

19. Maximum Entropy Method の 地震波解析への応用

地震研究所 { 大内 徹
南雲昭三郎

(昭和 50 年 11 月 5 日受理)

1. 序

Maximum entropy spectral estimation method (以後 M. E. M. と省略する) については BURG (1967) が提唱して以来, 非常に多くの関心が払われてきた. 理論的にもその性質は詳細に議論され, 地球物理学の諸分野でその応用がいろいろ試みられている (LACOSS, 1971; ULRICH, 1972 a, b; SMYLYE et al., 1973; 南雲・大内, 1974).

この方法については, また, 線型フィルターの立場から (SMYLYE et al., 1973; 斎藤, 1974 b) あるいは, 自己回帰 (Autoregressive 略して A. R.) 解析の観点 (たとえば, AKAIKE, 1969 a, b) からも研究が進められており, これらの等価性については LACOSS (1971), 斎藤 (1974 b) および ULRICH and BISHOP (1975) 等が詳細に論じている.

しかしながら, この方法には実際に適用するにあたり, まだいくつかの問題が残されている. たとえば (1) M. E. M. と従来用いられてきたスペクトル解析の方法との違い. (2) フィルターの長さの決定. (3) M. E. M. の計算法には自己共分散関数 (Autocovariance function) を直接計算する方法 (以後 A. F. 法と略す) と, Burg 考案のいわゆる「Burg アルゴリズム」があり, この Burg アルゴリズムについては分解能はあがる反面大きな欠点のあることが指摘されているが (SAITO, 1974 a), この二者の違い.

本論文では, これらの問題を中心に M. E. M. について概観し, 従来の方法と理論的および具体的な比較をすることにより, その特長を明らかにしていくとともに, 併せて地震波解析への応用を試みる.

2. スペクトル密度関数の定義

今, 時間軸上で等間隔 Δt で読みとられた実数の時系列

$$\cdots x_{-1}, x_0, x_1, x_2, \cdots, x_i, \cdots$$

を考える. $\{x_i\}$ はその性質によって次の2つのクラスに分類することができる.

(I) 有限のパワー (power) をもつもの, すなわち

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{i=-N}^N |x_i|^2 < \infty \quad (1)$$

が成り立つような時系列はパワー信号 (power signal) と呼ばれる.

(II) 有限のエネルギー (energy) をもつもの

$$\Delta t \sum_{i=-\infty}^{\infty} |x_i|^2 < \infty \quad (2)$$

このようなものは、エネルギー信号 (energy signal) と呼ばれる。

時系列の自己共分散関数 (autocovariance function) はパワー信号に対しては

$$\Phi(n) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{i=-N}^N x_i x_{i-n} \quad (3)$$

エネルギー信号に対しては、

$$\Phi(n) = \Delta t \sum_{i=-\infty}^{\infty} x_i x_{i-n} \quad (4)$$

で定義される。スペクトル密度関数 (spectral density function) はこれらの自己共分散関数 (偶関数) のフーリエ (Fourier) 変換として定義される。

$$\begin{aligned} P(f) &= \Delta t \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Phi(n) e^{-i2\pi f n \Delta t} \\ &= \Delta t \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Phi(n) \cos(2\pi f n \Delta t) \end{aligned} \quad (5)$$

$P(f)$ はまた、パワー信号に対して

$$\begin{aligned} F_N(f) &= \Delta t \sum_{n=-N}^N x_n e^{-i2\pi f n \Delta t} \\ P(f) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{(2N+1) \Delta t} |F_N(f)|^2 \end{aligned} \quad (6)$$

エネルギー信号に対しては

$$\begin{aligned} F(f) &= \Delta t \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n e^{-i2\pi f n \Delta t} \\ P(f) &= |F(f)|^2 \end{aligned} \quad (7)$$

と表現することができる。

3. 有限長のデータ

前節ではデータが無限に与えられている場合のスペクトル密度関数の定義について述べた。しかしながら実際には有限の限られた、それもしばしば非常に限られた長さのデータを解析するのが普通である。スペクトル理論が無限のデータを想定している以上、有限区間における観測データにもとづいて、それを推定することは、明らかに不可能である。ここにスペクトル解析における最も大きな問題があるわけであるが、ともかくもこのような困難を回避してスペクトル密度関数を推定するためには、何らかの特別な「仮定」あるいは「モデル」が必要となる。このように時系列に対して何か特別な構造を導入することにより、それにしたがって、はじめて種々の議論が可能になる。

したがって、有限のデータを解析するにあたって最も重要な問題は、導入した仮定あるいは方法が取り扱っている現象によく調和するか否か、である。本論文であつかう M.E.M.

についてもこのような背景をふまえた上で理解する必要がある。それでは、M. E. M. は時系列に対してどのような仮定の上に成り立っているのだろうか。

従来における、時系列のスペクトル解析の最も一般的な方法には、ペリオドグラム (periodogram) (JONES, 1965) 法と BLACKMAN and TUKEY (1959) の方法がある。前者は時系列に対して周期性を仮定しているが、この方法は Fast Fourier Transform (F.F.T.) (COOLEY and TUKEY, 1965) の出現以来最も広く用いられている。もう一つは、BLACKMAN and TUKEY による「推定された自己共分散関数」をフーリエ変換する方法である (以後 B.T.M. と省略する)。この方法においては、後に述べるように「与えられないラグ (lag) の自己共分散関数」は 0 と仮定されていることになる。(補注参照)

これらの方法の用いている仮定が実際の時系列に対して非現実的なものであることはいうまでもない。また、これらの方法には必ずウィンドウ (window) の問題がともない、そのために、得られるスペクトルの信頼度がそこなわれるだけでなく、特に短いデータの場合にその分解能は著しくおちる。

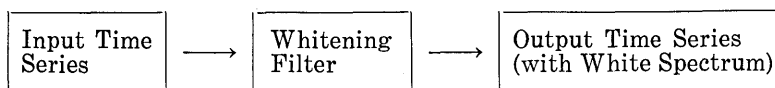
これに対して M. E. M. においては「与えられた有限の自己共分散関数」を用いて「未知の自己共分散関数」を推定する。ここで用いられているのが「情報論的エントロピー最大」いわゆる「maximum entropy」の概念であり、そのために、この方法は maximum entropy method (M.E.M.) と呼ばれている。

M.E.M. においては、このようなデータの「maximum entropy extension」で切断の影響 (truncation effect あるいは end effect) をさけることになるので、この方法を用いるときにはウィンドウの心配がなく、サイドローブ (side lobe) の影響も従来の方法に比して非常に小さいのが特長である。したがって、M.E.M. はまた「data adaptive method」とも呼ばれている (LACOSS, 1971)。

4. Maximum entropy method

M.E.M. については最も簡単には線型フィルターの立場から考えることができる (BURG, 1967; SMYLLIE *et al.*, 1973)。

今ある時系列が与えられたとき、出力を白色化するような予測フィルターを考えると、



したがって

$$\text{Input Spectrum} = \frac{\text{Output Spectrum}}{\text{Spectrum of Filter Response}}$$

これから、よく知られた次の maximum entropy (M. E.) スペクトルの式を導くことができる (斎藤, 1974 b)。

$$P(f) = \frac{P_M}{2f_N} |1 + \sum_{n=1}^M a_n e^{-i2\pi f n \Delta t}|^{-2} \quad (8)$$

ここで、 f_N はナイキスト周波数 (Nyquist frequency) で $f_N = 1/2\Delta t$ であり、 $(1, a_1, a_2,$

…, a_M) は予測誤差フィルター (prediction error filter) の係数, P_M は予測誤差の 2 乗平均 (分散) である。

結局, M. E. スペクトルを求めることは, 予測誤差フィルターを推定し, 予測誤差の分散を計算することになるのであるが, 本節では BURG (1967) の原論文にしたがって M. E. M. についてその理論を示すことにする (CHEN et al., 1974)。

この方法は基本的には, 情報論的エントロピーの概念に基づいている。良く知られているように, 情報のエントロピーとは情報の曖昧度の尺度であり, エントロピーが大きいほど曖昧度は大きい。したがって, 与えられた条件の下で最も曖昧度の高い, つまりエントロピーの大きい状態が最も実現される可能性が大きい状態であるに違いない (斎藤, 1974 b)。このような考えから M. E. スペクトルが導かれる。

ガウス過程に従う時系列のエントロピー h は次の式に比例する。

$$\int_{-f_N}^{f_N} \log P(f) df \quad (9)$$

$P(f)$ はスペクトル密度関数である。M. E. スペクトルは, このエントロピー h を次の「与えられた自己共分散関数」 $\Phi(n)$ の制約下で最大にする $P(f)$ で与えられる。

$$\int_{-f_N}^{f_N} P(f) Z^n df = \Phi(n) \quad -M \leq n \leq M \quad (10)$$

$$Z = e^{i2\pi f \Delta t}$$

具体的には $P(f)$ は (9), (10) 式の条件付変分を解くことによって得られる。Lagrange の未定乗数 λ_n を用いて変分をとると

$$\delta \int_{-f_N}^{f_N} \{ \log P(f) - \sum_{n=-M}^M \lambda_n [P(f) Z^n - \Phi(n)/2f_N] \} df$$

$$= \int_{-f_N}^{f_N} \left[\frac{1}{P(f)} - \sum_{n=-M}^M \lambda_n Z^n \right] \delta P(f) df = 0 \quad (11)$$

となる。これから

$$P(f) = \frac{1}{\sum_{n=-M}^M \lambda_n Z^n} \quad (12)$$

が得られる。Lagrange の未定乗数 λ_n は (10) 式の制約のもとに決定されるべきものである。(10) 式は

$$P(f) = [\dots + \Phi(M) Z^{-M} + \dots + \Phi(0) + \dots + \Phi(-M) Z^M + \dots] / 2f_N$$

$$= \frac{1}{2f_N} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Phi(n) Z^{-n} \quad (13)$$

と同等である。 $P(f)$ は実数かつ非負であることから (12) 式は

$$P(f) = \frac{P_M/2f_N}{(1+a_1 Z + a_2 Z^2 + \dots + a_M Z^M)(1+a_1^* Z^{-1} + a_2^* Z^{-2} + \dots + a_M^* Z^{-M})}$$

$$= \frac{P_M}{2f_N} |1 + \sum_{n=1}^M a_n Z^n|^{-2} \quad (\text{注}) \quad (14)$$

(注) (14)式は, (8)式や(24)式とは, 指数部の符号が異なるが, $a_n = a_n^*$ であるからそれらと全く等しい式となる。

と表現することができる。ここで $1+a_1Z+a_2Z^2+\dots+a_MZ^M$ は最小位相である。

(13) 式と (14) 式は等しいから

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \phi(n) Z^{-n} \right) \left(1 + \sum_{n=1}^M a_n Z^n \right) \\ &= \frac{P_M}{\left(1 + \sum_{n=1}^M a_n^* Z^{-n} \right)} \\ &= \dots + b_{-2} Z^{-2} + b_{-1} Z^{-1} + P_M \end{aligned} \quad (15)$$

(15) 式の右辺は Z^j ($j=1, 2, \dots$) の係数が 0 であることを示している。 Z^0 から Z^M までの係数を比較すると、自己共分散関数が偶関数であることから次式が得られる。

$$\begin{bmatrix} \phi(0) & \phi(1) & \dots & \phi(M) \\ \phi(1) & \phi(0) & & \\ \vdots & & \ddots & \\ \phi(M) & \phi(1) & \phi(0) & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_M \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (16)$$

係数 a_1, a_2, \dots, a_M , および P_M は (16) 式を解くことによって得られる。また、さらに (15) 式の Z^j ($j \geq M+1$) を比較することにより

$$\phi(M+l) = - \sum_{n=1}^M a_n \phi(M+l-n) \quad (l \geq 1) \quad (17)$$

が得られる。この式は、M.E.M. においては、自己共分散関数の最初の $\phi(0), \phi(1), \dots, \phi(M)$ が与えられれば、残りの $\phi(M+1), \phi(M+2), \dots$ も決まることを示している。

以上 M. E. M. の理論を導いてきたが、(13) 式からわかるように、M. E. スペクトルは「与えられた自己共分散関数」のフーリエ変換となっており、しかも、「与えられない自己共分散関数」は 0 と仮定されていない。そして (10) 式から、そのフーリエ逆変換が「与えられた自己共分散関数」となっていることがわかる。一方、これに対して、従来の B. T. M. においては、「与えられない自己共分散関数」は 0 という仮定が暗黙のうちになされているし、ウィンドウを用いていることになるから、そのフーリエ逆変換は「与えられた自己共分散関数」とはなっていない。

したがって、「与えられた有限個の自己共分散関数」を用いて、その時系列のスペクトル密度を推定する場合、両者は異なる結果を与える。この違いは、自己共分散関数の減衰が速いような場合には小さく、減衰が遅いような時系列に対して顕著であることが予想される。このことから、M.E.M. は後者のような信号、特にスペクトルが鋭いピークをもつような時系列に対して有効であることが考えられる。

5. 自己回帰モデル

M.E.M. については、自己回帰 (A.R.) 解析の観点からも研究されている (YULE, 1927; PARZEN, 1969; AKAIKE, 1969 a, b, 1974). M.E.M. と時系列の A.R. 解析との等価性については、ULRYCH and BISHOP (1975) が詳しく議論しているが、この A.R. 解析は、M.E.M. を理解する上で非常に重要であるだけでなく、この方法を用いる上でのフィルタ

—の長さの決定に対しても、有力な見通しを与える。

A.R. モデルは、定常時系列の解析法として YULE (1927) が発案し、その後 PARZEN (1969) あるいは AKAIKE (1969) 等により広く研究されている。定常時系列の解析法としてはピリオドグラム法 (JONES, 1965), 最近では、この A.R. モデルの他に、移動平均 (moving average), モデルあるいは、この両者の混合 (mixed autoregressive-moving average) モデルが考えられている。これらについては本論文では省略するが、詳しくは BOX and JENKINS (1970) を参照されたい。

このうち、A.R. モデルは定常時系列のモデルとして非常によく用いられており、この A.R. 過程においては、有限個の A.R. 係数と分散さえ知れば、これによって、時系列の自己共分散関数もスペクトル密度関数もすべて定まってしまう。

M 次の A.R. 過程は一般に、

$$x_i = \sum_{n=1}^M a'_n x_{i-n} + \xi_i \tag{18}$$

と表現される。但し、 $E\{x_i\} = 0$ (E は期待値を示す), ξ_i は白色雑音, $\{a'_n\}$ は A.R. 係数であり、

$$Z^M - a'_1 Z^{M-1} - a'_2 Z^{M-2} \dots - a'_M Z - a'_M = 0$$

の根はすべて $|Z| < 1$ である。これは A.R. 過程の物理的可能性のための条件である。

この条件から ξ_i は

$$E\{\xi_i x_{i-j}\} = 0 \quad (j \geq 1) \tag{19}$$

を満たしている。(18) 式を用いて書き直すと

$$E\{(x_i - a'_1 x_{i-1} - a'_2 x_{i-2} \dots - a'_M x_{i-M}) x_{i-j}\} = 0 \quad (j \geq 1)$$

すなわち、

$$\phi(j) - a'_1 \phi(j-1) - a'_2 \phi(j-2) \dots - a'_M \phi(j-M) = 0$$

となる。 $j=1, 2, 3, \dots$ について書き下すと

$$\left. \begin{aligned} a'_1 \phi(0) + a'_2 \phi(1) + \dots + a'_M \phi(M-1) &= \phi(1) \\ a'_1 \phi(1) + a'_2 \phi(0) + \dots + a'_M \phi(M-2) &= \phi(2) \\ &\dots\dots\dots \\ a'_1 \phi(M) + a'_2 \phi(M-1) + \dots + a'_M \phi(1) &= \phi(M+1) \\ a'_1 \phi(M+1) + a'_2 \phi(M) + \dots + a'_M \phi(2) &= \phi(M+2) \\ &\dots\dots\dots \end{aligned} \right\} \tag{20}$$

この式を変形すると、 $a_i = -a'_i$ として

$$\begin{bmatrix} \phi(0) & \phi(1) & \dots & \phi(M) \\ \phi(1) & \phi(0) & & \\ \vdots & & \ddots & \\ \vdots & & & \phi(1) \\ \phi(M) & \phi(1) & \phi(0) & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_M \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \tag{21}$$

(但し, $P_M = \phi(0) + a_1\phi(1) + \dots + a_M\phi(M)$) および

$$\phi(M+l) = -\sum_{n=1}^M a_n\phi(M+l-n) \quad (l \geq 1) \quad (22)$$

が得られる.

(18) 式の Z 変換を考えると

$$X(Z) - X(Z)(a'_1Z + a'_2Z^2 + \dots + a'_MZ^M) = A(Z)$$

これから

$$|X(Z)|^2 = \frac{|A(Z)|^2}{|1 - a'_1Z - a'_2Z^2 - \dots - a'_MZ^M|^2} \quad (23)$$

$Z = \exp(-i2\pi f)$ を代入することにより, A. R. 過程のスペクトル密度関数を形式的に導くことができる (詳しくは BOX and JENKINS, 1970; 藤井, 1975 参照). 読み取り間隔 Δt を考慮に入れれば (8) 式や (14) 式と全く同等の次式が得られる.

$$P(f) = \frac{P_M}{2f_N} |1 + \sum_{n=1}^M a_n e^{-i2\pi f n \Delta t}|^{-2} \quad (24)$$

係数 $\{a_n\}$ と P_M は (21) 式の正規方程式を解くことによって得られることはいうまでもない. このようにして, M. E. M. と時系列の A. R. 解析の等価性が示されるわけであるが, 次に問題になるのは, 実際の時系列に対しては, 何次の次数の A. R. モデルを用いたらよいかである. この問題に対しては次節で考えることにする.

6. フィルターの長さ

M. E. M. を実際に用いるにあたり, 最も重要な問題は, フィルターの長さをどの程度にとればよいかということである. ちょっと考えるとフィルターの長さ M の値は充分大きくとっておけばよいように考えられる. これはある意味では正しいかも知れないが, 推定量ということの問題にするときには問題はそう簡単ではない. 大きくした M に対する推定量がもとの時系列 $\{x_n\}$ のパラメータを求めているかどうかは簡単にはいえない. また, 時系列が本当は次数の小さな A. R. 過程にしたがっているような場合には, M を大きくすることにより, その分だけ推定量の偶然誤差がふえて不安定な推定量になる (藤井, 1974).

最適なフィルターの長さについて, 一般的に議論することは難しい. これは時系列の性質, データの長さ, S/N 比にもよるであろうし, 解析の目的にもよると考えられる.

フィルターの長さの決定方法については, 今までにも, いろいろ考えられている (GALBRAITH, 1971; ANDERSON, 1971). しかし, これらの方法には最終的に解析者側の主観的な判断を必要とするような積極性に欠けるところがあった. 最近, AKAIKE (1969 a, b) は異なった立場から Final Prediction Error (F. P. E.) の概念をとり入れた criterion を提唱している.

AKAIKE の考え方は次のとおりである. 一般にフィルターが短いと分解能が悪くなり, ひどく平均化されたスペクトルが得られる. 一方フィルターが長すぎる場合には, 一般に

分解能はあがるが、有限個のデータを用いる限り、スペクトルの分散は大きくなり、その精度は悪くなる。したがって、分解能という観点からはフィルターはできるだけ長く、またスペクトルの分散を小さくし、精度をあげたいという観点からは、フィルターはできるだけ短くした方がよい。そこで、この両要請の兼ね合いを考えた何らかの基準を設けて、最適なフィルターの長さを推定しようというのが AKAIKE の F. P. E. criterion である。

この F. P. E. は予測誤差の 2 乗平均すなわち分散として定義される。 \hat{x}_i を x_i の予測値とすると、

$$FPE = E \{(x_i - \hat{x}_i)^2\} \quad (25)$$

と表わされる。データ数が N で $M+1$ 次の予測誤差フィルターを用いた場合には

$$\begin{aligned} FPE(M, N) &= v_M (1 + M/N) \\ &= v_M + v_M \cdot M/N \end{aligned} \quad (26)$$

で表わされる (ULRYCH and BISHOP, 1975; FRYER *et al.*, 1975)。 v_M は $M+1$ 次の予測誤差フィルターの予測誤差の 2 乗平均である。

ここで

$$e_{M,i} = x_i + \sum_{k=1}^M a_k x_{i-k} = \sum_{k=0}^M a_k x_{i-k} \quad (a_0 = 1) \quad (27)$$

$$\begin{aligned} S_M &= \sum_{i=1}^N e_{M,i}^2 = \sum_{i=1}^N \sum_{r,s=0}^M a_r a_s x_{i-r} x_{i-s} \\ &\approx N \sum_{r,s=0}^M a_r a_s \phi(r-s) \\ &= N \sum_{r=0}^M a_r \phi(r) \\ &= NP_M \end{aligned} \quad (28)$$

とすると

$$v_M \approx S_M / (N - M) \quad (29)$$

となる (FRYER *et al.*, 1975)。したがって

$$FPE(M, N) = \frac{N+M}{N-M} P_M \quad (30)$$

が得られる。

解析する前にはデータから平均値を引くのが普通であるから、このときはパラメータの数は $M+1$ になり $FPE(M, N)$ は

$$FPE(M, N) = \frac{N+M+1}{N-M-1} P_M \quad (31)$$

となる (詳しくは AKAIKE, 1969 a, b, 1974; ULRYCH and BISHOP, 1975; FRYER *et al.*, 1975, 参照)。

ここで、 P_M と $FPE(M, N)$ は M のみの関数であることに注意する必要がある。 S_M は予測誤差の二乗和であり、 P_M はその二乗平均となっていて、一般に M がふえると P_M

は単調に減少する (斎藤, 1974 b). これに対して, (30) 式や (31) 式の最初の部分は, M とともに増大していく. したがって, $FPE(M, N)$ を最小にするような M の値が両要請に従う最良のフィルターの長さということになる. この方法により, フィルターを計算する際に $FPE(M, N)$ も同時に計算しておけばフィルターの長さを, 自動的に決定することができる.

この方法は, 理論的にも理解しやすく, また, M.E.M. を実際に適用する上で非常に便利なものである. ULRICH and BISHOP (1975), FRYER *et al.* (1975) 等はこの方法を実際のデータへの適用を試みその妥当性を確認している.

以上, AKAIKE の F. P. E. criterion についてその概略を述べてきたが, 実際のデータについて適用してみると, $FPE(M, N)$ は最初急激に減少して, それから後は極めてゆっくりと減少し, それから徐々に増加していくので F.P.E. の最小値もその程度のところにあると思われる (たとえば Fig. 2 b). しかし, 多くの場合 $FPE(M, N)$ の最小値と思われるあたりでは, その値が非常に広い範囲にわたって, ほとんど一定となり, どこが最小値か決めかねることが多い (斎藤, 1974 b). また, 時系列が異なる周波数成分をもつような場合 $FPE(M, N)$ にはいくつかの極小値があらわれることもあり, どの極小値を選ぶべきか迷うこともある.

一般に, 時系列の周期に比してデータが充分長いような場合には, フィルターの長さによるスペクトルの変動は比較的小さく, フィルターの長さの決定も容易である. これに対して, 着目する周期に比してデータが短い場合には, フィルターの長さはスペクトルに鋭敏にきいてくるので, その決定は容易ではない.

F.P.E. criterion あるいは他のどの criterion も N が充分大きい場合の統計的な漸近理論といえ, データが短い場合には, その適用は困難であり, 必ずしも最適のフィルターの長さを与えるとは限らない.

また, 後に示すように, 周期的な信号に対しては, F.P.E. criterion の示す長さより, 一般に長いフィルターを用いた方がよい結果が得られる.

非定常の時系列に対しては, フィルターの長さの決定は非常に困難であることが多い.

結局, フィルターの長さは, 時系列の性質, データの長さ, S/N 比あるいは, 解析の目的に応じて決めるべきであろう. 実際には, フィルターの長さを変えて, いくつかスペクトルを計算し, 比較してみるのがよいと思われる.

7. M. E. M. によるスペクトル

本節では, 実際に M. E. M. がどのようなスペクトルの推定を与えるかについて検討することにする.

LACOSS (1971) は「なめらかなスペクトル」をもつ時系列に対しては, 正しいスペクトルを与えるが, スペクトルが「鋭いピーク」をもつ場合には, そのピーク値は正しい値を示さず, その面積が正しい値に比例する旨の報告をしている.

ここでは, まず, 減衰振動および正弦波を用いて, この M. E. M. の性質について考えてみよう. M. E. M. の解法には, 後に詳しく述べるように自己共分散関数を用いる方法 (A.F. 法) と Burg 提唱の Burg アルゴリズムがあるが, 当面, 前者のオーソドックス

な方法を用いて議論を進めることにする。Burg アルゴリズムについては後節で検討する。

(i) 減衰振動

$$f(t) = e^{-1.8t} \sin(6.5t)$$

0.05 sec で 100 点読み取り, フィルターの数 $FL=M=6, 10, 20, 30, 40$ について計算を行なった。この場合, フィルターの長さには関係なく, ほとんど同じスペクトルが得られ, 理論 ((7) 式) から期待されるスペクトルに非常によく一致する。このような減衰振動は継続時間が短いエネルギー信号であって, 「なめらかなスペクトル」をもち, その自己共分散関数は, すみやかに減衰する。このようなものに対しては, M.E.M. は正しいスペクトルの推定を与えられと考えられる。

(ii) 1 Hz 正弦波に 10% 白色雑音を加え, 0.05 sec で 101 点読み取り $FL=6, 7, 8, 10, 12, 18, 24, 30$ について計算した。この場合 5 周期分の波を解析することになる。スペクトルはフィルターの長さとともに振幅および形が変わる (Fig. 1a)。 $FL=8$ で F.P.E. は最小になる。Fig. 1b はフィルターの長さとのピーク値を示したものである。フィルターの長さが長くなるとともにスペクトルはシャープになりピーク値も増大している。 $FL=18$ 程度でピーク値は最大となり, それからは減少する傾向を示す。これには, 原因の一つとしては, 自己共分散関数の推定が悪くなることが考えられる。自己共分散関数の推定

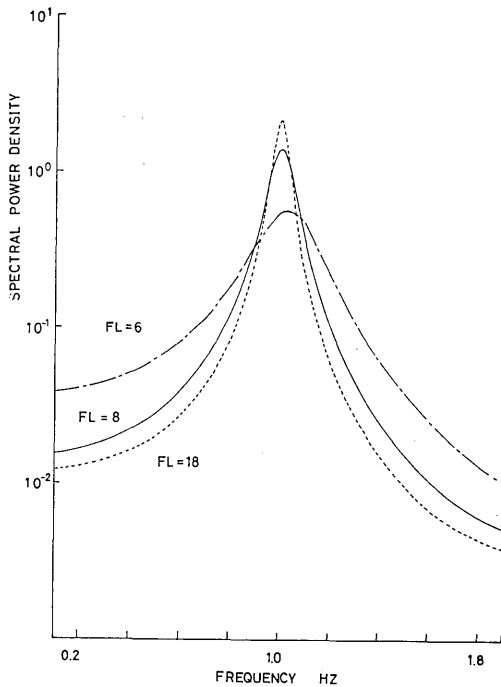


Fig. 1a. M.E.M. spectra obtained from a 1 Hz zero initial phase sine wave, superposed with 10% white noise. Number of data samples (N) is 101, sampling interval (Δt) is 0.05 s and filter lengths (FL) are 6, 8 and 18.

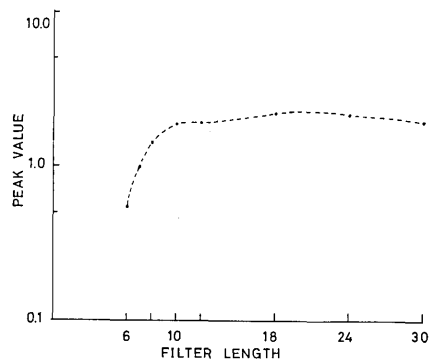


Fig. 1b. Peak value of spectra as a function of filter length for the sine wave shown in Fig. 1a.

がよければ、ピーク値はさらに増大すると考えられる。

正弦波のようなものに対しては、M.E.M. はフィルターの長さとともに、ピーク値、スペクトル形ともかなりの変化を示す。そして自己共分散関数の推定がよい範囲では、ピーク値はフィルターの長さとともに増大する。正弦波に対しては、理論的には、その周波数で振幅は無限大になるはずであるが、このような信号に対しては有限のデータを用いて自己回帰係数を推定する際の「まるめの誤差 (rounding error)」のために、実際には振幅有限の幅をもったスペクトルが得られる。Burg (unpublished note b) は、M. E. M. はスペクトル密度を推定するのであり、そのピーク値は正しい値を示さないかもしれないが、その面積は正しい値に比例することを指摘している。

このことに関しては、次の関係式に着目する必要がある。

$$\int_{-f_N}^{f_N} P(f) df = \phi(0) \quad (32)$$

この式は $P(f)$ の積分が $\phi(0)$ すなわち真のパワーに比例することを示している。ピーク値に対して「まるめの誤差」が非常に大きく影響するのに対して、その積分すなわち面積に対しては、その影響は小さい。このことから、正弦波のようにスペクトルが鋭いピークをもつ場合には、M. E. スペクトルのピーク値は正しい値を示さないが、その面積が真のパワーに比例するということになるのである。

今、ピークのバンド幅を、ピーク値から 3dB おちた点でのスペクトル幅とすれば、ピークの面積したがって全パワーは、ピーク値とバンド幅の積でよく近似される (Burg, unpublished note b)。このことから、時系列がいくつかの鋭いピークをもつ場合には、ピーク値とバンド幅の積をとることにより、容易にそれらのパワーの差を比較することができる。この積が大きければ大きいほどパワーの大きい成分ということになる。

最後に、一般の時系列について考えてみる。M.E.M. はそれらに対して果たしてよいスペクトル密度関数の推定を与えるのであろうか。すでに述べたように、スペクトル密度関数の推定法には、この他 B. T. M. や F. F. T. を用いる方法がある。その他にもいろいろあるであろう。それでは、いったいどれが最もよいのかという問題も生じる。この点に関しては、藤井 (1975) が詳細に議論しているので省略するが結論からいえば、もし、時系列がガウス過程であり、定常で A. R. 過程に従うような場合には、M. E. M. は最もよいスペクトル密度関数の推定 (これを有効推定量と呼んでいる) になる。時系列がこのような構造をもたないときには、B. T. M. などを用いてスペクトル密度関数を推定することになる。地球物理学をはじめとする、あらゆる分野における諸現象の多くは非定常のものも多く、A. R. 過程が適用されるかどうかの保証はない。このことは、逆に考えれば、M.E.M. をそれらに適用することは、その時系列を、A. R. 過程とみなして解析することになるのであって、この際問題になるのは、このような仮定がどの程度許されるのかどうかである。また、それに応じて当然フィルターの長さも関係してくるであろう。このことは M.E.M. を実際に用いるうえで、最も重要な問題であり、常に注意しなければならないことである。

8. M. E. スペクトルの上限と下限

M. E. スペクトルの振幅の上限と下限について Burg (unpublished note a) が議論し

ているので、以下それについて述べる。予測誤差フィルターの計算に際しては Levinson の recursion (WIGGINS and ROBINSON, 1965) を実行している。したがって $M+1$ 次の予測誤差フィルター $\{a_{M,i}\}$ と M 次のフィルター $\{a_{M-1,i}\}$ の間には次の関係がある。

$$\begin{pmatrix} 1 \\ a_{M,1} \\ a_{M,2} \\ \vdots \\ a_{M,M} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ a_{M-1,1} \\ a_{M-1,2} \\ \vdots \\ a_{M-1,M-1} \\ 0 \end{pmatrix} + a_{M,M} \begin{pmatrix} 0 \\ a_{M-1,M-1}^* \\ \vdots \\ a_{M-1,2}^* \\ a_{M-1,1}^* \\ 1 \end{pmatrix} \quad (33)$$

$a_{M,M}$ は $M+1$ 次の reflection (あるいは partial correlation) 係数である。 $Z = \exp(i2\pi f \Delta t)$ とすると

$$1 + a_{M,1}Z + \cdots + a_{M,M}Z^M = 1 + a_{M-1,1}Z + \cdots + a_{M-1,M-1}Z^{M-1} + a_{M,M}Z^M(1 + a_{M-1,1}^*Z^{-1} + \cdots + a_{M-1,M-1}^*Z^{-M+1})$$

$H_M(f)$ を $M+1$ 次の予測誤差フィルターのフーリエ変換とすると

$$H_M(f) = H_{M-1}(f) + a_{M,M} e^{i2\pi f M \Delta t} H_{M-1}^*(f) \quad (34)$$

両辺の絶対値をとると

$$|H_{M-1}(f)|(1 + |a_{M,M}|) \geq |H_M(f)| \geq |H_{M-1}(f)|(1 - |a_{M,M}|) \quad (35)$$

$H_0(f) = 1$ から始めて

$$\prod_{n=1}^M (1 + |a_{n,n}|) \geq |H_M(f)| \geq \prod_{n=1}^M (1 - |a_{n,n}|) \quad (36)$$

$M > 1$ で

$$P_M = \phi(0) \prod_{n=1}^M (1 - |a_{n,n}|^2) \quad (37)$$

したがって、次の式を得る。

$$\prod_{n=1}^M \left(\frac{1 - |a_{n,n}|}{1 + |a_{n,n}|} \right) \leq \frac{P_M(f)}{\phi(0)/2f_N} \leq \prod_{n=1}^M \left(\frac{1 + |a_{n,n}|}{1 - |a_{n,n}|} \right) \quad (38)$$

(38) 式は $M+1$ 次の予測誤差フィルターを用いた場合の M.E. スペクトルの上限と下限を与える。この式から、上限と下限の比をとることにより

$$\prod_{h=1}^M \left(\frac{1 + |a_{n,n}|}{1 - |a_{n,n}|} \right)^2 \quad (39)$$

が得られる。これから M.E. スペクトルのダイナミックレンジを知ることができる。

9. 地震波解析への応用

本節では、M. E. M. の地震波解析への応用を試みる。なお、M. E. M. の解法に用いられているのは A. F. 法である。

A.R. 過程を海底下の脈動に対してあてはめることは、FRYER *et al.* (1975) が行なっている。Fig. 2a は Mariana 海盆での 1973 年 7 月における海底下の脈動の速度スペクトルである。記録は地震研究所型海底地震計による (NAGUMO *et al.*, 1975)。M. E. M. のフィルターの長さ、すなわち A. R. モデルの次数は、F. P. E. criterion を用いて決定した (Fig. 2 b)。Fig. 3 は遠洲灘の 1974 年 11 月における脈動の速度スペクトルである。

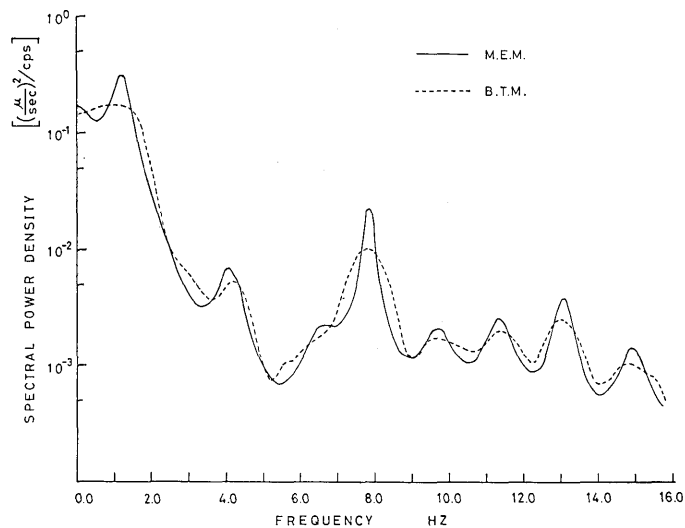


Fig. 2a. Microseismic spectra on the sea bottom, July, 1973, Mariana basin. Solid line, M.E.M. spectrum ($N=1000$, $FL=52$, $\Delta t=0.0118$ s); broken line, B.T.M. spectrum ($N=1000$, maximum lag=100, $\Delta t=0.0118$ s).

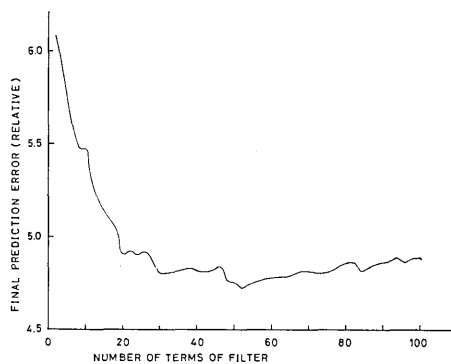


Fig. 2b. F.P.E. as a function of filter length for the microseisms shown in Fig. 2a. F.P.E. is minimum when $FL=52$.

観測された地震の実体波を、ランダム雑音存在下での確率過程の実現であると考えれば、M.E.M. は地震の実体波解析に対しても有力な手段となると考えられる(南雲・大内, 1974). Fig. 4 a, b は爆破地震(館山 1972)を震源から約 2 km 離れた所で観測したものの速度スペクトルである. Fig. 5 a と Fig. 5 b は松代(1969)における極微小地震($M=-0.5$, 0.3)の速度スペクトルである.

B. T. M. に対しては Hanning ウィンドウが用いられ、F. F. T. に対しては平滑化の

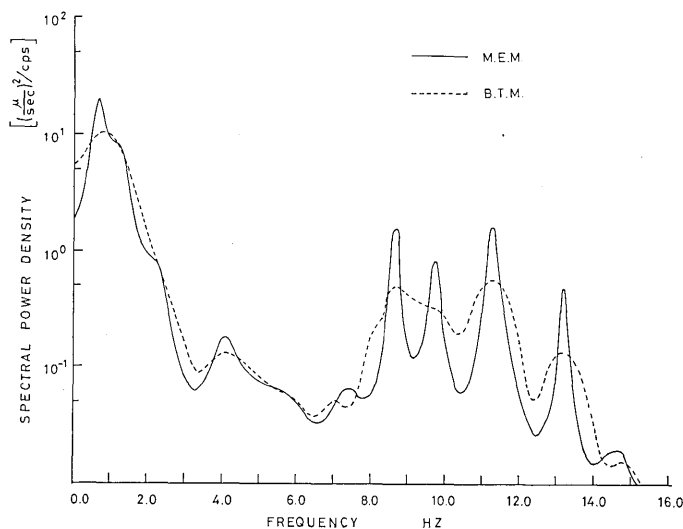


Fig. 3. Microseismic spectra on the sea bottom, November, 1974, Enshunada, off Tokaido, central Japan. Solid line, M.E.M. spectrum ($N=1000$, $FL=83$, $\Delta t=0.0102$ s); broken line, B.T.M. spectrum ($N=1000$, maximum lag=100, $\Delta t=0.0118$ s).

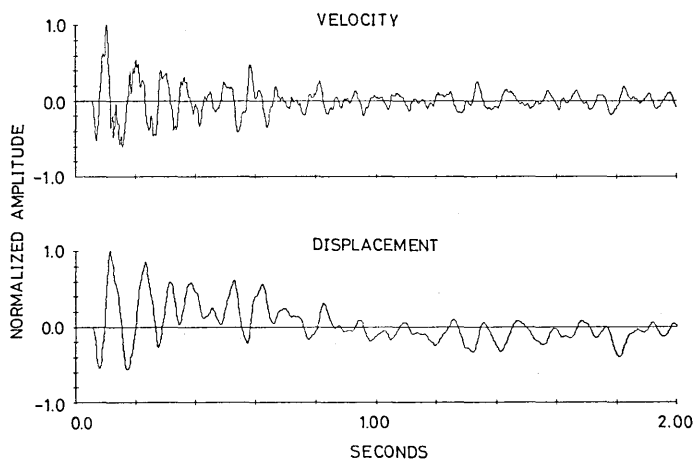


Fig. 4a. Record of an explosive seismogram at Tateyama in Japan.

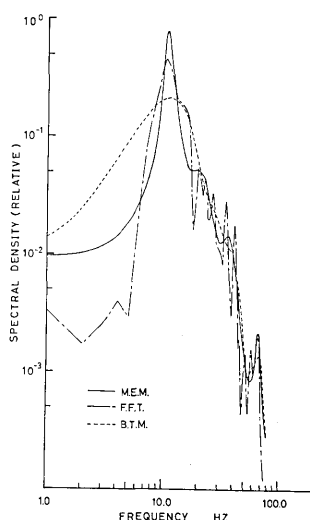


Fig. 4b. Spectral density of the explosive seismogram shown in Fig. 4a. Solid line, M.E.M. spectrum ($N=500$, $FL=40$, $\Delta t=2$ ms); broken line, B.T.M. ($N=500$, maximum lag=50, $\Delta t=2$ ms); broken and dotted line, F.F.T. spectrum ($N=512$, $\Delta t=2$ ms).

処理が加えてある。

これらの例において、M.E.M. は従来の方法に比して、鋭いピークのスペクトルが得られることに注目すべきである。従来の方法の B.T.M. や F.F.T. によるスペクトルにおいても、M.E.M. におけるピークに対応するピークは見出されるが、振幅は小さく、なまっただけのピークになっている。

脈動のようなものに対しては、フィルターの長さの決定は比較的容易であるが、地震の実体波のようなものに対しては、その決定は一般に難しい。これは、実体波の非定常的な性質によると考えられる。実体波のスペクトルはフィルターの長さに非常に鋭敏である。もちろん F.P.E. criterion などが、実際の決定に際してはよい目安となると考えられる。たとえば、Fig. 5a と Fig. 5b の例はこの criterion を用いて決めたものである。この AKAIKE の criterion が地震の実体波のようなものに対して常に有効であるかは疑問の残るところである。Fig. 6a と Fig. 6b はやはり松代地区の地震（それぞれ $M=0.9$ と -0.5 の地震）のフィルターの長さを変えた場合の速度スペクトルである。これらの例においては $FL=16$ (Fig. 6a) と $FL=9$ (Fig. 6b) において、F.P.E. は最小となるが、それらに対するスペクトルが適当なものとは考えられない。実体波のようなものに対しては、いくつかフィルターの長さを変えてスペクトルを計算しその中から適当と思われるものを選ぶのがよいであろう。

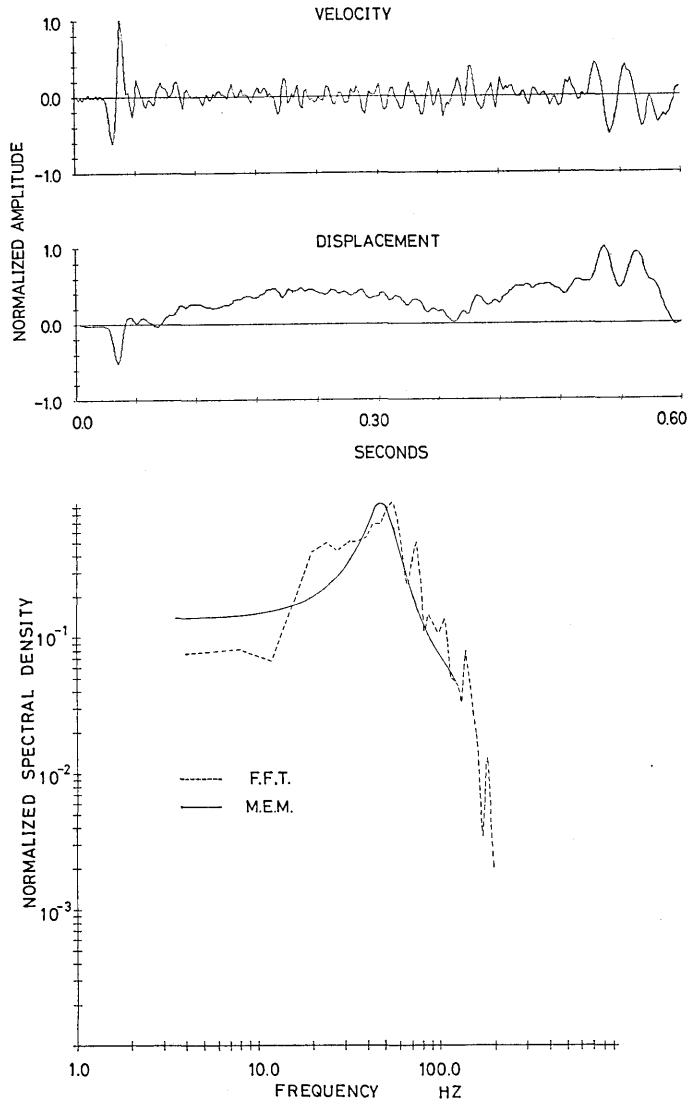


Fig. 5a. Spectra of an ultra-microearthquake in Matsushiro ($M=-0.5$). Solid line, M.E.M. spectrum ($N=80$, $FL=6$, $\Delta t=2$ ms); broken line, F.F.T. spectrum ($N=128$, $\Delta t=2$ ms).

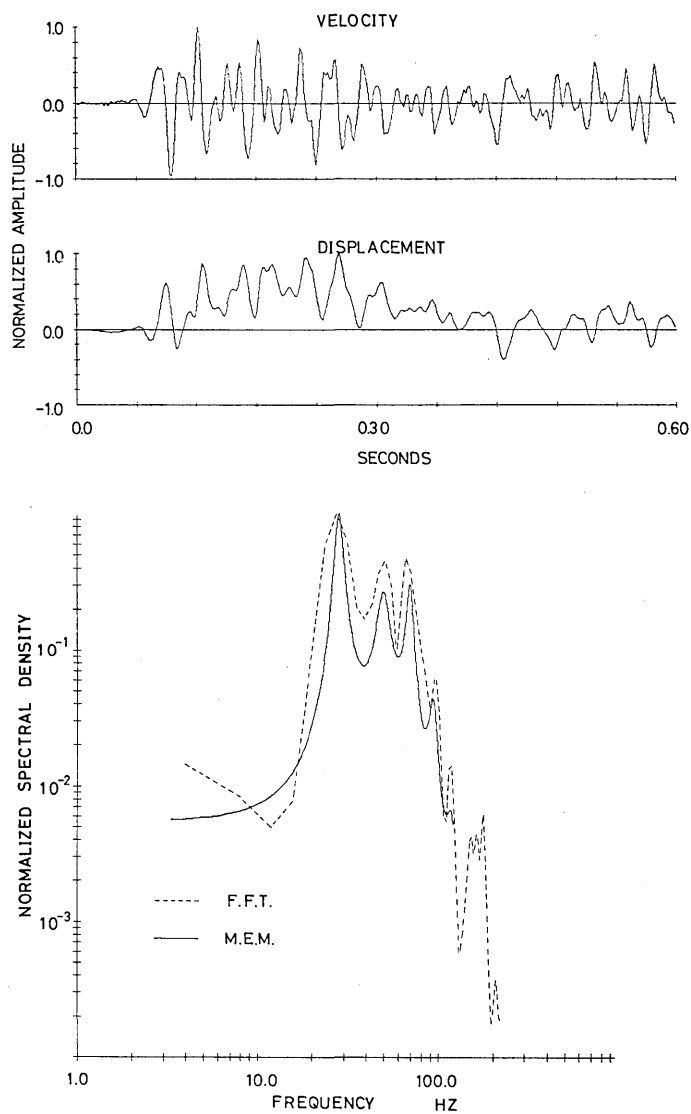


Fig. 5b. Spectra of an ultra-microearthquake in Matsushiro ($M=0.3$). Solid line, M.E.M. spectrum ($N=150$, $FL=20$, $\Delta t=2$ ms); broken line, F.F.T. spectrum ($N=128$, $\Delta t=2$ ms).

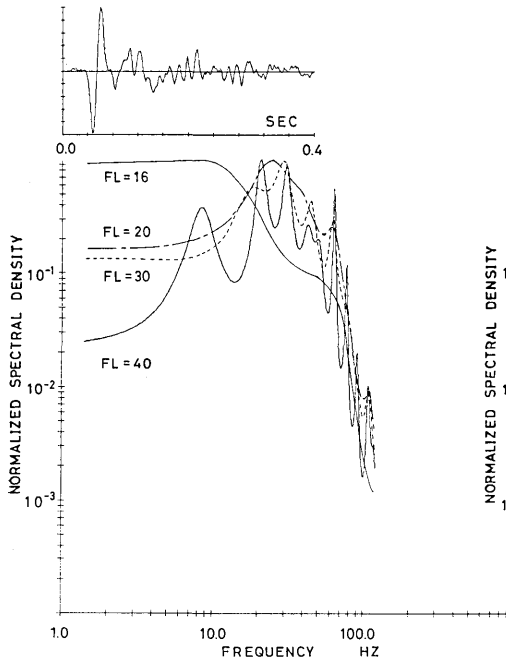


Fig. 6a. M.E.M. spectra of a ultra-micro-earthquake in Matsushiro ($M=0.9$). Several filter lengths are used ($N=200$, $FL=16, 20$ and 40 , $\Delta t=2$ ms). Note the change of the spectral shape as to filter length. F.P.E. is minimum when $FL=16$.

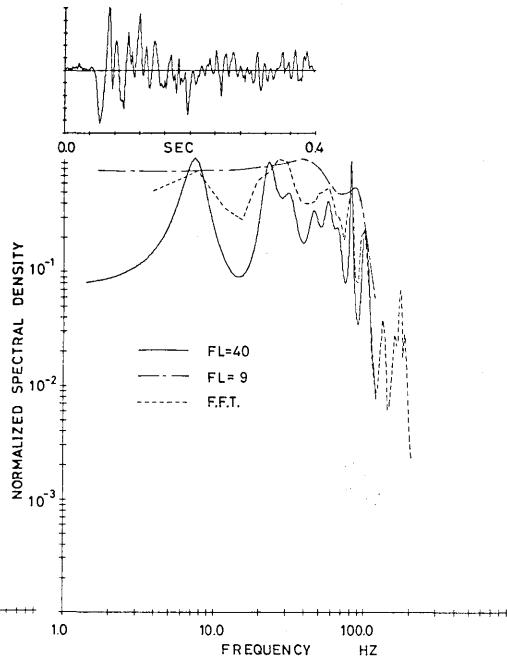


Fig. 6b. M.E.M. spectra of a Matsushiro earthquake ($M=-0.5$). Several filter lengths are used ($N=200$, $FL=9$ and 40 , $\Delta t=2$ ms). Note the variation of the spectral shape and compare with F.F.T. spectrum. F.P.E. is minimum when $FL=9$.

10. Burg アルゴリズム

予測誤差フィルターの係数および分散の計算には、直接自己共分散関数を計算する方法 (A. F. 法) と Burg アルゴリズムがある。ULRYCH and BISHOP (1975) は、この両者を比較し、Burg アルゴリズムは A. F. 法に比して分解能はあがるが、分散が大きく、フィルターの長さが長くなってもゼロに収束しないことを報告している。また SAITO (1974 a) は Burg アルゴリズムは最小位相型のデータに対しては適用できないことを指摘している。本節では、両方法を検討し、その相違を明らかにする。

A. F. 法では、次式を用いて、まず自己共分散関数 $\phi(n)$ を推定する。

$$\phi(n) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N-n} x_i x_{i+n} \quad (n = 0, 1, \dots, M) \quad (40)$$

このようにして得られた $\phi(n)$ を用いて、(16), (21) 式から予測誤差フィルターの係数 $\{1, a_1, a_2, \dots, a_M\}$ と P_M を計算する (詳しくは赤池 (1974) 参照)。

(40) 式ではデータの残りはゼロと仮定されている。したがって、データ数が少ないと、その推定は良くない。特にラグが大きくなると推定はいっそう悪くなる。

Burg アルゴリズムでは自己共分散関数を直接計算しない。式 (16) において、まず、 $M=0$ として P_0 を計算する。

$$P_0 = \phi(0) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i^2 \quad (41)$$

Levinson の recursion を用いて、2 ポイント予測誤差フィルターに拡張する。

$$\begin{bmatrix} \phi(0) & \phi(1) \\ \phi(1) & \phi(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + a_{11} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (42)$$

a_{11} は、前方および後方へフィルターを走らせ、その予測誤差の 2 乗平均 P_1 を最小にするように選ぶ。

$$P_1 = \frac{1}{2(N-1)} \sum_{i=1}^{N-1} [(x_{i+1} + a_{11}x_i)^2 + (x_i + a_{11}x_{i+1})^2] \quad (43)$$

として

$$\frac{\partial P_1}{\partial a_{11}} = 0 \quad (44)$$

から

$$a_{11} = -2 \sum_{i=1}^{N-1} \frac{x_i x_{i+1}}{x_i^2 + x_{i+1}^2}, \quad |a_{11}| \leq 1 \quad (45)$$

(42) 式から、 $\phi(1) = -a_{11}\phi(0)$ と $P_1 = (1 - a_{11}^2)\phi(0)$ が決定される。3 ポイントの場合も同様に

$$\begin{bmatrix} 1 \\ a_{21} \\ a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ a_{11} \\ 0 \end{bmatrix} + a_{22} \begin{bmatrix} 0 \\ a_{11} \\ 1 \end{bmatrix} \quad (46)$$

となり、予測誤差の 2 乗平均 P_2 は

$$P_2 = \frac{1}{2(N-2)} \sum_{i=1}^{N-2} [(F_i + a_{22}B_i)^2 + (B_i + a_{22}F_i)^2] \quad (47)$$

但し

$$F_i = x_{i+2} + a_{11}x_{i+1}$$

$$B_i = x_i + a_{11}x_{i+1}$$

となるから、 a_{22} に関して、 P_2 を最小にすることによって、

$$a_{22} = -2 \sum_{i=1}^{N-2} \frac{F_i B_i}{F_i^2 + B_i^2}, \quad |a_{22}| \leq 1 \quad (48)$$

を得る。

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \phi(0) & \phi(1) & \phi(2) \\ \phi(1) & \phi(0) & \phi(1) \\ \phi(2) & \phi(1) & \phi(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ a_{11} \\ 0 \end{bmatrix} + a_{22} \begin{bmatrix} 0 \\ a_{11} \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} P_1 \\ 0 \\ A_2 \end{bmatrix} + a_{22} \begin{bmatrix} A_2 \\ 0 \\ P_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (49) \end{aligned}$$

から

$$\begin{aligned}\Phi(2) &= -a_{22}\Phi(0) - a_{11}(1+a_{22})\Phi(1) \\ P_2 &= P_1(1-a_{22}^2)\end{aligned}$$

が求められる。同様にして高次の予測誤差フィルターが決定される。

Burg アルゴリズムの特長は、いうまでもなく自己共分散関数を計算せずに、直接フィルターの係数を決定する点である。次に、この Burg アルゴリズムと自己共分散関数を用いる A.F. 法について、その主な違いとその長所、短所について検討してみよう。

両者の主な違いは次の二点である。(1) A.F. 法では (40) 式によって推定された自己共分散関数を用いるのに対して、Burg アルゴリズムでは、データから直接フィルターの係数を計算し、同時に、自己共分散関数も求められる。ここでは、データの与えられていない所ではその値が 0 であるというような無理な仮定がされていない。(2) A.F. 法では一方向の予測のみを考えているのに対して、Burg 法では、前後両方向にフィルターを走らせて、データをフルに利用している。

このようなことから、A.F. 法においては、データ数が少ないようなときには、切断の影響 (end effect) が大きく、フィルターの推定は悪くなり、スペクトルの分解能が悪くなることが考えられる。Burg アルゴリズムでは、この影響は比較的小さく、また、2 方向の予測でデータをフルに利用していることになるから分解能もあがることが考えられる。

実際に、短く切断された正弦波に対して Burg アルゴリズムは著しい分解能を示す

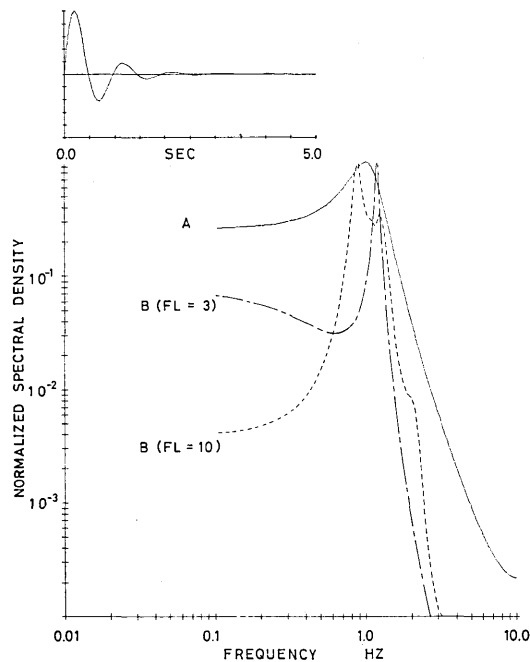


Fig. 7. M.E.M. spectra for a damped sinusoid. Solid line, M.E.M. spectra using the A.F. method ($N=101$, $FL=6$, $\Delta t=0.05$ s); broken and dotted line, M.E.M. spectra using the Burg algorithm ($N=101$, $FL=3$, $\Delta t=0.05$ s); broken line, M.E.M. spectra using the Burg algorithm ($N=101$, $FL=10$, $\Delta t=0.05$ s).

(ULRYCH, 1972 a; CHEN *et al.*, 1974). しかしながら, SAITO (1974 a) の指摘するように, 有限の非定常な最小位相型あるいはこれに近いような信号に対しては, 二方向の予測は矛盾するように作用し, したがって, 得られる結果は最適なフィルターとはならない.

Fig. 7 は減衰振動

$$f(t) = e^{-1.8t} \sin(6.5t)$$

のスペクトルである. 実線は A.F. 法によるスペクトル, 点線および一点鎖線は Burg アルゴリズムによるスペクトルである. A.F. 法が (7) 式から期待されるスペクトルの非常によい推定を与えているのに対して, Burg アルゴリズムはおかしたスペクトルを与えている.

しかし, 充分長い定常時系列のようなものに対しては, どちらの方法でもほとんど同じ結果が得られることは SAITO (1974 a) も報告しているし, 実際の地震波のようなものには, 極端な最小位相型のものも少なく, 雑音の存在下で複雑なことをしているのが普通であり, A.F. 法でも Burg アルゴリズムでもほとんど同じスペクトルが得られる.

Fig. 8 a と Fig. 8 b は両方法によるスペクトルを比較したものである.

Fig. 9 はアルゴリズムを用い, フィルターの長さを変えて計算したスペクトルである.

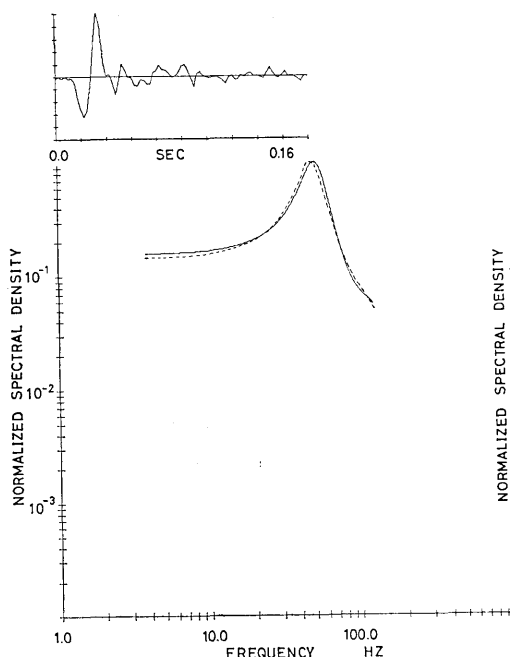


Fig. 8a. Spectra of the Matsushiro earthquake shown in Fig. 5a. Solid line represents M.E.M. spectrum using the Burg algorithm and broken line is M.E.M. spectrum using the A.F. method. $FL=6$ is used for both methods.

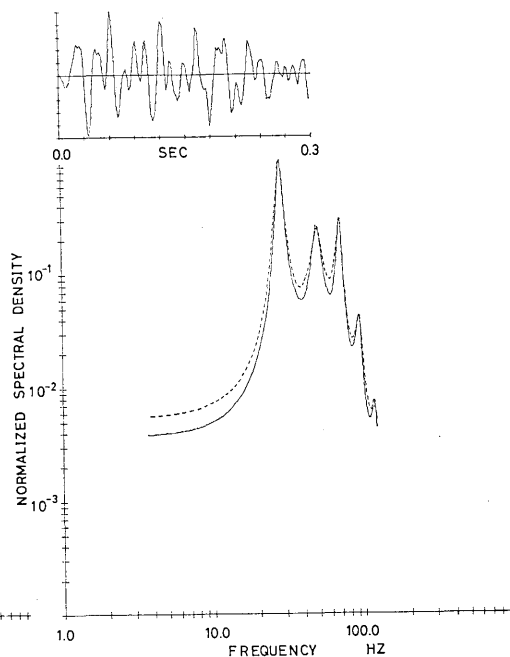


Fig. 8b. Spectra of the Matsushiro earthquake shown in Fig. 5b. Solid line represents the M.E.M. spectrum using the Burg algorithm and broken line is M.E.M. spectrum using the A.F. method. $FL=20$ is used for both methods.

この地震は、エネルギーが前方に集中したかっこうになっているが、このような性質の信号に対しては、Burg アルゴリズムを用いた場合、分解能をあげようとしてフィルターの長さを長くするとおかしなスペクトルになるから注意を要する。たとえば $FL = 15$ とすると、20~25 Hz 付近に、おかしなピークがあらわれている。

このように Burg アルゴリズムには問題があるといわねばならないが、一方、もし、時系列が時間軸に対して、異方性をもたない定常なものの場合、たとえば、正弦波や余弦波 (harmonics) のようなもので成り立っているとした場合には、Burg アルゴリズムは、その偉力を発揮することが考えられる。

単位の時間に対して読みとられた、周波数 f_0 の正弦波や余弦波は次の A. R. 表現をもつ。

$$x_i - 2 \cos(2\pi f_0) \cdot x_{i-1} + x_{i-2} = 0$$

この表現は、前方および後方に対して対称になっている。このような時系列に対しては、前方と後方の予測は矛盾しないであろう。実際に、このような時系列に対して Burg アルゴリズムが非常に有効であることは、今までにも多くの研究者によって報告されている。

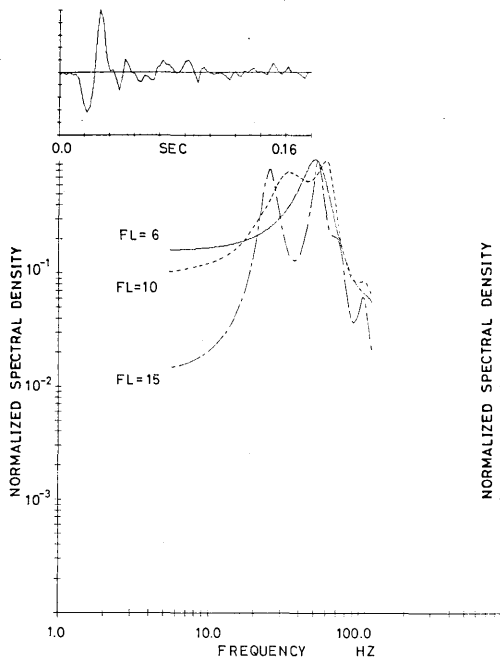


Fig. 9. M.E.M. spectra using the Burg algorithm for the earthquake shown in Fig. 5a. Solid line ($FL=6$); broken line ($FL=10$); broken and dotted line ($FL=15$).

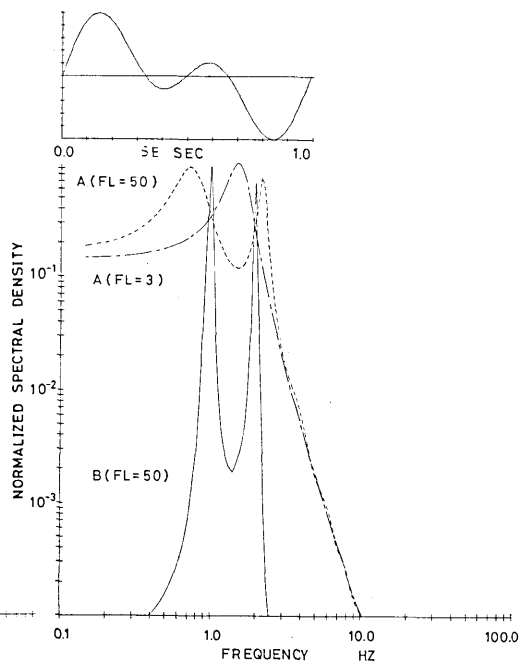


Fig. 10. M.E.M. spectra for a process consisting of two sinusoids 1 Hz and 2 Hz. Solid line, M.E.M. spectrum using the Burg algorithm ($N=101$, $FL=50$, $\Delta t=0.05$ s); broken and dotted line, M.E.M. spectrum using the A.F. method ($FL=3$); broken line, M.E.M. spectrum using the A.F. method ($FL=50$).

筆者等も、単一あるいは合成した正弦波に対して数多くの数値実験を行なったが、少なくとも、今までのところは、非常によい結果を得ている。A. F. 法では Burg アルゴリズムのような著しい分解能は得られない。Fig. 10 は 1 Hz と 2 Hz の合成正弦波の Burg アルゴリズムと A. F. 法によるスペクトルである。

11. 結 論

本研究は M. E. M. について、その問題点を検討し、その地震波への応用を試みた。M. E. M. と従来の方法との違いは与えられていないデータ範囲に対する仮定が異なり、M. E. M. においては、従来の B. T. M. のように「与えられていない自己共分散関数」を 0 と仮定せず「与えられた有限個の自己共分散関数」からそれを推定することになる。このため M. E. M. はウィンドウを必要とせず、従来の方法に比して分解能が優れている。このようなことから M. E. M. はスペクトルが鋭いピークをもつような信号に対して特に有効であるといえる。

この方法を実際の時系列に適用してみると従来の方法に比して、ピークの鋭いスペクトルが得られるが、従来の方法においても、それに対応するピークがなまった形で見出される。

これまで ULYCH (1972 a) 等によって報告されてきたような著しい分解能は、短く切断された正弦波等に対して Burg アルゴリズムが適用された場合にのみ得られる。この Burg アルゴリズムはデータが非常に短かく、いくつかの接近した周波数成分を分解しようとする際には有力な手段となるだろう。

この新しい方法の最大の問題は実際の時系列に M. E. M. を適用してよいのかどうか、またフィルターの長さほどの位にすればよいかということである。何度も述べてきたように、M. E. M. を適用することは、その時系列を A. R. 過程とみなすことになるわけであるが、この際問題になるのは、このような仮定がどの程度許されるのかということである。地震波をはじめとする、世の中の諸現象には非定常のものも多く、A. R. モデルが適用されるかどうかの保証はない。このような場合、M. E. M. を用いる妥当性はともかく、フィルターの長さは全く、解析者の恣意による他はない。その結果、得られるスペクトルの推定は、はなはだしく違ってくることになるし、それらの結果に対する解釈もいろいろ変わってくることになる。こうした推定結果の恣意性は、本質的に時系列のスペクトル解析の難しさにつながるものと思われるが、このような問題は本研究の範囲を越えるので、将来の課題としていきたい。

地震の実体波については比較的 pulse 的な性質のものや、様々な相 (phase) の混在した複雑なものいろいろあって、それらをパワー信号とするかエネルギー信号とみなすかで、スペクトルの意味も変わり問題が残る。しかし実際には、計算する際の自己共分散関数のファクターが変わるだけであり、いずれにしても地震の実体波がランダムな雑音の存在下の現象と考えれば、M. E. M. は今まで実体波解析に際して行なわれてきた単純なフーリエ解析よりも有効な方法と考えられる。こうして得られた実体波のスペクトルの解釈については稿を改めて報告したいと考えている。

最後に、M. E. M. について得られた、いくつかの重要な結論をまとめて示す。

(1) 時系列に M. E. M. を適用することは, A. R. モデルを時系列にあてはめることになるので時系列が A. R. 過程でよく表わされるような場合には, 適当な A. R. モデルの次数, すなわち, フィルターの長さが決定されれば, M. E. M. は非常によいスペクトルの推定を与える.

(2) エネルギー信号に対しても, 自己共分散関数が求まれば, よいスペクトルの推定が得られる.

(3) スペクトルが鋭いピークをもつ場合, M. E. M. においては, そのピーク値は正しい値を示さず, その面積が正しい値に比例する.

(4) フィルターの長さは, データが長い場合には, F. P. E. criterion を用いることにより, 比較的容易に決定できる. データが短いときには, その決定は一般に困難である. また, 周期的な時系列に対しては, AKAIKE の criterion は適当とはいえない. 結局, フィルターの長さは, 時系列の性質, データの長さ, S/N 比, 解析の目的等に応じて決定すべきである.

(5) Burg アルゴリズムは, 短かい非定常な最小位相型か, これに近い時系列に対しては適用できない.

(6) 実際の地震の実体波に対しては, Burg アルゴリズムも A. F. 法も, ほとんど同じ結果を与える.

(7) 短く切断された正弦波のようなものの解析に対しては, Burg アルゴリズムは非常に有効である. A. F. 法では Burg アルゴリズムほどの分解能は得られない.

(補 注)

ピリオドグラムに基づく, スペクトル密度の推定は

$$I(f) = \frac{At}{N} \left| \sum_{i=1}^N x_i e^{-i2\pi f n dt} \right|^2$$

を適当なウェイトで移動平均する (あるいは x_i にあらかじめウィンドウをかけておく) ことによって得られる. 右辺は F. F. T. によって容易に計算することができる.

B. T. M. による, スペクトル密度の推定は

$$R(f) = At \{ \Phi(0) + 2 \sum_{i=1}^M w_n \Phi(n) \cos(2\pi f n dt) \}$$

で計算される. w_n はウィンドウの係数である.

謝 辞

東京大学理学部の斎藤正徳助教授には未発表資料を参考にさせていただいた他, 原稿を読んでいただき有益な助言をいただきましたので厚く御礼申し上げます. 地震研究所の萩原幸男助教授, 津村建四朗助教授, 溝上恵助教授, 理学部の高野敬博士, 防災科学技術センターの石田端穂博士には内容を検討していただきました. また British Columbia 大学の T. J. ULRICH 博士, Stanford 大学の J. P. BURG 博士には多くの資料を提供していただきました. 心から感謝いたします. なお本研究は地震研究所地震予知観測センターの計算機によって行ないました.

文 献

- AKAIKE, H., Fitting autoregressive models for prediction, *Ann. Inst. Statist. Math.*, **21**, 243-247, 1969a.
- AKAIKE, H., Power spectrum estimation through autoregressive model fitting, *Ann. Inst. Statist. Math.*, **21**, 407-419, 1969b.
- 赤池弘次, 中川東一郎, ダイナミックシステムの統計的解析と制御, サイエンス社, 1974.
- ANDERSEN, M., On the calculation of filter coefficients for maximum entropy analysis, *Geophysics*, **39**, 69-72, 1974.
- ANDERSON, T. W., The statistical analysis of time series, John Wiley and Sons, New York, 1971.
- BLACKMAN, R. B., and J. W. TUKEY, The measurement of power spectra, Dover, New York, 1959.
- BOX, G. E., and G. M. JENKINS, Time series analysis: Forecasting and control, Holden-Day, San Francisco, 1970.
- BURG, J. P., Maximum entropy spectral analysis, paper presented at the 37th Annual International Meeting, Soc. of Explor. Geophys., Oklahoma City, Okla., Oct. 31, 1967.
- BURG, J. P., A new analysis technique for time series data, paper presented at Advanced Study Institute on Signal Processing, NATO, Enschede, Netherlands, 1968.
- BURG, J. P., Upper and lower bounds on the maximum entropy spectrum, (unpublished note a).
- BURG, J. P., Recommendations concerning maximum entropy spectral estimation, (unpublished note b).
- CHEN, W. Y., and G. R. STEGEN, Experiments with maximum entropy power spectra of sinusoids, *J. Geophys. Res.*, **79**, 3019-3022, 1974.
- COOLEY, J. W., and J. W. TUKEY, An algorithm for the machine calculation of complex Fourier series, *Math. Comp.*, **19**, 293-301, 1965.
- 藤井光昭, 時系列のモデルとその分析, 数理科学, No. **133**, 7-13, 1974.
- 藤井光昭, 時系列解析, 現代応用数学講座, **3**, コロナ社, 87-178, 1975.
- FRYER, G. P., M. E. ODEGARD, and G. H. SUTTON, Deconvolution and spectral estimation using final prediction error, *Geophysics*, **40**, 411-425, 1975.
- GALBRAITH, J. N., Prediction error as a criterion for operator length, *Geophysics*, **36**, 261-265, 1971.
- HANNAN, E. J., Time series analysis, Melthuen, London, 1960.
- JONES, R. H., Prediction of multivariate time series, *J. Appl. Meteorol.*, **3**, 255-289, 1964.
- JONES, R. H., A reappraisal of the periodogram in spectral analysis, *Technometrics*, **7**, 531-542, 1965.
- LACOSS, R. T., Data adaptive spectral analysis methods, *Geophysics*, **36**, 661-675, 1971.
- 南雲昭三郎, 大内 徹, 1974年伊豆半島沖地震, スペクトル解析による前震及び余震の応力状態の推定, 地震研究所速報, **14**, 99-108, 1974.
- NAGUMO, S., J. KASAHARA, S. KORESAWA, and T. OUCHI, Microearthquake activity in the South Mariana of the western Pacific observed by the ocean-bottom seismograph, (in preparation), 1975.
- PARZEN, E., Multiple time series modeling, in *Multivariate Analysis 2*, edited by P. R. Krishnaiah, pp. 389-409, Academic, New York, 1969.
- SAITO, M., Possible instability in the Burg maximum entropy method of power spectral estimate, (in preparation), 1974a.
- 斎藤正徳, (未発表資料), 1974b.
- SMYLIE, D. E., G. K. C. CLARKE, and T. J. ULRYCH, Analysis of irregularities in the earth's rotation, in *Methods in Computational Physics*, vol. **13**, pp. 391-430, Academic, New York, 1973.
- ULRYCH, T. J., Maximum entropy power spectrum of truncated sinusoids, *J. Geophys. Res.*, **77**, 1396-1400, 1972a.

- ULRYCH, T. J., Maximum entropy power spectrum of long period geomagnetic reversals, *Nature*, **235**, 218-219, 1972b.
- ULRYCH, T. J., D. E. SMYLLIE, O. G. JENSEN, and G. K. C. CLARKE, Predictive filtering and smoothing of short records by using maximum entropy, *J. Geophys. Res.*, **78**, 4959-4964, 1973.
- ULRYCH, T. J., and T. N. BISHOP, Maximum entropy analysis and autoregressive decomposition, *Rev. of Geophys. Space Phys.*, **13**, 183-200, 1975.
- WIGGINS, R. A., and E. A. ROBINSON, Recursive solution to the multichannel filtering problem, *J. Geophys. Res.*, **70**, 1885-1891, 1965.
- YULE, G. U., On a method of investigating periodicities in disturbed series, with special reference to Wolfer's sunspot numbers. *Phil. Trans. Roy. Soc. London, Ser. A*, **226**, 267-298, 1927.

19. *On the Application of the Maximum Entropy Method to the Spectral Analysis of Seismic Signals.*

By Toru OUCHI and Shozabro NAGUMO,
Earthquake Research Institute.

We have investigated several problems concerning the maximum entropy method (M.E.M.) in practical applications, such as optimum filter length, meaning of the spectral amplitude, difference between this method and the Blackman and Tukey method or the method by the Fast Fourier Transform and so on.

Filter length is determined by Akaike's final prediction error criterion. But this criterion underestimates the filter length for periodic data, and when the data is very short, it does not seem to be appropriate. If the signal has sharp peaks, the peak value of the M.E.M. does not show the true power but the area is proportional to the true value. The Burg algorithm is effective for the periodic data, but may not be applied to such data as finite minimum phase signals.

When this method is applied to the spectral estimation of seismic waves, it gives similar but a sharper and more peaky spectral estimate than conventional methods.