

25. 3 点観測から決めた地震波のみかけ 速度と到来方向の誤差

地震研究所 { 丸 山 卓 男
茅 野 一 郎

(昭和 44 年 3 月 25 日発表—昭和 44 年 3 月 31 日受理)

1. ま え が き

地表の 3 観測点で、地震波の (ある位相の) 到達時刻を観測して、地震波のみかけ速度・到来方向を求める、いわゆる 3 点観測は、最も簡単な 2 次元の Array 観測と見ることができ、微小地震、極微小地震の観測にしばしば用いられている。地殻構造を仮定すれば、みかけ速度・到来方向に S - P 時間を併用することによって、震源を決めることができる。反対に、震源が知られた地震を利用して、観測された地震波のみかけ速度・到来方向の偏りから、地殻構造に関する情報を得ることが期待される。また脈動の観測では、3 点観測が広く利用されている。

ところで、3 観測点での地震波の到達時刻の観測誤差から生じる、みかけ速度・到来方向の誤差について、その評価の方法をとり上げている文献^{1), 2)} はごく少ない。また、これらの文献の式も、必ずしも簡単ではなく、結果の精度が、3 点の配置とみかけ速度・到来方向にどのように依存するかを見通すことは困難である。

そこでこの問題について、解析的な方法と Monte Carlo 法を併用して、立ち入って検討してみた。

みかけ速度・到来方向の誤差や信頼度に関しては、3 点以上の観測では、最小二乗法を用いる方法が一般に行なわれている。この場合は、観測点の分布する全域の平均的な値と、これに関する信頼度を求めていることになる。この結果を、個々の三角形で得る結果と比較するときは、1 個の三角形についての結果の精度が問題となり、単一の三角形についての知識は、やはり基本的なものである。

なお、多点観測に関しては、茅野³⁾ の簡単な総合報告がある。

2. 誤 差 の 評 価

本稿で、みかけ速度・到来方向と呼んでいるものは、波面と地表面との交わりが地表を走る速度と、これが到来する (いわば「風上」にあたる) 方向で、この速度を v 、方向を表わす角を ϕ とする。

1) 宮村撰三・辻浦 賢「近地地震初動の到来方向とみかけの速度」地震研究所彙報 37 (1959), 359-374.

2) M. HASHIZUME, K. OIKE and Y. KISHIMOTO, "On the Accuracy of the Tripartite Method," *Bull. Disast. Prev. Res. Inst.*, 15 (1966), Part 1, 7-29.

3) 茅野一郎「近地地震の震源決定」地震 [ii], 20 (1967), 地震 20 巻記念特集号, 115-122.

波面と地表面との交わりは、震源が遠方であれば直線と考えられる。実際には、震源が有限の距離にあり、媒質も均質でないために、完全な直線ではないかも知れない。しかし直線からのひずみは一般に小さいので、これらは時刻の観測誤差の中に含めて考えてしまうことにする。このようにすれば、波面と地表面との交わりを、観測網の付近で直線とみなすことは、必ずしも厳しい制限とはならない。そこでこれを基本の仮定とする。

ただし、このようにして、波面の多少のまがりを許容したときには、ここで取り扱われる v, ϕ は、観測網付近での値ということになる。

2.1 一般の場合

地表面の上に直交座標系 xy をとり、座標 (x, y) の点に波面の到着する時刻を t 、原点に波面の到着する時刻を t_0 とする。波面が地表面と交わってできる直線の方程式は、この直線に至る原点からの距離が $v(t_0 - t)$ であることにより

$$x \cos \phi + y \sin \phi = v(t_0 - t) \quad (2.1)$$

と表わすことができる。この式は、 ϕ を x 軸の正の方向から、 y 軸の正の方向の向きに測る場合の表わし方になっている。以下でも便宜上、通常の xy 座標系をとり、角度はすべて、反時計廻りを正とする。

さて、3つの観測点がつくる三角形の頂点に、反時計廻りに、記号 A, B, C をつけ、またこれらの対辺の長さはそれぞれ a, b, c と書くことにする。

3点の座標および地震波の到着時刻をそれぞれ $(x_A, y_A, t_A), (x_B, y_B, t_B), (x_C, y_C, t_C)$ として、(2.1)の両辺にこれらを代入すると、3つの式が得られる。これから t_0 を消去すると

$$\begin{cases} \frac{1}{v} \cos \phi = -\frac{Y}{A} \\ \frac{1}{v} \sin \phi = \frac{X}{A} \end{cases} \quad (2.2)$$

となる。ここに A は

$$A = \begin{vmatrix} 1 & x_A & y_A \\ 1 & x_B & y_B \\ 1 & x_C & y_C \end{vmatrix} = x_A(y_B - y_C) + x_B(y_C - y_A) + x_C(y_A - y_B) = 2S \quad (2.3)$$

である。 S は三角形 ABC の面積、また X, Y は

$$X = \begin{vmatrix} 1 & t_A & x_A \\ 1 & t_B & x_B \\ 1 & t_C & x_C \end{vmatrix}, \quad Y = \begin{vmatrix} 1 & t_A & y_A \\ 1 & t_B & y_B \\ 1 & t_C & y_C \end{vmatrix} \quad (2.4)$$

である。はじめから、 $v \geq 0$ としているので、(2.2)によって、観測値から v, ϕ を一意的に決定することができる。

観測点間の距離の精度は一般に時間差の精度に比べて非常によいので、時刻の決定にもなる誤差だけを問題とする。

今 t_A, t_B, t_C に微小な変化 $\delta t_A, \delta t_B, \delta t_C$ を与えたときの v, ϕ の変化を $\delta v, \delta \phi$ とすれば、これらは次の式で与えられよう。

$$\begin{cases} \delta v = \left(\frac{\partial v}{\partial t_A}\right) \delta t_A + \left(\frac{\partial v}{\partial t_B}\right) \delta t_B + \left(\frac{\partial v}{\partial t_C}\right) \delta t_C \\ \delta \phi = \left(\frac{\partial \phi}{\partial t_A}\right) \delta t_A + \left(\frac{\partial \phi}{\partial t_B}\right) \delta t_B + \left(\frac{\partial \phi}{\partial t_C}\right) \delta t_C \end{cases} \quad (2.5)$$

右辺の $\partial v / \partial t_A$ 等は、(2.2) の両辺を微分して整理することにより

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t_A} &= -\Delta(X^2 + Y^2)^{-3/2} \left(X \frac{\partial X}{\partial t_A} + Y \frac{\partial Y}{\partial t_A} \right), \\ \frac{\partial \phi}{\partial t_A} &= (X^2 + Y^2)^{-1} \left(X \frac{\partial Y}{\partial t_A} - Y \frac{\partial X}{\partial t_A} \right) \end{aligned}$$

となる。ここで、地震波の到来方向に ξ 軸、それより 90° 進んだ方向に η 軸をとり、 A の対辺のベクトル \vec{BC} の ξ 成分、 η 成分を、length, width というような意味でそれぞれ l_A, w_A と書くことにすると (Fig. 1 参照)

$$\begin{cases} l_A = (x_C - x_B) \cos \phi + (y_C - y_B) \sin \phi \\ w_A = -(x_C - x_B) \sin \phi + (y_C - y_B) \cos \phi \end{cases} \quad (2.6)$$

これらを用いると

$$X \frac{\partial X}{\partial t_A} + Y \frac{\partial Y}{\partial t_A} = \frac{\Delta}{v} w_A, \quad X \frac{\partial Y}{\partial t_A} - Y \frac{\partial X}{\partial t_A} = -\frac{\Delta}{v} l_A,$$

また

$$X^2 + Y^2 = \frac{\Delta^2}{v^2}$$

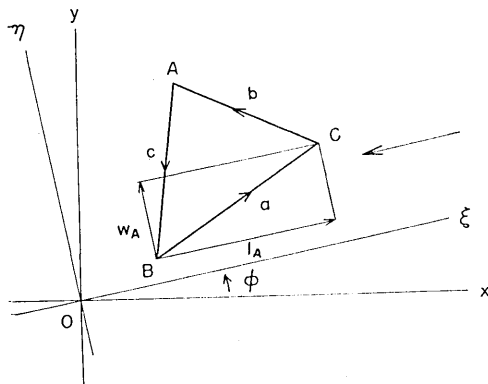


Fig. 1. Orthogonal coordinate axes (x, y) and (ξ, η) . ξ -axis is taken in the direction of approach of the seismic phase.

であるから結局

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t_A} = \frac{v^2}{\Delta} w_A \\ \frac{\partial \phi}{\partial t_A} = -\frac{v}{\Delta} l_A \end{cases} \quad (2.7)$$

となる。

(l_A, w_A) と同様に、ベクトル \vec{CA}, \vec{AB} の (ξ, η) 成分を $(l_B, w_B), (l_C, w_C)$ とすれば、(2.7) の添字 A を、それぞれ B, C で置きかえた式が得られる。

A, B, C での観測時刻の誤差が、互いに独立で、平均値 0、標準偏差がそれぞれ τ_A, τ_B, τ_C の正規分布に従うとすれば、(2.5)

により, δv , $\delta\phi$ の標準誤差 $\sigma(\delta v)$, $\sigma(\delta\phi)$ は

$$\begin{cases} [\sigma(\delta v)]^2 = \left(\frac{\partial v}{\partial t_A}\right)^2 \tau_A^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t_B}\right)^2 \tau_B^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t_C}\right)^2 \tau_C^2 \\ [\sigma(\delta\phi)]^2 = \left(\frac{\partial\phi}{\partial t_A}\right)^2 \tau_A^2 + \left(\frac{\partial\phi}{\partial t_B}\right)^2 \tau_B^2 + \left(\frac{\partial\phi}{\partial t_C}\right)^2 \tau_C^2 \end{cases} \quad (2.8)$$

によって表わされる.

(2.5), (2.8) に (2.7) の関係を代入すれば,

$$\begin{cases} \delta v = \frac{v^2}{2S} (w_A \delta t_A + w_B \delta t_B + w_C \delta t_C) \\ \delta\phi = -\frac{v}{2S} (l_A \delta t_A + l_B \delta t_B + l_C \delta t_C) \end{cases} \quad (2.9)$$

また

$$\begin{cases} \sigma(\delta v) = \frac{v^2}{2S} \sqrt{w_A^2 \tau_A^2 + w_B^2 \tau_B^2 + w_C^2 \tau_C^2} \\ \sigma(\delta\phi) = \frac{v}{2S} \sqrt{l_A^2 \tau_A^2 + l_B^2 \tau_B^2 + l_C^2 \tau_C^2} \end{cases} \quad (2.10)$$

このようにして, v , ϕ の精度を調べる事ができる.

2.2 観測時刻の誤差が3点で同程度の場合

観測点での時刻の誤差は, 多くの場合, 3点について同程度と考えてよい. 前項の結果を利用すれば, 時刻の誤差の限界を $|\delta t|$ とすれば, v , ϕ の誤差の限界 $|\delta v|$, $|\delta\phi|$ は

$$\begin{cases} |\delta v| \leq \frac{v^2}{2S} |\delta t| \{|w_A| + |w_B| + |w_C|\} \\ |\delta\phi| \leq \frac{v}{2S} |\delta t| \{|l_A| + |l_B| + |l_C|\} \end{cases} \quad (2.11)$$

によって与えられる. また, 3点での観測誤差が互いに独立で, 同一の標準偏差 τ をもつ正規分布に従うものとすれば, $\sigma(\delta v)$, $\sigma(\delta\phi)$ は

$$\begin{cases} \sigma(\delta v) = \frac{v^2 \tau}{2S} \sqrt{w_A^2 + w_B^2 + w_C^2} \\ \sigma(\delta\phi) = \frac{v \tau}{2S} \sqrt{l_A^2 + l_B^2 + l_C^2} \end{cases} \quad (2.12)$$

のように表わされる.

以下, これらの標準誤差について, くわしく調べることにする. まず (2.12) が非

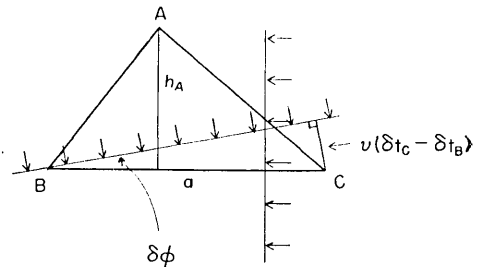


Fig. 2. Standard errors in v and in ϕ are easily found for waves approaching from the respective directions parallel and perpendicular to a side of the triangle.

常に簡単になる場合を挙げる。

辺 a に沿って到来する地震波を考えると、底辺 a に対する三角形の高さを h_A と書いて (Fig. 2 参照)。

$$w_A=0, \quad |w_B|=|w_C|=h_A,$$

また $2S=ah_A$ であるから (2.12) により

$$\sigma(\delta v) = \sqrt{2} \frac{v^2 \tau}{a} \quad (2.13)$$

となる。また、辺 a に垂直に到来する地震波を考えると、これに対しては

$$l_A=0, \quad |l_B|=|l_C|=h_A$$

であるから

$$\sigma(\delta \phi) = \sqrt{2} \frac{v \tau}{a} \quad (2.14)$$

となる。

これらの簡単な式は、次のように理解することができる。観測時刻 t_A, t_B, t_C によって、今到来した平面波が辺 a に沿って、 C から B の向きに (Fig. 2 参照) 進んでいることがわかった場合、みかけ速度は

$$v = \frac{a}{t_B - t_C}$$

によって表わされる。ここで t_A が微小な変化をすると、波の到来方向は微小な修正を要するが、みかけ速度はほとんど修正を要せず、同じ式によって表わされよう ($\partial v / \partial t_A = 0$)。そこで上の式の両辺の微分をとれば

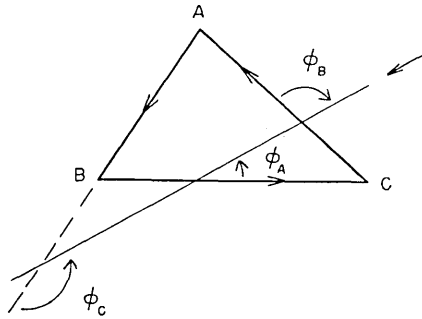
$$\delta v = \frac{v^2}{a} (\delta t_C - \delta t_B)$$

となり、これから (2.13) が得られる。また、観測の結果、辺 a に垂直に、 A の側から平面波が到来していることがわかった場合 (Fig. 2 参照)、 t_A が微小な変化をすると、みかけ速度は微小な修正を要するが、方向にはほとんど修正を要しないから ($\partial \phi / \partial t_A = 0$)、Fig. 2 より

$$\delta \phi = \frac{v}{a} (\delta t_C - \delta t_B),$$

これから (2.14) が得られる。

次に、任意の方向から、波が到来する場合を調べる。簡単のために、この方向を表わすのに、 A の対辺 \vec{BC} から測った角を用いることにして、これを ϕ_A と書く。もちろん、 ϕ_A と (2.1) の ϕ との差は定数にすぎない。同様に、この方向を \vec{CA} から測って ϕ_B 、 \vec{AB} から測って ϕ_C とし (Fig. 3 参照)、 ϕ_B, ϕ_C を ϕ_A によって表わせば

Fig. 3. The definition of ϕ_A , ϕ_B and ϕ_C .

$$\begin{cases} \phi_B = \phi_A + C - \pi = \phi_A - (A + B) \\ \phi_C = \phi_A - B + \pi = \phi_A + (A + C) \end{cases} \quad (2.15)$$

となる*). 一方 Fig. 1 または (2.6) より

$$\begin{cases} l_A = a \cos \phi_A, & l_B = b \cos \phi_B, & l_C = c \cos \phi_C \\ w_A = -a \sin \phi_A, & w_B = -b \sin \phi_B, & w_C = -c \sin \phi_C \end{cases} \quad (2.16)$$

である.

(2.15), (2.16) から出発して, 途中で平面三角形に関する公式を, いくつか利用して変形して行くと

$$w_A^2 + w_B^2 + w_C^2 = 4R^2 \{1 + \cos A \cos B \cos C - q \cos 2(\phi_A - \alpha_A)\} \quad (2.17)$$

を得る. ただしここに R は 三角形 ABC の外接円の半径, $q \geq 0$ で, q と α_A とは

$$\begin{cases} q \cos 2\alpha_A = \sin^2 A - \sin B \sin C \cos (B - C) \\ q \sin 2\alpha_A = -\sin B \sin C \sin (B - C) \end{cases} \quad (2.18)$$

によって定義した値である. (2.18) より q を計算すれば

$$q = \sqrt{\sin^2 B \sin^2 C + \sin^2 C \sin^2 A + \sin^2 A \sin^2 B - 4 \sin^2 A \sin^2 B \sin^2 C} \quad (2.19)$$

となる.

l, w の定義により, 角 ϕ に対する l は角 $\phi - \pi/2$ に対する w であることから, (2.18) において, ϕ_A を $\phi_A - \pi/2$ でおきかえることにより, 容易に

$$l_A^2 + l_B^2 + l_C^2 = 4R^2 \{1 + \cos A \cos B \cos C + q \cos 2(\phi_A - \alpha_A)\} \quad (2.20)$$

を得る.

(2.18), (2.20) における R は, 面積 S , 底辺 a , 角 A, B, C と

$$S = 2R^2 \sin A \sin B \sin C = aR \sin B \sin C$$

*) これらの関係は, 対称な形に表わすことができるもので, $\phi_P - \phi_Q = \text{sgn}(P, Q)(P + Q)$.
ここに P および Q は A, B, C のうちの 1 つ, $\text{sgn}(P, Q)$ は $P \rightarrow Q$ が正の向きにあれば 1, 負の向きにあれば -1 , P と Q が一致していれば 0 とする.

のように関係づけられる。これを用いれば、 $\sigma(\delta v)$ 、 $\sigma(\delta\phi)$ は結局次のように書き表わすことができる。

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\sigma(\delta v)}{v} = \frac{v\tau}{a} \gamma_a \sqrt{1 - \varepsilon \cos 2(\phi_A - \alpha_A)} \\ \sigma(\delta\phi) = \frac{v\tau}{a} \gamma_a \sqrt{1 + \varepsilon \cos 2(\phi_A - \alpha_A)} \end{array} \right. \quad (2.21)$$

ここに

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon = \frac{q}{1 + \cos A \cos B \cos C} \\ \gamma_a = \frac{\sqrt{1 + \cos A \cos B \cos C}}{\sin B \sin C} \end{array} \right. \quad (2.22)$$

である。

$\sigma(\delta v)$ 、 $\sigma(\delta\phi)$ の実際の例を Fig. 4 に示す。これは、図のような形の三角網での観測で、一定のみかけ速度の地震波について、 $\sigma(\delta v)$ 、 $\sigma(\delta\phi)$ の方向による変化を、円グラフによって表わしたものである。図の目盛は、最長の辺を 1.0 km、みかけ速度を 6.0 km/sec、観測時刻の標準誤差を 0.01 sec とした場合になっている。この図を見れば、 $\sigma(\delta v)$ 、 $\sigma(\delta\phi)$ の周期は 180° で、 $\sigma(\delta v)$ の最も大きい方向では $\sigma(\delta\phi)$ が最も小さく、 $\sigma(\delta v)$ の最も小さい方向では $\sigma(\delta\phi)$ が最も大きいことがよくわかる。

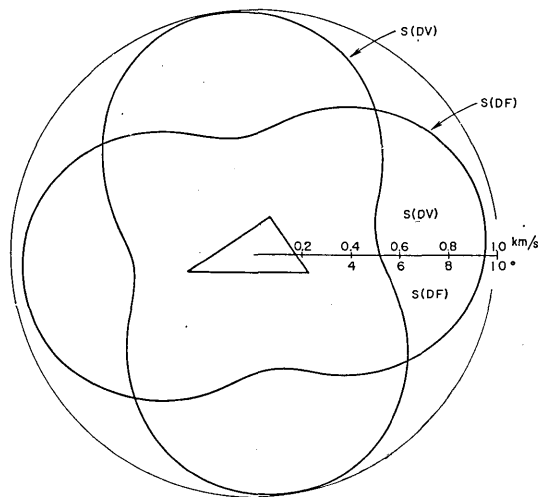


Fig. 4. Azimuthal variations of $\sigma(\delta v)$ and $\sigma(\delta\phi)$.

(2.21) の右辺で $v\tau/a$ は無次元量であって、この式はある一つの辺 a を長さの基準にとった場合の表わし方になっている。実用的にはこれが好都合であるが、三角形の代表的な長さとしては、他の選び方も可能で、たとえば底辺と高さの相乗平均 $\sqrt{2S}$ をとることもできる。このようにすれば、ある辺だけを特別扱いしないことになって対称性が保たれ

る。この長さを f とすれば (2.21) の 2 つの式の右辺根号の前の係数は

$$\frac{v\tau}{f} \gamma_f \quad (2.23)$$

と書かれ、ここに f, γ_f は

$$\begin{cases} f = \sqrt{2S} = \sqrt{A} \\ \gamma_f = \sqrt{\operatorname{cosec} A \operatorname{cosec} B \operatorname{cosec} C + \cot A \cot B \cot C} \end{cases} \quad (2.24)$$

となる。

(2.21) を見ると、 $\phi_A = \alpha_A$ の方向は $\sigma(\delta v)$ を最小に、 $\sigma(\delta\phi)$ を最大にする方向であることがわかる。 α_A の添字 A は \vec{BC} を角度の測り方の基準にしていることを示すもので、角度の測り方としては、どれかの辺の方向を基準にするのが、実際最も簡単である。ただしこの方向は、角度の測り方の基準をどこに選ぶかということには関係なく、三角形に固有な方向になっていなくてはならない。この方向を \vec{CA}, \vec{AB} の方向から測って、それぞれ α_B, α_C とすれば、(2.21) の右辺の根号の中で、 $\phi_A - \alpha_A$ は $\phi_B - \alpha_B$ または $\phi_C - \alpha_C$ であってもよいはずである。

α_A を決める式 (2.18) には、当然このような性質が備わっているべきである。念のためこれを確かめておこう。(2.18) は \vec{BC} を基準にした角 α_A を求める式であるが、符号をつけかえれば、 \vec{CA} を基準にした角 α_B を求めることに使うことができる。それには、 A を B, B を C, C を A で置きかえればよく、その結果は

$$\begin{cases} q \cos 2\alpha_B = \sin^2 B - \sin C \sin A \cos(C-A) \\ q \sin 2\alpha_B = -\sin C \sin A \sin(C-A) \end{cases} \quad (2.25)$$

となる。一方 $\phi_A = \alpha_A$ によって表わされる方向を、 \vec{CA} を基準にして表わせば、(2.15) により、 $\alpha_B = \alpha_A + C - \pi$ であるから

$$\begin{cases} q \cos 2\alpha_B = q \cos 2\alpha_A \cos 2C - q \sin 2\alpha_A \sin 2C \\ q \sin 2\alpha_B = q \sin 2\alpha_A \cos 2C + q \cos 2\alpha_A \sin 2C \end{cases}$$

ここで、右辺の $q \cos 2\alpha_A, q \sin 2\alpha_A$ に (2.18) の右辺を代入して変形して行くと、(2.25) と正しく同じものとなる。このことは、(2.18) によって決まる方向と (2.25) によって決まる方向とは同一であることを示すものである。これによって、(2.18) は、三角形に固有な方向を与える式となっていることがわかる。

Fig. 5, Fig. 6 は頂点 B を原点、 C を座標 $(0, 1)$ の点としたとき、頂点 $A(x, y)$ に対して、 ε および α_A を与える図である。(2.21) からわかるように、 ε は、方向による差異の程度を表わす量であるが、Fig. 5 に見るように、 ε は正三角形のとき 0 で、三角形の形が正三角形から歪むに従って、1 に近づいている。Fig. 6 より、辺 a が最大である場合、 $B=C$ ならば α_A は常に 0、辺 a が最大でないとき、 $B=C$ ならば $\alpha_A = 90^\circ$ であることがわかる。最大の辺の方向と $\phi_A = \alpha_A$ の方向との間の角は最大限 30° である。こ

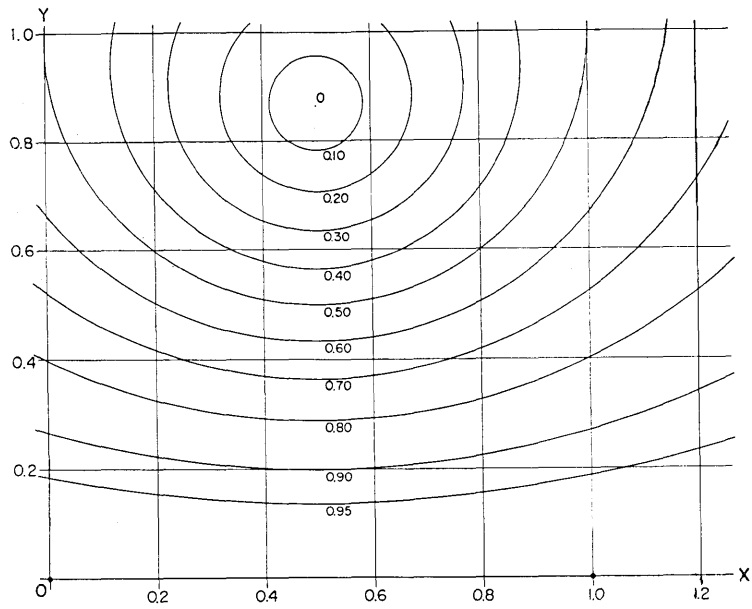


Fig 5. Contours of equal ε for triangles with vertices $A(x, y)$, $B(0, 0)$, $C(0, 1)$.

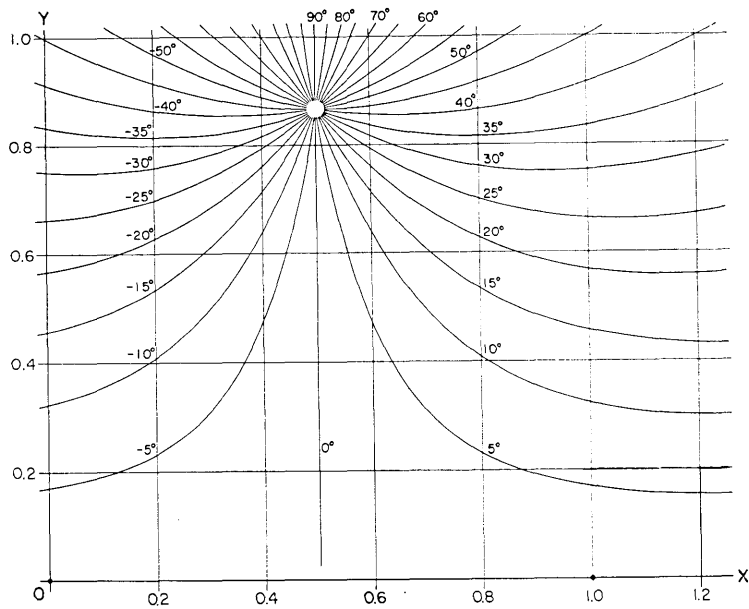


Fig. 6. Contours of equal α_A for triangles with vertices $A(x, y)$, $B(0, 0)$, $C(0, 1)$.

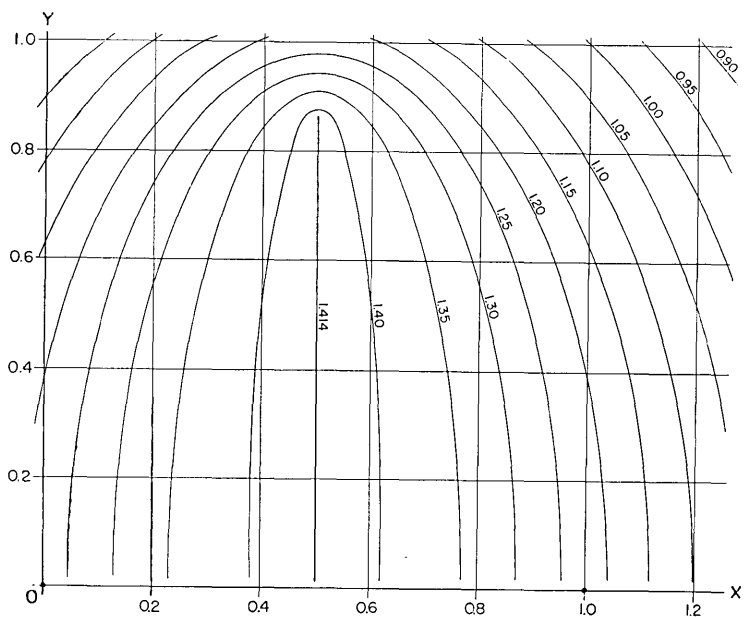


Fig. 7. Contours of equal $\gamma_a \sqrt{1-\varepsilon}$ for triangles with vertices $A(x, y)$, $B(0, 0)$, $C(0, 1)$.

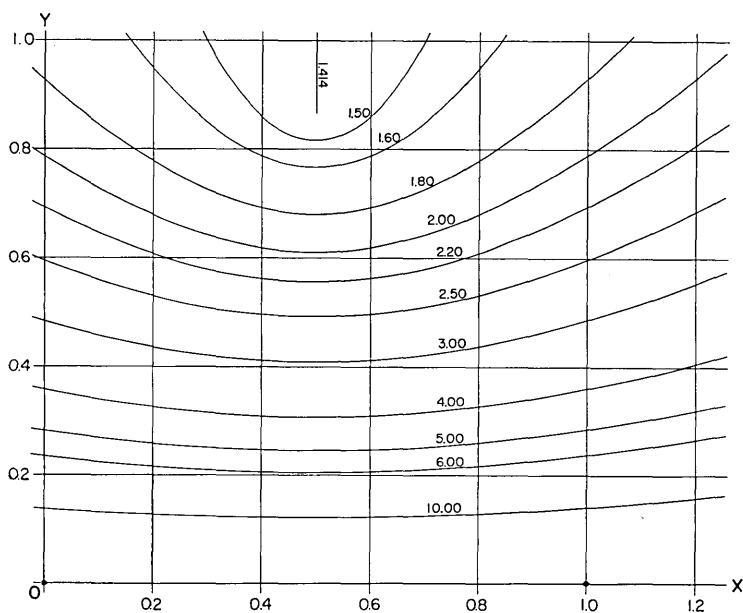


Fig. 8. Contours of equal $\gamma_a \sqrt{1+\varepsilon}$ for triangles with vertices $A(x, y)$, $B(0, 0)$, $C(0, 1)$.

の極限は、正三角形の場合で、このとき $\epsilon=0$, α_A は不定である。

Fig. 7, Fig. 8 は同じく頂点 B を原点, C を $(0, 1)$ としたとき, 頂点 $A(x, y)$ に対して, それぞれ $r_a\sqrt{1-\epsilon}$, $r_a\sqrt{1+\epsilon}$ の値をコントルの形で与えるものである。これらは, $\sigma(\delta v)/v$ または $\sigma(\delta\phi)$ を $v\tau/a$ によって表わすとき, それぞれ $v\tau/a$ の係数の最小値, 最大値になっている。

図に見るように, Fig. 7, Fig. 8 のコントルは, BC を底辺とする 2 つの正三角形の頂点を焦点とする, 楕円および双曲線である。最長の辺を a とすれば, $r_a\sqrt{1-\epsilon}$ は, 他の 2 辺が等しいとき $\sqrt{2}$ で, その 2 辺間の差異が大きい程減小するが, 最小限 $\sqrt{6}/2$ (≈ 1.225) である。それに対して, $r_a\sqrt{1+\epsilon}$ は, 正三角形のとき $\sqrt{2}$ で, 辺 a に対する高さ h_A が小さくなる程増大し, 近似的に h_A に反比例しているといつてよい。^{*}

3. Monte Carlo 法の応用

前節では, みかけ速度と到来方向を, 真の値のまわりの Taylor 級数に展開して, その第 1 次の項を考慮するという, 通常の方法によって, 誤差の評価を行なった。導かれた簡単な式は, 任意の三角形に対して, 誤差についての見通しを与える。

一方, これとは別に, 実際の場合に出合うような具体的な三角形に対して, 具体的な観測誤差を与えることによって, 実際に近い状況をシミュレートする試みを行なった。

この場合のシミュレーションは, いわゆる Monte Carlo 法で, デジタル計算機によって作成した乱数を, 観測誤差として用いるもので, 概略は次の通りである。

- (i) 最長辺の長さを 1.0 km とする。
- (ii) 最長辺を Fig. 9 の底辺 $(0, 0)-(0, 1)$ とすれば, 他の 1 つの頂点を, この図の点々を施した区域の中にとったもの (およびその裏がえし) によって, 三角形のすべての形をつくすことができる。そこでこの区域の中に任意に 5 頂点 1)~5) を選んだ。
- (iii) 観測誤差は 3 点で互いに独立で, 平均値 0, 標準偏差 0.01 sec の正規分布に従うとする。
- (iv) みかけ速度 V には適当な値を与える。ここでは 5 km/sec から 10 km/sec の範囲にとった。
- (v) 到来方向 F は, Fig. 9 のように, 反時計廻りに, 10° きざみに 0° から 350° までを与える。
- (vi) 与えられた 1 組のみかけ速度と到来方向に対して, まず各点で観測さるべき時

^{*} B, C を y 軸上にとり, BC を底辺とする 2 つの正三角形 (高さ h) の頂点 $(\pm h, 0)$ を共焦点とする楕円座標 (ξ, η) を導入すれば, 頂点 A の座標 (x, y) は

$$x = h \cosh \xi \cos \eta, \quad y = h \sinh \xi \sin \eta$$

と表わされる。上にあげた係数を ξ, η を用いて表わせば,

$$r_a\sqrt{1-\epsilon} = \sqrt{2} / \cosh \xi, \quad r_a\sqrt{1+\epsilon} = \sqrt{2} / \cos \eta$$

である。後者は $\sqrt{2} h \cosh \xi / x$ と書くことができるが, x 軸に近い点では, $\cosh \xi \approx 1$ であるから, 大略 $\sqrt{2} h / h_A$, すなわち h_A に反比例しているといつてよい。

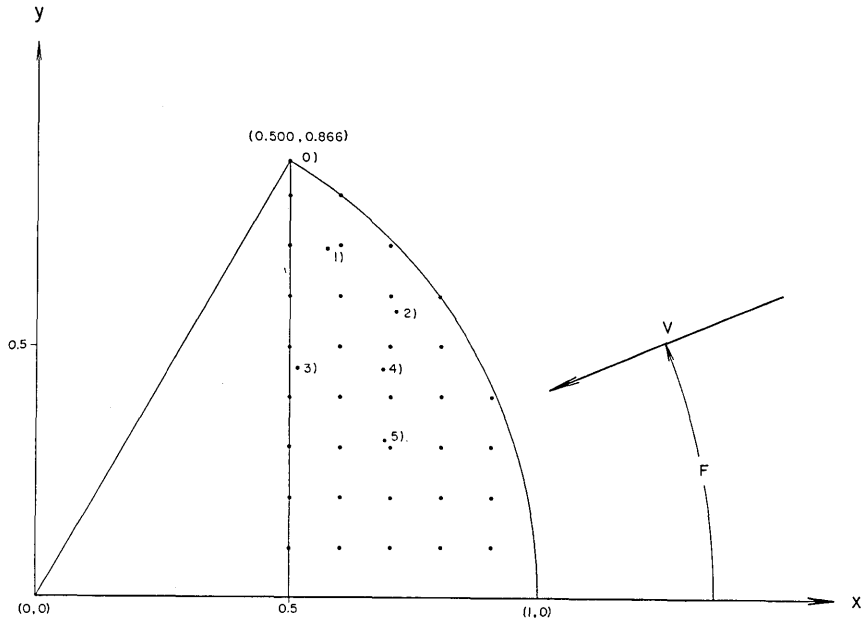


Fig. 9. The Monte Carlo method was applied for triangles with respective vertices 1), 2), 3), 4), 5) and with fixed vertices (0, 0) and (0, 1).

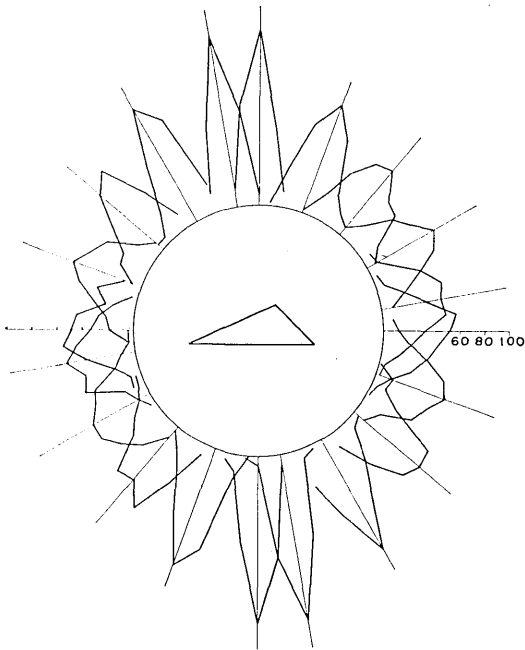


Fig. 10. Azimuthal distribution of DF .

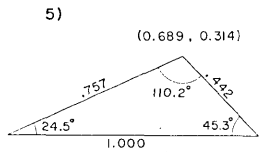
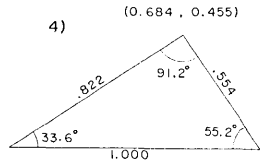
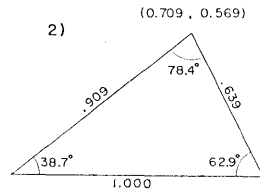


Fig. 11. Triangles of observation net for the cases of Fig. 12, Fig. 13, and Table 1 (Fig. 10).

刻を計算する。次に、各点について、iii) で述べた正規母集団からとった 30 組の誤差を正しい時刻に加え、その各組に対して、みかけ速度、到来方向等を計算し、これらの値の真の値からの偏差の分布、平均値、標準偏差等を調べる。

この節では、この結果の一部を示す。次の Table 1 および Fig. 10 は頂点を 5) とする三角形の場合であり、Fig. 12, Fig. 13 はそれぞれ頂点を 2), 4) とする場合である (Fig. 11 参照)。

まず Table 1 は、Fig. 9, 5) を頂点とする三角形で、見かけ速度を 5.0 km/sec とした場合の例である。(a) はみかけ速度の誤差 DV の分布、(b) は到来方向の誤差 DF の分布である。これらを見ると、次のようなことがわかる。

- 1) DV の分布は、 $0^\circ \sim 10^\circ$, $180^\circ \sim 190^\circ$ の方向に最も分散が小さく、これと垂直の方向に最も分散が大きい。分布の様子は 180° を周期として変化している。

DV の分布は、分散の大きい方向では $DV=0$ について対称ではなく、 $DV>0$ の側に長い尾をひいている。

- 2) DF の分布は、 $90^\circ \sim 100^\circ$, $270^\circ \sim 280^\circ$ の方向に最も分散が小さく、これと垂直の方向に最も大きい。分布の様子は 180° を周期として変化している。

くわしく見ると、分布は、分散の最も大きい方向および最も小さい方向では、 $DF=0$ について対称に近いが、他の方向については対称ではなく、非対称性はこれらの中間の方向に著しい。分布は 50° および 230° 付近では負の向きにやや長い尾をもち、 140° および 320° 付近では、正の向きにやや長い尾をもつ。

Fig. 10 はこの DF の分布を円グラフに表わしたものである。これを見ると、三角形の形との対応が明らかとなる。非対称の程度はあまり大きいものではない。

DV の分布は、特に分散の大きい方向では、非対称性が明瞭であるので、 V の代りに V の逆数 U を考え、これの真の値からの誤差 DU について分布を調べた。これが Table 1 (c) である。これを見ると、

- 3) DU の分布の、方向による分散の仕方の変化は、当然のことながら DV のそれと同一である。 DU の分布は $DU=0$ についてほとんど対称で、正規分布に近いように見える。

Table 1 は $V=5.0$ km/sec の場合であるが、同一の三角形について、 V を変えて行った試行の結果を見ると、次のように言うことができる。

- 4) V を変えても、方向による分布の仕方には、 DV , DF 共にあまり変化はない。しかし V が増すと、 DV の分散は激しく増大する。 DF についても同様であるが、 V が増加するとき、 DF の分散が増加する程度は小さい。一方 DU の分布は、 V によってほとんど変化しない。

これらを前節の結果と比較してみよう。Table 1 を作成した三角形は B , C をそれぞれ $(0, 0)$, $(0, 1)$ とすると A は $(0.689, 0.314)$ であるから、Fig. 6 より $\alpha_A \doteq 5^\circ$ であることがわかる。これは $0^\circ \sim 10^\circ$ の方向で DV の分散が最も小さく、 DF の分散が最も大きいこととよく一致している。しかし、 DV , DF の分布に非対称が現われることがあって、必ずしも正規分布にならないということは、(2.5) の式が完全には正しくないことを

Table 1. Distributions of deviations in apparent velocity V , in its reciprocal U and in direction of approach F , obtained by the Monte Carlo method. The observation net is of the shape of a triangle with vertices $A(0.689, 0.314)$, i.e. 5) in Fig. 9, $B(0, 0)$, $C(0, 1)$. Errors in time are regarded as random samples from a normal population with mean zero sec. and standard deviation 0.01 sec. Apparent velocity was taken as 5.0 km/sec, and 300 samples were made

DISTRIBUTION OF DV

FI OVER	-10	-9	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	OVER	
0											35	247	10										
10											42	243	18										
20											46	226	28										
30											54	202	40	3									
40											69	168	57	4									
50											71	157	64	5	1								
60											83	138	57	18	3								
70											88	120	58	25	5	3							
80											79	112	68	24	8	3	1						
90											78	110	66	36	4	4	4						
100											82	107	72	17	8	3					2		
110											69	134	63	24	6	1					1		
120											77	130	64	18	7	2							
130											76	132	70	13	5	1							
140											88	136	62	14									
150											53	193	51	3									
160											52	197	49	2									
170											39	224	37										
180											31	254	15										
190											26	254	20										
200											28	244	27										
210										1	64	195	39	2									
220											63	158	75	4									
230											68	142	73	16	1								
240											62	148	64	20	3								
250											80	117	74	17	6	1	1						
260											70	118	76	20	5	4	1						
270											82	117	65	22	5	5	1						
280											81	115	60	20	13	3	2				1	1	
290											81	118	67	23	4	4	4						
300											97	113	58	15	5	6	1						
310											84	133	66	14	3								
320											82	150	56	9	2								
330										1	53	183	59	5									
340											57	204	39										
350											36	232	32										

(a)

DISTRIBUTION OF DF

FI OVER	-50	-45	-40	-35	-30	-25	-20	-15	-10	-5	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	OVER	
0																							
10																							
20																							
30																							
40																							
50																							
60																							
70																							
80																							
90																							
100																							
110																							
120																							
130																							
140																							
150																							
160																							
170																							
180																							
190																							
200																							
210																							
220																							
230																							
240																							
250																							
260																							
270																							
280																							
290																							
300																							
310																							
320																							
330																							
340																							
350																							

(b)

in each direction of approach at every 10 degrees.

- (a) Distribution of deviation *DV* of apparent velocity.
- (b) Distribution of deviation *DF* of direction of approach.
- (c) Distribution of deviation *DU* of reciprocal of apparent velocity.
- (d) Means, standard deviations of *DV*, *DF* and *DU* and corresponding results by analytical calculations and skewness of *DV*, *DF*, and *DU*.

DISTRIBUTION OF DU

FI OVER	-.2	-.18	-.16	-.14	-.12	-.10	-.08	-.06	-.04	-.02	.00	.02	.04	.06	.08	.10	.12	.14	.16	.18	.20	OVER	
0											1	50	152	77	17	2	1						
10											3	49	145	86	15	2							
20											6	49	145	86	15	4							
30											3	9	68	123	62	26	8	1					
40											3	22	71	78	75	33	11	6	1				
50											1	3	24	70	84	65	38	9	4	1	1		
60											2	15	37	47	76	59	42	14	7	1			
70											1	7	20	27	67	56	54	37	20	11	4		
80											1	9	14	48	59	49	52	39	17	8			
90											2	5	27	45	49	64	59	28	12	2			
100											3	4	16	36	64	59	38	41	20	11	4	3	
110											1	4	24	35	55	78	46	26	21	9	1		
120											1	5	19	29	59	69	63	34	19	1	1	1	
130											3	12	43	62	63	48	40	21	7	1			
140												12	29	65	71	54	43	18	8				
150												2	18	63	111	72	29	4	1				
160												1	10	74	107	78	25	4	1				
170													2	79	129	75	12	3					
180														51	143	90	15	1					
190													3	50	159	76	10	2					
200													4	58	144	80	11	2					
210														6	113	66	31	7					
220													2	26	72	98	59	30	9	2			
230													13	29	77	78	51	37	14	1			
240													1	18	37	69	72	57	21	19	4	1	1
250													4	13	46	62	63	42	40	2	4	2	2
260													2	7	18	44	54	55	62	30	17	6	5
270													6	21	35	58	60	48	38	19	8	8	1
280													4	7	21	41	45	55	56	35	21	11	4
290													8	17	43	53	59	53	41	17	7	2	2
300													1	7	16	33	54	57	46	55	20	7	2
310													1	12	40	50	74	68	36	16	3	3	2
320														5	33	66	62	81	36	14	2	1	
330														4	21	49	83	41	24	6	2		
340														9	72	104	76	31	6	2			
350														4	62	137	85	10	2				

(c)

FI	E(DV)	CAL	S(DV)	CAL S(DV)/V	SK(DV)	F(DU)	CAL	S(DU)	CAL SK(DU)	E(DF)	CAL	S(DF)	CAL	SK(DF)		
0	-0.067	-0.075	0.373	0.354	7.5	-0.122	0.0039	0.0040	0.0199	0.0141	0.698	-0.663	0.172	10.81	11.44	-0.244
10	-0.083	-0.074	0.377	0.354	7.5	0.281	0.0046	0.0040	0.0156	0.0142	0.237	-0.317	-0.179	11.34	11.43	-0.129
20	-0.063	-0.059	0.424	0.423	8.5	0.183	0.0041	0.0036	0.0178	0.0169	0.428	-0.521	-0.510	10.37	11.13	-0.353
30	-0.031	-0.029	0.530	0.527	10.6	0.355	0.0035	0.0034	0.0218	0.0211	0.430	-0.818	-0.778	10.21	10.52	-0.144
40	-0.044	0.011	0.654	0.641	13.1	0.238	0.0054	0.0028	0.0278	0.0256	0.508	-0.622	-0.953	9.55	9.66	-0.372
50	0.001	0.057	0.689	0.750	13.6	0.458	0.0038	0.0022	0.0282	0.0300	0.502	-0.111	-1.013	8.83	8.57	-0.352
60	0.054	0.102	0.663	0.645	17.3	0.778	0.0034	0.0016	0.0328	0.0338	0.080	-0.935	-0.951	7.80	7.32	-0.711
70	0.142	0.142	1.025	0.920	20.5	1.019	0.0016	0.0011	0.0368	0.0368	0.013	-0.622	-0.774	6.78	6.01	-0.741
80	0.219	0.171	1.084	0.972	21.7	0.955	-0.0007	0.0007	0.0384	0.0389	0.140	-0.693	-0.503	5.16	4.82	-1.009
90	0.302	0.187	1.119	0.998	26.2	1.621	-0.0040	0.0005	0.0412	0.0399	0.019	-0.126	-0.172	4.18	4.05	-0.542
100	0.160	0.187	1.180	0.998	23.6	1.621	0.0026	0.0005	0.0411	0.0399	0.215	0.055	0.179	4.38	4.06	0.248
110	0.196	0.171	0.998	0.971	19.8	0.857	-0.0009	0.0007	0.0358	0.0388	0.185	0.625	0.510	4.96	4.84	0.397
120	0.141	0.141	0.953	0.918	19.1	1.032	0.0006	0.0011	0.0341	0.0367	0.015	0.409	0.778	6.57	6.04	1.044
130	0.103	0.131	0.908	0.843	18.2	0.822	0.0019	0.0016	0.0342	0.0337	0.167	0.791	0.953	7.62	7.34	0.569
140	0.008	0.056	0.785	0.748	15.7	0.472	0.0045	0.0022	0.0314	0.0299	0.192	0.395	1.013	8.94	8.59	0.833
150	0.005	0.010	0.552	0.639	11.0	0.418	0.0022	0.0029	0.0221	0.0295	0.221	1.299	0.951	8.90	9.68	0.514
160	-0.031	-0.030	0.515	0.525	10.3	0.347	0.0034	0.0034	0.0211	0.0210	0.321	1.501	0.774	10.82	10.54	0.315
170	-0.019	-0.059	0.419	0.421	8.2	0.026	0.0020	0.0038	0.0170	0.0168	0.435	0.904	0.503	10.57	11.13	0.126
180	-0.080	-0.075	0.356	0.354	7.1	0.152	0.0043	0.0040	0.0148	0.0141	0.218	0.198	0.172	11.06	11.44	0.063
190	-0.054	-0.074	0.359	0.354	7.2	0.163	0.0032	0.0040	0.0149	0.0142	0.367	-0.588	-0.179	11.14	11.43	-0.091
200	-0.046	-0.059	0.390	0.425	7.8	0.126	0.0031	0.0038	0.0163	0.0169	0.714	-1.599	-0.510	11.42	11.13	-0.212
210	-0.051	-0.029	0.516	0.527	10.3	0.288	0.0043	0.0034	0.0213	0.0211	0.296	-0.435	-0.778	11.27	10.52	-0.433
220	0.050	0.011	0.622	0.641	12.4	0.292	0.0010	0.0028	0.0249	0.0256	0.342	-1.084	-0.953	9.84	9.66	-0.468
230	0.119	0.057	0.771	0.750	15.4	0.554	-0.0003	0.0022	0.0292	0.0300	0.195	-1.663	-1.013	9.70	8.57	-0.825
240	0.162	0.102	0.868	0.845	17.4	0.559	-0.0009	0.0016	0.0350	0.0338	0.385	-1.512	-0.951	8.13	7.32	-0.746
250	0.168	0.142	0.992	0.920	19.8	0.897	0.0003	0.0011	0.0367	0.0368	0.303	-0.783	-0.774	6.33	6.01	-0.568
260	0.225	0.171	1.076	0.972	21.5	1.120	-0.0012	0.0007	0.0376	0.0389	0.163	-1.094	-0.503	5.10	4.82	-0.498
270	0.284	0.187	1.264	0.998	25.3	1.931	-0.0019	0.0009	0.0391	0.0399	-0.197	-0.286	-0.172	4.60	4.05	-0.909
280	0.213	0.187	1.198	0.998	24.0	1.166	0.0009	0.0005	0.0410	0.0399	-0.028	-0.030	0.179	4.13	4.06	0.246
290	0.189	0.171	1.027	0.971	20.5	0.940	-0.0003	0.0007	0.0365	0.0388	0.034	0.835	0.510	5.22	4.84	0.859
300	0.093	0.141	1.084	0.918	21.7	1.248	0.0043	0.0011	0.0387	0.0367	-0.016	0.933	0.778	7.00	6.04	0.839
310	0.071	0.101	0.826	0.843	16.5	0.738	0.0022	0.0016	0.0310	0.0337	-0.053	0.995	0.953	7.90	7.34	0.763
320	0.003	0.056	0.736	0.748	14.7	0.618	0.0041	0.0022	0.0290	0.0299	0.111	0.721	1.013	8.48	8.59	0.588
330	0.082	0.010	0.599	0.639	12.0	0.301	-0.0005	0.0029	0.0236	0.0255	0.376	1.931	0.951	9.27	9.68	0.550
340	-0.063	-0.030	0.504	0.525	10.1	0.009	0.0047	0.0034	0.0214	0.0210	0.513	0.754	0.774	10.42	10.54	0.224
350	-0.039	-0.059	0.398	0.421	8.0	0.176	0.0029	0.0038	0.0163	0.0168	0.294	0.420	0.503	10.23	11.13	0.283

(d)

示している。

V の逆数 U の分布では、どの方向についても正規分布に近かったことは、 v, ϕ を決定する式 (2.2) において、右辺は t_A, t_B, t_C に関する一次式、左辺も

$$u = \frac{1}{v} \quad (3.1)$$

についての一次式であることから、よく理解できる。(方向について同様のことを考えるならば、方向余弦の分布が正規分布に近いことが期待される。)

ここで、 u について前節と同様の式を求めておこう。(2.2), (2.6) より

$$\frac{\partial u}{\partial t_A} = \Delta^{-1} (X^2 + Y^2)^{-1/2} \left(X \frac{\partial X}{\partial t_A} + Y \frac{\partial Y}{\partial t_A} \right) = \Delta^{-1} w_A \quad (3.2)$$

したがって δu の標準誤差 $\sigma(\delta u)$ は、観測時刻の標準誤差 τ によって

$$\sigma(\delta u) = \frac{\tau}{2S} \sqrt{w_A^2 + w_B^2 + w_C^2} \quad (3.3)$$

また (2.21) に対応する式は

$$\sigma(\delta u) = \frac{\tau}{a} \gamma_a \sqrt{1 - \varepsilon \cos 2(\phi_A - \alpha_A)} \quad (3.4)$$

となる。

v を変化させたときの分散の変化は、(2.12), (3.3) によれば $\delta v, \delta \phi, \delta u$ の標準誤差がそれぞれ v の 2 乗, 1 乗, 0 乗に比例する。これは Monte Carlo 法によって得た分布と一致する。

さて、Table 1 の場合、 DV, DF の分布の詳細は (2.5) によって表わされないことを注意したが、たとえばその第 1 式の代わりに、Taylor 展開を δt_A 等の 2 次までとって

$$\delta v = \sum \frac{\partial v}{\partial t_A} \delta t_A + \frac{1}{2} \sum \frac{\partial^2 v}{\partial t_A^2} (\delta t_A)^2 + \sum \frac{\partial^2 v}{\partial t_B \partial t_C} \delta t_B \delta t_C \quad (3.5)$$

とすれば一層よいであろう。しかしこの式は扱いやすいものではない。ただ、本節の Monte Carlo 法の場合のように、 $\delta t_A, \delta t_B, \delta t_C$ が平均値 0 の正規分布に従うというときの平均値については、(3.5) を利用して、容易にこれを知ることができる。すなわち E で平均をとることを表わすとすれば

$$E(\delta t_A) = 0, \quad E(\delta t_B \delta t_C) = 0, \quad E((\delta t_A)^2) = \tau^2$$

であるから

$$E(\delta v) = \frac{1}{2} \tau^2 \left\{ \frac{\partial^2 v}{\partial t_A^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial t_B^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial t_C^2} \right\} \quad (3.6)$$

$\delta \phi, \delta u$ についても同様な式を書くことができる。 $\partial^2 v / \partial t_A^2$ 等を実際に計算すれば、§ 2.1

の X, Y を用いて

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 v}{\partial t_A^2} &= D(X^2 + Y^2)^{-3/2} \left[3(X^2 + Y^2)^{-1} \left(X \frac{\partial X}{\partial t_A} + Y \frac{\partial Y}{\partial t_A} \right)^2 - \left\{ \left(\frac{\partial X}{\partial t_A} \right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial t_A} \right)^2 \right\} \right] \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial t_A^2} &= -2(X^2 + Y^2)^{-2} \left(X \frac{\partial X}{\partial t_A} + Y \frac{\partial Y}{\partial t_A} \right) \left(X \frac{\partial Y}{\partial t_A} - Y \frac{\partial X}{\partial t_A} \right) \\ \frac{\partial^2 u}{\partial t_A^2} &= D^{-1}(X^2 + Y^2)^{-3/2} \left[(X^2 + Y^2) \left\{ \left(\frac{\partial X}{\partial t_A} \right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial t_A} \right)^2 \right\} - \left(X \frac{\partial X}{\partial t_A} + Y \frac{\partial Y}{\partial t_A} \right)^2 \right]\end{aligned}$$

これらを l_A, w_A で表わせば

$$\left\{ \begin{aligned}\frac{\partial^2 v}{\partial t_A^2} &= \frac{v^3}{D^2} (2w_A^2 - l_A^2) \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial t_A^2} &= 2 \frac{v^2}{D^2} l_A w_A \\ \frac{\partial^2 u}{\partial t_A^2} &= \frac{v}{D^2} l_A^2\end{aligned} \right. \quad (3.7)$$

したがって平均値について、次の式が得られる。

$$\left\{ \begin{aligned}E(\delta v) &= \frac{1}{2} \frac{v^3 \tau^2}{D^2} \{2(w_A^2 + w_B^2 + w_C^2) - (l_A^2 + l_B^2 + l_C^2)\} \\ E(\delta \phi) &= \frac{v^2 \tau^2}{D^2} (l_A w_A + l_B w_B + l_C w_C) \\ E(\delta u) &= \frac{1}{2} \frac{v \tau^2}{D^2} (l_A^2 + l_B^2 + l_C^2)\end{aligned} \right. \quad (3.8)$$

これらの式は § 2.2 と同様な形に書くことができる。上の第 2 式に現われる $l_A w_A + l_B w_B + l_C w_C$ については、(2.16) から変形して行くと、(2.18) と同じ q, α_A を用いて

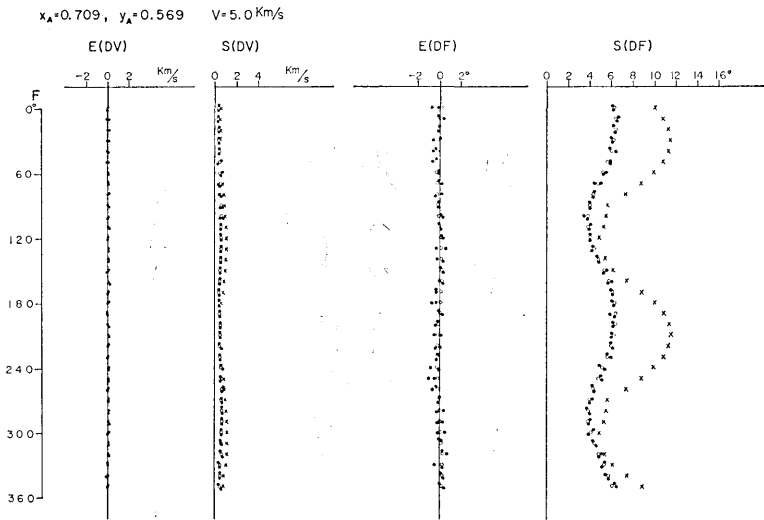
$$l_A w_A + l_B w_B + l_C w_C = 4R^2 q \sin 2(\phi_A - \alpha_A) \quad (3.9)$$

となるので

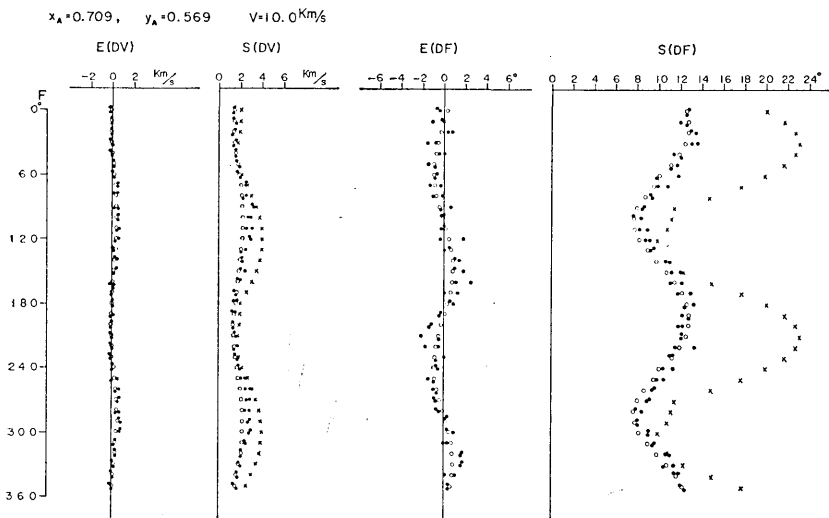
$$\left\{ \begin{aligned}E(\delta v) &= \frac{1}{2} \frac{v^3 \tau^2}{a^2} r_a^2 \{1 - 3\epsilon \cos 2(\phi_A - \alpha_A)\} \\ E(\delta \phi) &= \frac{v^2 \tau^2}{a^2} r_a^2 \epsilon \sin 2(\phi_A - \alpha_A) \\ E(\delta u) &= \frac{1}{2} \frac{v \tau^2}{a^2} r_a^2 \{1 + \epsilon \cos 2(\phi_A - \alpha_A)\}\end{aligned} \right. \quad (3.10)$$

と書くことができる。

Table 1 (d) では Monte Carlo 法による分布の平均値、標準偏差と解析的な方法による結果とを比較している。後者の計算には、平均値については (3.8) を、標準偏差については (2.12), (3.3) を用いている。またこの表の $SK(DV), SK(DU), SK(DF)$ は、分布の歪み度を示すもので、たとえば $SK(DV)$ は



(a)



(b)

Fig. 12. Means and standard deviations of DV and DF , obtained for triangle with vertices $A(0.709, 0.569)$, i.e. 2) in Fig. 9, $B(0, 0)$, $C(0, 1)$.

Apparent velocity is taken as:

- (a) 5.0 km/sec, (b) 10.0 km/sec.

Closed and open circles indicate the results obtained by the Monte Carlo method and by the analytical method respectively. Crosses indicate the results of estimation by use of equation (2.11).

$$\frac{\sum (DV - E(DV))^3}{N} \Big/ \left\{ \frac{\sum (DV - E(DV))^2}{N} \right\}^{3/2}$$

と同一の計算をしている。和は $N=300$ のすべての組にわたる。

Table 1 (d) を見ると、標準偏差については、(2.12), (3.3) の式が十分よい近似になっていること、平均値については、これは常に 0 ではなく、方向によって変化していて、(3.8) が十分よい近似になっていることがわかる。

Monte Carlo 法による値には若干のばらつきがあるが、このばらつきは DV に比べて、 DU の方が少ない。 V が大きくなると、この差異が一層目立ってくる。

歪み度の変化には、分布のところで述べた規則性がよく現われている。 DV については、常に正で DV の分散が大きい方向で大きい値をとる。 V が大きくなると、どの方向でも大きくなる。 DF については、規則的に符号を変え、その変わり方は $E(DF)$ と共通になっている。 DU の歪み度もほとんど正であるが、その最大の値も DV, DF の歪み度の絶対値の最大より小さい。

Fig. 12, Fig. 13 はそれぞれ Fig. 9 の三角形頂点 2) および 4) の場合について (Fig. 11 参照), DV, DF の平均値・標準偏差の方向による変化を示したものである。これらの図で、● は Monte Carlo 法による結果を、○ は (3.8) または (2.12) によって計算した値を、× は (2.11) において $|\delta t| = \tau = 0.01 \text{ sec}$ として得た値を表わしている。× はすべての場合に標準誤差よりは大きい評価になっている。

これらの図を見ると、いずれの場合も、平均値、標準偏差については、式による計算と

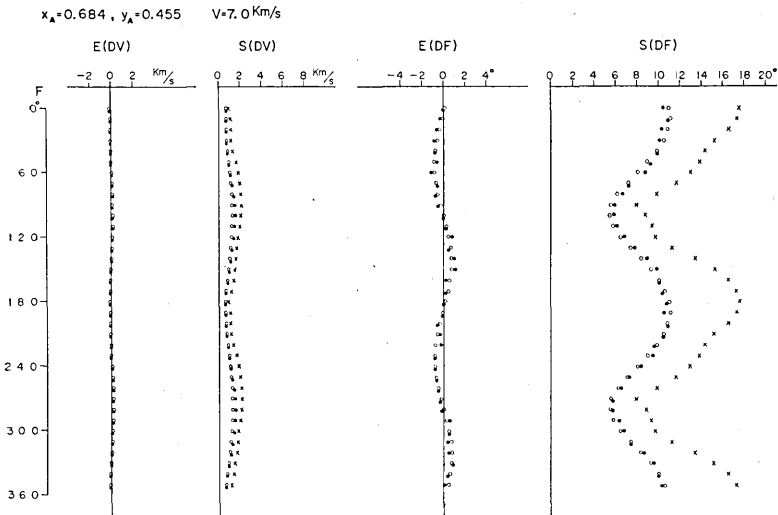


Fig. 13. Means and standard deviations of DV and DF , obtained for triangle with vertices $A(0.684, 0.455)$, i.e. 4) in Fig. 9, $B(0, 0)$, $C(0, 1)$. Apparent velocity is taken as 7.0 km/sec. Closed and open circles indicate the results obtained by the Monte Carlo method and by the analytical method respectively. Crosses indicate the results of estimation by use of equation (2.11).

Monte Carlo 法による結果とは、実用上十分の一致を示していることがわかる。

4. 要 約

地震波の波面と地表面との交わりを、3つの観測点の付近で直線とみなすと、みかけ速度と到来方向を決定できる。これらが、観測時刻の誤差によって受ける影響について、特に3点での観測誤差が同程度の場合に、いくつかの簡単な特性が明らかになった。これらを要約すれば次の通りである。

- 1) 見かけ速度についても、到来方向についても、誤差は一般に到来方向によって異なるが、正反対の方向とは等しい。すなわち周期は 180° である。
- 2) 3点がつくる三角形の、1つの辺に沿う方向に到来する波については、みかけ速度の標準誤差が、これに垂直な方向に到来する波については、方向の標準誤差が、簡単に知られる。正三角形では、これらの値はそのまま、すべての方向に同一である。
- 3) 三角形が正三角形でなければ、みかけ速度の精度が最もよい方向と、到来方向の精度が最もよい方向とがあり、互いに直交している。
- 4) みかけ速度の精度が最もよい方向は最長の辺の方向に近く、この方向からのずれは2番目に長い辺の方向に近づくように起こる。したがって、短い方の2つの辺が等しければ、どちら側にずれることもできないから、正しく最長の辺の方向になり、長い方の2つの辺が等しければ均等にずれることによって、両者の中間の方向になる。
- 5) みかけ速度の誤差は、みかけ速度によって著しく変化するが、みかけ速度の逆数については、その誤差は変化しない。通常の3点観測では、一度設定した3点網において、種々の異なるみかけ速度の地震波を観測するので、みかけ速度の逆数を利用することは推奨される。たとえば、みかけ速度と到来方向を図式に求めるときは、図上で、みかけ速度の逆数が等間隔になる方式のノモグラムを採用すべきであろう。^{4), 5)}
- 6) みかけ速度の精度については、特にみかけ速度の精度が最も悪い方向の付近ではこれより大きい側と小さい側とでは精度が異なり、小さい側にやや精度がよい。みかけ速度の逆数については、このような非対称性はごく少ない。
また、到来方向を表わす角度の精度については、精度の最もよい方向と最も悪い方向の間では、精度は両側に同一ではなく、最もよい方向の側にやや精度がよい (Fig. 10 参照)
- 7) 互いにごく近い、幾組かの観測値の各々に対して、みかけ速度、その逆数、到来方向を求め、それぞれを平均したものと、観測値を平均して得た1組の値から求めた対応の値とは、一般にわずかの差異がある。

4) Kei AKAMATU, "On Microseisms in Frequency Range from 1 c/s to 200 c/s," *Bull. Earthq. Res. Inst.*, 39 (1961), 23-75.

5) 丸山卓男「三点観測における傾斜補正」地震研究所彙報 43 (1965), 409-420.

このような差異の生じ方は、分離してとり出す量によって異なり、 v の平均値と $1/v$ の平均値とは、必ずしも反対の傾向にならない。この差異を生じない量もあって、たとえば、上であげたノモグラムでは、一定のみかけ速度と到来方向の波は、図上の 1 点によって与えられるが、もしこの点を xy 座標によって表わすとすれば、幾組かの観測値から得た x の平均値、 y の平均値は、観測値の平均から得た x, y と同一になる。

5. 野外観測のための表

終りに、野外での観測のために作成した、簡単に利用できる図と表を付加しておきたい。すなわち、実際の観測点の配置に最も近い三角形を、Fig. 14 の中から探して、その番号を記憶すれば、Table 2 の中の対応する 1 列から、任意の方向について、標準誤差を知ることができる。

Fig. 14 の三角形は、Fig. 9 の点で示したところに頂点をもつものの全体で、計 33 個である。Table 2 は、実際にしばしば現われる値、最長辺 1.0 km、時間の標準誤差 0.01 sec、みかけ速度 5.0 km/sec の場合に対して、みかけ速度の標準誤差 $\sigma(\delta v)$ 、到来方向の標準誤差 $\sigma(\delta\phi)$ を、それぞれ km/sec、および度を単位として表わしたものである。最長辺、時間の標準誤差、みかけ速度が異なるときは、それぞれ $a(\text{km})$ 、 $\tau(\text{sec})$ 、 $v(\text{km/sec})$ として、次の係数を掛ければよい。

$$\sigma(\delta v) \text{ については } 4 \times \frac{v^2 \tau}{a}$$

$$\sigma(\delta\phi) \text{ については } 20 \times \frac{v\tau}{a} .$$

Table 2 は、また、観測点の選定の際に利用することができる。

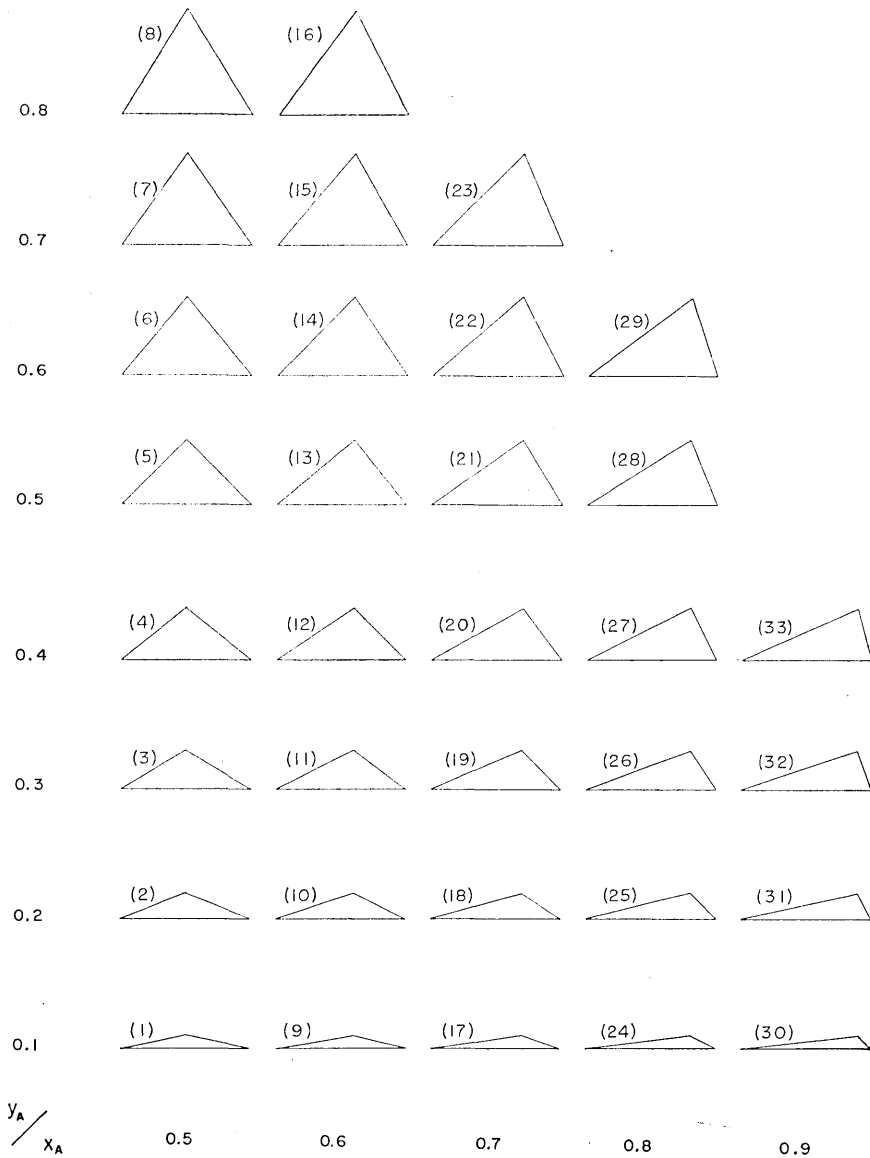


Fig. 14. The number of triangle with a vertex at each point in Fig. 9.

Table 2. Table of standard errors in apparent velocity $\sigma(\delta v)$ and in direction of approach $\sigma(\delta\phi)$, calculated for each triangle with vertices $A(x, y)$, $B(0, 0)$, $C(0, 1)$. The side BC is taken as 1.0 km, standard deviation in time as 0.01 sec and apparent velocity of wave as 5.0 km/sec. For the case of a triangle with its longest side of length a (km), standard deviation in time of τ (sec) and apparent velocity of v (km/sec), tabular values are to be multiplied by $4v^2\tau/a$ for $\sigma(\delta v)$, and by $20v\tau/a$ for $\sigma(\delta\phi)$.

Triangle number		(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
Coordinates of vertex A (km)	x	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5
	y	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8
Length of side (km)	b	0.510	0.539	0.583	0.640	0.707	0.781	0.860	0.943
	c	0.510	0.539	0.583	0.640	0.707	0.781	0.860	0.943
Interior angle (deg)	A	157.38	136.40	118.07	102.68	90.00	79.61	71.08	64.01
	B	11.31	21.80	30.96	38.66	45.00	50.19	54.46	57.99
	C	11.31	21.80	30.96	38.66	45.00	50.19	54.46	57.99
$\sigma(\delta v)$ (km/sec)	ϕ_A (deg)								
	0	0.35	0.35	0.35	0.35	0.35	0.35	0.35	0.35
	10	0.64	0.44	0.39	0.37	0.36	0.36	0.36	0.35
	20	1.10	0.62	0.48	0.42	0.39	0.38	0.36	0.36
	30	1.56	0.82	0.60	0.49	0.43	0.40	0.38	0.36
	40	1.99	1.02	0.71	0.56	0.48	0.43	0.39	0.37
	50	2.36	1.19	0.81	0.63	0.52	0.45	0.40	0.37
	60	2.66	1.34	0.90	0.69	0.56	0.48	0.42	0.38
	70	2.88	1.44	0.97	0.73	0.59	0.49	0.43	0.38
	80	3.02	1.51	1.01	0.76	0.61	0.51	0.44	0.38
	90	3.06	1.53	1.02	0.77	0.61	0.51	0.44	0.38
	100	3.02	1.51	1.01	0.76	0.61	0.51	0.44	0.38
	110	2.88	1.44	0.97	0.73	0.59	0.49	0.43	0.38
	120	2.66	1.34	0.90	0.69	0.56	0.48	0.42	0.38
	130	2.36	1.19	0.81	0.63	0.52	0.45	0.40	0.37
	140	1.99	1.02	0.71	0.56	0.48	0.43	0.39	0.37
	150	1.56	0.82	0.60	0.49	0.43	0.40	0.38	0.36
160	1.10	0.62	0.48	0.42	0.39	0.38	0.36	0.36	
170	0.64	0.44	0.39	0.37	0.36	0.36	0.36	0.35	
$\sigma(\delta\phi)$ (deg)	ϕ_A (deg)								
	0	35.1	17.5	11.7	8.8	7.0	5.8	5.0	4.4
	10	34.6	17.3	11.5	8.7	6.9	5.8	5.0	4.4
	20	33.0	16.5	11.1	8.4	6.7	5.7	4.9	4.3
	30	30.5	15.3	10.3	7.9	6.4	5.5	4.8	4.3
	40	27.0	13.7	9.3	7.2	6.0	5.2	4.6	4.3
	50	22.8	11.7	8.1	6.4	5.5	4.9	4.5	4.2
	60	17.9	9.4	6.8	5.6	5.0	4.6	4.3	4.1
	70	12.6	7.1	5.5	4.8	4.5	4.3	4.2	4.1
	80	7.3	5.0	4.5	4.3	4.2	4.1	4.1	4.1
	90	4.1	4.1	4.1	4.1	4.1	4.1	4.1	4.1
	100	7.3	5.0	4.5	4.3	4.2	4.1	4.1	4.1
	110	12.6	7.1	5.5	4.8	4.5	4.3	4.2	4.1
	120	17.9	9.4	6.8	5.6	5.0	4.6	4.3	4.1
	130	22.8	11.7	8.1	6.4	5.5	4.9	4.5	4.2
	140	27.0	13.7	9.3	7.2	6.0	5.2	4.6	4.3
	150	30.5	15.3	10.3	7.9	6.4	5.5	4.8	4.3
160	33.0	16.5	11.1	8.4	6.7	5.7	4.9	4.3	
170	34.6	17.3	11.5	8.7	6.9	5.8	5.0	4.4	

(to be continued)

Table 2.

(continued)

Triangle number		(9)	(10)	(11)	(12)	(13)	(14)	(15)	(16)
Coordinates of Vertex A (km)	x	0.6	0.6	0.6	0.6	0.6	0.6	0.6	0.6
	y	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8
Length of side (km)	b	0.412	0.447	0.500	0.566	0.640	0.721	0.806	0.894
	c	0.608	0.632	0.671	0.721	0.781	0.849	0.922	1.000
Interior angle (deg)	A	156.50	135.00	116.57	101.31	88.85	78.69	70.35	63.43
	B	9.46	18.44	26.57	33.69	39.81	45.00	49.40	53.13
	C	14.04	26.57	36.87	45.00	51.34	56.31	60.26	63.43
$\sigma(\delta v)$ (km/sec)	ϕ_A (deg)								
	0	0.35	0.35	0.35	0.35	0.35	0.35	0.35	0.35
	10	0.60	0.41	0.37	0.36	0.35	0.35	0.35	0.35
	20	1.07	0.59	0.46	0.40	0.37	0.36	0.35	0.34
	30	1.54	0.80	0.57	0.46	0.41	0.38	0.36	0.34
	40	1.97	1.00	0.68	0.54	0.45	0.40	0.37	0.35
	50	2.35	1.18	0.79	0.61	0.50	0.43	0.38	0.35
	60	2.65	1.33	0.89	0.67	0.54	0.46	0.40	0.36
	70	2.88	1.44	0.96	0.72	0.58	0.48	0.42	0.37
	80	3.03	1.51	1.01	0.75	0.60	0.50	0.43	0.38
	90	3.08	1.54	1.03	0.77	0.62	0.51	0.44	0.39
	100	3.04	1.53	1.02	0.77	0.62	0.52	0.44	0.39
	110	2.91	1.47	0.99	0.75	0.61	0.51	0.44	0.39
	120	2.70	1.37	0.93	0.71	0.58	0.50	0.44	0.40
	130	2.40	1.23	0.84	0.66	0.55	0.48	0.43	0.39
	140	2.03	1.06	0.74	0.59	0.50	0.45	0.41	0.39
	150	1.61	0.86	0.63	0.52	0.46	0.42	0.40	0.38
	160	1.14	0.65	0.51	0.45	0.41	0.39	0.38	0.37
	170	0.67	0.46	0.41	0.39	0.38	0.37	0.36	0.36
$\sigma(\delta\phi)$ (deg)	ϕ_A (deg)								
	0	35.3	17.7	11.8	8.8	7.1	5.9	5.0	4.4
	10	34.9	17.5	11.7	8.8	7.1	5.9	5.1	4.5
	20	33.4	16.8	11.3	8.6	6.9	5.9	5.1	4.5
	30	30.9	15.7	10.6	8.1	6.7	5.7	5.0	4.5
	40	27.5	14.1	9.7	7.5	6.3	5.5	4.9	4.5
	50	23.3	12.1	8.5	6.8	5.8	5.2	4.7	4.4
	60	18.4	9.9	7.2	5.9	5.3	4.8	4.6	4.4
	70	13.1	7.5	5.9	5.1	4.7	4.5	4.4	4.3
	80	7.7	5.3	4.7	4.4	4.3	4.2	4.2	4.1
	90	4.1	4.1	4.1	4.1	4.1	4.1	4.1	4.1
	100	6.9	4.7	4.3	4.1	4.0	4.0	4.0	4.0
	110	12.2	6.8	5.2	4.6	4.3	4.1	4.0	3.9
	120	17.6	9.1	6.5	5.3	4.7	4.3	4.1	3.9
	130	22.6	11.4	7.8	6.1	5.2	4.6	4.2	4.0
	140	26.9	13.5	9.1	7.0	5.7	4.9	4.4	4.0
	150	30.4	15.2	10.2	7.7	6.2	5.3	4.6	4.1
	160	33.1	16.5	11.0	8.3	6.6	5.5	4.8	4.2
	170	34.7	17.3	11.5	8.6	6.9	5.8	4.9	4.3

(to be continued)

Table 2.

(continued)

Triangle number		(17)	(18)	(19)	(20)	(21)	(22)	(23)	(24)
Coordinates of vertex A (km)	x	0.7	0.7	0.7	0.7	0.7	0.7	0.7	0.8
	y	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.1
Length of side (km)	b	0.316	0.361	0.424	0.500	0.583	0.671	0.762	0.224
	c	0.707	0.728	0.762	0.806	0.860	0.922	0.990	0.806
Interior angle (deg)	A	153.43	130.36	111.80	97.13	85.43	75.96	68.20	146.31
	B	8.13	15.95	23.20	29.74	35.54	40.60	45.00	7.13
	C	18.44	33.69	45.00	53.13	59.04	63.43	66.80	26.57
$\sigma(\delta v)$ (km/sec)	ϕ_A (deg)								
	0	0.35	0.35	0.35	0.35	0.35	0.35	0.35	0.35
	10	0.58	0.39	0.35	0.34	0.34	0.34	0.34	0.56
	20	1.05	0.56	0.43	0.38	0.35	0.34	0.33	1.05
	30	1.53	0.78	0.54	0.44	0.39	0.36	0.34	1.55
	40	1.98	0.99	0.67	0.52	0.43	0.38	0.35	2.01
	50	2.37	1.17	0.78	0.59	0.48	0.41	0.37	2.42
	60	2.69	1.33	0.88	0.66	0.53	0.45	0.39	2.75
	70	2.93	1.45	0.96	0.72	0.58	0.48	0.41	3.01
	80	3.08	1.53	1.02	0.76	0.61	0.51	0.43	3.17
	90	3.14	1.57	1.05	0.79	0.63	0.52	0.45	3.24
	100	3.11	1.56	1.05	0.79	0.64	0.53	0.46	3.21
	110	2.98	1.51	1.02	0.77	0.63	0.53	0.46	3.09
	120	2.77	1.41	0.96	0.74	0.61	0.52	0.46	2.87
	130	2.47	1.27	0.88	0.69	0.58	0.50	0.45	2.57
	140	2.10	1.10	0.78	0.62	0.53	0.48	0.44	2.19
	150	1.67	0.91	0.66	0.55	0.49	0.45	0.42	1.74
	160	1.19	0.69	0.54	0.47	0.43	0.41	0.40	1.26
	170	0.71	0.49	0.43	0.40	0.39	0.38	0.37	0.75
$\sigma(\delta\phi)$ (deg)	ϕ_A (deg)								
	0	36.0	18.0	12.0	9.0	7.2	6.0	5.1	37.1
	10	35.6	17.9	12.0	9.0	7.3	6.1	5.3	36.8
	20	34.2	17.3	11.7	8.9	7.2	6.1	5.3	35.4
	30	31.7	16.2	11.0	8.5	7.0	6.0	5.3	32.9
	40	28.3	14.6	10.1	7.9	6.6	5.8	5.2	29.4
	50	24.0	12.6	8.9	7.2	6.1	5.5	5.0	25.1
	60	19.1	10.4	7.6	6.3	5.6	5.1	4.8	20.0
	70	13.7	7.9	6.2	5.4	5.0	4.7	4.5	14.4
	80	8.1	5.6	4.9	4.6	4.4	4.3	4.3	8.6
	90	4.1	4.1	4.1	4.1	4.1	4.1	4.1	4.1
	100	6.6	4.5	4.1	3.9	3.9	3.9	3.9	6.4
	110	12.0	6.5	4.9	4.3	4.0	3.9	3.8	12.0
	120	17.6	8.9	6.2	5.0	4.4	4.1	3.9	17.7
	130	22.6	11.3	7.6	5.9	5.0	4.4	4.0	23.0
	140	27.1	13.4	9.0	6.8	5.5	4.7	4.2	27.7
	150	30.8	15.3	10.1	7.6	6.1	5.1	4.5	31.6
	160	33.6	16.7	11.1	8.3	6.6	5.5	4.7	34.5
	170	35.3	17.6	11.7	8.7	7.0	5.8	5.0	36.3

(to be continued)

Table 2.

(continued)

Triangle number		(25)	(26)	(27)	(28)	(29)	(30)	(31)	(32)	(33)
Coordinates of vertex A (km)	x	0.8	0.8	0.8	0.8	0.8	0.9	0.9	0.9	0.9
	y	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.1	0.2	0.3	0.4
Length of side (km)	b	0.283	0.361	0.447	0.539	0.632	0.141	0.224	0.316	0.412
	c	0.825	0.854	0.894	0.943	1.000	0.906	0.922	0.949	0.985
Interior Angle (deg)	A	120.96	103.13	90.00	79.80	71.57	128.66	104.04	90.00	80.07
	B	14.04	20.56	26.57	32.01	36.87	6.34	12.53	18.43	23.96
	C	45.00	56.31	63.43	68.20	71.57	45.00	63.43	71.57	75.96
$\sigma(\delta v)$ (km/sec)	ϕ_A (deg)									
	0	0.35	0.35	0.35	0.35	0.35	0.35	0.35	0.35	0.35
	10	0.37	0.34	0.33	0.33	0.33	0.54	0.35	0.32	0.32
	20	0.54	0.41	0.36	0.33	0.32	1.06	0.53	0.39	0.34
	30	0.77	0.53	0.42	0.37	0.34	1.58	0.77	0.52	0.40
	40	0.99	0.66	0.50	0.42	0.36	2.07	1.00	0.66	0.49
	50	1.19	0.78	0.59	0.47	0.40	2.50	1.21	0.79	0.59
	60	1.36	0.89	0.67	0.53	0.44	2.85	1.40	0.91	0.68
	70	1.49	0.98	0.73	0.58	0.48	3.12	1.54	1.01	0.75
	80	1.58	1.05	0.78	0.62	0.52	3.30	1.64	1.08	0.81
	90	1.62	1.08	0.81	0.65	0.54	3.37	1.69	1.12	0.84
	100	1.62	1.09	0.82	0.66	0.55	3.35	1.69	1.13	0.86
	110	1.57	1.06	0.81	0.66	0.56	3.22	1.64	1.11	0.85
	120	1.47	1.01	0.78	0.64	0.55	3.00	1.54	1.06	0.82
	130	1.33	0.93	0.73	0.61	0.53	2.69	1.40	0.98	0.77
	140	1.16	0.82	0.66	0.57	0.51	2.29	1.22	0.87	0.70
	150	0.96	0.70	0.58	0.51	0.47	1.84	1.01	0.74	0.62
	160	0.73	0.57	0.50	0.46	0.43	1.33	0.78	0.60	0.52
	170	0.51	0.45	0.42	0.40	0.39	0.80	0.54	0.47	0.43
$\sigma(\delta\phi)$ (deg)	ϕ_A (deg)									
	0	18.6	12.4	9.3	7.4	6.2	38.6	19.3	12.9	9.7
	10	18.5	12.4	9.4	7.6	6.4	38.4	19.3	13.0	9.8
	20	17.9	12.2	9.3	7.5	6.4	36.9	18.8	12.7	9.7
	30	16.9	11.5	8.9	7.3	6.3	34.4	17.7	12.1	9.4
	40	15.3	10.6	8.3	7.0	6.1	30.8	16.1	11.2	8.8
	50	13.3	9.4	7.6	6.5	5.8	26.3	14.0	10.0	8.0
	60	10.9	8.1	6.7	5.9	5.4	21.0	11.6	8.5	7.1
	70	8.4	6.6	5.7	5.2	4.9	15.2	8.9	6.9	6.0
	80	5.9	5.1	4.8	4.6	4.5	9.1	6.2	5.3	4.9
	90	4.1	4.1	4.1	4.1	4.1	4.1	4.1	4.1	4.1
	100	4.2	3.9	3.8	3.8	3.8	6.2	4.0	3.7	3.6
	110	6.2	4.7	4.1	3.8	3.7	12.1	6.1	4.5	3.9
	120	8.8	6.0	4.8	4.2	3.8	18.1	8.8	5.9	4.6
	130	11.3	7.5	5.8	4.8	4.2	23.7	11.5	7.5	5.7
	140	13.6	9.0	6.7	5.4	4.6	28.6	13.9	9.1	6.7
	150	15.5	10.2	7.6	6.1	5.1	32.7	16.0	10.5	7.7
	160	17.0	11.3	8.4	6.7	5.5	35.8	17.6	11.6	8.6
	170	18.1	12.0	8.9	7.1	5.9	37.8	18.7	12.4	9.2

6. 結 び

3 点観測において、観測誤差から生じる、みかけ速度、到来方向の誤差について、一般的な関係式を導き、観測点の配置が結果の精度に及ぼす影響を明らかにした。

また Monte Carlo 法を用いて、誤差の分布のシミュレーションを行なった。ここで行なった程度のシミュレーションは、長い計算時間を要しないので、実際の観測点配置について、容易に類似のシミュレーションを行なうことができることがわかった。この場合、1 つの三角形について、到来方向 36 方位、みかけ速度 6 個、各 300 回づつの試行のくりかえしとして、HITAC 5020E で約 5 分である。

25. *Errors in Apparent Velocity and Direction of Approach
Determined by the Tripartite Net Observation
of a Seismic Signal.*

By Takuo MARUYAMA and Ichiro KAYANO,
Earthquake Research Institute.

Apparent velocity and direction of approach of a seismic phase can be determined from arrival times at three observation points on the ground surface. Errors in this determination caused by observational errors in arrival times are investigated by a Monte Carlo method as well as by analytical methods.

Apparent velocity of a seismic signal is denoted by v and the direction of approach is specified by the angle ϕ which is measured counterclockwise from a direction chosen beforehand. Three observation points are denoted by A, B, C , the corresponding arrival times by t_A, t_B, t_C , and opposite sides to the vertices A, B, C of the triangle ABC by a, b, c respectively. If three points are marked in such a way that a counterclockwise round is made when we go along the border of the triangle in order of A, B, C , neglecting the higher terms of Taylor's expansion, we have

$$\begin{cases} \delta v = \frac{v^2}{2S} (w_A \delta t_A + w_B \delta t_B + w_C \delta t_C), \\ \delta \phi = -\frac{v}{2S} (l_A \delta t_A + l_B \delta t_B + l_C \delta t_C), \end{cases}$$

where $(l_A, w_A), (l_B, w_B), (l_C, w_C)$ are (ξ, η) components of $\vec{BC}, \vec{CA}, \vec{AB}$ respectively and S is area of the triangle. (ξ -axis is taken in the direction of approach and η -axis in the direction advanced by 90° from the former.) If we assume that $\delta t_A, \delta t_B, \delta t_C$ are random samples from mutually independent populations of which means are zero and standard deviations are τ , the standard deviations of δv and $\delta \phi$ can be written as

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma(\delta v) = \frac{v^2 \tau}{a} \gamma_a \sqrt{1 - \varepsilon} \cos 2(\phi_A - \alpha_A), \\ \sigma(\delta \phi) = \frac{v \tau}{a} \gamma_a \sqrt{1 + \varepsilon} \cos 2(\phi_A - \alpha_A), \end{array} \right.$$

where ϕ_A and α_A are angles measured from the direction of \vec{BC} ; ε , α_A , and γ_a depend only on the shape of the triangle. Contour maps of ε , α_A , $\gamma_a \sqrt{1 - \varepsilon}$, and $\gamma_a \sqrt{1 + \varepsilon}$ are given.

Random numbers made in a digital computer were employed in order to make clear the frequency distribution of δv and $\delta \phi$ for a variety of specified combinations of v and ϕ in several samples of triangle. Examples of frequency distributions are shown in the form of tables. Small deviations in means of δv and $\delta \phi$ are found. Comparisons of means and standard deviations are made, between analytical and numerical results, and satisfactory agreements are attained.

Useful figures and tables for field observations are included.