Hill.
- ROKHLIN, V., 1985, Rapid solution of integral equations of classical potential theory, *J. Comput. Phys.*, **60**, pp. 187-207.
- ROKHLIN, V., 1990, Rapid solution of integral equations of scattering theory in two dimensions, *J. Comput. Phys.*, **86**, pp. 414-439.
- ROKHLIN, V., 1993, Diagonal forms of translation operations for the Helmholtz equation in three-dimensions, *Appl. Comput. Harmonic Anal.*, **1**, pp. 82-93.
- SAAD, Y. and M.H. SCHULTZ, 1986, GMRES: a generalized minimal residual algorithm for solving

福井 卓雄

- nonsymmetric linear systems, *SIAM J. Sci. Stat. Comput.*, **7**, pp. 856-869.
- SCHENCK, H.A., 1968, Improved integral formulation for acoustic radiation problems, *J. Acoust. Soc. Am.*, **44**, pp. 41-58.
- VAN DER VORST, H.A., 1992, Bi-CGSTAB: a fast and smoothly converging variant of Bi-CG for the solution of nonsymmetric linear systems, *SIAM J. Sci. Stat. Comput.*, **13**, pp. 631-644.
- WARREN, M.S. and J.K. SALMON, 1992, Astrophysical N-body simulations using hierarchical tree data structures, *Supercomputing '92*, pp. 570-576.
- ZHANG, S.-L., 1997, GPBi-CG: generalized product-type methods based on Bi-CG for solving nonsymmetric linear systems, *SIAM J. Sci. Comput.*, **18**, pp. 537-551.
- 小林昭一 編著, 2000, 「波動解析と境界要素法」, 京都大学学術出版会.
- 福井卓雄, 1999, Wavelet 変換を用いた境界要素反復解法における前処理, BEM・テクノロジー・コンファレンス論文集, **9**, pp. 85-90.
- 福井卓雄・井上耕一, 1998, 高速多重極境界要素法による 2 次元動弾性問題の解析, 応用力学論文集, **1**, pp. 373-380.
- 福井卓雄・勝本順三, 1997, 2 次元 Helmholtz 方程式のための高速多重極アルゴリズムと境界要素法への応用, 境界要素法論文集, **14**, pp. 81-86.
- 福井卓雄・勝本順三, 1998, 高速 Fourier 変換を援用した高速多重極境界要素法による 2 次元散乱問題の解析, 境界要素法論文集, **15**, pp. 93-98.
- 福井卓雄・服部純一・土居野優, 1997, 高速多重極法の境界要素解析への応用, 構造工学論文集, **43 A**, pp. 373-382.
- 福井卓雄・船戸慶輔・井上耕一, 1996, Biot 物体中における波動問題の周波数領域境界要素法解析, 境界要素法論文集, **13**, pp. 149-152.
- 船戸慶輔・福井卓雄, 1999, 粘弾性波動伝播問題における時間領域境界要素法, 応用力学論文集, **2**, pp. 133-140.
- 吉田研一・西村直志・小林昭一, 2000, 多重極積分方程式法を用いたクラックによる 3 次元弾性波動散乱問題の解析, 応用力学論文集, **3**, pp. 143-150.

(Received July 3, 2000)

(Accepted October 4, 2000)