

19. 伊豆半島の異常隆起を説明する茂木モデルと それに伴う重力変化

地震研究所 萩原幸男

(昭和 52 年 6 月 30 日受理)

§ 1. はじめに

半無限弾性体の内部に球状の空洞をおき、その内面に応力を作用させれば、弾性体の表面に変形が生じる。応力と表面の弾性変形との間の数学的関係は、地球物理学的応用として、かなり古くから解かれていた（たとえば西村、1934）。地表の隆起や陥没から、逆に地殻内部の圧力源の深さや大きさを推定するに役立つからである。山川（1955）の解を参考にして、Mogi（1958）は、桜島火山の噴火による地殻の陥没から、マグマ溜りの深さを求めた。実例による最初の試みであったので、火山学の分野では、以後この問題を「茂木モデル」と呼ぶようになった。

1974 年から 1976 年にかけて、群発地震を伴って、伊豆半島東部に地殻異常隆起が発生した。半径 20 km 程度のドーム状の隆起であって、その原因論に、ふたたび茂木モデルが登場した（東京大学地震研究所測地移動観測班、1976）。もし、地殻の内部に火山性ガスの溜りがあり、なんらかの原因でその内部の圧力が高まれば、地殻はドーム状に隆起し、しかも重力変化はフリーエア勾配をもつに違いない。伊豆半島東部の隆起では、フリーエア勾配をもつ重力変化が観測されたのである。

われわれが標高変化と重力変化との関係をとり扱うときに、しばしば簡便法として、無限平板による近似を用いる。火山性ガスの溜りについて茂木モデルが成り立てば、その重力変化はフリーエア的であるとの考えも、この近似計算から出発している。この論文では、このような簡便法に満足せず、より近似的度合を高めて、弾性論にもとづいた関係式から、一般的に茂木モデルの重力変化を論じ、あわせて伊豆半島東部の重力変化の原因を考えてみたい。

§ 2. 茂木モデル

Fig. 1 のように、半無限弾性体の内部、深さの D ところに、半径 a の球状の空洞があるものとする。弾性体の表面上、球の真上に座標の原点 O をおき、 O を通る深さの方向に z 軸をもつ円筒座標を考える。 λ と μ をラメ定数とすると、 r 方向および z 方向の変位は、スカラー関数 ϕ によって、それぞれ

$$\left. \begin{aligned} u &= -\frac{1}{2\mu} \frac{\partial^2 \phi}{\partial r \partial z} \\ w &= \frac{1}{2\mu} \left\{ 2(1-\nu) \nabla^2 \phi - \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right\} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

と表わされる。ここに、 ν はポアソン比であり、ラメ定数との間に

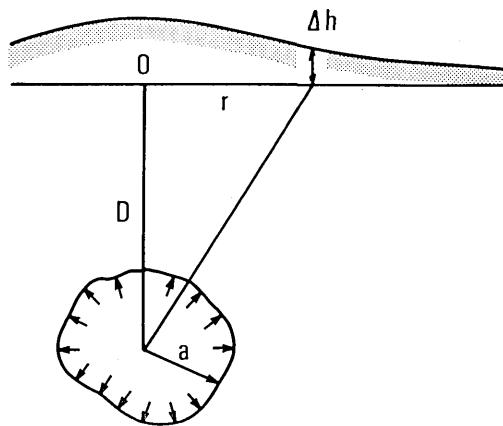


Fig. 1. Semi-infinite solid with a spherical cavity.

$$\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \quad (2)$$

の関係をもつ。

弾性体の変位がみたすべき方程式は

$$\nabla^4 \phi = 0 \quad (3)$$

である。 $z=0$ における境界条件として、

$$\left. \begin{aligned} \sigma_z &= -\frac{\partial}{\partial z} \left\{ (2-\nu) \nabla^2 \phi - \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right\} \\ \tau_{rz} &= -\frac{\partial}{\partial r} \left\{ (1-\nu) \nabla^2 \phi - \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right\} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

がゼロになるような解を選べば、それは

$$\phi = C \left\{ \log(D-z+R_1) + \frac{\lambda-\mu}{\lambda+\mu} \log(z+D+R_2) - \frac{2z}{R_2} \right\} \quad (5)$$

の形をもつ。ここに、 C は他の境界条件によって定めるべき定数であり、また

$$\left. \begin{aligned} R_1 &= \sqrt{r^2 + (D-z)^2} \\ R_2 &= \sqrt{r^2 + (z+D)^2} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

である。

つぎに、 z 軸上 $z=D$ の位置を中心とした半径方向のストレスを σ_R とすると、

$$\sigma_R = \frac{1}{R_1^2} \left\{ \sigma_r r^2 + \sigma_z (D-z)^2 - 2\tau_{rz} r (D-z) \right\} \quad (7)$$

の関係がある。ここに、 σ_r は r 方向のストレスであって

$$\sigma_r = -\frac{\partial}{\partial z} \left(\nu \nabla^2 \phi - \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} \right) \quad (8)$$

と表わされる。球面上の境界条件は、 Δp を球内部の圧力增加として、 $R_1=a$ において

$$\sigma_R = -\Delta p \quad (9)$$

である。

球面付近では、 $R_1 \ll R_2$ を考慮して

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_r = -C \frac{R_1^2 - 3r^2}{R_1^5} \\ \sigma_z = -C \frac{R_1^2 - 3(D-z)^2}{R_1^5} \\ \tau_{rz} = -3C \frac{r(D-z)}{R_1^5} \end{array} \right\} \quad (10)$$

と近似することができる。そこで、(7) 式に (10) 式を代入すれば、(9) 式より

$$C = -\frac{a^3 \Delta p}{2} \quad (11)$$

が得られる。

最終的に、(5) 式と (10) 式とを (1) 式に代入することによって、変位

$$\left. \begin{array}{l} u = -\frac{a^3 \Delta p}{4\mu} r \left\{ \frac{1}{R_1^3} + \frac{\lambda+3\mu}{\lambda+\mu} \frac{1}{R_2^3} - \frac{6z(z+D)}{R_2^5} \right\} \\ w = -\frac{a^3 \Delta p}{4\mu} \left\{ \frac{D-z}{R_1^3} + \frac{2D}{R_2^3} - \frac{\lambda-\mu}{\lambda+\mu} \frac{z+D}{R_2^3} + \frac{6z(z+D)^2}{R_2^5} \right\} \end{array} \right\} \quad (12)$$

を得る。とくに、弾性体の表面 $z=0$ での水平変位と隆起量とは

$$\left. \begin{array}{l} \Delta r = \frac{\lambda+2\mu}{2\mu(\lambda+\mu)} a^3 \Delta p \frac{r}{(r^2+D^2)^{3/2}} \\ \Delta h = \frac{\lambda+2\mu}{2\mu(\lambda+\mu)} a^3 \Delta p \frac{D}{(r^2+D^2)^{3/2}} \end{array} \right\} \quad (13)$$

となる。

球内部の圧力増加は、球の半径に僅かな変化を与える。その量を Δa とすると、(12) 式より

$$\Delta a = \frac{a \Delta p}{4\mu} \quad (14)$$

が導かれる。この導出にあたっては、 $(a/D)^2$ 以上の高次の項を省略している。(14) 式は、球の半径の増加が、方向によらず近似的に一様であることを示している。

球内部の圧力増加は、周囲の地殻に密度変化 $\Delta \rho$ をもたらす。弾性体の密度を ρ とし、地殻を通して一定であるとすれば、それは

$$\Delta \rho = \frac{-\rho}{2(\lambda+\mu)} \frac{\partial \nabla^2 \phi}{\partial z} = \frac{\rho a^3 \Delta p}{\lambda+\mu} \frac{r^2 - 2(z+D)^2}{R_2^5} \quad (15)$$

と書ける。

Fig. 2 は密度変化を表わしている。 r/D をよこ軸に、 z/D をたて軸にとって、デイメンションのない量 $D^3 \Delta \rho (\lambda+\mu) / (2\rho a^3 \Delta p)$ を示している。この量は原点で -1 であり、原点付近では負の値、遠く水平方向に離れると正の値をとる。たて軸上、 $z/D=1$ に球の中心が位置するが、球は十分に小さいものとして、図では省略している。

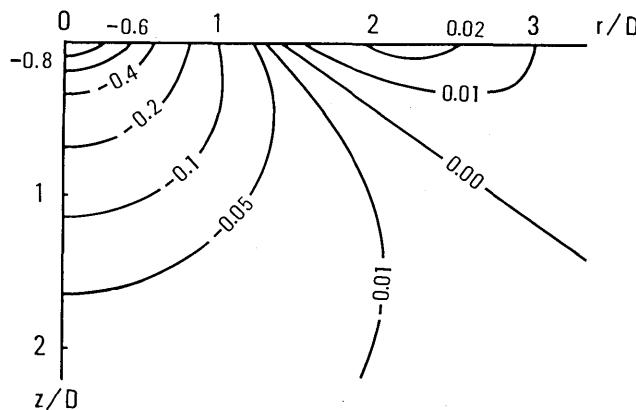


Fig. 2. Density change for the Mogi model.

§ 3. 重力変化

茂木モデルの重力変化は、フリーエア勾配をもつ項のほかに、3つの項に分けることができる。 δg_0 を球の体積変化による重力変化、 δg_1 を隆起した質量による重力変化、 δg_2 を弾性体の密度変化による重力変化とする。

δg_0 は厚さ Δa の球殻の引力に等しく、球殻の内部の密度を ρ_0 、万有引力定数を G で表わすと

$$\delta g_0 = \frac{\pi G a^3 \Delta p (\rho_0 - \rho)}{\mu} \frac{D}{(r^2 + D^2)^{3/2}} \quad (16)$$

となる。

δg_1 の厳密な計算は複雑だが、近似的には、隆起した部分を厚さ Δh の無限平板でおきかえて、(13) の第2式から

$$\delta g_1 = \frac{\pi G \rho a^3 \Delta p (\lambda + 2\mu)}{\mu (\lambda + \mu)} \frac{D}{(r^2 + D^2)^{3/2}} \quad (17)$$

とすることができる。最後に、(15) 式で与えられる密度変化を考慮しながら、弾性体の全体積（正しくは、球の内部を除くべきであるが、球は十分に小さいものと仮定する）について積分を実行すると、次のようになる。

$$\delta g_2 = -\frac{\pi G \rho a^3 \Delta p}{\lambda + \mu} \frac{D}{(r^2 + D^2)^{3/2}} \quad (18)$$

なお、(18) 式の証明を補録に与える。

これら3つの項の和を $\delta'g$ とし、標高変化（ここではジオイドの変化を考え入れない）と重力変化の比、つまり重力勾配をとると

$$\Gamma = -\beta + \frac{\delta'g}{\Delta h} = -\beta + \frac{2\pi G \rho_0 (\lambda + \mu)}{\lambda + 2\mu} \quad (19)$$

となる。ここに、 β はフリーエア勾配、 $\beta = 0.3086 \text{ mgal/m}$ である。(19) 式は ρ によらず、 ρ_0 だけによることに注目されたい。

もし、球殻がガスで満されるものとすると、 $\rho_0 = 0$ となるので、重力変化はフリーエア

勾配をとる。もし、球殻が水で満されるものとすれば、 $\rho_0=1$ となり、 $\lambda=\mu$ を仮定すれば、 $\Gamma=-0.2807 \text{ mgal/m}$ となる。もし、球殻の内部がまわりの物質と同じ物質で満されるものとすると、 $\rho_0=\rho$ (花崗岩質岩石として $\rho=2.67 \text{ g/cm}^3$) であって、 $\Gamma=-0.2341 \text{ mgal/m}$ をとる。これらの値はすべて、フリーエア勾配とブーゲー勾配 (-0.1967 mgal/m) との間の値をとる。

§ 4. 伊豆半島の異常隆起

伊豆半島東部のような火山地帯にあって、しかも異常隆起がドーム状であれば、誰しも一応は火山原因論の立場をとりたくなる。もちろん、地殻変動や重力だけではなく、地震、地磁気、地下水といった諸種の地球物理的観測の結果を総合して、異常隆起の原因を判定すべきであるが、実際のところ、火山性とも構造性とも決められない事例が多い。あれだけ集中して多くの観測を実施した松代地震でさえ、その原因に不明なところがある。ましてや、目立った断層運動もなく、湧水も見られない今回の異常隆起の原因ともなると、いずれとも言い難い。とにかく、ここでは異常隆起が火山性であって、茂木モデルによって説明がつくものと仮定しよう。

異常隆起のデータ (1969~1976 水準測量、国土地理院, 1976) を (13) の第 2 式に適合させると、 $D=10 \text{ km}$ の場合が最もよく合う。 D をいろいろ変えて、観測データへの適合し方を調べたのが Fig. 3 である。 $D=10 \text{ km}$ を採用するものとして、 $\lambda=\mu=0.33 \times 10^{12} \text{ dyn/cm}^2$ とおくと、 $\Delta p=100 \text{ bar}$ のとき $a=4 \text{ km}$ 程度、 1000 bar のとき 2 km 程度となる。計算上、 $D \gg a$ を仮定しているので、後者の方が都合よい。1000 bar というと、断層生成の場合の応力降下にくらべて、かなり大きいが、茂木モデルのような機構では、この程度の圧力変化があっても不自然ではない。岩石学的な実験によれば、火山爆発の際、圧力増加は 2000 bar 近くなるとされている (ARAMAKI, 1971)。

今回の異常隆起に伴った重力変化はフリーエア勾配をもつ (萩原ほか, 1976)。茂木モデルを仮定する限り、この観測事実から判断して、異常隆起の原因を火山性ガスの発生に

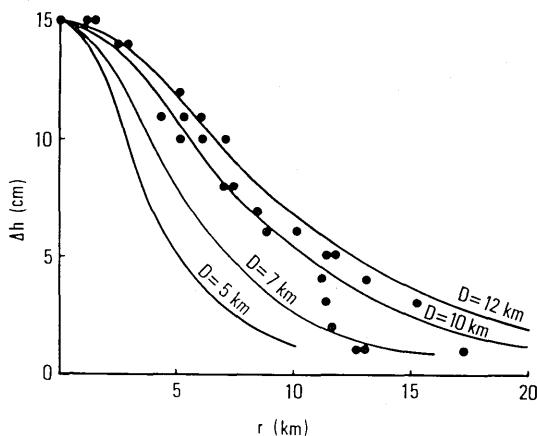


Fig. 3. Curve-fittings for the crustal uplift data (closed circles) obtained by the G.S.I.

よる圧力増加と考えざるを得ない。どうして火山性ガスが発生したかが問題となるが、これは隆起量と重力変化量との関係だけからは解決つかない問題であって、本論文の域を脱している。

群発地震の震源の深さは 1~9 km と観測された（地震研究所、1976）。このことからすると、 $D=10 \text{ km}$ は多少深すぎるようにもとれるが、マグマ溜りの周囲に発生したガスや水が、地殻の割れ目を通って、地表に出ようとして出られない状態を考えればよい。恐らく、割れ目をおし広げたり、新しく割れ目を作ったりするときに、地震が発生し、このときの震源の位置は D よりも浅いのであろう。

茂木モデルを支持するもう一つの根拠に、地殻の水平ひずみの測定がある。水平ひずみは(13)の第1式を r で微分して得られる。すなわち

$$\frac{d\Delta r}{dr} = \frac{\lambda + 2\mu}{2\mu(\lambda + \mu)} a^3 \Delta p \frac{D^2 - 2r^2}{(r^2 + D^2)^{5/2}} \quad (20)$$

である。 $D=10 \text{ km}$ 、その他の量を Fig. 3 の場合と同様にして、計算した水平ひずみを Fig. 4 に与える。これによれば、隆起の中心部で 10^{-5} 程度の伸びが観測され、中心部から $D/\sqrt{2} \approx 7 \text{ km}$ 以上離れると、 10^{-6} のオーダーの縮みが観測されなければならない。この傾向は反復して行われた光波測量によって実証された。隆起の中心付近で実施された国土地理院（1976）の光波測量は 10^{-5} 程度の地殻の伸びをとらえ、これに対して、隆起の中心から外れた地域で実施された地震研究所（1976）の測量では、縮みが観測されたのである。

伊豆半島の東側に南海トラフの支脈があり、それはフィリピン海プレートの沈み込みによる逆断層であるとの考えがある。石橋（1977）と藤井（1977）は今回の異常隆起を、この逆断層の活動として説明を試みた。しかし、断層運動による弾性変形だけでは、フリーエア勾配は説明できない。逆断層では、アラスカ地震のときの重力変化（BARNES, 1966）のように、ブーゲー勾配を示すであろう。フリーエア勾配を説明するためには、どうしても、断層運動に伴って、ディラタンシーの発生を考えなければならない。

ディラタンシーの発生が原因で地殻が隆起するならば、重力変化はフリーエア勾配をも

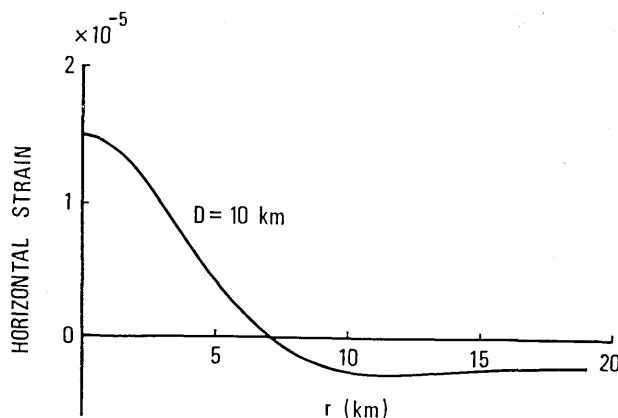


Fig. 4. Horizontal strain estimated from the crustal uplift.

ち、水平ひずみのパターンも恐らく茂木モデルと同様な傾向を示すにちがいない。火山性ガスにより茂木モデルか、ディラタンシーの発生かは、われわれの手持ちのデータだけでは判別がつかない。

これまで展開してきた議論はすべて重力変化がフリーエア勾配をもつという観測事実に立脚している。しかし、測定誤差を考慮してエラーバーをつけてみると、勾配の範囲は $-2\sim 5 \mu\text{gal}/\text{cm}$ となる。そのため意地悪くとれば、フリーエア勾配($-3 \mu\text{gal}/\text{cm}$)ではなくブーゲー勾配($-2 \mu\text{gal}/\text{cm}$)ともとれるのである。確信をもってフリーエア勾配であると断言できないが、最小自乗法的にフリーエア勾配がもっとも確からしいというのであって、その確からしさの上に火山性ガス発生による茂木モデル説を組み立てたのである。

茂木モデルを採用するには、異常隆起のパターンがドーム状であることが前提となっている。隆起の進展とともに隆起の範囲が南西側に延びたために、隆起のパターンがドーム状でなくなったと考える人達がいるが、それはまちがいである。国土地理院(1977)によれば、拡大した範囲の隆起量はドーム中心のそれにくらべて一けた小さく、全体としてドーム状のパターンは保存されたままである。また隆起に伴う重力減少域も南西部に広がったのであるが(萩原ほか, 1977), ドーム状であるとはいえないほど重力減少域が細長い形に変形することはなかった。異常隆起の進展は茂木モデル形成後の群発地震に伴うディラタンシーあるいは地殻変動の結果と考えれば、たとえドーム状のパターンが多少デフォームしたとしても、茂木モデルを否定する根拠にはなり得ない。

補 錄

(18) 式の証明 直角座標によって $\delta g_2(x, y)$ を取り扱うものとする。積分点を座標 (x', y', z') で表わすと

$$\delta g_2(x, y) = G \int_0^\infty z' dz' \left\{ \int_{-\infty}^\infty \frac{4\rho(x', y', z')}{\{(x-x')^2 + (y-y')^2 + z'^2\}^{3/2}} dx' dy' \right\} \quad (\text{A1})$$

と書ける。 4ρ については(15)式を用いる。 $r^2 = x^2 + y^2$ の関係によって、(15)式を (x, y) 座標に書きかえて、(A1)式に代入すれば

$$\delta g_2(x, y) = \frac{G\rho a^3 4p}{\lambda + \mu} \int_0^\infty \left\{ F(x, y, z') + (z' + D) \frac{\partial F(x, y, z')}{\partial D} \right\} z' dz' \quad (\text{A2})$$

となる。ここに

$$F(x, y, z') = \int_{-\infty}^\infty \frac{dx' dy'}{\{(x-x')^2 + (y-y')^2 + z'^2\}^{3/2} \{x'^2 + y'^2 + (z'+D)^2\}^{3/2}} \quad (\text{A3})$$

である。

F はたたみ込み積分の型をとっている。そこで、 $(x^2 + y^2 + \zeta^2)^{-3/2}$ のフーリエ積分が

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{\exp\{-i(\xi x + \eta y)\}}{(x^2 + y^2 + \zeta^2)^{3/2}} dx dy = \frac{\exp(-|\zeta| \sqrt{\xi^2 + \eta^2})}{\zeta} \quad (\text{A4})$$

となることを用いて、(A3)式の両辺をフーリエ積分変換する。たたみ込み積分の性質を用いて

$$F^*(\xi, \eta, z') = \iint_{-\infty}^{\infty} F(x, y, z') \exp\{-i(\xi x + \eta y)\} dx dy$$

$$= 4\pi^2 \frac{\exp\{-(2z' + D) \sqrt{\xi^2 + \eta^2}\}}{z'(z' + D)} \quad (\text{A5})$$

とすることができる。 $\partial F^*/\partial D$ は容易に求められるから、これと (A5) 式とによって、(A2) 式の積分変換を求めてみると、その結果は

$$\delta g_2^*(\xi, \eta) = -\frac{2\pi^2 G\rho a^3 \Delta p}{\lambda + \mu} \exp(-D \sqrt{\xi^2 + \eta^2}) \quad (\text{A6})$$

と至って簡単な形になってしまう。

(A4) 式の性質を用いれば、(A6) 式のフーリエ積分逆変換は容易に求められ、

$$\delta g_2(x, y) = -\frac{\pi G\rho a^3 \Delta p}{\lambda + \mu} \frac{D}{(x^2 + y^2 + D^2)^{3/2}} \quad (\text{A7})$$

となる。 $r^2 = x^2 + y^2$ とおけば、(A7) 式はとりもなおさず (18) 式に等しい。

文 献

- ARAMAKI, S., 1971, Hydrothermal determination of temperature and water pressure of the magma of Aira Caldera, Japan, *American Mineralogist*, **56**, 1760-1768.
- BARNES, D. F., 1966, Gravity changes during the Alaska Earthquake. *J. Geophys. Res.*, **71**, 451-456.
- 藤井陽一郎, 1977, 伊豆半島地殻隆起のクリープモデル, 地震予知連絡会会報, **17**, 68-70.
- 萩原幸男・田島広一・井筒屋貞勝・花田英夫, 1976, 1975~1976 年における伊豆半島東部の重力変化, 測地学会誌, **22**, 201-209.
- 萩原幸男・田島広一・井筒屋貞勝・花田英夫, 1977, 伊豆半島東部の群発地震活動に伴う重力変化。地震研究所彙報, **52**, 141-150.
- 石橋克彦, 1977, 伊豆半島異常隆起のクリープ・モデル——伊豆東方線スラスト深部の非地震性断層運動——, 地震予知連絡会会報, **17**, 65-67.
- 国土地理院地殻調査部, 1976, 伊豆半島中部の地殻変動, 地震予知連絡会会報, **16**, 82-87.
- 国土地理院地殻調査部, 1977, 伊豆半島中部の地殻変動 (2), 地震予知連絡会会報, **17**, 59-64.
- MOGI, K., 1958, Relations between the eruptions of various volcanoes and deformations of the ground surfaces around them, *Bull. Earthq. Res. Inst.*, **36**, 99-134.
- 西村源六郎, 1934, 重力の働く半無限弾性体の内部に存在する空窓の内面に作用する力によって起される変形及び応力問題 (其の 1), 地震研究所彙報, **12**, 368-401.
- 東京大学地震研究所地殻変動移動班, 1976, 伊豆半島北東部の光波測量, 地震予知連絡会会報, **16**, 99-100.
- 東京大学地震研究所地震移動観測室・地震活動研究部門, 1976, 伊豆半島北東部の群発地震 (2), 地震予知連絡会会報, **16**, 77-81.
- 東京大学地震研究所測地移動観測班, 1976, 伊豆半島の重力変化, 地震予知連絡会会報, **16**, 95-98.
- 山川宜男, 1955, 内部力源による半無限弾性体の変形について, 地震 (ii), **8**, 84-98.

19. *The Mogi Model as a Possible Cause of the Crustal
Uplift in the Eastern Part of Izu Peninsula
and the Related Gravity Change.*

By Yukio HAGIWARA,
Earthquake Research Institute.

The Mogi model is based on the elastic deformation of a semi-infinite solid by a pressure change in a buried spherical cavity. The recent rounded dome-up in the eastern part of Izu Peninsula can be explained as an example of such a model. The free-air rate gravity-elevation relation obtained there may indicate that gas pressure has increased in the magma reservoir. The earthquake swarm must have been caused by the formation of new fissures in the surrounding rocks due to the gas pressure increase. Gravity changes for the Mogi model are also derived.