

5. 差分法による波動伝播の計算について

鹿児島大学理学部 { 佐藤泰夫*
石原和彦

(昭和 57 年 12 月 14 日受理)

要 旨

波動伝播の様子を明らかにするため、差分法を用いてシミュレートする方法は有力な手段であり、従来解き得なかった問題を明らかにすることができるようになった。しかし、一方に於いて解析的方法にはなかった新しい問題が生じている。すなわち

1. 格子および時間間隔の選び方が適切でないと、媒質が一樣であっても、計算された波は波形がくずれ分散を示す。
2. $\omega_c = 2C_0/h$ (C_0 : 伝播速度, h : 格子間隔) で定まる遮断振動数が存在し、 ω_c より高い振動数の波は伝播しない。
3. 波は、遮断振動数 ω_c に近づくほど強い分散を示す。

本文には 1 次元、2 次元の波動および 2 次元弾性体について、適切なパラメータを用いた場合と、そうでない場合についての計算の例が分散曲線とともに示されている。

差分法を用いた波動伝播の計算で、満足いく結果を得るためには、安定条件の他に、格子および時間間隔の撰択、遮断振動数、分散の影響などに十分な配慮が必要であり、ことに S 波速度のおそい弾性体においては、上の注意は重要である。

1. はじめに

波動伝播の様相を明らかにするために、最近では数値計算に依存することが多く、その場合、波動方程式を差分式に変形したり、あるいは連続体を質点系でおきかえてシミュレートすること等がよく行なわれる¹⁾。こうした方法は極めて有力であり、従来解き得なかった多くの問題が明らかになる一方、解析的方法になかった困難も生じて来る。しかしその中には意外にはっきりした認識を欠いているものもあり、ここではそうした問題の二三について考察してみたい。

2. 1 次元の波動伝播

1 次元の波動では、慣用の記号を用いて基本式は

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = C_0^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (2.1)$$

と書かれるが、右辺の微分を差分式でおきかえれば、

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = C_0^2 \frac{u(x+\Delta x, t) - 2u(x, t) + u(x-\Delta x, t)}{\Delta x^2} \quad (2.2)$$

となり、これに

* 東京大学名誉教授地震研究所

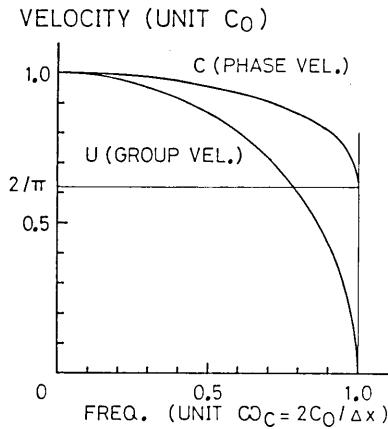


Fig. 1. Dispersion of one dimensional wave propagation caused by a finite difference calculation.

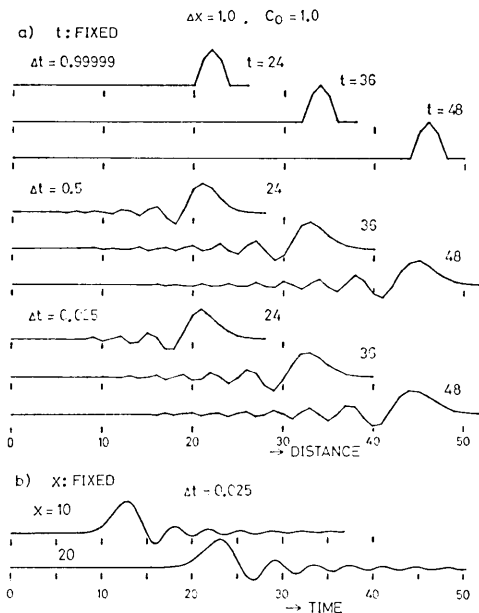


Fig. 2. Examples of numerical calculations of one dimensional wave propagation. Small time intervals cause dispersions.

前節の計算において、波動方程式 (2.1) の右辺は差分でおきかえ、左辺は通常の微分を行ったが、このようにする時、右辺にのみ差分の誤差が入りこんで来る。所が左辺にも同様の差分公式を適用し、これと (2.2) を組合せると次式が得られる。

$$\sin(\omega \Delta t/2) = \frac{C_0 \Delta t}{\Delta x} \sin(\xi \Delta x/2) \quad (2.7)$$

$$u = U \cdot \exp(i\xi x - i\omega t)$$

を代入すると

$$\omega = (2C_0/\Delta x) \cdot \sin(\xi \Delta x/2) \quad (2.3)$$

が得られる。この式は $\xi \Delta x \rightarrow 0$ の極限では

$$\omega/\xi = C_0 \quad (2.4)$$

となり、速度 C_0 をもって波が伝播することを示すが、 $\xi \Delta t$ が有限の範囲では (2.3) 式は (2.4) と同等ではない。

$$\omega_c = 2C_0/\Delta x \quad (2.5)$$

が遮断振動数となり、これより高い振動数の波は伝播し得ないし、またこれ以下でも、位相および群速度が、(2.3) から導かれる

$$C = \frac{\omega}{\xi} = C_0 \frac{\omega/\omega_c}{\arcsin(\omega/\omega_c)} \quad (2.6)$$

$$U = \frac{d\omega}{d\xi} = C_0 \sqrt{1 - (\omega/\omega_c)^2}$$

なる分散現象を呈することになる。分散曲線を Fig. 1 に示す。

質量を持たない弦に等間隔で質点を結び着けた系を考え、微小変位の運動方程式を作ると、差分法によって変換した式と、内容的に同等な式が得られる。従って1次元の波動では差分による近似と、質点系によるシミュレーションの間には、特に内容的に区別すべきものはない。

2.1 Δt の影響

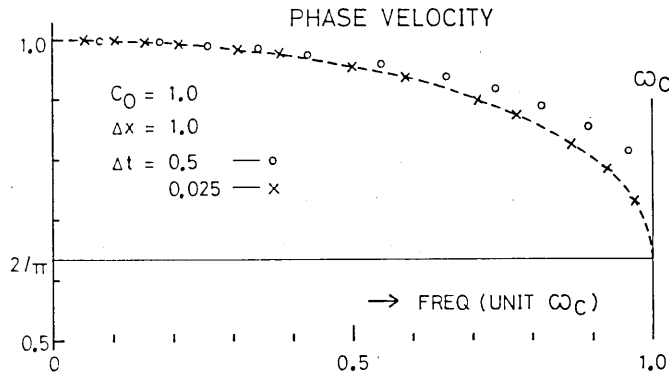


Fig. 3. Phase velocity obtained from the analysis of the dispersed waves in Fig. 2.

ここでは解の安定条件

$$C_0 \Delta t / \Delta x < 1 \tag{2.8}$$

が要求されるが、 $C_0 \Delta t / \Delta x = 1$ にとれば、(2.7) から

$$\omega \Delta t = \xi \Delta x$$

$$\therefore \omega / \xi = C = \Delta x / \Delta t = C_0 \tag{2.9}$$

となり、一定の速度 C_0 で波は伝わることになる。しかし (2.7) で Δt を小さくとれば、左辺の差分のみ精度が上がる。その為右辺の差分の誤差だけが残る、かえって分散が表われる。 Δt は安定条件ぎりぎりにあらくとる方が波の変形は起らない。そうした例を Fig. 2 に示す。弦の一端に正弦波の正の部分、半波を与えたものであるが、 Δt が小さいと伝播と共に波形がくずれて来るのはおもしろいことである。a) は t を一定に、b) は x を一定にとった時の波形であるが、一番上の例を除き、波は明らかに分散している。a) の下二つの例 ($t=0.5, 0.025$) について、フーリエ解析によって位相速度を求め、Fig. 3 に示した。 Δt の極めて小さい下の例では、かなりの分散がある。基本式の左辺を微分して得た (2.6) の分散曲線とはよくあっているが、分散は望ましくはない。また $\Delta t=0.5$ の例では、当然ながらこの曲線からはずれている。

2.2 振動源スペクトルの影響

Fig. 1 を見る時、遮断振動数 ω_c の近くで分散が強く現われることは明らかである。これを避けるには、振動源スペクトルの周波数の高い限界でも、なお ω_c より低くなくてはならない。もしこの条件が満たされず、スペクトルが ω_c よりさき迄のびている時、波は遮断され、強く変形を受ける。Fig. 4 に示すのはこうした例である。弦の一端に変位 $F(t)$ を与えてその伝播の状況を見たものである。 $F(t)$ は図の中央に左向きに破線がかかっている。従ってこの曲線を一定幅 (ここでは $C_0 t=16$) 右にずらすと、波が正しく伝わるならば、 $F(t)$ と同じ形が再現されるはずである。このことは図の下の方の例ではほぼ成立しているが、原点での動きがはやく、短周期成分の強い上の方の例では、全く異なった形となっている。図の左の部分には $F(t)$ のスペクトルが画かれており、遮断振動数 ω_c とスペクトルとの関係が、波形の乱れにいかに関与するかを見ることができる。一番

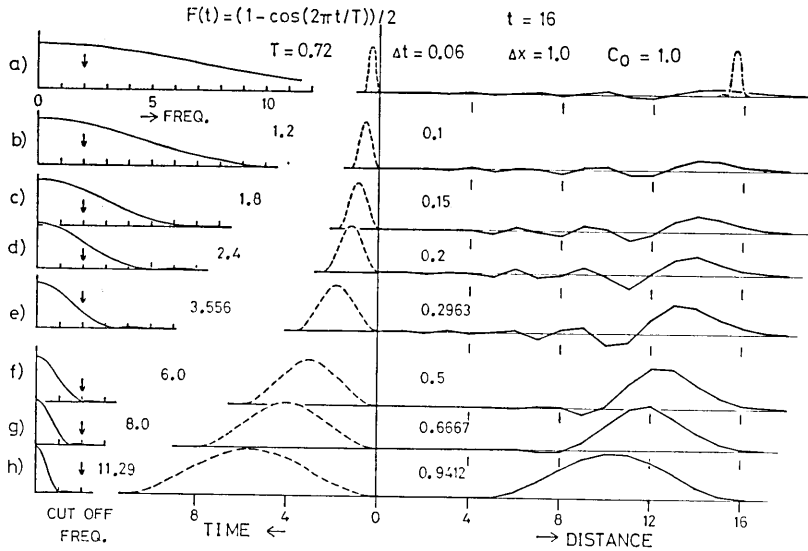


Fig. 4. One dimensional wave propagation based on various parameter values. Cut off and dispersion of waves are observed. Source functions and their spectra are shown in the left. Case a) is recalculated employing a different parameter ($\Delta x=0.0601$) and the improved result is shown by a chain line in the same figure.

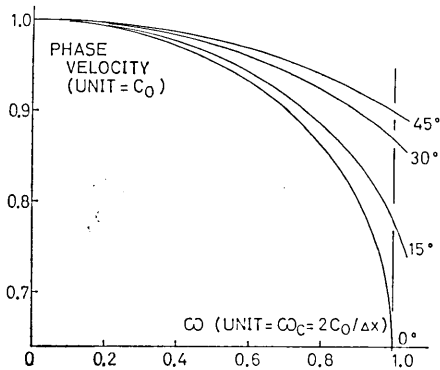


Fig. 5. Phase velocity of the waves propagated two dimensionally. Parameters in the figure give the direction of propagation.

上の a) の例では波はほとんど伝わらないが、適切なパラメータ ($\Delta x=0.0601$) を用いて計算しなおすと、改善の成果はめざましく、図中に鎖線で描いた曲線が得られる。

3. 2次元の波動伝播

2次元になると、問題は多少複雑となるが、本質的には1次元の時の性質が保たれている。2次元波動方程式において、 x, y の格子間隔を $\Delta x, \Delta y$ とし、(2.2) にならって ∇^2 を差分式でおきかえ、

更に

$$u = U \cdot \exp(i\xi x + i\eta y - i\omega t) \tag{3.1}$$

を代入すれば次式が得られる。

$$\omega^2 = 4C_0^2 \{ \sin^2(\xi \Delta x / 2) / \Delta x^2 + \sin^2(\eta \Delta y / 2) / \Delta y^2 \} \tag{3.2}$$

簡単のために $\Delta x = \Delta y = h$ とすれば

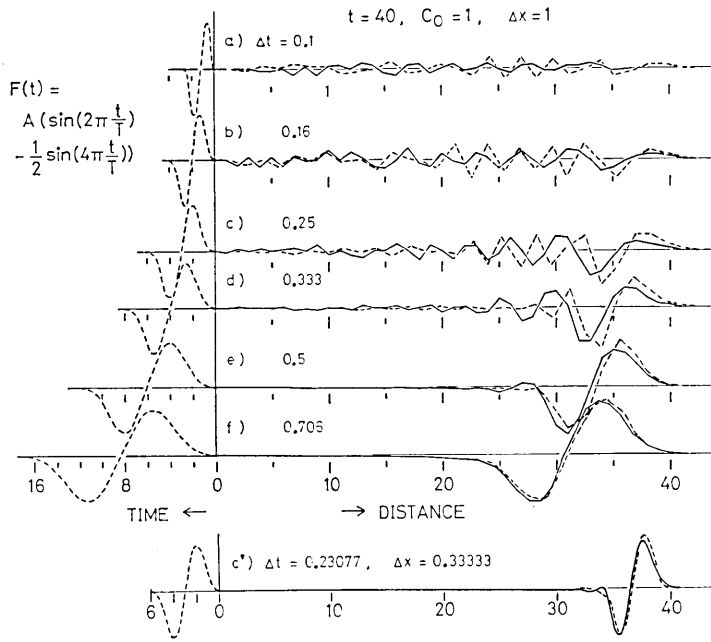


Fig. 6. Two dimensional wave propagation based on various parameter values. Cut off and dispersion of waves are observed. Source functions are given in the left. Broken lines are the waves propagating in the direction bisecting x and y axes. Improved calculation of the case c) using revised parameters ($\Delta t=0.23077$, $\Delta x=0.33333$) is given at the bottom.

$$\omega = (2C_0/h) \sqrt{\sin^2(\xi h/2) + \sin^2(\eta h/2)} \tag{3.3}$$

$\eta=0$ の時には、2次元とは言え、 x 方向に伝わる波となり、上式は1次元の時の (2.4) と同じ式となるが、伝播方向が違ると多少の変化が生じて来る。

$$\xi = \zeta \cos \theta, \quad \eta = \zeta \sin \theta$$

とおけば θ が伝播方向を表わすから、これをパラメターとして (3.3) を解くと、Fig. 1 に似た Fig. 5 が得られる。 $\theta \neq 0$ の時 $(2C_0/h)$ は遮断振動数とはならず、位相速度も多少大きくなる傾向が見られる。Fig. 6 は格子点の一つに変位を与えた時の、伝播の様態を示すもので、全体としてさきの Fig. 4 によく似ている。変位の関数もさきと同様に描かれており、伝播による変形がなければ、 $C_0 t$ だけ右にずれた所に同様の波形が現われるはずである。振動源の動きがゆっくりで、 Δt の大きい f) では、このことはほぼ成立している。破線でかいた、 xy 両軸を2分する 45° の線に沿っては、分散曲線からも予想されるように、波は C_0 により近い速度で伝わる。従来 Δx , Δt の決定は経験的に適当に行なわれているが³⁾、波の伝播を正しく知るには、先ず $F(t)$ のスペクトルを求め、これより十分高い周波数域に ω_c が来るよう h を定め、 Δt は安定条件の範囲内で大きくとるべきであろう。c) の問題を、上のようにして定めた、先とは異なるパラメターを用いて解いた結果を同じ図の最下段 c') に示す。

4. 2次元弾性体

以上、1次元および2次元の波動方程式について、差分近似のために起る特殊の現象を見て来たが、弾性体の場合には2種類の波が存在する為、事情はさらに異なる。2次元弾性体の運動方程式は

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= C_P^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (C_P^2 - C_S^2) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} + C_S^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= C_P^2 \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + (C_P^2 - C_S^2) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + C_S^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\end{aligned}\quad (4.1)$$

(u, w は変位の x, z 成分, C_P, C_S は P 波, S 波の速度) と表わされるが

$$\Delta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \bar{\omega} = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}$$

はそれぞれ波動方程式

$$\frac{\partial^2 \Delta}{\partial t^2} = C_P^2 \nabla^2 \Delta, \quad \frac{\partial^2 \bar{\omega}}{\partial t^2} = C_S^2 \nabla^2 \bar{\omega}\quad (4.3)$$

を満足する。ところが (4.1) 右辺に差分公式を適用して $\partial^2/\partial t^2 \cdot (\partial u/\partial x)$ および $\partial^2/\partial t^2 \cdot (\partial w/\partial z)$ を作り、これから $\partial^2 \Delta/\partial t^2$ の差分表示を求めると

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{u_{j+1,k} - u_{j-1,k}}{2h} + \frac{w_{j,k+1} - w_{j,k-1}}{2h} \right) \\ = C_P^2 \cdot F_P(u, w)/(2h^3) + C_S^2 \cdot F_S(u, w)/(2h^3) \\ \Delta x = \Delta z = h, \quad u_{\alpha,\beta} = u(x + \alpha \Delta x, z + \beta \Delta z) \\ w_{\alpha,\beta} = w(x + \alpha \Delta x, z + \beta \Delta z)\end{aligned}\quad (4.4)$$

の形に書かれる。ここに $F_P(u, w)$ は $\nabla^2 \Delta$ を表現する主要な項であるが、 C_S^2 の項はもとの式 (4.3) には存在しない。実際計算してみると

$$\begin{aligned}F_S(u, w) = & -\frac{3}{2}u_{1,0} + \frac{3}{2}u_{-1,0} + u_{1,1} + u_{1,-1} - u_{-1,1} - u_{-1,-1} \\ & -\frac{1}{4}u_{1,2} - \frac{1}{4}u_{1,-2} + \frac{1}{4}u_{-1,2} + \frac{1}{4}u_{-1,-2} \\ & -\frac{3}{2}w_{0,1} + \frac{3}{2}w_{0,-1} + w_{1,1} - w_{1,-1} + w_{-1,1} - w_{-1,-1} \\ & -\frac{1}{4}w_{2,1} - \frac{1}{4}w_{-2,1} + \frac{1}{4}w_{2,-1} + \frac{1}{4}w_{-2,-1}\end{aligned}\quad (4.5)$$

となり、この式を $\Delta x, \Delta z$ について展開すると、4乗の項まではすべて0となるが、5乗の項のうち $\partial^5 u/\partial x \partial z^4$ の項のみは残る。 Δ の満たすべき式に C_S^2 の項が存在するのは、P波、S波が完全には分離しないことを示すものであろう。 $\partial^2 \bar{\omega}/\partial t^2$ についても同様の式を求め、 C_P^2 のかかる式を $G_P(u, w)/2h^3$ と書くと、これについても上と似たことの起るのがわかる。PとSとが分離しない例は、後の計算に見られる。しかし最初から用いて来た差分式においても、主要項に較べて2次の微小量は省略しており、上記のことはむしろ当然と言えよう。

さきに論じた遮断振動数 ω_c に関することは、 Δ および ω についてもそれぞれ成立つてであろうから、遮断振動数は P, S 両波に対する

$$\omega_{cP} = 2C_P/h, \quad \omega_{cS} = 2C_S/h \quad (4.6)$$

の二つとなり、後者が小さいことから、これに対する条件がきびしく残ることになる。

4.1 数値計算

(4.1) を差分式になおして数値計算を行ってみる。さまざまな $\Delta x, \Delta t$ の組に対する結果を Fig. 7 に示した。振動源として、図の左上にあるように、力が原点を囲む 4 点に働く場合を考えているので、軸方向は P 波については腹、S 波については節となるはずである。F(t) は a)~c) すべてに共通であるが、 Δx が異なるので、遮断振動数は違っており、これをスペクトルの図中に記入した。どの場合にも ω_{cP} はスペクトルの分布からはずれており、軸方向の変位はほぼ同じに求められていて、順当なものと思われる。理論上 S 波に相当する時間に縦波の動きがあるが、これは P, S が十分に分離していないためであろう。ただこの波は伝播と共にかなりはやく減少する。

ところで問題は S 波である。座標軸を 2 分する 45° 方向は、P 波に関しては節となり、はじめ動きは見えないが、図 a) ではそのあと S 波があまりにも早く現れており、波形もくずれている。b) や c) の図ではあまりこうしたことはないが、これは Δx の選択の適、不適によるものであろう。しかし工学上重要な軟弱地盤などでは、S 波の遅いことが多く⁴⁾、その時 ω_{cS} は小さくなる。そこで C_P は同じであるが C_S の小さい ($\lambda=5\mu$, $C_S=C_P/\sqrt{7}$) 例について計算したのが Fig. 8 である。縦波については前図とさして変りないが、a) の図では横波の期待されるはるか前に極めて大きな動きがあり、S 波の大きくでる機構とは言え、異常である。この波は時間的、空間的に減少し、発散するもので

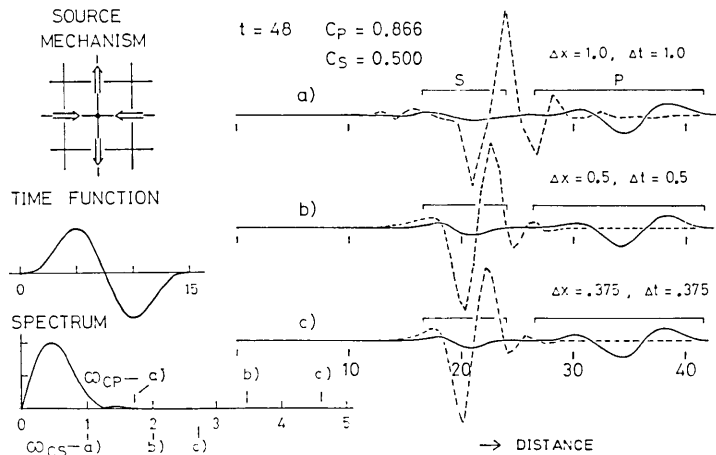


Fig. 7. Elastic waves propagated two dimensionally. Bold line is the radial component on the x or z axis, while the broken line is the transverse component on the line bisecting the two axes. Source mechanism, time function (not different from the case in Fig. 6) and its spectrum are shown on the left. Cut off frequencies ω_{cP} and ω_{cS} are also given together with the spectrum. Time ranges where P and S waves are expected are shown in the figure.

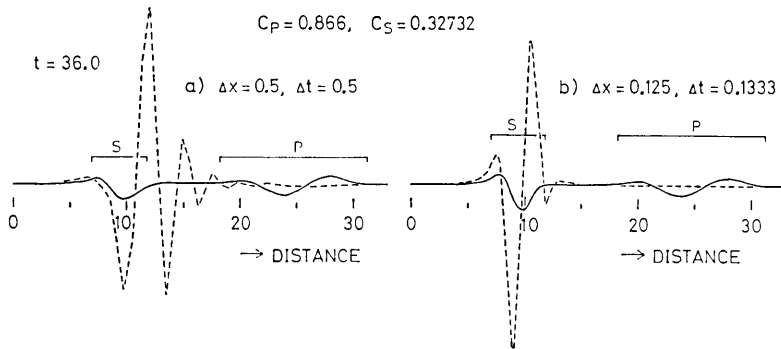


Fig. 8. Elastic waves propagated two dimensionally. The S wave velocity is assumed to be somewhat less than the P wave velocity. In case a) large transverse disturbances appear ahead of the expected arrival of the S waves, but this defect is improved in case b).

はないが、今まで述べて来たことによっては説明困難であり、次に改めて検討を行う。

4.2 分散の影響

弾性体内の変位 u , w は、二つのポテンシャルを用いて

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad w = \frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (4.7)$$

と表わされるが、その ϕ , ψ はそれぞれ速度 C_P , C_S の波動方程式を満たす。従って

$$\begin{aligned} \phi &= A \exp(i\alpha_x x + i\alpha_z z - i\omega t) \\ \psi &= B \exp(i\beta_x x + i\beta_z z - i\omega t) \end{aligned} \quad (4.8)$$

$$\begin{aligned} \alpha_x^2 + \alpha_z^2 &= \alpha^2 = \omega^2 / C_P^2 \\ \beta_x^2 + \beta_z^2 &= \beta^2 = \omega^2 / C_S^2 \end{aligned} \quad (4.8')$$

なる解を持つ。(4.8) を (4.7) に代入して得られる (i を省略)

$$\begin{aligned} u &= A\alpha_x \exp(i\alpha_x x + i\alpha_z z - i\omega t) + B\beta_x \exp(i\beta_x x + i\beta_z z - i\omega t) \\ w &= A\alpha_z \exp(i\alpha_x x + i\alpha_z z - i\omega t) - B\beta_z \exp(i\beta_x x + i\beta_z z - i\omega t) \end{aligned} \quad (4.9)$$

を基本方程式 (4.1) に代入する。ただし、さきと同様 (cf. (2.4), (3.2)), 左辺の t については一般の微分を行ない、右辺の微分は差分で置きかえる。整理した結果は次の形をとる。

$$\begin{aligned} U_A \cdot A^* + U_B \cdot B^* &= 0 \\ W_A \cdot A^* + W_B \cdot B^* &= 0 \end{aligned} \quad (4.10)$$

ここに

$$\begin{aligned} U_A &= -\omega^2 \alpha_x h^2 / 4 + C_P^2 \alpha_x S_{\alpha_x}^2 + (C_P^2 - C_S^2) \cdot \alpha_z S_{\alpha_x} C_{\alpha_x} S_{\alpha_z} C_{\alpha_z} + C_S^2 \alpha_x S_{\alpha_z}^2, \\ U_B &= -\omega^2 \beta_x h^2 / 4 + C_P^2 \beta_x S_{\beta_x}^2 - (C_P^2 - C_S^2) \cdot \beta_z S_{\beta_x} C_{\beta_x} S_{\beta_z} C_{\beta_z} + C_S^2 \beta_x S_{\beta_z}^2, \\ W_A &= -\omega^2 \alpha_z h^2 / 4 + C_P^2 \alpha_z S_{\alpha_z}^2 + (C_P^2 - C_S^2) \cdot \alpha_x S_{\alpha_z} C_{\alpha_x} S_{\alpha_z} C_{\alpha_x} + C_S^2 \alpha_z S_{\alpha_x}^2, \\ W_B &= -\omega^2 \beta_z h^2 / 4 - C_P^2 \beta_z S_{\beta_z}^2 + (C_P^2 - C_S^2) \cdot \beta_x S_{\beta_z} C_{\beta_x} S_{\beta_z} C_{\beta_x} - C_S^2 \beta_z S_{\beta_x}^2 \end{aligned} \quad (4.11)$$

$$\begin{aligned} S_{\alpha x} &= \sin(\alpha_x h/2), & C_{\alpha x} &= \cos(\alpha_x h/2) \\ S_{\alpha z} &= \sin(\alpha_z h/2), & C_{\alpha z} &= \cos(\alpha_z h/2) \\ S_{\beta x} &= \sin(\beta_x h/2), & C_{\beta x} &= \cos(\beta_x h/2) \\ S_{\beta z} &= \sin(\beta_z h/2), & C_{\beta z} &= \cos(\beta_z h/2) \end{aligned}$$

で、(4.8)' は仮定されていない。(4.10) から A^*, B^* を消去した

$$\begin{vmatrix} U_A & U_B \\ W_A & W_B \end{vmatrix} = 0 \quad (4.12)$$

は ω^2 を定める固有方程式とみられる。しかしこの式を一般的に扱うことは困難でもあり、またさほど興味もない。特別の場合、即ち伝播方向が軸方向、および軸を 2 分する 45° の方向の場合について考える。

x 方向に伝わる波については

$$\begin{aligned} \alpha_x &= \alpha, & \alpha_z &= 0 \\ \beta_x &= \beta, & \beta_z &= 0 \end{aligned} \quad (4.13)$$

であるから、(4.11) は

$$\begin{aligned} U_A &= -\omega^2 a h^2 / 4 + C_P^2 \alpha S_{\alpha^2}, & U_B &= 0, \\ W_A &= 0, & W_B &= \omega^2 \beta h^2 / 4 - C_S^2 \beta S_{\beta^2} \end{aligned} \quad (4.14)$$

従って、 $U_A=0, W_B=0$ なる二つの独立な解

$$\begin{aligned} \omega &= (2C_P/h) \cdot \sin(\alpha h/2) \\ \omega &= (2C_S/h) \cdot \sin(\beta h/2) \end{aligned} \quad (4.15)$$

が得られる。これは 1 次元の時の式 (2.3) と全く同じ形で、前者は P 波、後者は S 波に関するものである。

次に軸を 2 等分する方向については

$$\begin{aligned} \alpha_x &= \alpha_z = \alpha / \sqrt{2} \\ \beta_x &= \beta_z = \beta / \sqrt{2} \end{aligned} \quad (4.16)$$

であるから、これを α', β' と書き、(4.11) は

$$\begin{aligned} U_A &= \alpha' (-\omega^2 h^2 / 4 + C_P^2 S_{\alpha'^2} + (C_P^2 - C_S^2) S_{\alpha'}^2 C_{\alpha'^2} + C_S^2 S_{\alpha'^2}), \\ U_B &= \beta' (-\omega^2 h^2 / 4 + C_P^2 S_{\beta'^2} - (C_P^2 - C_S^2) S_{\beta'}^2 C_{\beta'^2} + C_S^2 S_{\beta'^2}), \\ W_A &= U_A, \\ W_B &= -U_B \end{aligned} \quad (4.17)$$

従ってこの場合もまた (4.12) は二つの因数に分かれる。 U_A および U_B をそれぞれ 0 とおいて

$$\omega = \frac{2C_P}{h} \sin \frac{\alpha' h}{2} \sqrt{2 - (1 - C_S^2/C_P^2) \sin^2(\alpha' h/2)} \quad (4.18a)$$

$$\omega = \frac{2C_S}{h} \sin \frac{\beta' h}{2} \sqrt{2 + (C_P^2/C_S^2 - 1) \sin^2(\beta' h/2)} \quad (4.18b)$$

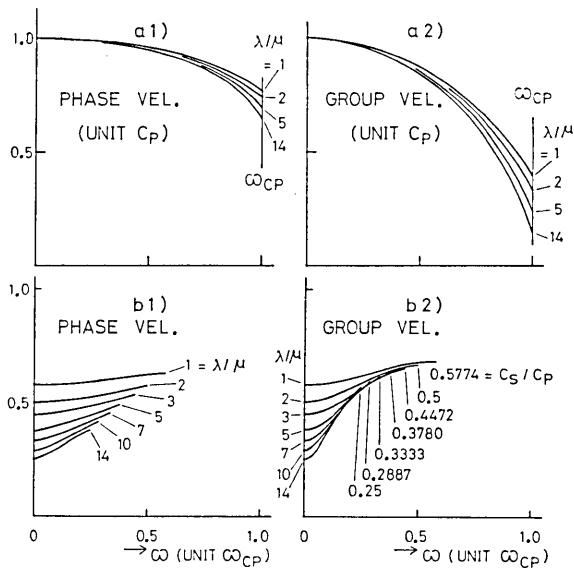


Fig. 9. Dispersion of elastic waves propagated two dimensionally. a) is the branch belonging to P phase, while b) is the one belonging to S phase.

らない。Δx, Δt を変更して計算した Fig. 8b) ではほぼ期待通りの曲線が得られている。

5. おわりに

波動伝播の問題を解く際に、差分法は有力な手段ではあるが、実際の適用に当っては、注意が必要である。安定条件はもちろんのこと、そのほかにも遮断振動数の存在や、分散の可能性を考慮した上で、Δx, Δt を定めなくてはならない。弾性波動、ことに S 波速度の小さい時、計算は困難になりがちであるが、上に述べたような配慮がなされる時、満足のゆく結果が得られるであろう。

文 献

- 1) 例えば Z. ALTERMAN, Finite Difference Solutions to Geophysical Problems, *Journ. Phys. Earth*, 16 (1968), Special Issue, 113-128.
佐藤泰夫, 「弾性波動論」(1978 岩波), 第 VI 篇. 大保直人・片山恒雄, 「弾性波の発生・伝播に関する計算手法の比較」, 生産研究, 32 (1980), 598-601.
- 2) Y. SATO, Analysis of Dispersed Surface Waves by means of Fourier Transform. *Bull. Earthq. Res. Inst.*, 33 (1955), 34. II 34 (1956), 9. III 34 (1956), 131.
佐藤泰夫, 「弾性波動論」, p. 252.
- 3) 例えば Z. ALTERMAN and F. C. KARAI, Jr., Propagation of Elastic Waves in Layered Media by Finite Difference Method, *Bull. Seism. Soc. Amer.*, 58 (1968), 367-398.
- 4) 例えば嶋悦三・太田裕・柳沢馬住・工藤一嘉・河角 広, 「東京都内各所における S 波の測定結果」, (第 3 報) 地震研究所彙報, 46 (1968), 1301, (第 4 報) 地震研究所彙報, 47 (1969), 819.

前者は P 波, 後者は S 波の系統の波の分散を定める式である。さきの (4.15) と較べて, $\sqrt{\quad}$ の部分を除けば同じ形となっている。簡単な式であり, 数値計算結果を Fig. 9 に示す。

この図において (4.18a) から得られる a 1), a 2) は Fig. 1, Fig. 4 などと大きな違いはない。 $\sqrt{\quad}$ の中で 2 が主要な項となり, 大きな変動がない為であろう。興味深いのは (4.18b) から出る b 1), b 2) である。逆分散をし, $\lambda = \mu$ の時にはさほどでないが, C_s/C_p が小さくなると強い分散を示す。Fig. 7 や Fig. 8 ことに後者で, S 波の予想される以前に動きがあったのはこのためであろう。ωcs とスペクトルの分布に注意しなくてはな

5. *On the Numerical Calculation of Wave Propagation
by the Finite Difference Method.*

By Yasuo SATŌ and Kazuhiko ISHIHARA,

Institute of Earth Sciences, Faculty of Science,
Kagoshima University.

For solving the wave propagation problem the finite difference method is a very powerful weapon assisted by modern high speed computers. Sometimes, however, unexpected difficulties arise which do not exist in the analytical method. For example, i) if the choice of grid and time intervals is not appropriate, the calculated waves are dispersive even if the medium itself is uniform. ii) The cut-off frequency, which is defined by $\omega_c = 2C_0/h$ (C_0 =propagation velocity, h =grid interval), exists and wave components with frequencies higher than ω_c cannot be propagated. iii) Waves with a frequency near ω_c are dispersive, and the choice of grid and time intervals is very important.

Examples of calculation based on appropriate and inappropriate parameter values are shown together with the dispersion curves which explain the distortion of waves in the course of propagation.