

地図上の点の経緯度座標を求める方法 についての一考察

東京大学地震研究所 檜山 澄子

(昭和 63 年 7 月 1 日受理)

要 旨

我々が開発してきた『震研地図システム』では、基本データは全て経緯度座標をパラメーターにして登録してある。経緯度座標をパラメーターにすることの利点は、いくつもの異なった情報を重ね描きができること、種々の投影法を適用できること、経緯度座標をパラメーターとして収録されている『国土数値情報』のデータをそのまま利用できることである。その反面、経緯度座標をパラメーターにしていないデータを重ね描きするときは、その位置を地図から読み取り、なんらかの方法で経緯度座標に変換することが必要になる。しかし、地図にはさまざまな投影法のものがあるので、その点の座標を X - Y デジタイザーなどで読み取ったとしても、それから経緯度座標を高精度に求めることは必ずしも簡単でない。

ここでは、国土地理院から刊行されている主な地図に対し、その地図上の点の経緯度座標を求める方法について述べる。特に、次の二通りの地図について、なるべく少ない演算回数で、計測誤差に見合った精度を得る方法について考察を行った。得られた結果は次の二つに要約できる。

第 1 は、ユニバーサル横メルカトル投影で作られた大縮尺の地図 (1/2.5 万, 1/5 万, 1/20 万) 上の点の経緯度座標を求める場合、アフィン変換で正規化座標に変換して求める方法がよいことである。その場合の誤差は秒のオーダー以下である。

第 2 は、ランベルト正角円錐図法で投影した小縮尺の地図 (1/50 万, 1/100 万) 上の点の経緯度座標を得るには、投影の変換式を逆に解いた形の計算をすれば良いことである。その理由は逆関数が比較的簡単な形をしているからである。途中一箇所だけ陽に解けない所があるが、ここは一旦級数展開した式をつくり、これに逐次近似を使えば良い。この計算は読取誤差が無いと仮定し、 $0.1''$ の精度まで求めるとしても、5 回程度の繰返して収束する。

この 2 つの結果にもとづいて、地図上の点の経緯度座標を求めるプログラムを『震研地図システム』に登録した。それらについても報告する。

1. はじめに

ある観測を行ったとき、その地点の経緯度座標を求めたい場合がしばしばある。このとき、地図上の位置 (X - Y 平面座標) から経緯度座標を求める必要が生じる。これは、通常地図を描く場合——地球上の位置を平面に投影する——と逆の立場である。このためには、地図の投影の式を逆に解き、逆変換式を作って計算すれば良い。しかし、投影法によってはその式は複雑で、逆変換式を求めることがそう容易でない。また地図上から求めた点の位置にはすでに計測誤差が含まれているので、複雑な逆変換式を使うのが無意味なこともある。

ここでは、日常よく使われる地図 (1/2.5 万, 1/5 万等) 上の点の経緯度を 1 秒まで正しく求めるアルゴリズムと、広地域を扱った日本地図 (1/100 万) からなるべく正しい経

緯度座標を求めるアルゴリズムについて述べる。また、そのアルゴリズムを使ったときの誤差の評価と、『震研地図システム』に登録してあるこれらのプログラムの使い方にも触れる。

2. 利用度の高い地図とその投影

現在国土地理院で刊行している地図の中で、地図上のデータを読むために良く利用されるのは、つぎの Table 1 のものである。

ここで、UTM 法と書いてある投影法は、ユニバーサル横メルカトル法のことである。UTM 法は、本質的にはガウス・クリューガー法で、地球上のある 1 本の子午線に円筒をまきつけ、その円筒面に投影する方法である。ただ、経度差 6 度ごとに接する子午線を変え、縮尺を平均するため、縮尺係数 0.9996 を X, Y にかけている。1/1 万の地図の投影も、同じガウス・クリューガー法を使っている。この場合は UTM 法より更に細かく原点

Table 1. Typical maps published by Geographycal Survey Institute (1986).

縮 尺	名 称	投 影 法	作図方法	図 面 数
1/ 1 万	地 形 図	XY 座標	写 真 測 量	
1/ 2 万 5000	地 形 図	UTM	写 真 測 量	4428
1/ 5 万	地 形 図	UTM	編 集	1294
1/ 20 万	地 勢 図	UTM	編 集	129
1/ 50 万	地 方 図	LAN	編 集	8
1/100 万	日本 I II III	LAN	編 集	3
1/100 万	国 際	LAN	編 集	?
1/300 万	日 本 周 辺	斜 軸	編 集	1

を取っていること、縮尺係数が 0.9999 であることが違っているだけである。したがって、1/1 万～1/20 万の地図については、経緯度への逆変換は同一の考察ができる。

また、1/50 万以上の地図に書いてある投影法 LAN は、ランベルト正角円錐図法—2 標準緯線—の略である。これは、2 本の緯線で切る円錐を地球にかぶせ、その円錐面に地球上の点を投影したものである。

これら 2 つの図法、UTM 法、ランベルト法は、前者は大縮尺の地図に、後者は小縮尺の地図に広く使われている。

3. UTM 法の逆変換

UTM 法の投影の場合、ガウス・クリューガー投影の公式を逐次近似で逆に解くことにより、XY 座標 (x, y) から、経緯度座標 (ϕ, λ) への変換式は次式で与えられる (坪川, 1981; 原田, 1984)。

$$\begin{aligned} \phi_1 - \phi &= \frac{y^2 t_1 / (2R_1 N_1) - y^4 t_1 (5 + 3t_1^2 + \eta_1^2 - 9t_1^2 \eta_1^2) / (24R_1 N_1^3)}{+ y^6 t_1 (61 + 90t_1^2 + 45t_1^4) / (720R_1 N_1^5)} \\ \Delta\lambda &= \frac{y / (N_1 \cos \phi_1) - y^3 (1 + 2t_1^2 + \eta_1^2) / (6N_1^3 \cos \phi_1) + y^5 (5 + 28t_1^2 + 24t_1^4)}{+ 6\eta_1^2 + 8\eta_1^2 t_1^2 / (120N_1^5 \cos \phi_1) - y^7 (61 + 662t_1^2 + 1320t_1^4 + 720t_1^6) / (5040N_1^7 \cos \phi_1)} \end{aligned} \quad (1)$$

ただし,

$$t = \tan \phi$$

$$\eta = (\sqrt{a^2 - b^2}/b) \cos \phi \quad a, b: \text{地球の長短半径}$$

N : 横曲率半径

$$\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0, \lambda_0: \text{基準子午線の経度}$$

$$R = a(1 - e^2)/(1 - e^2 \sin^2 \phi)^{3/2}: \text{子午線曲率半径}$$

ϕ_1 は子午線弧長が x に等しい点の緯度つまり,

$$x = a(1 - e^2) \int_0^{\phi_1} d\phi / (1 - e^2 \sin^2 \phi)^{3/2}$$

を満たす値である.

また添字 1 のついた N_1, t_1, η_1, R_1 は ϕ_1 に対する N, t, η, R の値である.

これらの式で経緯度を $0.01''$ の精度まで求めるには, アンダーラインの部分まで計算が必要である. これは先に考察した (檜山, 1987). 式 (1) では係数 $N_1, e_1, \eta_1, R_1, \phi_1$ などを, あらかじめ計算する必要がある, 特に ϕ_1 の計算は面倒である (石川, 1969).

地図そのものに既に紙の伸縮がある (1 mm 程度) 上に, デジタイザーの計測誤差 (0.1 mm 程度) が加わっているデータに式 (1) を適用するのは, 『牛刀をもって狗肉を割く』の感がある. UTM 法で書かれた 1 枚の地図は, 厳密に言えばそれぞれの経緯線は互に直交する曲線であるが, それらを仮に直線とみなせば, 北側が南側より詰まった不等辺四辺形 (1/2 万 5 千についていえば, 詰まり方は 0.4 mm 程度, 1/20 万では 15 mm ~ 20 mm 程度) である. そのためしばしば便宜的に比例配分等で経緯度を計算する. しかしそれでは, 不等辺四辺形を長方形とみなしていることになり, 計測誤差以上の誤差が入ってしまう.

この場合は, Fig. 1 に示すアフィン変換を行って一旦正規化座標に変換し, これを経緯度座標に変換する方法をとると良い (室田, 1986; 国土地理院, 1987). これだと, 比例配分とたいして違わない演算量の, 乗算 10 回, 除算 2 回, 平方 1 回と加減算ですむ.

いま地図の四隅の点を p_1, p_2, p_3, p_4 とし, 図 1 のようにアフィン変換 F で

$$F: p_1(x_1, y_1) \longrightarrow \bar{p}_1(0, 0)$$

$$F: p_2(x_2, y_2) \longrightarrow \bar{p}_2(0, 1)$$

$$F: p_4(x_4, y_4) \longrightarrow \bar{p}_4(1, 0)$$

と変換すると, 任意の点 p が $\bar{p}(\bar{x}, \bar{y})$ に移り, p_3 が $\bar{p}_3(\bar{x}_3, \bar{y}_3)$ に移る変換は, 次式で得られる.

$$\begin{pmatrix} \bar{x}_3 \\ \bar{y}_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_3 - x_1 \\ y_3 - y_1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - x_1 \\ y - y_1 \end{pmatrix}$$

ここで, $\Delta = (x_4 - x_1)(y_2 - y_1) - (y_4 - y_1)(x_2 - x_1)$

$$a_{11} = y_2 - y_1, \quad a_{12} = -x_2 + x_1, \quad a_{21} = -y_4 + y_1, \quad a_{22} = x_4 - x_1$$

である. この場合 $p(x, y)$ の正規化座標を (ξ, η) とすると (ただし, $0 \leq \xi, \eta \leq 1$)

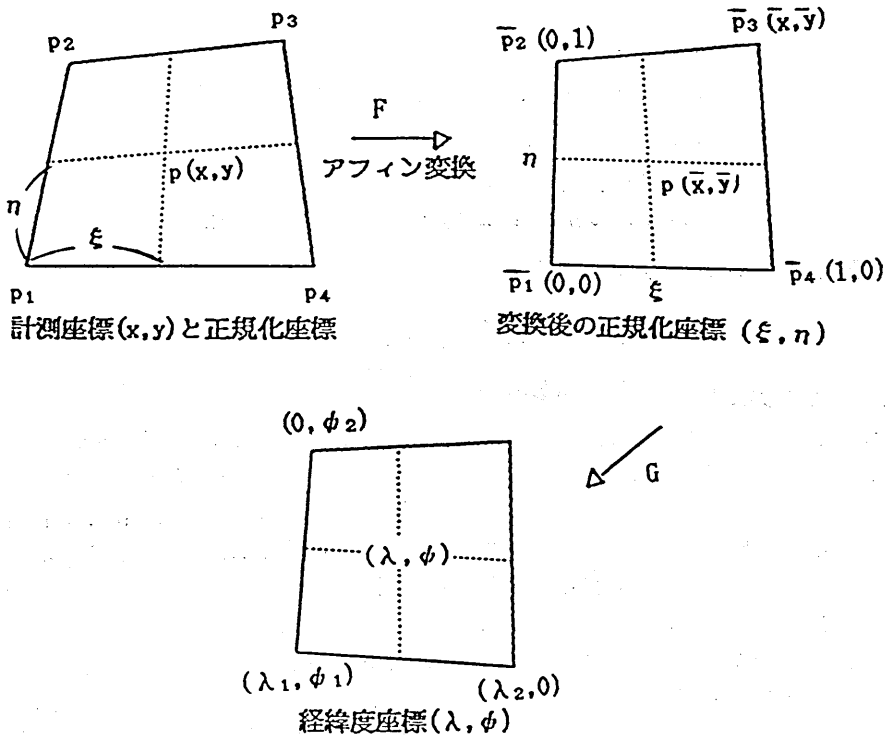


Fig 1. Transformation from (x, y) Cartesian coordinates to geodetic ones.

F: transformation from (x, y) Cartesian coordinates to normalized ones (ξ, η) .

G: transformation from (ξ, η) to geodetic coordinates (λ, ϕ) .

$$\xi = 2\bar{x}/(1+b+\sqrt{D}), \quad \eta = 2\bar{y}/(1-b+\sqrt{D})$$

となる。ただし、 $b = \bar{y}(\bar{x}_3 - 1) - \bar{x}(\bar{y}_3 - 1)$ 、 $D = (1+b)^2 + 4\bar{x}(\bar{y}_3 - 1)$ である。

次に正規化座標から、経緯度座標への変換を G とし

$$G: \bar{p}_1(0, 0) \rightarrow (\lambda_1, \phi_1)$$

$$G: \bar{p}_2(0, 1) \rightarrow (0, \phi_2)$$

$$G: \bar{p}_4(1, 0) \rightarrow (\lambda_2, 0)$$

になるすると、任意の正規化座標の点 (ξ, η) は

$$\lambda = \xi(\lambda_2 - \lambda_1) + \lambda_1$$

$$\phi = \eta(\phi_2 - \phi_1) + \phi_1$$

となる。

この変換式の誤差を評価するため、1/2万5千、1/5万、1/20万の地図から、予め経緯度が分っている点の座標を実際に読んで経緯度座標に変換を行った。一方、対応する点の計測誤差が全くないデータもアフィン変換し、両者を比較した。その結果は Table 2 に示すとおりである。

Table 2. Estimation of errors for three cases (1/25000, 1/50000, 1/200000). The second row is for the case including measuring errors. The third row is for the case without measuring errors, where input data are calculated exactly by UTM projection formulas.

種 類	1/25000	1/50000	1/200000
範 囲	139°53'~140° 35°40'~35°45'	139°45'~140° 35°40'~35°50'	139°~140° 35°20'~36°
きざみ幅	1'	1'	経度 15' 緯度 10'
読取値の場合 最大誤差 紙の上	λ 方向 $ \epsilon < 0.4''$ 0.4 mm	λ 方向 $ \epsilon < 0.5''$ 0.25 mm	ϕ 方向 $ \epsilon < 6''$ 1.5 mm
UTM の場合 最大誤差 紙の上	ϕ 方向 0.6'' 0.08 mm	ϕ 方向 0.3'' 0.19 mm	ϕ 方向 4'' 1 mm

その結果、1/2万5千~1/5万の地図では、0.1 mm の読取誤差を考慮しても、秒の単位まではこの方法で正しく変換できる。

4. ランベルト正角円錐図法の逆変換

もし読取誤差が無いとすれば投影式を逆に解くことにより厳密に正しい経緯度が得られるはずである。現実には、小縮尺であるため紙の伸縮や読取誤差が大きく影響し、例えば1/100万の地図では数10秒程度の誤差はさけられない。

地球を回転楕円体としたとき、地球から割円錐への投影の式は次式で与えられる。

いま、 ϕ_i ($i=1, 2$) は基準緯線の緯度、 a は地球の長半径、 e は離心率とすると、 (ϕ, λ) から (x, y) への変換式は

$$\begin{aligned} x &= r \sin \theta \\ y &= K - r \cos \theta \end{aligned}$$

となる。

ただし

$$\theta = \mu d\lambda \quad (d\lambda = \lambda - \lambda_0; \lambda_0 \text{ は中心の経度})$$

であり、この式の μ および、上式の r, K は次式で与えられるものである。

つまり、

$$N_i = a / (1 - e^2 \sin^2 \phi_i) \quad \text{としたとき、}$$

$$\tan(\xi_i/2) = ((1 + e \sin \phi_i) / (1 - e \sin \phi_i))^{e/2} \tan(45^\circ - \phi_i/2) \quad (2)$$

$$\mu = (\log \cos \phi_1 - \log \cos \phi_2 + \log N_1 - \log N_2) / (\log \tan(\xi_1/2) - \log \tan(\xi_2/2))$$

$$r_i = N_i \cos \phi_i / \mu \quad (i=1, 2)$$

$$K = r_1 / \tan^\mu(\xi_1/2) = r_2 / \tan^\mu(\xi_2/2)$$

である。

また r は、一般の座標 ϕ, λ に対して、 ξ を (2) 式の添字を取った形で計算した、

$$r = K \tan^e (\xi/2)$$

で与えられる。

さて、経緯度へ逆変換をするとは、 ϕ_1, ϕ_2, x, y が分っているとき、以上の式を逆にたどり、最終的に ϕ, λ を求めることである。

ここで、式 (2) の左辺 ξ が得られたとき、 ϕ を求める必要がおこる。これはこのままでは解けないので、式 (2) の e が入った項を e について級数展開した、次式で逐次近似を行うことにする。

つまり、

$$\phi = (90^\circ - \xi) + 0.19174 \sin(2\phi) - 0.0002675 \sin(4\phi) + 0.56 \times 10^{-6} \sin(6\phi)$$

において、最初 $\phi = 90^\circ - \xi$ と置き逐次近似をくりかえす。0.1'' の精度を得るためには、この逐次近似式は倍精度計算で 5 回程度で収束する。また残りの逆変換式は、簡単に計算できる。従って経緯度座標が求められる。

地球を楕円体でなく球とみなした場合は、式 (2) で $e=0$ になり、逆変換式は簡単になる。しかし、地球を楕円体とみなして投影して得られ地図上の点を、球とみなした式で逆変換したのでは、当然のことながら正しい結果は得られない。

5. プログラムの説明

前述した 2 つの逆変換アルゴリズムに基づいて書いたプログラムは、地図情報処理システムとして地震研究所で開発した『震研地図システム』(檜山, 1988; 檜山・小竹, 1986) に汎用サブルーチン・プログラムとして登録してある。その使用方法や例題は(情報処理室, 1987)に詳しく述べてあるので、ここではサブルーチンの概要の説明のみにとどめる。

1) サブルーチン AFIN

目的: UTM 法で描かれた地図の X, Y 座標を経緯度座標に変換する。

入力パラメーター: 地図上の四隅の点と変換したい点の X, Y 座標

出力パラメーター: 経緯度座標

2) サブルーチン UTM

目的: 経緯度座標で与えられた点を UTM 法の X, Y 座標に変換する。つまりサブルーチン AFIN の逆を行う。あわせて、『震研地図システム』で地図を描くためのフォーマットに変換する。

入力パラメーター: 変換したい点の (ϕ, λ) 座標とその点の属する経度帯の番号。

出力パラメーター: 平面直角座標の (X, Y) の値。更に IND=1 のときは『震研地図システム』に載る形のフォーマットに変換する。

3) サブルーチン ILAMB 2

目的: ランベルト正角割円錐図法で描かれた地図上の点 (X, Y) から経緯度座標を求める。

入力パラメーター: 2 基線の緯度と、求める点の X, Y 座標

出力パラメーター: 経緯度座標

4) サブルーチン LAMB 2

目的: 経緯度座標で与えられた点をランベルト正角円錐図法 X, Y の座標に変換する。つまりサブルーチン ILAMB 2 の逆を行う。あわせて、震研地図システムで地図を描くためのフォーマットに変換する。

入力パラメーター: 2 基線の緯度と変換したい点の (ϕ, λ) 座標。

出力パラメーター: 平面直角座標の (X, Y) の値。更に IND=1 のときは『震研地図システム』に載る形のフォーマットに変換する。

これらプログラムは、『震研地図システムの中にある他の開発プログラム』と同じ使用方でコマンド >>CHIZU と入力後、主プログラムからサブルーチン・コールの形で使用できる。

謝 辞

ランベルト正角円錐図法の地図の場合に逐次近似で逆関数を求めたが、この他にも色々な近似法が考えられる。第 17 回数値解析シンポジウムでは、中部大学二宮市三教授より直接 n 次多項式近似が得られるというご指摘があり、その後直ぐに、 $43^\circ < \xi < 70^\circ$ の範囲で、10桁の精度が保証された 6 次の相対誤差基準による、最良近似多項式を作っていたいただいた。サブルーチン ILAMB 2 では、その算法を使うように改定し、あらためて感謝の意を表すこととする。

文 献

- 原田健久, 1984, 地球観測ハンドブック, 友田, 鈴木, 土屋編, 東京大学出版会, pp. 29-35.
檜山澄子, 1987, デジタルマップ・システム作成に於ける数値計算上の諸問題, 情報処理学会研究報告, 87, No. 64.
檜山澄子, 1988, 地震予知観測情報センターの地図情報処理の紹介, *PIXEL* '88, 6号, pp. 144-153.
檜山澄子・小竹美子, 1986, 地震研究所における地図情報処理, 応用地質, 27, pp. 80-88.
石川甲子男, 1969, 測地関数の多項式近似, 測地学会誌, 14, pp. 14-16.
地震研究所情報処理室, 1987, 震研地図システム, 第4版, 地震予知観測情報センター・マニュアル.
国土地理院, 1987, 国土数値情報の基礎知識, 第2版, pp. 58-59.
室田一雄, 1986, 計量的情報の基本処理, *bit* 別冊計算幾何と地理情報処理, 伊理監修, 共立出版, p. 31.
坪川家恒編, 1981, 現代測量学第1巻, 測量の数学的基礎, 日本測量協会, pp. 97-102.

*Methods of Computing Geodetic Coordinates for
Points on Typical Maps*

Sumiko HIYAMA

Earthquake Research Institute

This paper deals with how to obtain the geodetic coordinates of points on typical maps published by the Geographical Survey Institute. The computations are not so easy because the earth is assumed to be a spheroid, not a sphere.

For maps of Universal Transverse Mercator Projection, it is troublesome to apply inverse transformation formulas. In this case, it is simple and convenient to use affine transformation technique. By this method, we are able to obtain geodetic coordinates within an error of 1 second of arc for large-scale maps, for example, 1/25000 or 1/50000.

Lambert Conformal Conic Projection is often used for small-scale maps. In this case, it is better to apply the inverse formula. In the course of the computation, however, it is necessary to use a successive approximation method. This method converges after 5 iterations or less and gives an accuracy of 0.1 second of arc if we neglect measuring errors.