

消波境界を持った有限要素法による波動伝播解析

日本電信電話公社 鈴木 崇 伸
地震研究所 伯野 元 彦

(昭和59年4月24日受理)

要 旨

有限要素法は、弾性波動の伝播問題を解く際に有力な手法としてしばしば用いられている。しかし無限領域、或いは半無限領域の一部をモデル化する時に、人為的に設定する境界において波動が乱され、適当な境界処理を施さないと、解析結果が無意味なものになってしまう。この問題を解決すべく、Cundallらの提案した方法を、3次元弾性波動問題にまで応用し、その実用化を計った。

Cundallの方法は、Neumann条件とDirichlet条件の適当な組み合わせにより、定量的評価が可能な反射波を生じさせ、それを打ち消し合う2つの解を求めるというものであるが、その方法は完全であり、解析領域の次元にかかわらず適用できることを示した。一方で、その方法の持つ欠点も明らかになったが、その影響は小さく、ほぼ満足のいく精度で計算結果が得られると考えられる。本論文では、波動方程式を時間領域で解くことを考え、有限モデルで無限領域と等価な解析が可能なが示された。また、地盤一構造物系などを含む不規則構造の応答計算にも適用が可能であるが、その際には若干の変更を加えるだけでよく、人為境界に沿って進行する波動と、人為境界に入射する波動を識別して、後者を消波処理すればよい。応用例として、崖地形（自由表面の不規則性）とレンズ状軟弱層（地下構造の不規則性）の応答計算を示した。

有限要素法は、モデル化する際の制約条件が少なく、地盤等の連続体の解析に非常に適している。本論文で開発したプログラムも、地震断層を含むマクロな波動伝播問題から、不規則地盤の応答計算にまで適用が可能であり、解析的に解くのが困難な諸問題を解明できると考えられる。しかし、数値解析時に時空領域を離散化することにより生じる波動の減衰性や分散性の問題や、有限要素法解析の前処理、後処理の問題など重要な課題が残されているが、一応の成果は成し得たと思われる。

1. 序

a) 一般に、波動伝播の問題は、差分法や有限要素法などの数値解析手法を用いて解かれることが多いが、解析領域をモデル化する際に人為的な境界を設定する場合がしばしばある。特に、無限領域、或いは半無限領域を伝播する波動を考えてみると、無限遠方にまで進行すべき波動が、人為的な境界により反射され、解析モデル内に残ってしまうことになり、計算結果が無意味なものにしてしまう。もしも、計算機が十分な容量をもち、数値解析モデルを十分大きく設定できれば、境界の影響を無視できるであろうが、実際は、そうではない。そこで、この問題を解決すべく、多くの境界処理方法が提案されてきた。

(i) LYSMER & KUHLEMEYER (1969) は、境界にダッシュポットを設け、境界に入射する波動エネルギーを吸収する“粘性境界 (viscous boundary)”を提案した。しかし、実体波が入射する場合には、ダッシュポットの係数が一定となるが、一般には、周波

数に依存してしまい、また入射角に対しても、理論上完全とは言い難い。

(ii) LYSMER & WAAS (1972) は、剛基盤上の弾性体を伝播する表面波を有限要素法で定式化し、側面境界に作用させる“伝播境界 (transmitting boundary)”を提案している。モデル化の前提上で理論は完全であり、周波数に依存する境界条件を与える。

しかし、剛基盤の仮定が一般的ではなく、その改良も試みられている。

(iii) SMITH (1974) は、Neumann 条件と Dirichlet 条件を組み合わせ、逆位相と同位相の反射波を生じさせ、両者の平均をとることにより反射波を消波するという“重ね合わせ境界 (superposing boundary)”を提案している。この処理方法は、境界への入射にも、周波数にも依らない優れたものであるが、反射波が再びその境界に達すると消波できなくなるという欠点をもつ。尚、田村・中村 (1978) も同様の処理方法を提案している。

(iv) CUNDALL ら (1978) は、Smith の提案した境界処理方法を改良することにより、その欠点を除いている。この方法については、第2章で詳述するが、理論上完全であり、解析モデルに対する条件も少ないと考えられる。

以上、代表例のみを列挙したが、他にもさまざまな方法が提案されている。例えば、赤尾・伯野 (1983) は、境界上の変数値を外挿して求める方法を提案しているが、汎用性に乏しいと考えられる。

また、地盤一構造物系の応答計算に際しては、上述の境界処理方法が、適宜、複合して用いられており、有名なプログラム“FLUSH”では、粘性境界と伝播境界が併用されている。一方、KUNAR ら (1980) は、側面境界に Cundall の手法を、底部境界には粘性境界をもつモデルを提案している。赤尾ら (1983) は、前述の外挿手法と、水平多層地盤の解析手法を併用して応答計算をする方法を提案している。

さて、ここで (i)~(iv) で示した代表的な境界処理手法を分類してみると、(i), (ii) 及び (iii), (iv) の2通りに分けることができるが、前者は、周波数に依存し、反射波の存在を許さない方法であるのに対し、後者は、周波数には依存せず、反射波の存在を初めから仮定している処理方法であるといえる。

b) 本論文では、弾性体中の波動伝播問題を時間領域で解くことを考える。そして、Cundall の境界処理手法を3次元問題に適用して有限のモデルで、無限領域と等価な解析が可能であることを示す (第2章, 第3章)。さらに、この境界処理手法を、応答計算に適用することを考え、その解析モデルについて述べ、応用例を示す (第5章)。

本論文では、数値解析法としては、全て有限要素法を用い、他の方法 (差分法や境界要素法など) を併用することを避けている。有限要素法のみを用いることにより、解析モデル全体で精度を一定にでき、またアルゴリズムを簡単にできると考えられる。有限要素法の利点については、多くの人が認めるところであるが、一方で大容量の高速コンピュータが必要とされる。しかし、最近になって東大大型計算機センターに導入されたスーパーコンピュータ S810 (日立製) は、有限要素法のような大規模な行列方程式の超高速処理が可能であり、その利用を前提にプログラムを開発した。

2. 消波境界の理論的背景

2-1 Smith の方法と Cundall の方法

境界により発生する反射波を, Dirichlet 条件と Neumann 条件を巧みに重ね合わせる
ことにより消波する方法は, Smith により提案された. 更に, そのアイデアをもとに, 境
界条件を工夫したのが Cundall である. ここでは簡単なモデルを用いて, 両者の違いに
ついて調べてみる.

u に関する波動方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = C^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}; \quad -\infty < x < 0, \quad t > 0 \quad (2.1.1)$$

を, 初期条件

$$u(0, x) = 2f(x), \quad \frac{\partial u(0, x)}{\partial t} = 0 \quad (2.1.2)$$

で解くことを考えると,

$$u(t, x) = f(x-ct) + f(x+ct) \quad (2.1.3)$$

で与えられる. ここで, 境界に進行して行く波のみを考えると $f(x-ct)$ のみを考えれば
よいことになる. 初期条件が,

$$f(x > 0) = 0 \quad (2.1.4)$$

を満たすとして, 次の問題を考える.

$$\text{i) } u(t, 0) = 0 \quad (2.1.5)$$

の境界条件で解くと (この解を u_1 と表わす)

$$u_1(t, x) = f(x-ct) - f(-x-ct) \quad (2.1.6)$$

$$\text{ii) } \frac{\partial u}{\partial x}(t, 0) = 0 \quad (2.1.7)$$

の境界条件で解くと (この解を u_2 と表わす)

$$u_2(t, x) = f(x-ct) + f(-x-ct) \quad (2.1.8)$$

ここで, u_1, u_2 の平均 $(u_1 + u_2)/2$ をとれば, 反射波の項は消去される訳で, これが
Smith の重ね合わせ境界 (Superposing boundary) である. 一方, Cundall の方法は,
(2.1.5) (2.1.7) のかわりに,

$$\frac{\partial u}{\partial t}(0, 0) = -c \cdot f'(0), \quad \frac{\partial u}{\partial x}(0, 0) = f'(0) \quad (2.1.9)$$

が満たされていると仮定する.

$$\text{iii) } \frac{\partial u}{\partial t}(t, 0) = \frac{\partial u}{\partial t}(0, 0) = -cf'(0) \quad (2.1.10)$$

の境界条件で解く (この解を u_3 と表わす)

$$u_3(t, x) = f(x-ct) + A_3 f(-x-ct) \quad (2.1.11)$$

とおき、式 (2.1.10) に代入すると、

$$\frac{\partial u_3}{\partial t}(t, 0) = -c \{f'(-ct) + A_3 f'(-ct)\} = -c f'(0) \quad (2.1.12)$$

$$\therefore A_3 = -1 + \frac{f'(0)}{f'(-ct)}$$

(ここで、反射波が境界領域の 3 ヶ ヶ シュ 程度を通過する時間は充分短かいとして $f'(-ct)$ を近似的に Const. とすれば A_3 は Const. となり、(2.1.11) の u_3 は波動方程式の解となる.)

よって

$$u_3(t, x) = f(x-ct) + \left\{ -1 + \frac{f'(0)}{f'(-ct)} \right\} f(-x-ct) \quad (2.1.13)$$

$$\text{iv)} \quad \frac{\partial u}{\partial x}(t, 0) = \frac{\partial u}{\partial x}(0, 0) = f'(0) \quad (2.1.14)$$

の境界条件で解くと (この解を u_4 と表わす) iii) と同様に

$$u_4(t, x) = f(x-ct) + \left\{ 1 - \frac{f'(0)}{f'(-ct)} \right\} f(-x-ct) \quad (2.1.15)$$

反射波は、 $(u_3 + u_4)/2$ を計算すれば消波される。

次に、解 $u_1 \sim u_4$ について、 $t \rightarrow 0$ としてみると、

$$\begin{aligned} u_1(0, x) &= f(x) - f(-x) \\ u_2(0, x) &= f(x) + f(-x) \\ u_3(0, x) &= f(x) \\ u_4(0, x) &= f(x) \end{aligned} \quad (2.1.16)$$

u_3, u_4 では、 x 正方向に進行する波動の初期条件が満たされているのに対し、 u_1, u_2 では、 $f(x > 0) = 0$ の条件を付加して、初期条件を満足する。この初期条件 $f(x)$ に関する制約の違いは重要であり、両者の決定的な差となる。即ち、Cundall の方法では、任意の時刻 $t = t_0 (> 0)$ において、初期条件を、

$$\begin{aligned} u(t_0, x) &= f(x - ct_0), \\ \frac{\partial u}{\partial t}(t_0, 0) &= -c f'(-ct_0), \quad \frac{\partial u}{\partial x}(t_0, 0) = f'(-ct_0) \end{aligned} \quad (2.1.17)$$

と設定できるが、Smith の方法では無理である。

Cundall の方法は、一定の時間間隔 Δt で初期条件を更新し、反射波を消波していける訳で、また反射波の存在する領域を境界近くの小領域のみに限る ($-c\Delta t < x < 0$) ことができる。Smith の方法は全領域に反射波が進行していき、また、他の境界が存在した場合、 $x=0$ からの反射波が再び反射をして、 $x=0$ に到達すると、最早消波できなくなる欠

点をもつが、Cundall の方法は、その問題を解決している。即ち、有限の領域で、仮想的な無限領域の解析を任意の時間だけ、実行することができる。

2-2 Cundall の方法の 3 次元問題への応用

Cundall の方法を 3 次元弾性波動問題に応用することを考える。

a) 3 次元波動方程式

$$\frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \nabla^2 u \quad (2.2.1)$$

を考えると、波動の x 方向成分が x 正方向に進行する波動は、一般に

$$u_i(t, x, y, z) = \exp(i\xi x + i\eta y + i\zeta z - i\omega t) \quad (2.2.2)$$

$$(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = \omega^2/c^2, \xi > 0)$$

と表わされる。今、 $x < 0$ の領域を対象とし、境界 $x=0$ に、式 (2.2.2) で表わされる波動が入射する問題を考えてみる。(Fig. 2.1 参照) 反射波を

$$u_r(t, x, y, z) = A \exp(-i\xi x + i\eta y + i\zeta z - i\omega t) \quad (2.2.3)$$

とおくと、 $x < 0$ に存在する波動は、 $(u_i + u_r)$ で与えられる。

$t=t_0$ において、 $x < 0$ には、反射波は存在しないと仮定すると初期条件として、

$$u(t_0, x, y, z) = \exp(i\xi x + i\eta y + i\zeta z - i\omega t_0) \quad (2.2.4)$$

境界条件として

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, 0, y, z) = -i\omega \exp(i\eta y + i\zeta z - i\omega t_0),$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(t, 0, y, z) = i\xi \exp(i\eta y + i\zeta z - i\omega t_0) \quad (2.2.5)$$

が得られる。

1 次元の場合と同様に、反射波の振幅を、Dirichlet 条件、Neumann 条件のもとに計算してみる (それぞれ A^D , A^N と表わす)

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad \frac{\partial u}{\partial t}(t, 0, y, z) &= -i\omega(1 + A^D) \exp(i\eta y + i\zeta z - i\omega t) \\ &= -i\omega \exp(i\eta y + i\zeta z - i\omega t_0) \\ \therefore A^D &= -1 + \exp(i\omega(t - t_0)) \end{aligned} \quad (2.2.6)$$

$$\begin{aligned} \text{ii)} \quad \frac{\partial u}{\partial x}(t, 0, y, z) &= i\xi(1 - A^N) \exp(i\eta y + i\zeta z - i\omega t) \\ &= i\xi \exp(i\eta y + i\zeta z - i\omega t_0) \\ \therefore A^N &= 1 - \exp(i\omega(t - t_0)) \end{aligned} \quad (2.2.7)$$

よって i), ii) より得られる 2 つの解の平均をとれば、反射波の項は消去される。

ここで i) の条件の時

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial y}(t, 0, y, z) &= i\eta \exp(i\eta y + i\zeta z - i\omega t_0) = \frac{\partial u_i}{\partial y}(t_0, 0, y, z) \\ \frac{\partial u}{\partial z}(t, 0, y, z) &= i\zeta \exp(i\eta y + i\zeta z - i\omega t_0) = \frac{\partial u_i}{\partial z}(t_0, 0, y, z)\end{aligned}\quad (2.2.8)$$

となる.

b) 3次元等方均質弾性体における波動は

$$\begin{aligned}\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} &= (\lambda + 2\mu) \text{grad}(\text{div} \mathbf{u}) - \mu \text{rot rot} \mathbf{u} \\ \mathbf{u} &= (u, v, w)\end{aligned}\quad (2.2.9)$$

で表わされる. 但し, ρ ; 単位体積質量, λ, μ ; Lamé の定数.

ポテンシャルを用いて書き改めると

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} &= \alpha^2 \nabla^2 \phi; \quad \alpha^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \\ \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} &= \beta^2 \nabla^2 \mathbf{A}; \quad \beta^2 = \frac{\mu}{\rho}, \quad \mathbf{A} = (A_x, A_y, A_z)\end{aligned}\quad (2.2.10)$$

このとき

$$\mathbf{u} = \text{grad} \phi + \text{rot} \mathbf{A} \quad (2.2.11)$$

ここで, a) と同様, $x=0$ の境界に波動が入射する場合, ϕ と \mathbf{A} について a) で述べた境界条件で解けばよい. ϕ, \mathbf{A} は独立に求まるので, 次に示す境界条件の組み合わせを考えてみる.

$$\text{i-a)} \quad \left\{ \frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial A_x}{\partial x}, \frac{\partial A_y}{\partial t}, \frac{\partial A_z}{\partial t}; \text{const} \right\}_{x=0} \quad (2.2.12)$$

$$\text{ii-a)} \quad \left\{ \frac{\partial \phi}{\partial t}, \frac{\partial A_x}{\partial t}, \frac{\partial A_y}{\partial x}, \frac{\partial A_z}{\partial x}; \text{const} \right\}_{x=0} \quad (2.2.13)$$

但し, 'const' は, 時間に依らず一定であることを示す. (y と z のみの関数となっている)

組み合わせ i-a) の時

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial A_x}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial A_x}{\partial t} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial A_y}{\partial t} \right) \quad (2.2.14)$$

であるので

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{x=0} = \text{const} \quad (2.2.15)$$

となる. また

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} \right) - \frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} \quad (2.2.16)$$

ここで、(2.2.16) 式の最後の項 $\partial^2 A_z / \partial x^2$ が const. になることを以下のように説明する。

いま、1次元問題を考えると、境界においても波動方程式は成立しているから

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

ここで、Dirichlet の境界条件を考えると

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{x=0} = \text{const.}$$

したがって、

$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right|_{x=0} = 0$$

これを元の波動方程式に代入すると $\partial^2 u / \partial x^2 |_{x=0} = 0$ が成立しなければならない。

2次元でも

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

において、左辺が $x=0$ において0ならば $\partial^2 u / \partial x^2$ も $\partial^2 u / \partial y^2$ も任意の値はとれず const. でなければならない。

同様なことは3次元でも成立するから、 $x=0$ においては $\partial^2 A_z / \partial x^2 = \text{const.}$ でなければならない。

したがって (2.2.16) 式は

$$\left. \frac{\partial v}{\partial x} \right|_{x=0} = \text{const} \quad (2.2.17)$$

同様にして

$$\left. \frac{\partial w}{\partial x} \right|_{x=0} = \text{const} \quad (2.2.18)$$

となる。よって次の組み合わせが得られる。

$$\text{i-b) } \left\{ \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial x}; \text{const} \right\}_{x=0} \quad (2.2.19)$$

逆に、式 (2.2.14) と式 (2.2.16) より、若干の計算を経て、

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) &= - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} \right) \\ &= - \frac{1}{\beta^2} \frac{\partial^3 A_z}{\partial t^3} \end{aligned} \quad (2.2.20)$$

が得られる。 $x=0$ での境界条件を考えると

$$\left. \frac{\partial^3 A_z}{\partial t^3} \right|_{x=0} = \text{const} \quad (2.2.21)$$

となるが、これは

$$\left. \frac{\partial \dot{A}_z}{\partial t} \right|_{x=0} = \text{const} \quad (2.2.22)$$

に等しい。他の条件についても同様にして証明できる。よって、i-a) と i-b) の境界条件は等価である。

同様に、ii-a) からは

$$\text{ii-b)} \quad \left\{ \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial t}, \frac{\partial w}{\partial t}; \text{const} \right\}_{x=0} \quad (2.2.23)$$

が得られる。i-b) と ii-b) の解の平均をとれば、反射波は消波される。

c) さて、i-b), ii-b) の Dirichlet 条件について考えてみると、i-b) においては、式 (2.2.8) と同様に

$$\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{x=0} = \text{const}, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{x=0} = \text{const} \quad (2.2.24)$$

が得られる。ii-b) についても

$$\left. \frac{\partial v}{\partial y} \right|_{x=0} = \text{const}, \quad \left. \frac{\partial v}{\partial z} \right|_{x=0} = \text{const} \quad (2.2.25)$$

$$\left. \frac{\partial w}{\partial y} \right|_{x=0} = \text{const}, \quad \left. \frac{\partial w}{\partial z} \right|_{x=0} = \text{const}$$

が、得られる。

ここで、 $x=0$ 平面に作用する応力を考えてみる。(Fig. 2.1 参照) i-b) の場合

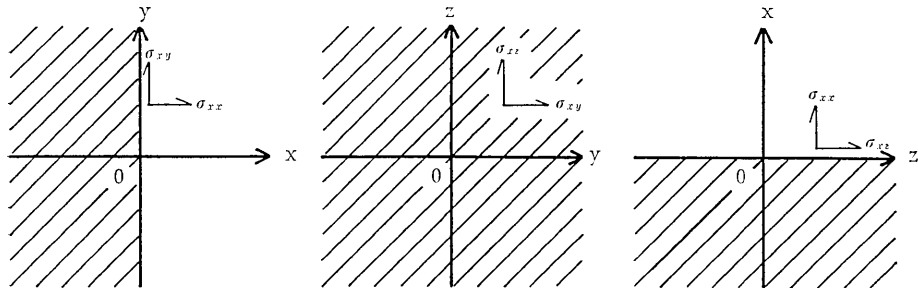


Fig. 2.1. Range of ($x < 0$).

$$\sigma_{xy} = \mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (2.2.26)$$

$$\sigma_{xz} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)$$

であるから

$$\sigma_{xy}|_{x=0} = \text{const}, \quad \sigma_{xz}|_{x=0} = \text{const} \quad (2.2.27)$$

が得られる。ii-b) の場合も同様に

$$\sigma_{xx}|_{x=0} = \left\{ \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right\}_{x=0} = \text{const} \quad (2.2.28)$$

が得られる。逆の証明は省略するが、以上より、i-b), ii-b) は次のように書き改められる。

$$\text{i-c)} \quad \left\{ \frac{\partial u}{\partial t}, \sigma_{xy}, \sigma_{xz}; \text{const} \right\}_{x=0} \quad (2.2.29)$$

$$\text{ii-c)} \quad \left\{ \sigma_{xy}, \frac{\partial v}{\partial t}, \frac{\partial w}{\partial t}; \text{const} \right\}_{x=0} \quad (2.2.30)$$

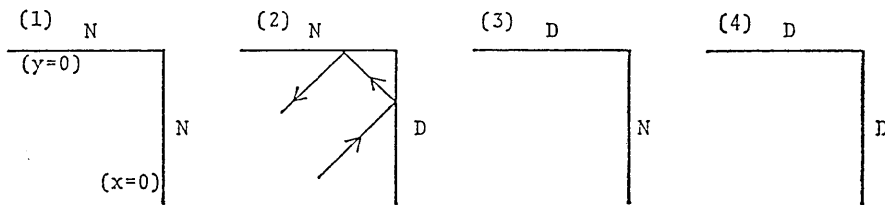
i-c), ii-c) の境界条件は、有限要素法などの数値解析を用いる時に簡単に取り扱える形である。

2-3 多重反射の問題

2-2 では、 $x=0$ の境界を考えてみたが、更に $y=0$ の境界を付加した場合には、 $x=0$ 平面からの反射波が、 $y=0$ 平面に入射するという問題が生じる。この多重反射の問題は、次の4つの解を求めることにより解決できる。(2-2 a) の方程式について)

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad & \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} = \text{const}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0} = \text{const} \\ \text{ii)} \quad & \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} = \text{const}, \quad \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{y=0} = \text{const} \\ \text{iii)} \quad & \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{x=0} = \text{const}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0} = \text{const} \\ \text{iv)} \quad & \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{x=0} = \text{const}, \quad \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{y=0} = \text{const} \end{aligned} \quad (2.3.1)$$

証明は省略するが、反射波の反射波まで消波できることは、自明であろう。(Fig. 2.2 参照)



(N: Neumann condition, D: Dirichlet condition)

Fig. 2.2. Boundary conditions at two boundaries ($x=0, y=0$).

さて、初期条件の更新を Δt 毎に行うとすれば、任意の $\xi, \eta (>0)$ に対して、上述の反射波が存在するのは、

$$\{-c\Delta t < x < 0, -c\Delta t < y < 0\} \quad (2.3.2)$$

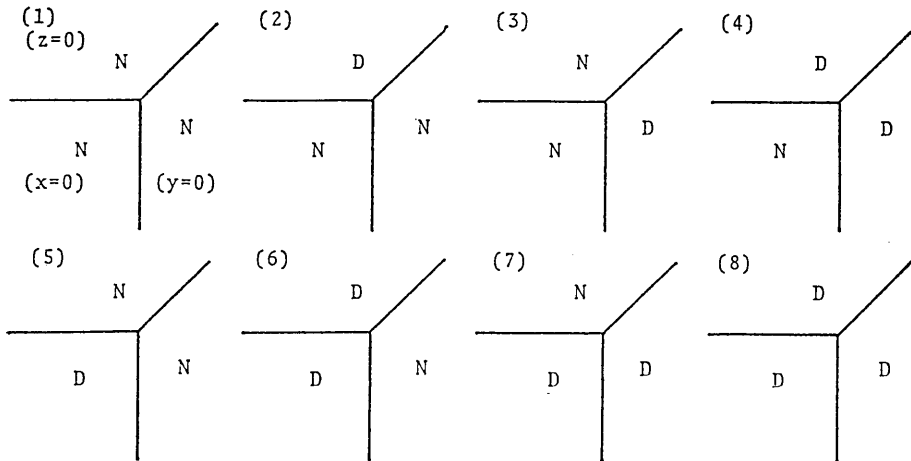
の領域に限られる訳であり、i) ~ iv) の4つの解は、この領域でのみ求めればよい。

さらに、 $z=0$ の境界を付加した場合は、8つの解が必要であり Fig. 2.2 と同様に、

Fig. 2.3 に示す. また反射波の存在する領域は

$$\{-c\Delta t < x < 0, -c\Delta t < y < 0, -c\Delta t < z < 0\} \quad (2.3.3)$$

となる.



(N: Neumann condition, D: Dirichlet condition)

Fig. 2.3. Boundary conditions at three boundaries ($x=0, y=0, z=0$).

以上, 述べてきたことを3次元弾性体に適用すると, Table 2.1 に示す8つの解を求めることになる. 境界面が2つの場合には, 無関係となる項を無視すればよい. また, 平面ヒズミ問題の場合も同様である.

Table 2.1. Boundary conditions for three dimensional media.

Boundary	$x=0$	$y=0$	$z=0$
Solution-1	N_x	N_y	N_z
2	N_x	N_y	D_z
3	N_x	D_y	N_z
4	N_x	D_y	D_z
5	D_x	N_y	N_z
6	D_x	N_y	D_z
7	D_x	D_y	N_z
8	D_x	D_y	D_z

$$\text{where } N_x: \left\{ \sigma_{xx}, \frac{\partial v}{\partial t}, \frac{\partial w}{\partial t}; \text{const} \right\} \quad D_x: \left\{ \frac{\partial u}{\partial t}, \sigma_{xy}, \sigma_{xz}; \text{const} \right\}$$

$$N_y: \left\{ \frac{\partial u}{\partial t}, \sigma_{yy}, \frac{\partial w}{\partial t}; \text{const} \right\} \quad D_y: \left\{ \sigma_{yx}, \frac{\partial v}{\partial t}, \sigma_{yz}; \text{const} \right\}$$

$$N_z: \left\{ \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial v}{\partial t}, \sigma_{tz}; \text{const} \right\} \quad D_z: \left\{ \sigma_{zx}, \sigma_{zy}, \frac{\partial w}{\partial t}; \text{const} \right\}$$

ここで、直方体領域を想定して、Smithの方法とCundallの方法を比較してみる。Smithの方法では、6つの境界面が存在するために $2^6=64$ 通りの解を求める必要がある。一方、Cundallの方法では初期条件を更新する時間間隔を適当に定めることにより、8通りの解でよい。それは、反射波が境界から一定の距離の領域にのみ存在し、3つの境界の影響のみを考えればよいからである。

2-4 備考

a) 複数の波動が境界に入射する問題を考えてみる。例として

$$u(t, x) = u_A(t, x) + u_B(t, x) \quad (2.4.1)$$

を考えると、2つの境界条件は、

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, 0) = \frac{\partial u}{\partial t}(t_0, 0) = \frac{\partial u_A}{\partial t}(t_0, 0) + \frac{\partial u_B}{\partial t}(t_0, 0) \quad (2.4.2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(t, 0) = \frac{\partial u}{\partial x}(t_0, 0) = \frac{\partial u_A}{\partial x}(t_0, 0) + \frac{\partial u_B}{\partial x}(t_0, 0)$$

と表わされる。単数の波動に対しては、完全に消波されるのであるが、複数の波動に対しては、その平均として波動を捉えなくてはならず、完全には消波できない。

特に、境界の接合部付近では、多重反射が生じるために、波動が複雑になり、反射波が残る可能性がある。数値解析をする際には注意する必要がある。

b) この章では、波動を平面波と仮定していたが、境界に対して、円筒波や、球面波のような波面が曲率をもった波動が入射する場合も当然有り得る。しかし、波面の曲率が小さく、平面波で近似しても許されるような場合には、十分消波できるであろう。即ち、振動源からある程度、境界までの距離を確保すればよい。

c) 境界条件の組み合わせ（特に平行位置にある境界）により、特殊な波動が励起される可能性がある。この問題について明解な解答は得ていないが、無視し得る程度であろうと推察される。

d) この章では、平面境界のみを扱ったが、曲面境界に対しても同様の定式化が可能であろう。しかし、数値解析時には、平面境界は処理し易く、曲面境界よりも一般的に優れていると考えられる。しかし、b)で考えたような場合には、曲面境界の方が優れているであろう。また、平面境界を用いた場合、境界接合部は特異点となるが、曲面境界との並用でこの問題を解決できるかもしれない。

3. 有限要素法の適用

3-1 有限要素法の解法

波動方程式を有限要素法を用いて解く場合、平衡方程式は

$$[M]\{\ddot{u}\} + [C]\{\dot{u}\} + [K]\{u\} = \{R\} \quad (3.1.1)$$

で与えられる。ここで、 $[M]$ 、 $[C]$ 、 $[K]$ は、それぞれ質量、減衰、剛性マトリックス、

u, \dot{u}, \ddot{u} は変位, 速度, 加速度, R は, 外力を表す. 上式の解法は, 大別して時間領域で解く方法と, 周波数領域で解く方法とがあるが, ここでは時間領域で解くことを考える. 時間領域での解法といっても, 数多く提案されており, それぞれが長所と短所をもっているが, 計算の高速化という観点から, 陽的解法である Runge-Kutta 法を用いることにする.

陽的解法は, 計算式の右辺と左辺のデータの独立性が保証されるために, アレイプロセスシステムをもつ大型のコンピュータで, 高速ベクトル処理が可能である. 大次元の連立方程式を解く場合, 超高速計算は必要とされ, それに対応すべきアルゴリズムで解かなくてはならない. また, 陽的解法では, 逆行列を計算する必要がないので, 時間依存性の非線形現象を対象にする場合, マトリックス成分を変更するだけで計算を続行できる.

$[M]$ を集中質量マトリックスとすれば, 対角成分のみであるから

$$\{\ddot{u}\} = [M]^{-1}(\{R\} - [C]\{\dot{u}\} - [K]\{u\}) \quad (3.1.2)$$

に簡単に変更できる. さらに

$$\{\dot{v}\} = [M]^{-1}(\{R\} - [C]\{v\} - [K]\{u\}) \quad (3.1.3)$$

$$\{\ddot{u}\} = \{\dot{v}\}$$

として, 計算を行えばよい. ここでは, 主要誤差が $O(\Delta t^3)$ である 3 次の Runge-Kutta 公式を用いることにする.

さて, 有限要素法を用いて偏微分方程式を離散化すると, 一般に不規則的なスパース行列で表される行列方程式が得られる. 通常, 有限要素法では, この行列を記憶するのにバンドマトリックスが用いられてきた. しかし, 行列が大次元になるに従い, 行列中の零成分も増え, 非効率的になる. またバンド幅を小さくするような工夫をして節点の番号付けをする必要があった. こういった問題は, 行列中の非ゼロ成分の位置を記憶するマトリックスを準備して, 非ゼロ成分のみを格納する方法を用いれば解決される. 即ち, 2次元マトリックス $[A]$ をゼロ成分を除外して $[B]$ に格納する場合,

$$\begin{aligned} A(I, J) &= 0 \\ B(I, K) &= A(I, J) \end{aligned} \quad (3.1.4)$$

$$L(I, K) = J \quad ; \text{ 間接指標マトリックス}$$

とすればよく, マトリックスが大次元になる程, 効率がよくなる. 特に, 3次元弾性体問題のように, 1節点3自由度をもつ場合には, 更に効率的になる.

また, 先頃, 東大大型計算機センターに導入された S-810 は間接指標ベクトル演算機能 (後ほか, 1983) をもつために, ベクトル処理の点からいっても問題はない.

3-2 消波境界の適用

CUNDALL ら (1978) により提案された重ね合わせ境界は, 最初, 差分法により定式化されたものであった. その後 KUNAR ら (1980) により, 粘性境界と併用する形で, 有限要素法で定式化されている. ここでは, 全ての境界で消波処理をすることを前提に定式化をして

みる。

a) 波動は解析領域内部より、境界に向かって進行すると仮定する。この仮定により、前章で述べたことが定式化できる訳であり、そうでない場合（例えば、ある境界面から波動が入力される場合など）については、第5章で述べる。

Cundallの方法によれば、前章で述べたように、境界からの反射波は、境界からの距離が一定以内の領域だけに存在する。そこで、全領域は、反射波の存在する‘境界領域’と反射波の存在しない‘内部領域’とに分けられる。(Fig. 3.1a 参照) 境界領域では、消波するのに必要な複数個の解を求めるのに対し、内部領域では、1個の解を求めるだけでよい。さらに、境界領域では、通常、2通りの解が必要とされる訳だが、2つの消波境界接合部で4通り、3つの消波境界接合部で8通りの解が必要とされ、それに応じて分割することも可能である。(Fig. 3.1b 参照) しかしながら、領域の細分化を行うと、記憶すべき変数の数は少なくてすむ反面、スカラ処理される部分が多くなり、計算時間は長くなってしまふ。

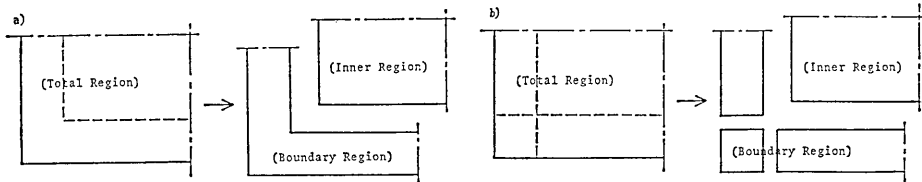


Fig. 3.1. Division of FEM model into two parts, inner and boundary region.

さて、領域を分割した場合に、その分割面での境界条件は、変位と応力の連続性が満たされればよいのだが、ここでは、陽的解法を用いるので簡単な条件で実行できる。即ち、分割した双方に、有限要素を共用させておき、節点変位を共通にすれば、応力の連続性も満たされる。1次元モデルを用いて図示すれば、Fig. 3.2 のようになり、 \overline{AB} が共有されている。

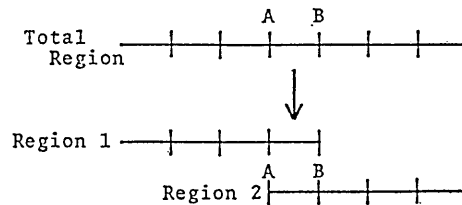


Fig. 3.2. Connection of divided regions.

b) 2章で示した‘一定応力’、‘一定速度’という境界条件について考えてみる。境界面上で応力が一定であるという条件は、一定の分布表面力が作用する条件に等しい。即ち、(3.1.1) 式の右辺を次のように分解して考えればよい。

$$\{R\} = \{F\} + \{R\}_s \quad (3.2.1)$$

ここに、 $\{F\}$ は集中外力ベクトル、 $\{R\}_s$ は表面力ベクトルを表す。

また一定速度の条件は、Runge-Kutta 法を用いる場合には、実に簡単に処理できる。式で表すと次式となる。

$$\{\Delta v\}^D = 0 \quad (3.2.2)$$

但し、 $\{\Delta v\}^D$ は境界上の該当する速度増分である。

さて初期条件を更新する際に、境界条件も更新される訳であるが実行上は、表面力ベクトルを変更するだけでよい。2N 個の解を重ね合わせる場合には、

$$\{R\}_s \leftarrow \frac{1}{2} \{R\}_s + \frac{1}{2N} \sum_{k=1}^N \{R\}_s^k \quad (3.2.3)$$

とすればよい。但し $\{R\}_s^k$ は、一定速度の条件で解いた境界に作用している表面力ベクトルであり

$$\{R\}_s^k = [C] \{v\}_s + [K] \{u\}_s \quad (3.2.4)$$

で与えられる。 $\{ \}_s$ は、表面力に関連する自由度を示す。

また初期条件の更新は

$$\{u\}_b \leftarrow \frac{1}{2N} \sum_{k=1}^{2N} \{u\}_b^k \quad (3.2.5)$$

$$\{v\}_b \leftarrow \frac{1}{2N} \sum_{k=1}^{2N} \{v\}_b^k$$

で与えられる。 $\{ \}_b$ は、境界領域内の自由度を示す。

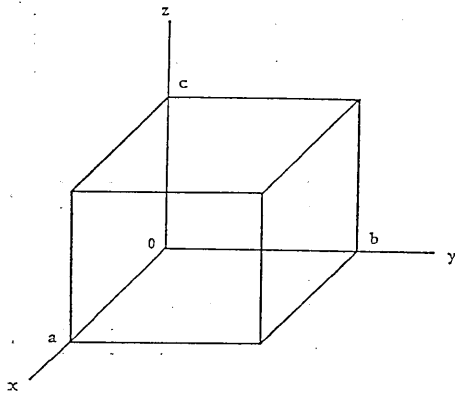


Fig. 3.3. A rectangular parallelepiped model.

c) 2-3 で、Cundall の消波境界では 3 つの境界の影響のみを考えればよいことを述べた。それでは、実際に 6 つの平面に囲まれた直方体領域に消波境界を適用することを考えてみる。(Fig. 3.3 参照) 直方体頂点において接続する平面のみが影響し合い、他の境界は独立であることを考えれば、Table 3.1 に示す 8 通りの解で十分である。この結果を利用すれば、複雑な境界条件の組み合わせを系統的に処理していける。また 2 次元 (長方形領域) の場合には、3 次元の表記のうち無関係な項をおとせば、4 通りの境界条件が得られる。

3-3 有限要素法の解析精度

有限要素法解析において、要素サイズの問題は重要なものであり、特に、動的問題においては、振幅の減衰や波動の分散となって現れる。KUHLEMEYER & LYSMER (1973) や SMITH (1975) は、計算結果を解析することにより、1 波長当たり 8 要素から 12 要素以上あれば、精度的に満足できることを述べている。ここでは、ラプラシアン精度という観点より、有限要素法における要素サイズの影響について考えてみる。

a) 通常、有限要素法を用いて波動方程式を解く場合、空間領域を有限要素を用いて分割し、各時刻 (各周波数) での平衡方程式を解く方法を用いている。そこで、有限要素サイズの影響は、波動方程式の空間微分を含む項、即ちラプラシアンに現れると考えられ

Table 3.1. Boundary conditions for three dimensional rectangular parallelepiped region

Boundary	$x=0$	$y=0$	$z=0$	$x=a$	$y=b$	$z=c$
Solution—1	N	N	N	N	N	N
2	N	N	D	N	N	D
3	N	D	N	N	D	N
4	N	D	D	N	D	D
5	D	N	N	D	N	N
6	D	N	D	D	N	D
7	D	D	N	D	D	N
8	D	D	D	D	D	D

where N : Neumann condition ($\frac{\partial u}{\partial n} = \text{const.}$)

D : Dirichlet condition ($u = \text{const.}$)

る。

2次元波動方程式を用いて、無限平面をある方向に進行する平面波を考えると

$$u(t, x, y) = \exp(i\xi x + i\eta y - i\omega t) \quad (3.3.1)$$

$$(\xi^2 + \eta^2 = \omega^2/C^2)$$

連続な領域を正方形メッシュで分割し (Fig. 3, 4 参照), 線形アイソパラメトリック要素を用いてラプラシアンを求めてみると

$$L_1(u)_{i,j} = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)_{i,j}$$

$$= \frac{1}{3h^2} (-8u_{i,j} + u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1} + u_{i+1,j+1} + u_{i-1,j+1} + u_{i+1,j-1} + u_{i-1,j-1}) \quad (3.3.2)$$

但し, $u_{i,j} = u(x, y) = u(ih, jh)$ 等

(3.3.1) 式を代入すると

$$L_1(u)_{i,j} = -\frac{4u_{i,j}}{3h^2} \left\{ \sin^2\left(\frac{\xi h}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{\eta h}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{(\xi + \eta)h}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{(\xi - \eta)h}{2}\right) \right\} \quad (3.3.3)$$

となる。一方で $h \rightarrow 0$ にした場合

$$L_0(u)_{i,j} = \lim_{h \rightarrow 0} L_1(u)_{i,j} = -(\xi^2 + \eta^2) \cdot u_{i,j} \quad (3.3.4)$$

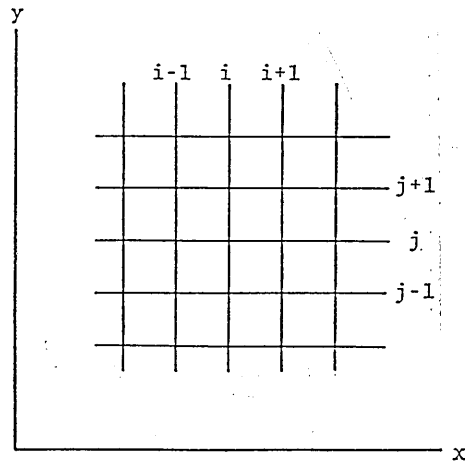


Fig. 3.4. Division of two dimensional region with square meshes.

となり、 (L_1/L_0) は、離散化による精度を示すと考えられる。そこで (L_1/L_0) を波長 L と要素サイズ h の比をパラメータとして書き改めると

$$\frac{L_1}{L_0} = \frac{r^2}{3\pi^2} \left\{ \sin^2\left(\frac{\pi \cos \theta}{r}\right) + \sin^2\left(\frac{\pi \sin \theta}{r}\right) + \sin^2\left(\frac{\pi(\cos \theta + \sin \theta)}{r}\right) + \sin^2\left(\frac{\pi(\cos \theta - \sin \theta)}{r}\right) \right\} \quad (3.3.5)$$

但し、 $r=L/h$ 、 $\eta/\xi=\tan \theta$ である。

Fig. 3.5 は $\theta=0, \pi/8, \pi/4$ (rad) について図示したものである。 $\theta=\pi/4$ (対角線方向) の場合に最も精度が悪くなるが、従来から言われている 1 波長 10 要素の場合には、95% 程度の精度を有する。また、任意の入射角に対して 99% 程度の精度が欲しい場合には、波長当たり 20 要素であればよい。

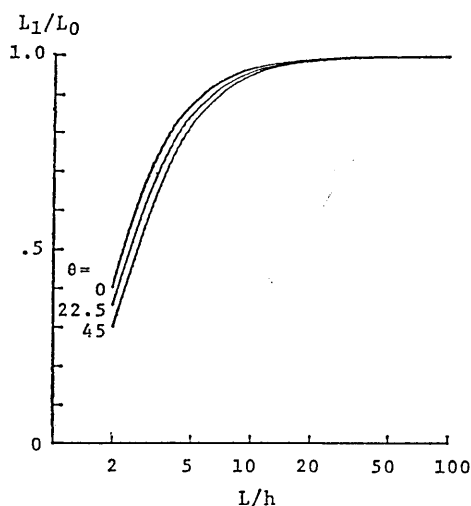


Fig. 3.5. Computational error of "Laplacian" in case of scalar elastic wave.

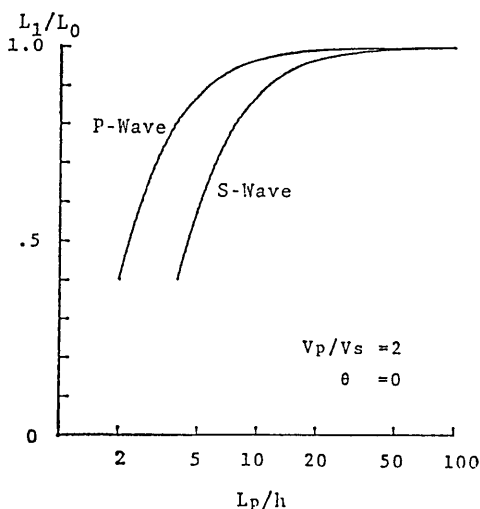


Fig. 3.6. Computational error of "Laplacian" in case of vector elastic wave.

b) さて弾性体のように、複数の弾性波速度が存在する場合について考えてみる。計算の実行に際しては、ポテンシャルの存在を仮定していない訳であるが、ポテンシャルを仮定すれば、a) の議論がそのまま成り立つ。即ち、ある周期の波動を考えると、 P 波、 S 波の波長 (それぞれ L_P, L_S) は、速度 V_P, V_S と

$$\frac{L_P}{L_S} = \frac{V_P}{V_S} \quad (3.3.6)$$

の関係にあることを用いればよい。ポテンシャルに関するラブラシアンが十分な精度を有すれば、変位についての精度も十分と考えられる。

Fig. 3.6 は、 $(V_P/V_S)=2$ 、 $\theta=0$ の場合を示したものであるが波長の短い S 波について、波長当たり 10 要素の条件が満たされれば、 P 波についても十分な精度が得られるこ

とがわかる。

c) 以上まとめてみると、簡単な目安として、要素の対角長を d として

$$\frac{L_s}{d} = \frac{V_s T}{d} > 10 \quad (3.3.7)$$

となるように要素サイズを決めればよいであろう。また、逆にこのように要素サイズを決めれば、 $V_s/(10d)$ までの周波数は、精度が保証されるであろう。

3-4 備考

a) 本研究では、要素剛性マトリクスの計算は全て線形アイソパラメトリック要素を用いて行なう。2次元問題では4節点、3次元問題では8節点の要素を用いる。アイソパラメトリック要素の詳細は成書 BATHE & WILSON (1976) に譲るが、2次元問題で三角形要素、3次元問題では4節点から7節点立体をも同一のプログラムで計算できる利点がある。さらに高次要素の利用も、当然考えるべきであるが、ここでは用いてはいない。また 3-3 における考察は、線形アイソパラメトリック要素に対するものであり、高次要素を用いる場合には、同様の計算をしておく必要がある。

b) Runge-Kutta 法における時間刻み Δt の影響も重要な問題である。しかし、要素サイズを十分小さくすれば、1自由度系の振動と見なせるので、 $(T/\Delta t) > 10$ ならば、十分な精度が得られるであろう。但し、 T は波動の周期である。

しかし、実際には、時間刻み Δt も、要素サイズも有限であり、両者が相互に影響を及ぼすであろうが、ここではその考察は省略する。今後の検討を要する問題である。

4. 消波境界の適用例

この章では、簡単な有限要素モデルを制作して、消波境界を適用してみる。ここでは、半無限弾性体を考え、その自由表面から加振する問題を考える。

4-1 2次元弾性体問題

2次元弾性体中の波動には、 SH 波の問題と、 P 波、 SV 波の問題とがあるが、両者に消波境界を適用してみる。

a) 解析モデルは Fig. 4.1 に示すように、一辺が自由表面、他の三辺が消波境界であるような長方形領域を、正方形メッシュで分割したモデルを考える。消波境界を適用する場合には、3-2 で述べたように反射波の存在しない内部領域と、存在する境界領域に分けられる。ここでは、境界領域をさらに分割し、解くべき

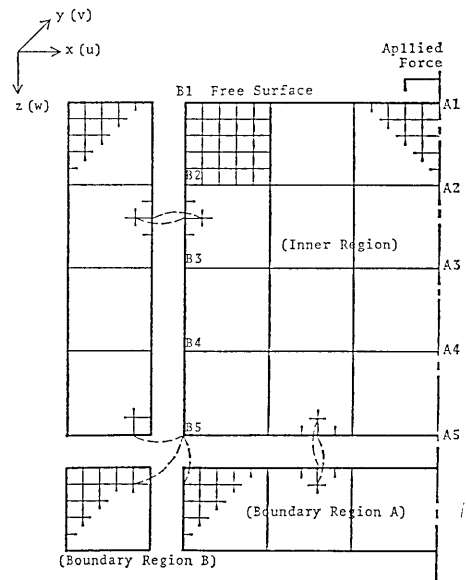


Fig. 4.1. FEM model used for an impulsive excitation on free surface of two dimensional elastic half space.

自由度の数を減らしている．すなわち，内部領域では1通り，境界領域Aでは2通り，境界領域Bでは4通りの自由度を準備しておけばよい．また，内部領域と境界領域との境界は，3-2に述べたように，境界に沿って1要素を共有させることにより，変位と応力の連続性を実現している．Fig. 4.1中に点線で結ばれた節点に対応していることになる．

有限要素モデルは，内部領域は 30×20 要素，その外側に境界領域として5要素を付加したモデルとする．正方形1辺の長さを h とした時に，モデルの物性は，以下となる．

$$\frac{V_s}{h} = 70 (\text{sec}^{-1}), \quad \sigma = 0.3$$

但し， V_s はせん断波速度， σ はポアソン比である．

モデル中央部に分布荷重が作用した時に，図中に示す観測点 $A_1 \sim A_5$ ， $B_1 \sim B_5$ での変形波形を出力することにより，消波境界の効果を調べる．

b) Fig. 4.2は， y 方向にsine型の外力1波を入力した時の応答波形を示している．2次元に領域を仮定した場合， y 方向の波動は x ， z 方向と相互に影響し合うことなく伝播するので， y 方向の入力に対しては， y 方向の変位だけが得られる．図では， x ， z 方向の変位は省略している．

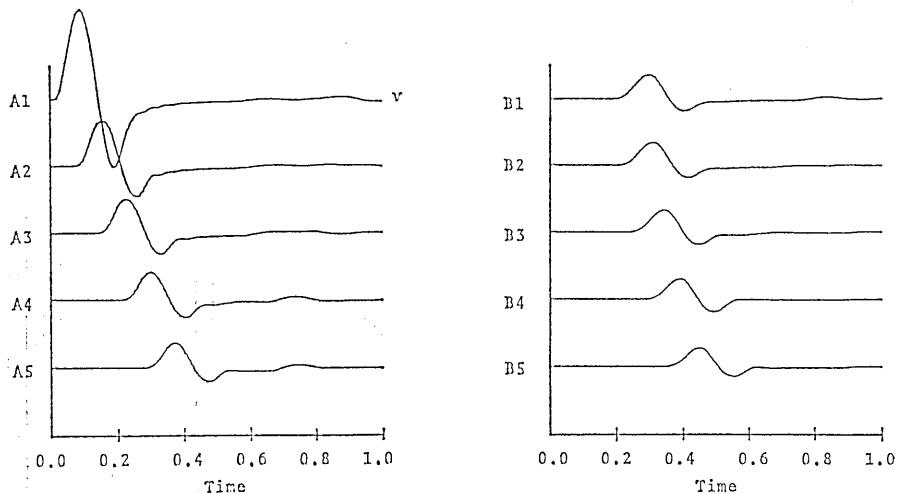


Fig. 4.2. Computed displacements due to impulsive loading of one period of sinusoidal force in Y direction on 2-D free surface shown in Fig. 4.1.

計算の条件は， $0 < t < 1$ (sec)， $\Delta t = 0.01$ (sec)であり，外力の周期は， $(T/\Delta t) = 20$ とした．

この問題の場合， SH 型の実体波が存在し，スカラ波の検証になる訳であるが，果たして，設定した境界から顕著な反射波は見られない．数値解析時の誤差により，若干の乱れは生じてはいるものの満足のいく結果が得られた．また，この結果は，差分法を用いて計算したものと，ほとんど一致している．

c) Fig. 4.3は， x 方向に入力した時の応答波形を示すが，Fig. 4.2と多少，倍率を

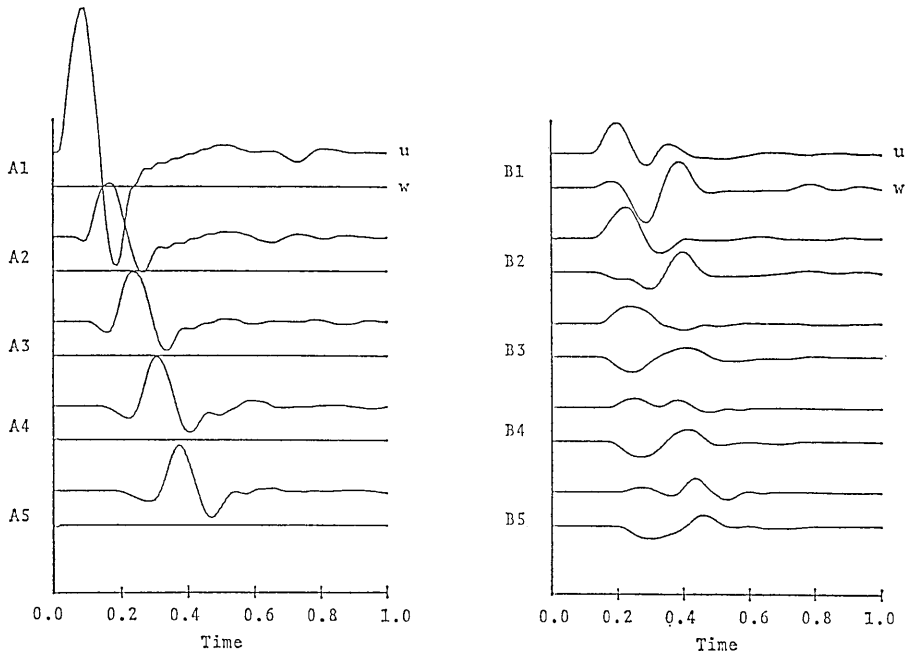


Fig. 4.3. Computed displacements due to impulsive loading in X direction with same conditions as shown in Fig. 4.1.

変えて出力させてある。2次元問題では、 x 方向と z 方向は互いに影響し合い、b)のケースに比べて多少問題は複雑となる。自由表面での境界条件より Rayleigh 波も生じてくる訳で、消波境界の効果を見るのに適当な問題である。

計算条件は、 $0 < t < 1$ (sec), $\Delta t = 0.005$ (sec), 外力の周期を $(T/\Delta t) = 40$ としている。

SH波の場合に比べて、波形の乱れは大きくなっており、反射波らしい位相も見られる。これは、2-4 a) に述べたように、複数の波動が同時に消波境界に入射した場合に、一定応力、一定速度という境界条件は、複数の波動の平均として計算されるために、反射波を完全に消波できなくなるからであろう。

Fig. 4.4 は、 z 方向に入力した場合の応答波形であり、Fig. 4.3と同様のことがいえる。Fig. 4.4の場合には、反射 Rayleigh 波らしい位相が見られ、図中の矢印 P_1 で示す。有限要素モデルの対称性のため、中心線上にある観測点 $A_1 \sim A_5$ で、上下動成分が2倍となったと考えられる。 A_1 における位相 P_1 が B_1 における位相 P_2 に相当すると考えると、この位相速度は、 $0.92 V_s$ となる。 z 方向に外力を加えた場合、自由表面に沿ってS波と Rayleigh が伝播するが、両者の位相速度が接近しているため、同時に境界に入射することになり、反射波が完全に消波されなかったと考えられる。

入力条件などの問題はあがるが、消波効果は、期待通りのものといえよう。

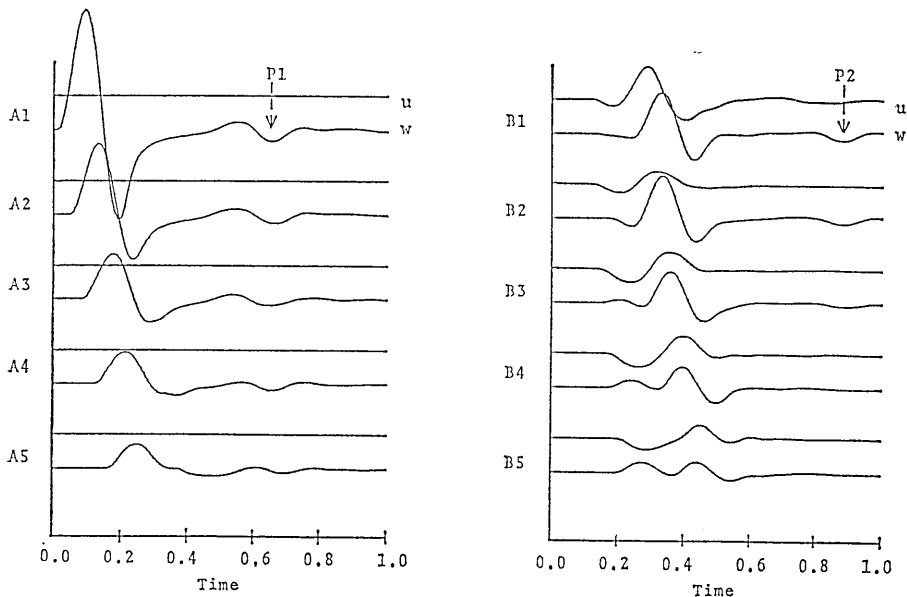


Fig. 4.4. Computed displacement responses due to impulsive loading in Z direction with the conditions as shown in Fig. 4.1.

4-2 3次元弾性体問題

4-1 において2次元領域における消波境界の効果調べたが、ここでは、それを3次元弾性体に適用した結果を示す。3次元弾性体の場合、2次元の場合に比べて自由度が飛躍的に増大するため解析モデルは大きな制約を受けることになるが、外部記憶装置を用いない程度のモデルを設定した。

a) 解析モデルは、Fig. 4.5 に示した、 $15 \times 16 \times 10 = 2400$ の立方体要素より構成される直方体領域とする。Fig. 4.1 のモデルと同様に1つの面を自由表面とし、他の5つの面消波境界面とする。ここでは、全領域を内部領域と境界領域とに分割するだけで、境界領域をさらに細分割する操作は行っていない。図中、点線で示した内側が内部領域となる。また両者の接合は、前述のように、境界に沿った1要素分を共有することにより実現している。内部領域では1通り、境界領域では8通りの自由度を設定する必要がある。

有限要素モデルの物性は、立方体の1辺を h とした時に、

$$\frac{V_s}{h} = 50 \text{ (sec}^{-1}\text{)}, \quad \sigma = 0.3$$

とした。ここに V_s はせん断波速度、 σ はポアソン比である。

図中、斜線で示した部分に等分布外力を作用させた時に、観測点 S1 から S5 での応答波形を出力してみる。

b) Fig. 4.6 は、 $0 < t < 1.125$ (sec), $\Delta t = 0.0075$ (sec), 外力として z 方向に sine 型外力1波 (周期 $T = 40 \Delta t$) を加えた時の応答波形である。波動の主要部が通過した後に、多少の揺らぎは残るものの、顕著な反射波は生じていない。Fig. 4.6 の変位波形の第一の

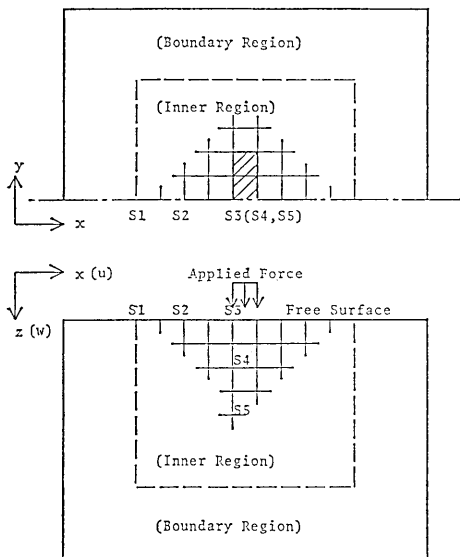


Fig. 4.5. FEM model used for an impulsive excitation on free surface of three dimensional elastic half space.

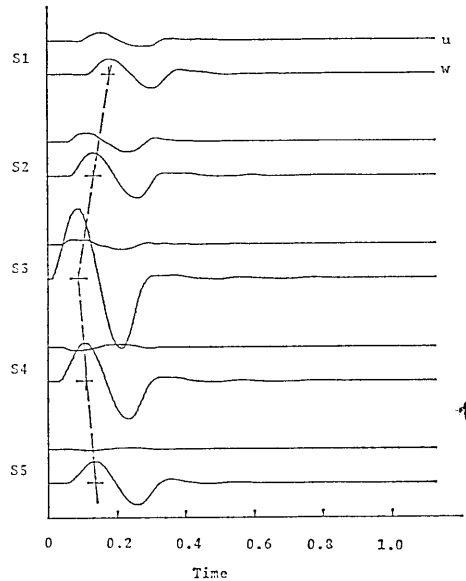


Fig. 4.6. Computed displacement responses due to impulsive loading in Z direction with the conditions as shown in Fig. 4.5.

ピークより走時を求め、位相速度に換算してみると、 $S3 \rightarrow S1$ では $0.92 V_S$ 、 $S3 \rightarrow S5$ では、 $1.78 V_S$ ($0.95 V_P$ 、但し V_P は P 波速度) が得られる。観測点 $S3$ から $S1$ にかけて、Rayleigh 波に類似した波動が伝播し、 $S3$ から $S5$ へは、 P 波に近い波動が伝播すると考えられる。しかし、その解明には詳細な検討を要する。

また、3次元自由表面を加振する場合、2次元問題と比べて特徴的なことは、距離による減衰効果が非常に大きいことであり、Fig. 4.2~Fig. 4.4 と比較するとその差異は明瞭である。Fig. 4.5 のように、細長い領域を加振する場合、加振域近傍では、円筒波的性質をもつが、加振域のサイズ程度離れると、球面波的となるのであろう。尚、Fig. 4.6 では、領域の対称性より、 y 方向の変位は0となるので省略している。

以上、述べてきたように3次元問題の場合、2次元に比べてかなり複雑な波動が生じると考えられるが、この境界処理方法は、十分に適用し得ると思う。

4-3 備考

a) 境界領域の幅は、4ないし5要素程度は必要である。境界領域内の自由度は複数個必要とされ、境界領域の幅は狭い程、少ない自由度で済む訳であるが、4ないし5要素よりも少ない場合には、精度的に不十分なものとなる。取り扱う最小波長が、波長当たり10要素程度であることを考えると、その半波長分の距離はとった方がよいことになる。また、5要素以上境界領域としてとっても精度的には、大差はない。

b) 3次元弾性体を有限要素法で解くことを考えると、その自由度の多さから、計算機

の実行容量の制約を大きくうける。そこで、拡張記憶装置の使用が必要とされるが、その場合、境界領域を細分割することは、読み書きを面倒にする。簡単な手順で拡張記憶装置を使用することができるが、ここでは用いていない。

尚、S810 を使用すれば、拡張記憶装置を用いることなく、C ジョブまで 8MB, D ジョブ以上で 16MB 使用でき、単精度計算でそれぞれ、2M words, 4M words 配列をとれる。また Fig. 4.6 に示した結果を得るのに、cpu 時間は、150 (秒) であった。

5. 応答計算への応用 (不規則構造の影響)

有限要素法は、境界条件の扱い易さから、地盤や地盤一構造物系のような連続体の地震応答計算に用いられており、その際に、人為的に設定する境界での処理方法も、数多く提案されてきた。ここでは、前章で計算例を示した Cundall の境界処理手法を応答計算に応用することを考える。

5-1 解析方法

a) 通常、地震応答計算をする構造は、Fig. 5.1 に示すような、不規則な地盤構造、或いは、それに人工構造物を付加したものである。この領域を“不規則領域”と呼ぶことにする。ここで、解析すべき不規則領域の周囲は、次元を1つ落とした解析が可能な領域であると仮定する。即ち、2次元問題であるならば、その外側の領域ではそれぞれ1次元解析が可能であり(水平多層構造を意味する)。3次元問題であれば、その周囲の領域は、それぞれ2次元解析が可能である構造を仮定する訳である。

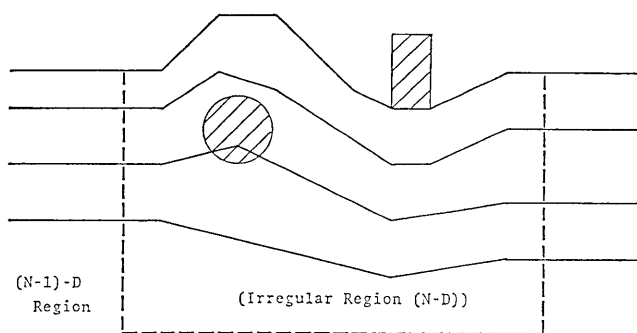


Fig. 5.1. Model of ground and structures with actual topographical and geological properties.

今、側方境界上での波動を考えてみると、不規則領域を N 次元 ($N=2, 3$) とした場合、境界上の変位 u_b^N は、

$$u_b^N = u_b^{N-1} + f^N \quad (5.1.1)$$

と分解できる。但し、 u_b^{N-1} は、境界上を伝播する波動成分であり、 f^N は境界を通過して外側へ逸散していく波動成分である。さて、 u_b^{N-1} なる波動は地震動を鉛直下方より垂直に入射する波と仮定した場合、上述の仮定より、不規則領域とは独立に求めることがで

きるので、逸散波 f^N が識別できることになる。そして、この f^N を消波処理すればよい。

陽的解法を用いる場合には、この過程は極めて簡単なものとなり、以下、2次元の場合を例にとり説明する (Fig. 5.2 参照、但し、斜線を付けた領域は互いに重り合っている)。

- 1) $u_b^0(t)$, $u_b^1(t)$, $f^2(t)$ が既知であれば、 $u_{b2}^2(t+\Delta t)$, $u_b^1(t+\Delta t)$, $f_2^2(t+\Delta t)$ が求められる。(赤尾・伯野, 1983 参考文献参照のこと)
- 2) 未知の値 $u_{b1}^2(t+\Delta t)$, $f_1^2(t+\Delta t)$ は (5.1.1) 式より、

$$\begin{aligned} u_{b1}^2(t+\Delta t) &= u_b^1(t+\Delta t) + f_2^2(t+\Delta t) \\ f_1^2(t+\Delta t) &= u_{b2}^2(t+\Delta t) - u_b^1(t+\Delta t) \end{aligned} \quad (5.1.2)$$

で与えられ、 $u_b^0(t+\Delta t)$, $u_b^1(t+\Delta t)$, $f^2(t+\Delta t)$ が全て求まる。

3次元問題の場合も同様にして、式 (5.1.1) を用いて計算できるが、側方境界の接合部において1次元問題を解く必要がある。その場合には、式 (5.1.1) を

$$\begin{aligned} u_b^3 &= u_b^1 + f^2 + f^3 \\ u_b^2 &= u_b^1 + f^2 \end{aligned} \quad (5.1.3)$$

として、境界上の変位を分解して考えればよい。しかし、不規則領域の周囲が水平多層構造であるならば、2次元問題の部分は省略され、

$$u_b^3 = u_b^1 + f^3 \quad (5.1.4)$$

となり、1次元問題を考えるだけで済む。

こうした処理を経ることにより、消波境界の適用が可能になる。

b) 従来、有限要素法による地震応答計算では、モデルを剛基盤上に設定し、相対座標系を用いて、慣性力の形で地震動の 입력がされることが多かった。しかし、この入力方法では、地震波の進行性は無視され、不規則構造により生じる逸散波の処理もなされないことになる。実際、十分剛体と見なせる層より上をモデル化すれば、良い近似解が得られるのであるが、そうでない場合には、解析結果は無意味なものとなるであろう。ここでは、均質な半無限弾性体上にモデルを設定するとして考察を進める。

さて、入力地震動は、鉛直下方より上方に向けて伝播する1次元波動と考えられる。即ち、2次元、3次元問題の場合には、平面波としてモデルに输入する。ここで、入力地震動を、モデル中の点を鉛直上方に伝播する波動と定義しておく。

1次元非斉次波動方程式

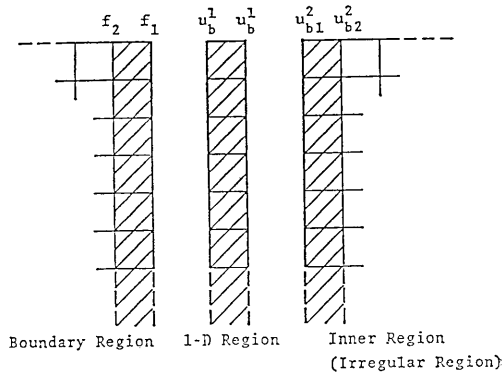


Fig. 5.2. Illustration for processes of nonreflecting boundary.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(t, x), \quad -\infty < x < \infty, t > 0 \quad (5.1.5)$$

を, 初期条件

$$u(0, x) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = 0 \quad (5.1.6)$$

のもとに解くと, Duhamel の原理により

$$u(t, x) = \frac{1}{2c} \int_0^t \left[\int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)} f(\tau, \xi) d\xi \right] d\tau \quad (5.1.7)$$

となる. ここで,

$$f(t, x) = P(t) \cdot \delta(x - x_0) \quad (5.1.8)$$

とおくと

$$u(t, x) = \frac{1}{2c} \int_0^{t - (|x - x_0|/c)} P(\tau) d\tau \quad (5.1.9)$$

と変形できる. 但し, $P(t < 0) = 0$, δ は Dirac のデルタ関数である. (積分範囲等は Fig. 5.3 参照) 式 (5.1.9) より,

$$v(t, x) = \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2c} P\left(t - \frac{|x - x_0|}{c}\right) \quad (5.1.10)$$

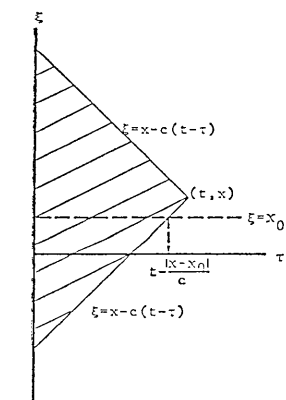


Fig. 5.3. Affected bound for Duhamel integration.

$x = x_0$ において, 波動 $v_c(t)$ を入力する場合,

$$P(t) = 2c \cdot v_c(t) \quad (5.1.11)$$

とすればよい.

通常, 地震応答計算にはせん断波を入力することが多いが, その場合には,

$$P(t) = 2\sqrt{\mu/\rho} \cdot v_c(t) \quad (5.1.12)$$

となる. ここに ρ は密度, μ は剛性率である.

この場合, 鉛直下方にも v_c なる波動が伝播するが, それは境界において逸散波とともに消波処理されるので問題はない.

c) 入力地震動に実際の強震記録を用いる場合には, 1次元波動を仮定しているので, 任意の深さでの波動を重複反射理論を用いて計算できる. この際に, 鉛直上方に向かう波動を入力することに注意しなくてはならない. 即ち, 一般解を

$$u(t, x) = E \exp\left[i\omega\left(t + \frac{x}{c}\right)\right] + F \exp\left[i\omega\left(t - \frac{x}{c}\right)\right] \quad (5.1.13)$$

と表した時に, 入力地震動 v_c は

$$v_c(t) = i\omega E \exp\left[i\omega\left(t + \frac{x_0}{c}\right)\right] \quad (5.1.14)$$

で与えられる. 但し, E, F はそれぞれ上昇波, 下降波の振幅であり, ω は角周波数, c

は位相速度である。

尚、モデル化する地盤のかなり深所に、剛と見なせる基盤が存在する場合には、入力地震動にその影響を含めておけばよい。その時、剛基盤面での逸散波の反射は、無視できる程度であるとする。

5-2 応用例 I—崖地形

地震時に、崖縁では大きな地震動が発生することが知られており、崖地形は、不規則構造の影響の問題として、しばしば、議論されている。(座間, 1982) ここでは、5-1 に示した解析方法を用いることにより、有限の領域で任意の時間長だけ応答計算が可能なることを示し、崖地の増幅特性について若干の考察をしてみる。

a) 半無限弾性体の表面に段差があり、 45° の斜面で接続している構造について考えてみる。有限要素モデルは、Fig. 5.4 に示すように、不規則領域をモデル化する。また、図に示したモデルの外側に、幅5メッシュの境界領域を設定する。媒質は均質であるとし、物性は以下の通りとする。

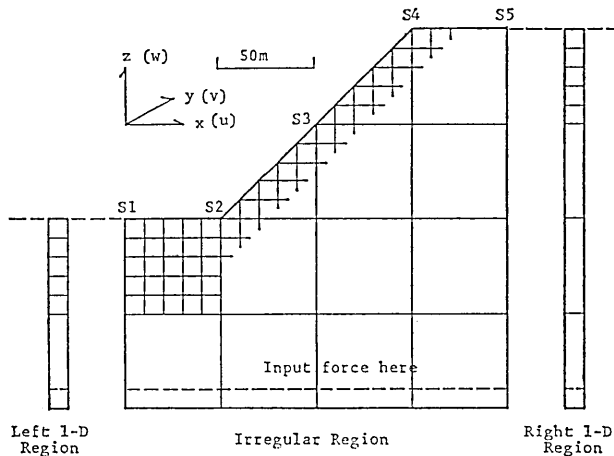


Fig. 5.4. FEM model for "cliff". Boundary regions are omitted in the illustration.

$$V_s = 700 \text{ (m/s)}, \quad \sigma = 0.3$$

但し、 V_s は、せん断波速度、 σ はポアソン比である。

ところで、要素サイズは、ほとんど $10 \times 10 \text{ (m}^2\text{)}$ であるので式 (3.3.7) より、5Hz までは精度の点で問題はなからう。

さて、5-1 でも述べたように、地表付近で、実体波は、ほぼ鉛直に入射すると考えられ、また、強震動は主に S 波であることから、Fig. 5.4 中に点線で示した部分より、集中外力として、せん断波を入力する。

b) Fig. 5.5(a) は、SH 波を入射した時の応答変位を示す。前にも述べたように、SH 波入射に対しては、加振方向の自由度だけが応答するので、 y 方向の変位波形のみを示し

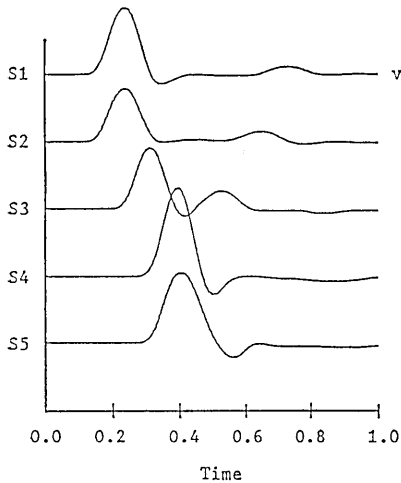


Fig. 5.5(a). Computed displacement responses of the cliff due to impulsive loading applied in Y direction at the bottom in Fig. 5.4.

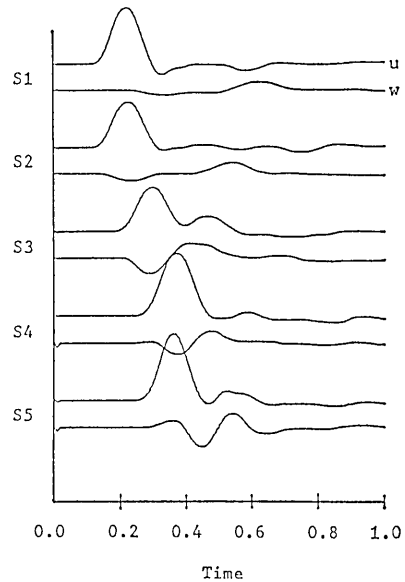


Fig. 5.5(b). Responses due to impulsive loading in X direction in Fig. 5.4.

た。また、ここでは入力は、5 Hz の sine 型 1 波とし、時間刻み $\Delta t=1/100$ (sec) として計算を行った。

図中、S1~S5 は、Fig. 5.4 中に示す観測点であるが、そこでの応答波形より、崖下 (S2) では地震動は抑制され、崖縁 (S4) では増幅されているのがわかる。また、崖上の平坦部 (S5) では、周期の伸びた応答波形が得られている。

Fig. 5.5(b) は、SV 波を入射した時の応答変位波形を示すが、この場合、 x 方向の入力に対して、 z 方向の自由度も応答する。入力は、Fig. 5.5(a) と同じであるが、 $\Delta t=1/200$ であり、倍率も多少、違えて描いてある。

SV 波入射の場合も、SH 波の場合と同様の傾向がみられるが、2 成分が応答するため、SH 波入射よりも複雑な挙動を示す。SV 波入射の応答については、e) で考察するが、以上示した 2 例のように、モデル化した領域を有効に利用して、境界からの反射波の影響のない応答計算を行えることが示された。しかし、第 4 章で述べたように、場合によっては、反射波が消波しきれず、内部領域に乱れを生じることがあるが、Fig. 5.5 の両図に見る限り、数値解析時の誤差と同程度といえる。

e) SV 波入射の場合について、斜面の傾きが 45° (モデル 1)、 63° (モデル 2)、 90° (モデル 3) の 3 ケースについて、増幅作用の違いを比べてみる。崖の高さや、媒質の特性は、Fig. 5.4 に示したモデルと等しいとする。また、要素サイズも、ほぼ 10×10 (m²) となるように領域を分割する。

Fig. 5.6 a)~c) に、モデル 1~3 の応答変位波形を示すが、崖縁では、傾きが増すにつれて、振幅も大きくなり、特に上下動成分に顕著である。また、斜面を伝わって崖下へ伝

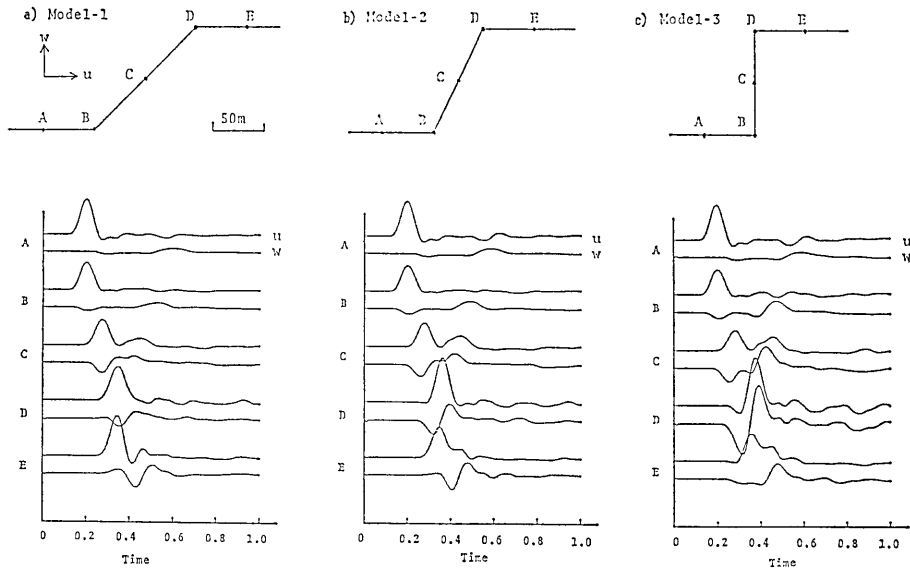


Fig. 5.6. Comparison of responses of the cliff with different angles of slope.

わる波動も大きくなるが、一方で、崖上の平坦部での振動は、傾きが増すにつれて小さくなる。

さて、以上時間領域でみてきた現象を、周波数領域で調べてみる。その前に、ベクトル時系列のフーリエ変換について考える。2次元ベクトル $(u(t), w(t))$ を複素数で表すと、

$$z(t) = u(t) + iw(t) \quad (5.2.1)$$

一般に、複素数のフーリエ変換も、 σ を正值のみをとる角周波数とすると、

$$Z(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} z(t)e^{-i\omega t} dt = \begin{cases} Z_+(\sigma) & (\sigma = \omega, \omega > 0) \\ Z_-(\sigma) & (\sigma = -\omega, \omega < 0) \end{cases} \quad (5.2.2)$$

で与えられる。逆の変換は

$$z(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} [Z_+(\sigma)e^{i\sigma t} + Z_-(\sigma)e^{-i\sigma t}] d\sigma \quad (5.2.3)$$

となり、実部と虚数部に分ければ、

$$u(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} [W_+ \cos(\sigma t + \theta_+) + W_- \cos(\sigma t - \theta_-)] d\sigma \quad (5.2.4)$$

$$w(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} [W_+ \sin(\sigma t + \theta_+) - W_- \sin(\sigma t - \theta_-)] d\sigma$$

但し、

$$Z_+ = |Z_+|e^{i\theta_+} = W_+e^{i\theta_+}, \quad Z_- = W_-e^{i\theta_-}$$

ここで、括弧内に注目すれば、 $z(t)$ は、複素平面における傾角 $\phi = (\theta_+ + \theta_-)/2$ 、長径 $(W_+ + W_-)$ 、短径 $(|W_+ - W_-|)$ の楕円運動を、各周波数について重ね合わせたものである事がわかる。(日野, 1977)

さて、不規則構造による増幅度は、その構造が無い場合のスペクトルとの比をとることにより求められる。不規則構造の応答はベクトル時系列で与えられるので、増幅度を次の2つのパラメータで捉えてみる。

$$i) \quad A_r(\sigma) = \frac{(W_+ + W_-)_{\text{resp}}}{(2W_1)_{\text{free}}} \quad (5.2.5)$$

$$ii) \quad \phi(\sigma) = \frac{\theta_+ + \theta_-}{2}$$

但し、 $()_{\text{resp}}$ は、応答フーリエ振幅の楕円長径、 $()_{\text{free}}$ は、1次元応答の自由表面でのフーリエ振幅を2倍したものである。

ここでは、特徴ある振動が予想される斜面の中腹の点Cと、崖縁の点Dについて調べてみる。Fig. 5.7(a) は、観測点Cについて上述の ' A_r ' と ' ϕ ' を求めたものである。周波数軸は、崖の高さ (H) を、せん断波の波長 (L_s) で除した変数で表してある。また、Fig. 5.7(b) は同様に、観測点Dについての A_r , ϕ を示している。

Fig. 5.7 より、斜面の中腹では、振幅は、全般に抑制される傾向にあるが、斜面の傾きが大きくなると、かなりの上下動が生ずるのがわかる。一方、崖縁の振動は、斜面の傾きにより、大きく異なるが、全般に増幅される傾向にある。特に、 $(H/L_s)=0.2$ 付近と、 0.8 付近は、3ケースともピークを示し、さらに 90° の場合には、 0.5 付近にもピークを

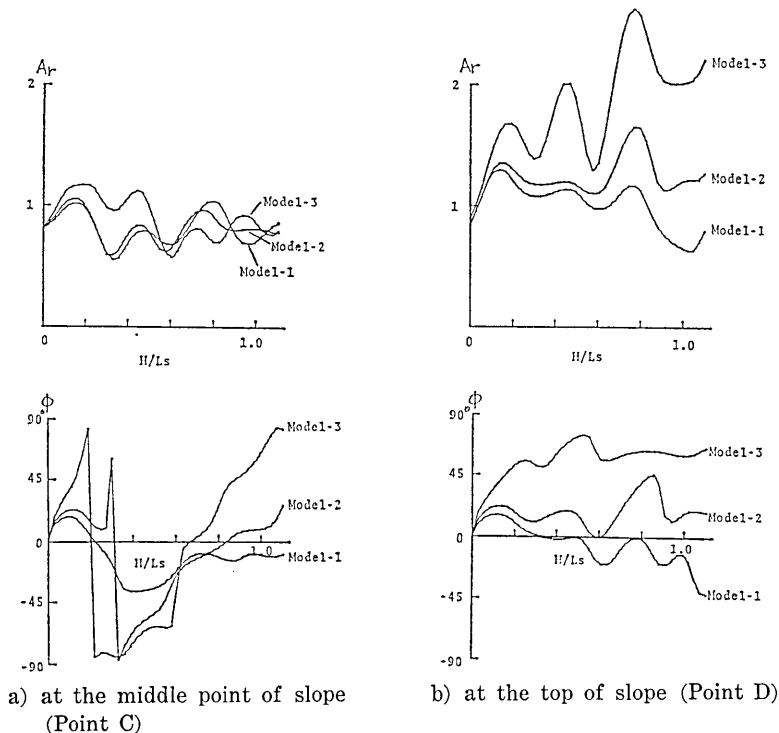


Fig. 5.7. Fourier spectra of responses of the cliff.

もっている。φについては、モデル1と2については、 (H/L_s) が0.5までは、ほぼ 0° に近いが、それよりも高周波数になると、複雑な動きをする。モデル3については、周波数に関係なく $50^\circ \sim 70^\circ$ を示している。このことは、非常に大きな上下動が生ずることを意味する。

以上、見てきたように、自由表面の幾何学的不規則性のみによっても、大きく増幅される可能性のあることがわかった。実際に存在する崖地形などの不規則構造は、かなり複雑なモデルを設定する必要があるが、本報で示した解析手法を用いることにより、ある程度までは、詳細な地盤の増幅特性が得られると考えられる。

5-3 応用例 II—レンズ状表面層

5-2 では、自由表面の不規則性について、2次元問題の解析例を示したが、ここでは、地下構造の3次元的不規則性の影響について調べてみる。有限要素法を3次元構造に適用して応答計算をした例としては、MEJIA ら (1982) によるアースダムの動的解析の研究などが挙げられるが、そこで用いられているプログラム“FLUSH”は、剛基盤上に解析モデルを設定する方法をとっている。4-2 で解析例を示した消波境界を適用して、簡単な解析モデルについて3次元応答計算をしてみる。

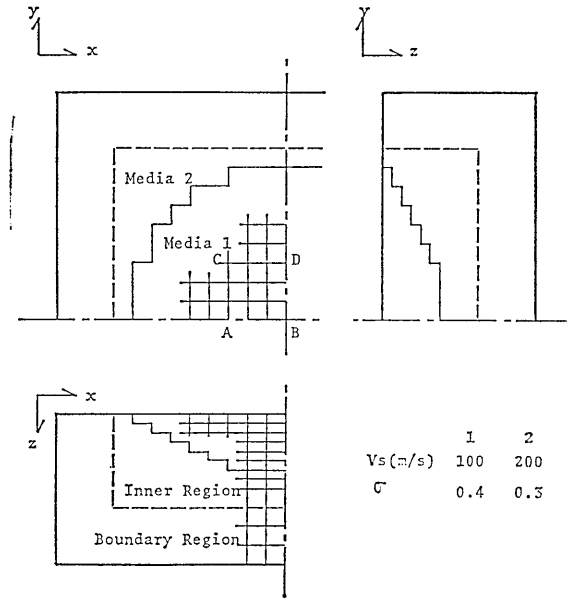


Fig 5.8. Three dimensional FEM model of ground surface layer with soft deposit like a lense.

a) 解析モデルとして、レンズ状堆積層を考え、それを内部領域に含むように、Fig. 5.8 のように有限要素モデルを設定する。x 方向に入力するとし、構造の対称性より、モデル化は半分の領域について行ない、 $24 \times 12 \times 12 = 3456$ 要素の有限要素モデルとする。表面層と下層の物性は、図中に示すが、両者の境界面は簡単のため階段状に近似している。要

素サイズの数倍程度の短い波長に対しては、その影響が現れるが、要素サイズの10倍以上の波長に対しては、階段状に近似した影響は小さいと考えられる。尚、図中点線の内側が内部領域である。

この問題の場合、不規則領域の周囲は、1次元問題となるので、(5.1.4)式を用いて、逸散波の識別を行なう。また、減衰はないと仮定する。

b) 5-1 で述べたように、任意の地震動を入力することが可能な訳であるが、ここでは、簡単のために 3 Hz の sine 波を1波だけ境界底部に加えて、自由表面での応答速度を調べてみる。観測点は、Fig. 5.8 中に示した A, B, C, D の4点であり、そこでの速度

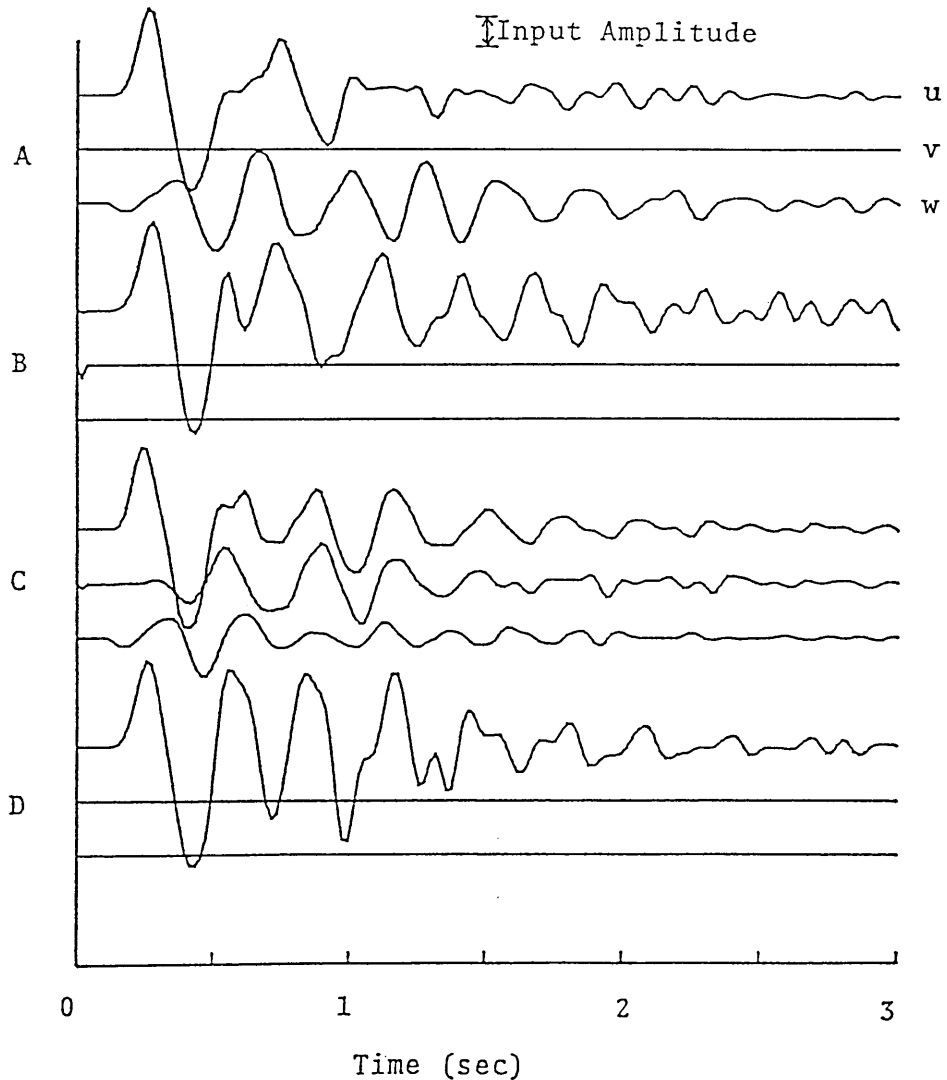


Fig. 5.9. Computed velocity response of soft surface layer shown in Fig. 5.8 with impulsive input at the bottom (3-D).

波形を Fig. 5.9 に示す。但し、時間刻み $\Delta t=1/200$ (sec) とし、3 秒間の応答を求めた。

Fig. 5.9 を見ると、表面層内で、反射や屈折が繰り返されて、複雑な波動現象が生成されているのがわかる。表面層と下層の物性が大きく違っているため、軟弱な表面層内に波動が溜まり、長時間大振幅の振動が継続している。特に、対称面上の観測点で、それは顕著であり、D 点では入力振幅の 3~4 倍もの振動が、約 4 波も続いている。

c) さて、モデル中の観測点 B では、対称性により、入力方向の自由度だけが応答するが、この点における周波数応答を求めてみると Fig. 5.10 のようになる。同図中に点線で 1 次元で地下構造を近似した場合の周波数応答を示したが、3 次元的不規則性の影響が大きいのがわかる。1 次元で近似した場合には、4 倍であるピークが、3 次元的影響により倍以上の応答を示すことがわかる。また、ピークを与える周波数も大分違った位置になる。

一般に、地盤などは 3 次元的不規則性をもつと考えられるが、その影響が特に顕著と予想される場合には、3 次元モデルを用いて応答計算をする必要がある。

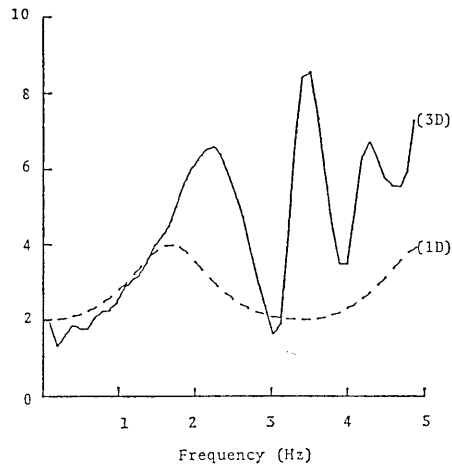


Fig. 5.10. Comparison of dynamic amplification factor of ground surface (at Point B) between three dimensional and one dimensional analysis.

5-4 備考

a) 5-2, 5-3 では極めて簡単なモデルを用いて応答解析例を示したが、実際の地盤構造を解析するには、かなり複雑な有限要素モデルをつくる必要がある。有限要素法の場合、連続体を分割するのに、直交メッシュである必要はなく、任意の四辺形、或いは六面体でよいのであるが、モデルの入力データ作製の困難さから直交メッシュを用いることが少なくない。有限要素法の利点を活かすには、要素分割を自動化し、計算機に有限要素モデルをつくらせる必要がある。

b) 地震動の入力の問題で、斜め入射の問題があるが、鉛直に近い角度で入射する場合には、モデルへの入力の際に位相差をもたせることで、簡単に実行できる。しかし、鉛直から離れるに従い、側方から入力する波動が無視できなくなるため、別途入力方法を考えなくてはならない。

6. 終 章

a) 本研究の目的は、弾性波動の伝播問題を有限要素法を用いて解くことであった。解析領域をモデル化する際に設定する人為的境界において、特殊な境界処理をすることによ

り、その影響を排除する必要があるが、そこに研究の主眼がおかれていた。以下、その成果についてまとめてみる。

- 1) 平面境界に平面波が入射する場合、Cundall らの提案した手法に従い、2種類の境界条件で解いた解の平均をとることにより、反射波を消波できる。このことは、波動が境界を透過したことを意味しており、有限の領域で無限遠方へ伝播する波動を処理できる。
- 2) 2つ以上の平面境界に平面波が入射する場合には、それぞれの2種類の境界条件をすべて組み合わせて解を求める。それらの平均をとればよい。3次元領域の場合には、高々、8個の解を求めればよいことになる。
- 3) 半無限弾性体の自由表面に振動源がある問題をモデル化して解析例を示したが、結果は良好であり、人為的境界からの反射波を消波できることが示された。しかし、複数の波動が同時に境界に入射する場合には、若干の反射波が残る欠点をもっている。
- 4) 有限要素法の精度については、詳細な解明には至らなかったが、従来の結果と調和する知見が得られた。即ち、波長当たり10要素以上あれば、精度的には満足できるであろう。
- 5) 応答計算のように、境界に沿って波動が伝播する場合には、消波処理すべき逸散波を識別する必要があるが、次元を落とす有限要素解析を同時に行い識別する方法を示した。この識別を経て、消波境界の適用が可能となる。
- 6) 不規則地形の応答計算の例として、崖地形とレンズ状表面層の影響について調べた。両者とも、地震時に大きな振動をすると言われているが、その定量的解析に消波境界を用いた有限要素法が有力な手段となることが示された。

b) 以上、述べてきたように、有限要素法は波動問題の有力な解析手法となり得るが、今後の研究課題として次のようなことがある。

- 1) 時空領域を離散化して数値解析を行なう場合、波動の分散や減衰の問題がでてくる。そして、精度を向上させるために有限要素数を増していっても、この問題は解決されないであろう。そこで、分散や減衰を最小にする解析手法（時間積分のアルゴリズムなど）を開発する必要がある。
- 2) 土は、歪が大きくなると強い非線形性を示すことが知られているが、これは時間依存性の現象であろう。現在は、等価線形化法を用いて多くの解析がなされているが、時間依存性の非線形現象として解くことも興味ある問題である。
- 3) 断層運動のような、不連続体の解析を、有限要素法を用いて行うのも非常に興味ある問題である。
- 4) 有限要素法解析に伴う、‘前処理’や‘後処理’の自動化は重要な問題である。特に、解析モデルの自動分割化は、必須の機能であり、入力データを作製する労力を省くために、早急に解決すべき問題であろう。

なお、本研究は、著者の一人、伯野がテーマの選択、指導に当たり、鈴木が電算プログラムの作製、解析その他実行すべてを行った。

この開発されたプログラムは、鈴木がその作製に約7か月を要したもので、後で他の研究者が再度開発するにも同程度の時間を要するであろうから、時間の節約のため、必要な

方には提供致しますのでお申し出を頂きたい。

謝 辞

本研究をまとめるに当たり、東大地震研究所嶋 悦三所長、自治省消防研究所座間信作氏、東大生産技術研究所田村重四郎教授、東大地震研究所飯田昌弘助手の方々からは種々貴重な御助言を頂いた。ここに記して感謝致します。また、本研究は、文部省自然災害科学特別研究費によって行い、計算は、東京大学大型計算機センター HITAC M200-H, M280-H 及び S-810 を用いた。

参 考 文 献

- 赤尾嘉彦・伯野元彦, 1983, 動的解析における無限境界での波動的処理, 土木学会論文報告集, No. 338, 21-29.
- BATHE, K.J. and E.L. WILSON, 1976, Numerical methods in finite element analysis, Prentice-Hall Inc.
- CUNDALL, P.A., R.R. KUNAR, P.C. CARPENTER and J. MARTI, 1978, Solution of infinite dynamic problems by finite modelling in the time domain, Proc. 2nd Int. Conf. Appl. Num. Modelling, Madrid, Spain.
- 後 保典・西方政春・長堀文子, 1983, スーパーコンピュータ "HITAC S810" による行列計算, 東京大学大型計算機センターニュース, Vol. 15, No. 11.
- 日野幹夫, 1977, スペクトル解析 (13 章), 朝倉書店.
- KUNAR, R.R. and L. RODRIGUEZ-OVEJERO, 1980, A model with non-reflecting boundaries for use in explicit soil-structure interaction analysis, *Int. J. EESD*, 8, 381-374.
- KUHLEMEYER, R.L. and J. LYSMER, 1973, Finite element method accuracy for wave propagation problems, *J. SM Div., ASCE*, 99, 421-427.
- LYSMER, J. and R.L. KUHLEMEYER, 1969, Finite dynamic model for infinite media, *J. EM Div., ASCE*, 95, 859-877.
- LYSMER, J. and G. WAAS, 1972, Shear waves in plane infinite structures. *J. EM Div., ASCE*, 98, 85-105.
- LYSMER, J., T. UDAKA, C. TSAI and H.B. SEED, 1975, FLUSH-a computer program for approximate 3-D analysis of soil structure interaction problems, Report No. EERC 75-30, Univ. of California Berkeley.
- MEJIA, L.H., H.B. SEED and J. LYSMER, 1982, Dynamic analysis of earth dams in three dimensions, *J. GT Div., ASCE*, 108, 1586-1604.
- SMITH, W., 1974, A non-reflecting plane boundary for wave propagation problems, *J. Comp. Phys.*, 15, 492-503.
- SMITH, W.D., 1975, The application of finite element analysis to body wave propagation problems, *Geophys. J. R. astr. Soc.*, 42, 747-768.
- 田村重四郎・中村 豊, 1978, 波動エネルギーの地下逸散を考慮した地盤振動の一解析方法, 生産研究, 28, 377-380.
- 座間信作, 1982, 不規則構造に対する地震波の挙動 その1, 地震研究所彙報, 57, 379-399.

*Application of the Dynamic Finite Element Method with
Non-reflecting Boundary for Three Dimensional
Wave Propagation*

Takanobu SUZUKI

Nippon Telegraph and Telephone Public Corporation

and

Motohiko HAKUNO

Earthquake Research Institute

The dynamic Finite Element Method is frequently used in analyzing wave propagation problems. In the case of infinite media or infinite half space, the presence of artificial boundaries introduces wave reflections from boundaries. The problem can be overcome by constructing a model of sufficient size that the required solution is obtained before the reflections arrive. But this is not always available, because the model size is limited by a computer storage. Lysmer et al (1969) developed a model system of dashpots at boundaries and transmitting boundary method as non-reflecting boundary. Their methods have some approximation, for example, basement layer is rigid and so on. Authors tried to solve the problem applying the Smith-Cundall's method and extended the method to the three dimensional problem. The Smith-Cundall's method is to solve the problem by superposing two types of reflected waves from Dirichlet's and Neumann's boundaries. This method is theoretically complete. The authors made clear the weak point of the method, but the influence of the weak point on the computed results is small. Therefore, the results by this method are reliable. This method treats problems in time domain, so non-linear problems will be solved by this method in the near future.