



- 博士論文 -

プラズマ合体を用いた 球状トーラスの高性能化

2000年12月15日提出

指導教官：小野 靖 助教授

東京大学大学院工学系研究科
電気工学専攻

植田 喜延

論文の内容の要旨

論文題目 プラズマ合体を用いた球状トーラスの高性能化

氏名 植田 喜延

核融合開発研究はトカマク方式を中心に進められており、現在プラズマの「核融合三重積 ($n\tau T_i$)」が約 $10^{21} \text{keV} \cdot \text{m}^{-3} \cdot \text{sec}$ 程度まで得られ、零出力炉 ($Q = 1$) の条件が満たされる段階まで到達した。また国際熱核融合実験炉計画 (ITER) 等における物理、工学研究によりこれまでの実績の外挿による核融合炉実現も十分に展望できる。しかしながら現状のトカマク方式を用いた核融合炉では、十分な核融合出力を得るためには非常に大きくならざるを得ず、経済的であるとは言えない。外部コイルによる磁界をあまり必要とせず、よりコンパクトでかつ閉じ込め性能も高い方式が必要とされている。その要求に応え得る核融合磁気閉じ込め配位として球状トーラスが注目されている。球状トーラスは球状トカマク、スフェロマック、低アスペクト比逆磁場ピンチ、逆転磁界配位などの低アスペクト比内部電流系配位の総称であり、各配位毎に特徴、到達パラメータや課題は様々であり、これらの統一的な理解も必要である。

トーラスプラズマを軸対称に合体させると、磁束の保存からポロイダル磁束は二つのプラズマの持つポロイダル磁束の大きい方の値となり、トロイダル磁束は両者の和となる。このことからプラズマ合体をトロイダル磁束量の調整に適用できると考えられる。また、合体に際し古典抵抗拡散を遥かに上回る速度で磁力線の繋ぎ変わりが生じ、失われる磁気エネルギーが熱エネルギーに変換されることからプラズマの加熱手法としても有力である。本研究では、軸対称合体を球状トーラスに適用し、磁束 (電流) 駆動および加熱効果を実証した。またこれらの効果を利用して各種球状トーラスの安定性の向上、長寿命化を試み、さらにより大型装置での合体実験の有効性を示す磁界スケージング作成を行った。

プラズマ合体を用いたトロイダル磁束注入実験ではスフェロマックや低アスペクト比逆磁場ピンチといった安全係数の低いプラズマで問題となるダイナモ現象の発生を抑制し、ダイナモに起因する低次トロイダルモードの低下を確認した (図 1)。急速加熱実験では、合体 (磁気リコネクション) によりプラズマのイオンが選択的に加熱されること、イオン温度上昇は安全係数の低いプラズマ程高いこと、加熱に要する時間と熱エネルギー増加量から、平均の加熱パワーにして最大 20 MW 得られることなどが明らかになった (図 2)。

合体加熱された球状トーラスのトロイダル電流分布を計測すると、従来の磁気軸でピークを持つ分布から磁気軸周辺で電流密度の低下するホローな分布に変化することが分かった。また、球状トカマクではプラズマ

電流のポロイダル成分がつくり出すトロイダル磁界の常磁性成分も低下する。これらの特徴は配位の高ベータ化(ベータ = プラズマ熱圧力 / 磁気圧)に寄与し、体積平均ベータ、ポロイダルベータ共に2-3倍上昇することが分かった。

合体により生成した高ベータ配位を用いてプラズマが高ベータ化した際に問題となる圧力駆動型の電磁流体力学的不安定性であるバルーニングモードの検証を実験および数値解析により行った。実験からは合体後長時間維持されるケースと、プラズマ端部に局所的に大きな磁場揺動を伴って早く消滅するケースが観測された。各々の圧力勾配を比較すると、早く減衰するケースの方が強い圧力勾配を持っていることが分かり、バルーニング不安定の発生が示唆された。両者の圧力分布を数値計算によって解析した結果、寿命の長いケースはバルーニングに対し安定であり、崩壊するケースは広範囲でバルーニング不安定性を示すことが確認された。

スフェロマックの異極性合体によって生成される逆転磁界配位はベータ値が非常に高く、さらに後から外部トロイダル磁界を印加した球状トカマクはプラズマ内部のトロイダル磁界が外部トロイダル磁界よりも小さくなる反磁性を示した。交換不安定性の安定化に有利な絶対極小磁界配位を形成することからベータ値の上限を決定するバルーニングモードが安定化される可能性がある。本研究ではバルーニング不安定を解析するBALOOコードを整備し、数値解析により実験的に得られた反磁性球状トカマクが実際にバルーニング不安定に対する第二安定領域に存在していることを実証し、その圧力、磁気シアの分布により第一安定領域にある球状トカマクよりも第一、第二安定領域の間を結ぶ窓が拡大していることを見出した。

より大型の装置への適用性を検討するために合体加熱の磁界スケールを評価した。スフェロマックの異極性合体実験において、初期スフェロマックの磁気圧を0.6-4 kPaの間で変化させた結果、合体後生成される逆転磁界配位のイオン温度は10-100 eVの範囲で磁気圧に応じて変化した。プラズマ合体による電子温度、密度の変化はほとんど見られないことを考慮すると、合体後の熱圧力は合体前の磁気圧にほぼ比例して上昇する。これは1 Tの磁界を持つ球状トラスを軸対称合体することで10 keVのイオン温度を持つ配位が生成され得ることを意味する。

以上、球状トラスにプラズマ合体を組み合わせることで経済的な核融合炉心プラズマとして魅力的な配位の候補となることを実験、数値解析を組み合わせることで実証した。

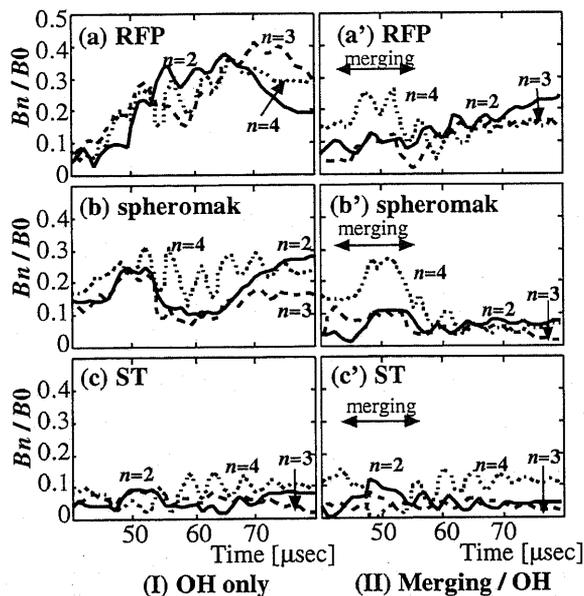


図 1: (a) 低アスペクト比逆磁場ピンチ, (b) スフェロマック, (c) 球状トカマクのトロイダルモードの磁界強度. ダッシュは合体を行った場合.

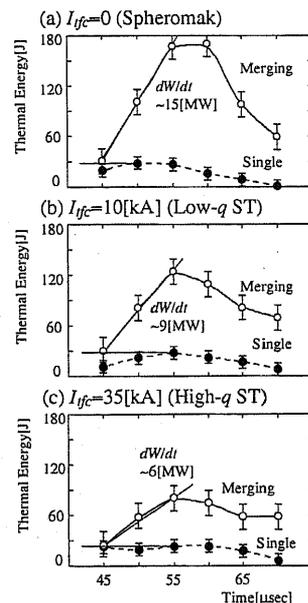


図 2: 熱エネルギーの時間変化. (a) スフェロマック, (b) 低 q ST, (c) 高 q ST. 実線は合体, 破線は単一生成の場合.

目次

第1章	序論	1
1.1	研究の背景	1
1.2	各種球状トーラスの特徴	2
1.2.1	スフェロマック, 球状逆磁場ピンチ (Reversed Field Pinch, RFP)	2
1.2.2	逆転磁界配位 (Field Reversed Configuration, FRC)	4
1.2.3	球状トカマク (Spherical Tokamak, ST)	5
1.3	プラズマ合体	6
1.3.1	高速磁気リコネクションの存在	6
1.3.2	プラズマ合体を用いたポロイダル電流駆動の概念	7
1.3.3	プラズマ合体を用いたプラズマ加熱のアイデア	8
1.4	本研究の目的	11
第2章	TS-3 プラズマ合体実験装置	13
2.1	放電装置	13
2.1.1	装置構成	13
2.1.2	電源構成	14
2.1.3	放電過程	15
2.2	計測装置	15
2.2.1	磁気計測	17
2.2.2	イオン温度計測	18
2.2.3	電子温度・密度計測	20
第3章	単一生成球状トーラスの相互比較	22
3.1	本実験の目的	22
3.2	実験内容	22
3.3	実験結果	23
3.3.1	磁気面, トロイダル磁界分布時間変化における相互比較	23
3.3.2	安全係数分布の検証	23
3.3.3	ポロイダル磁束減衰に関する検討	28
3.3.4	トロイダルモード観測	28
3.3.5	ベータ値の比較	30
3.4	単一生成球状トーラスの相互比較実験のまとめ	31

第 4 章	プラズマ合体を用いたポロイダル電流駆動実験	33
4.1	本実験の目的	33
4.2	実験内容	34
4.3	実験結果	35
4.3.1	ポロイダル磁気面の時間変化	35
4.3.2	合体による非対称性の変化	35
4.3.3	ポロイダル / トロイダル磁束時間変化	35
4.4	プラズマ合体を用いたポロイダル電流駆動実験のまとめ	44
第 5 章	プラズマ合体加熱効果の実験的検証	45
5.1	本実験の目的	45
5.2	実験内容	45
5.3	実験結果	45
5.4	加熱に関する考察	49
5.5	プラズマ合体加熱効果のまとめ	53
第 6 章	合体加熱球状トーラスの高ベータ平衡	54
6.1	概要	54
6.2	平衡分布計測結果	54
6.3	ベータ値の向上	60
6.4	ポロイダル減衰時定数の変化	60
6.5	合体加熱球状トーラスの高ベータ平衡のまとめ	62
第 7 章	球状トカマク合体を用いた第二安定化実験	63
7.1	実験解析	63
7.2	数値解析	65
7.2.1	平衡計算コード	65
7.2.2	安定解析コード	69
7.2.3	実験結果の適用	72
7.3	FRC 起源の高ベータ球状トカマクによる第二安定化	74
7.4	実験内容	74
7.5	実験結果	75
7.6	数値解析	77
7.7	バルーニング不安定性のまとめ	77
第 8 章	プラズマ合体の将来性	79
8.1	プラズマ合体によるポロイダル電流駆動の拡張	79
8.1.1	周辺ポロイダル電流分布制御の概念	79
8.1.2	周辺ポロイダル電流駆動実験	81
8.1.3	周辺ポロイダル電流駆動, 分布制御による安定性向上	82
8.2	合体による急速加熱のスケーリング	82

第 9 章 結論	86
付 録 A 電磁流体力学的平衡配位の計算	95
A.1 Grad-Shafranov 方程式	95
A.2 無力磁界配位	97
A.3 Grad-Shafranov 方程式の数値解法	98
付 録 B 理想電磁流体力学安定性におけるバルーニングモード解析	100
B.1 線形化 MHD 方程式の導出	100
B.2 エネルギー原理	101
B.3 理想 MHD のエネルギー原理の一般式の導出	102
B.4 プラズマ領域のエネルギー積分の直感的表式	106
B.5 バルーニングモード	107
付 録 C 軸対称トラスにおけるバルーニング方程式の導出	110
C.1 磁気面座表系	110
C.2 バルーニング方程式の導出	114
付 録 D 計算機シミュレーション	118
D.1 シミュレーションコード	118
D.1.1 MHD 方程式	118
D.1.2 座標系	119
D.1.3 規格化	120
D.1.4 差分化	120
D.1.5 境界条件	122
D.1.6 人工粘性	123
D.1.7 圧力を考慮したシミュレーション	124
D.2 スフェロマックの傾斜不安定性シミュレーション	124
D.3 コンパクト RFP に関する計算機シミュレーション	127
D.3.1 固有値分布を持つコンパクト RFP	127
D.3.2 RFP 安定性のアスペクト比依存性	127
D.4 高ベータ ST に関する計算機シミュレーション	134

第1章 序論

1.1 研究の背景

エネルギー源としての核融合開発研究の歴史は、ほぼ 40 年におよぶが、磁気閉じ込め核融合装置として、現在最も研究が進展しているのはトカマクと呼ばれる装置である。三大トカマク装置 (TFTR [1], JET [2], JT-60 [3]) では、プラズマの「核融合三重積 ($n\tau T_i$)」が約 $10^{21} \text{keV} \cdot \text{m}^{-3} \cdot \text{sec}$ 程度まで得られ、図 1.1 に示すように零出力炉 ($Q = 1$) の条件 (最高値は JT-60 の 1.25 : DD 実験からの換算値 [3]) が満たされるまでできている。また、TFTR や JET では短パルスの D-T 燃焼実験も行われ、数 ~ 十数 MW の核融合反応 (最高値は JET の 16 MW [2]) が達成されていることから、技術的な面のみを考えれば核融合炉の実現性は非常に高いと思われる。

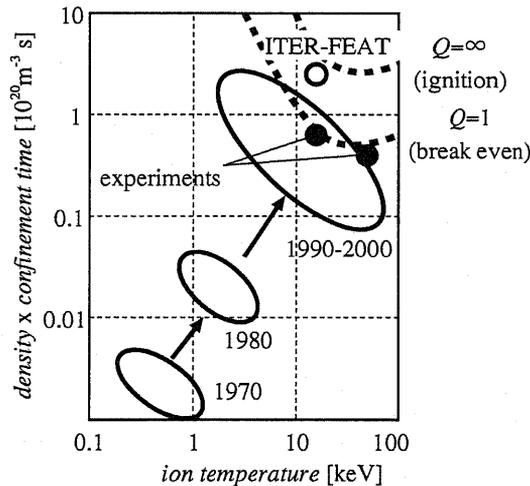


図 1.1: Progress of tokamak in $n\tau$ vs T space. Break even condition ($Q = 1$) has already been achieved.

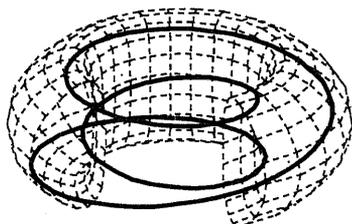
その一方で核融合開発は進歩するほどに装置が大型化する傾向があり、現在のトカマク方式をベースに自己点火条件を目指した ITER (International Thermonuclear Experimental Reactor project) の建設コストの見積りは数千億円のオーダーとなっている [4]. ITER 計画は当初の参加 4 極 (米国, ロシア, EU, 日本) のうち米国の撤退や、各極の財政状況から建設コストで半分以下に縮小された ITER-FEAT ($Q = 10$) へと設計が変更されている [5].

核融合炉の成立を経済性の観点から見る場合に、最も重要になるのは β 値 ($\beta =$ プラズマ熱圧力 / 磁気圧) の改善である。すなわち同程度のプラズマ熱圧力をより小さな磁気圧、すなわち外部コイル電流 (コイル設備, 運転損失) によって閉じ込める必要がある。例えば、通常のコトカマクではこの β 値が数 % 程度となる。これは、配位維持のためには、閉じ込められている熱圧力よりもはるかに大きな磁界が必要であることを意味しており、装置が非常に大型化する要因となっている。そこで、より効率的な磁気閉じ込め方式に関する研究が行われているが、中でも注目されているのが球状トーラス (Spherical Torus) である。

1.2 各種球状トーラスの特徴

球状トーラスはトーラスプラズマの中心対称軸付近を小さくし、全体として球状にした配位である。すなわち、アスペクト比 A (大半径 / 小半径) が 1 に近いトーラス配位である。図 1.2 に $A = 3$ の通常 (大アスペクト比) トーラスおよび $A = 1.2$ のコンパクトトーラスの形状を模式的に示す。コトカマクがまさに“ドーナツ”の形をしているのに対し、CT はリンゴの芯を抜いたような形状をしているのが特徴的である。

(a) $A=3$



(b) $A=1.2$

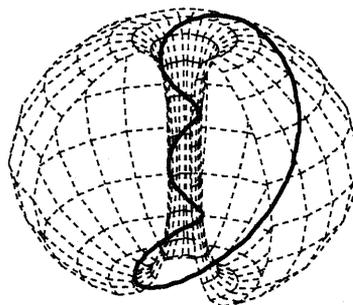


図 1.2: Schematic views of (a) conventional aspect ratio torus ($A = 3$) and (b) compact torus ($A = 1.2$). $q = 3$ magnetic field lines are also shown.

図 1.3 に各種コンパクトトーラスの概念図を示し、以下簡単に各々の特徴および研究状況を説明する。

1.2.1 スフェロマック, 球状逆磁場ピンチ (Reversed Field Pinch, RFP)

スフェロマックは図 1.3 に示した様に外部コイルによるトロイダル磁界がなく ($B_{t,ex} = 0$) プラズマ自身を流れる電流によって螺旋状の閉じ込め磁界を作り出す配位である。一方 RFP はスフェロマック同様プラズマ自身を流れる電流によるポロイダル磁界およびトロイダル磁界を持つが、さらに外部コイル (シェル) を流れる電流の作り出すトロイダル磁界を有する。この外部トロイダル磁界がプラズマ電流起源の内部トロイダル磁界と逆方

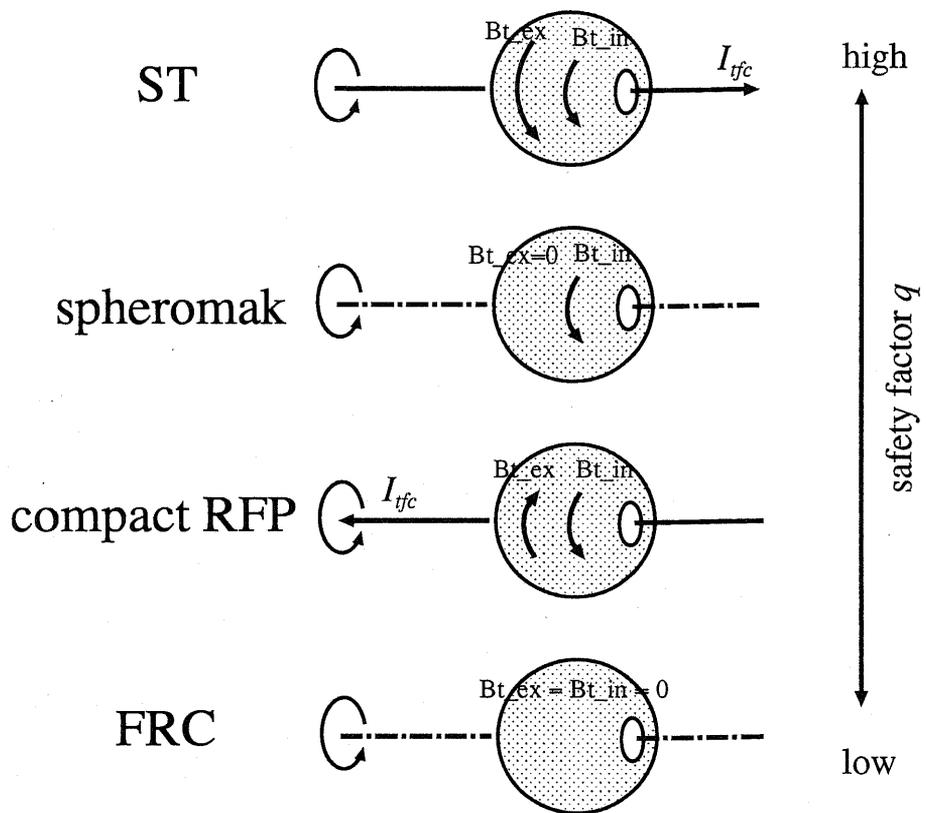


図 1.3: Schematic views of compact toroids.

向であるため、外部磁界の寄与の強いプラズマ周辺部と内部磁界が主となる中心部においてトロイダル磁界の向きが逆転する構造を持つ (中心では $B_{t,in} \gg -B_{t,ex}$, 端部では $B_{t,in} < -B_{t,ex}$).

スフェロマック, RFP は「磁気ヘリシティー一定の下で磁気エネルギー極小状態へと緩和する」という Taylor の理論 [6] に従った緩和特性を示す配位として知られている. これは配位形成に重要な役割を果たし, かつてはこの性質を積極的に利用した配位維持が注目されていた. しかしこの緩和現象 (ダイナモ) はプラズマ中心部の熱を外に吐き出してしまうため, 閉じ込め悪化につながる事が指摘されている. これまでの所閉じ込め性能はトカマクに及ばないが MST, RFX (共に RFP 装置) においてパルスポロイダル電流駆動 (PPCD) 実験が行われダイナモ発生を抑えたり [7], プラズマ中に誘起されるトロイダルモードスペクトルが単一になるシングルヘリシティー状態の実現 [8, 9] で閉じ込めが改善されることが確認された. 通常の RFP 運転では OH コイルのトロイダル電流駆動のみ行われており, ポロイダル磁束過多となり磁束変換 (ダイナモ) が生じる. トロイダル状のコイルにパルス状の電流を加えポロイダル電界を発生させることでトロイダル磁束を発生させ, 磁束のバランスを保ちダイナモを抑制した.

RFP のアスペクト比を低下させることでプラズマ中心付近から安全係数分布の有理面を排除しプラズマの安定性, 閉じ込めが改善されるという可能性もあり注目されている.

スフェロマックは原理的には中心を貫通する導体が不要であり炉の簡素化に有利である. しかし, OH コイルによるトロイダル電流のみ維持した場合には RFP と同様にダイナモが生じて閉じ込めが悪化してしまう. 配位生成以外のダイナモを極力回避する, あるいは中心対称軸上に電流をながすことでトカマク的な配位 (球状トカマク) にすることで閉じ込めを向上させることが可能である.

RFP は元々大アスペクト比のプラズマだが, 最近アスペクト比を小さくする (コンパクト RFP) ことで磁気軸付近の安全係数を高め, 配位中心 (高温) 領域の有理面を減らすことで不安定モードのカップリングを避け単一ヘリシティー状態を実現する可能性があること, またダイナモによる閉じ込め悪化等スフェロマックと良く似ているため, 本研究ではスフェロマックとコンパクト RFP を同一のグループとして扱う.

1.2.2 逆転磁界配位 (Field Reversed Configuration, FRC)

プラズマ中を流れるトロイダル電流とそれによって生じるポロイダル磁界のみで閉じ込める配位で, トロイダル磁界はほとんど存在せず ($B_{t,ex} = B_{t,in} \sim 0$), そのため β 値はほぼ 1 と非常に高い. 核融合反応により生成される中性子が非常に少なく, 高エネルギー陽子からの直接エネルギー変換が可能となる D-³He 核融合では高温・強磁界におけるシンクロトロン輻射損失の増加を考えると FRC が最も適していると考えられている. 従来は生成に高速電源が必要でプラズマ中にコイルやプローブを挿入することが不可能だったため, 配位特性の解明や長寿命化の面で遅れていたが, スフェロマックの異極性合体を用いた生成法 [10] と OH コイルによる電流駆動実験 [11] がなされたり, 回転磁界による電流立ち上げ, 維持実験 [12] などが行われ, 低速生成, 長時間維持が可能となってきている. 通

常の FRC は軸方向に長い楕円形状をしているが、軸方向の長さを短くし十分楕円度の小さい球形にするとテイルモードに対する安定性が向上することが剛体モデルを用いて計算されており [13] 注目されている。

FRC は、電磁流体力学的な検討ではその安定性が実験結果を説明できない (理論的に予測される寿命よりもはるかに長時間配位が維持される等) 現象が多い。しかし実験で得られる FRC の寿命はまだ十分とは言えず、FRC の挙動を記述できる理論体系を構築し物理特性を解明の手がかりとなるレベルまで閉じ込めを改善する必要がある。しかし先に述べた 2 つの手法を用いても現時点では数百マイクロ秒程度の配位持続時間しか得られておらず、今後より一層の努力が必要とされる。

1.2.3 球状トカマク (Spherical Tokamak, ST)

球状トカマクはアスペクト比 ($A = \text{トーラス大半径} / \text{小半径}$) が典型的なトカマクの持つ 3-5 よりも小さな値をもつトカマクで特にアスペクト比が 1.5 を下回るような配位が主流である。図 1.3 に示した様にコンパクト RFP 同様外部トロイダル磁界と内部トロイダル磁界を有するが、外部トロイダル磁界が非常に大きい ($B_{t,ex} \gg B_{t,in}$) という点で異なる。

ST はトカマクの高い閉じ込め性能を備えつつコンパクトかつ高効率な配位であり高 β 下で高い電磁流体力学 (MHD) 安定性をもつことが理論的に示されている [14]。例えば図 1.2 に示した安全係数 $q = 3$ の磁力線の軌跡 (磁力線がポロイダル方向に 1 周する間にトロイダル方向に 3 周する) が “悪い曲率” を持つ径方向外側でトロイダル方向に約半周しかしないのに対し “良い曲率” である内側で 2 周半以上回転することなどが安定性に寄与している。実験においても START (カラム研究所, 英国) において従来のトカマクの値 (12%) をはるかに上回る $\beta \sim 40\%$ が記録され ST の高ベータ性が実証された [15]。

これまでの ST 装置は START でプラズマ電流 300 kA とトカマク装置 (JET のプラズマ電流 5 MA) に比べ小規模であったが昨年からメガアンペアクラスを狙って設計された NSTX (プリンストンプラズマ物理研究所, 米国) [16], MAST (カラム研究所, 英国) [17] の運転が開始しており急速な進歩が予想される。

このように物理的な有利さを多数持つ一方で、工学的にトカマク配位にはない問題も存在する。その一つとして熱および中性子負荷の集中しやすい中心対称軸周辺のスペースが図 1.2 に示した様に小さくなることが挙げられる。そのため核融合反応を起こしやすい D-T 反応ではなく条件は厳しくなるが中性子負荷の軽減される D-D 核反応を目指すべきだという考えもある [18]。また、通常のトカマクでは中心対称軸に沿って設置した OH コイルの電流を変化させることでプラズマ電流を誘導する (変流器の原理) が、ST ではコイル断面積が必然的に小さくなり、これを用いてプラズマ電流の立ち上げおよびオーム加熱を行うことが難しくなり非誘導の電流駆動、加熱が試みられている。例えば HHFW (高調速波) を使うもの [19] や CHI (同軸ヘリシティ入射) [20, 21] などが考案されている。一旦プラズマ電流がある程度立ち上がり、圧力が上昇すれば圧力勾配によって駆動されるブートストラップ電流によってプラズマ電流の大部分を維持することができる。

ST 研究の大きな課題としては炉規模でもトカマクに代替しうる閉じ込め能力があることを実証すること, OH コイルを用いないプラズマ生成, 加熱 (電流駆動) 方式の確立, さらに理論解析で知られている高ベータ領域の実現 (バルーニングモードに対する第二安定化) などが挙げられる.

1.3 プラズマ合体

1.3.1 高速磁気リコネクションの存在

磁気リコネクション現象は、本来導電率の高いプラズマ中で凍結されるべき磁力線が、磁気中性点付近の拡散によりつなぎ変わる現象である (図 1.4). この局所的な拡散が帯域的なプラズマ磁界構造を大きく変えることから、これまで理論、計算機シミュレーションを中心とする研究が盛んに行われて来た.

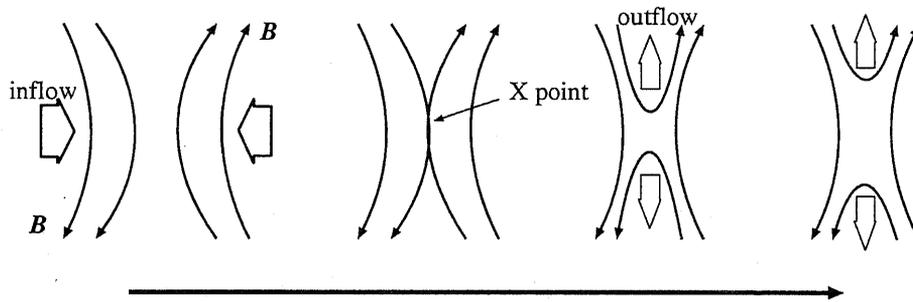


図 1.4: Schematic view of magnetic reconnection.

核融合プラズマにおいては、トカマクや逆磁場ピンチ (RFP) における鋸歯状振動やディスラプションの際に、磁気リコネクションが磁界構造の再編過程や崩壊過程を決定することが知られている [22, 23]. また RFP やスフェロマックの平衡形成を説明する Taylor 型緩和 (ダイナモ) 現象も磁気リコネクションを媒介としている [6].

プラズマ合体は入れ子状になった磁気面をもつ 2 つのプラズマが外側の磁気面から次々と磁気リコネクションによってひとつの配位を形成する現象である. 繋ぎ変わる磁力線の交差線には当初プラズマ電流と逆向きの電流が流れ、リコネクションを妨げようとする. この逆向き電流の拡散時間がプラズマ電流の拡散時間と同程度ならば合体が完了する前にプラズマ自身が消滅してしまうはずだが、実際には数十倍程度早く拡散され、合体完了後も十分大きなプラズマが存在している.

このような現象は高速磁気リコネクション機構を説明する最も簡単な定常モデルである Sweet-Parker モデル [24] では、図 1.5 の様な長さ L , 幅 2δ の拡散領域を考えると、Maxwell 方程式, 連続の式, 運動方程式から磁気リコネクションの特徴時間 τ_{SP} は抵抗による拡散時間 $\tau_R = \mu_0 L^2 / \eta$, アルフベン時間 $\tau_A = L \sqrt{\mu_0 \rho} / B$ を用いて

$$\tau_{SP} = \sqrt{\tau_A \tau_R} = \frac{\tau_R}{\sqrt{S}} \quad (1.1)$$

と表されることなどから定性的に説明することができる。ここで S は磁気レイノルズ数と呼ばれる量で τ_R/τ_A と定義され、通常 1 よりも非常に大きな値をとる。

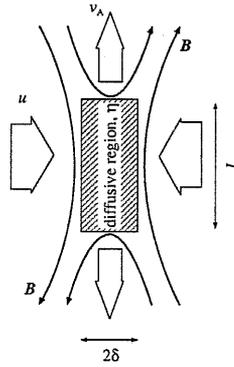


図 1.5: An illustration of the Sweet-Parker model.

1.3.2 プラズマ合体を用いたポロイダル電流駆動の概念

ターゲットとなるトーラスプラズマに対し軸対称にトーラスプラズマを衝突させると、お互いの磁力線のポロイダル成分 (トーラス小円方向) がつなぎ変わり、最終的に単一の磁気軸を持つトーラス配位が形成される。この際磁束保存を考えると図 1.6 の様にポロイダル磁束は両者の大きい方になりトロイダル磁束は磁力線の方を考慮した両者の和となることが分かる。

合体するトーラスのトロイダル磁束の向きが同一である同極性合体を用いることでトロイダル磁束が増加され、ポロイダル電流を駆動することができる。

プラズマ合体と競合するポロイダル電流駆動方式としては、大型 RFP 装置において近年多用されている パルスポロイダル電流駆動 (PPCD) [7] がある。PPCD とプラズマ合体によるポロイダル電流駆動の違いは、PPCD が外部コイル (シェル) 電流 (トロイダル磁束) を変化させることによる電磁誘導を用いているのに対し、プラズマ合体では合体するプラズマ生成時にトロイダル磁束をプラズマ内に注入している点である (図 1.7)。

電源とのカップリングを考えると入射プラズマ生成時の損失があるために単発の電流駆動においては PPCD の方が有利と言える。しかし、長時間放電においては複数回のポロイダル電流駆動が必須であり、PPCD においては外部コイルによる磁束が加算されるため平衡配位が初期状態から次第にずれて行ってしまう。一方で合体では電流を維持する主プラズマから離れた場所から必要量だけトロイダル磁束を注入できるため、そういった心配はない。

そのため、装置規模が大きくなり放電時間が長くなるとプラズマ合体の特徴が活かされる。また、電極によりポロイダル方向の磁力線に電界を加えるヘリシティ注入法 [20] と比較すると、ヘリシティ注入では磁力線によってプラズマと電極が結びつけられ、電極から

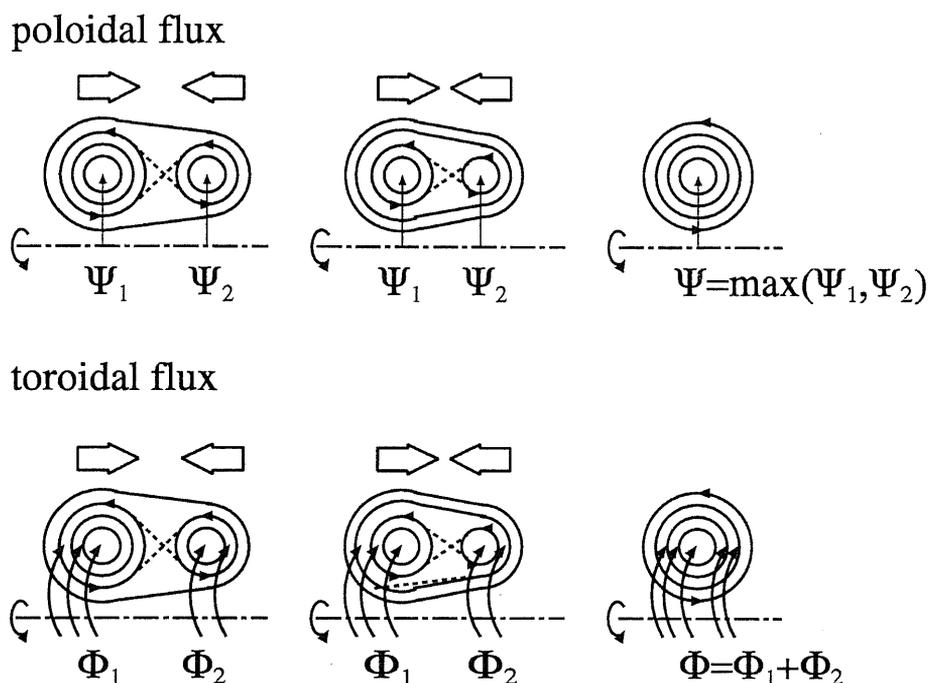


図 1.6: Flux conservation in axisymmetric merging.

の金属イオンの混入が不可避であるのに対しプラズマ合体はプラズマ生成部（電極）を主プラズマから遠ざけることができるため有利である。

表 1.1 に各方式の特徴をまとめる。長時間繰り返しの電流駆動が可能で、かつ主プラズマへの（ポロイダル電流駆動そのものを除く）影響が少ないのがプラズマ合体である。

1.3.3 プラズマ合体を用いたプラズマ加熱のアイデア

入射するトーラスの熱エネルギーがターゲットプラズマに注入されるとともに磁気リコネクションによって失われる磁気エネルギーがイオンの熱エネルギーに変換される [25] ことで、ターゲットプラズマは非常に大きな熱エネルギーを得る (図 1.8)。

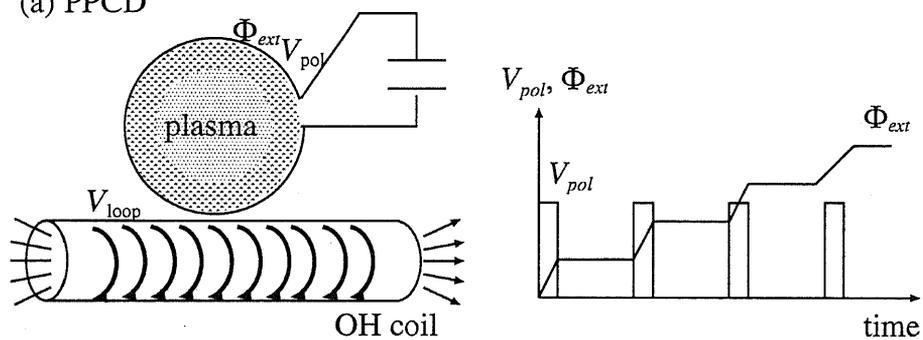
同量の磁気圧力と熱圧力の間には

$$\frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{3}{2}n\kappa T \quad (1.2)$$

が成り立つ。ここで解放される磁界強度 $B = 1\text{T}$ 、プラズマ密度 $n = 10^{20}\text{m}^{-3}$ とすると、得られる温度 T は 10keV を超える計算になる。本研究で使用した TS-3 装置では $B \sim 0.05\text{T}$ 程度であるが $T \sim 60\text{eV}$ となる。

またプラズマ合体はアルフベン時間のオーダーで進行する速い現象であることから非常に高い加熱パワーが期待でき、低温の初期プラズマから短時間で高温プラズマへと移行させることができる。さらにプラズマ合体では装置規模が大きくなる程高い加熱パワーが得られるという可能性がある。

(a) PPCD



(b) merging

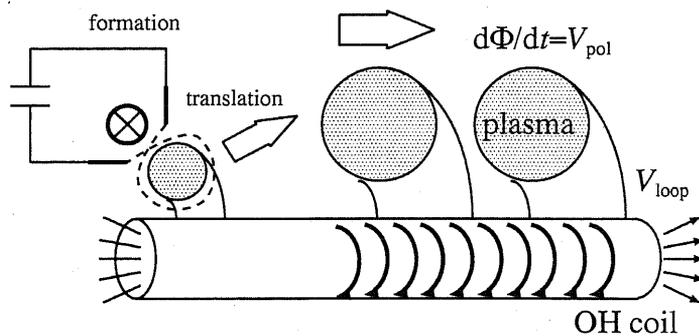


図 1.7: Comparison between PPCD and plasma merging.

表 1.1: Comparisons among various poloidal current methods.

	plasma merging	PPCD	helicity injection
equipment structure	complex (plasma formation)	simple	simple
power transmission	mediate (source plasma)	inductive	direct
repetition	intermittent	restricted	~ DC
influence on plasma	magnetic reconnection	store of external flux	contamination (metal ion)

合体によって得られる熱エネルギーは $W \sim L^3 B^2 / 2\mu_0$ である。ここで L はプラズマの典型長である。合体期間は Sweet-Parker モデルを用いると $\tau = L/u = LL'/2\delta v_A = \tau_A L'/2\delta$ となる。 L' , 2δ はそれぞれ磁気リコネクションの拡散領域の長さおよび幅を表している。アルフベン時間は $\tau_A = L\sqrt{\mu_0 n m_i} / B$ であることから、加熱パワーは

$$P = \frac{W}{\tau} \sim \frac{L^3 B^2}{2\mu_0 \tau} \quad (1.3)$$

と見積もられる。例えば $B = 1\text{T}$, $L = 1\text{m}$, $n = 10^{20}\text{m}^{-3}$, $m_i = 1.67 \times 10^{-27}\text{kg}$ とすると $\tau = 10\tau_A$ の仮定の元で加熱パワーは 10 GW を超え核融合炉規模のプラズマでは初期急速加熱法として非常に強力であるといえる。本研究で使用した TS-3 装置は $L \sim 0.2\text{m}$ 程度であるが $P > 5\text{MW}$ と予想される。

現在よく用いられている加熱手段として現在最も強力なのは中性粒子ビーム入射法 (Neutral Beam Injection : NBI) である。例えば日本原子力研究所の JT-60 装置においては 40 MW の正 NBI および 12 MW の負 NBI が稼働している [26]。NBI の原理はプラズマに高エネルギーの中性粒子ビームを入射し、プラズマ中のイオンや電子と衝突し、荷電交換や電離によってイオンビームとなり、その高速イオンがプラズマ中のイオン、電子とクーロン衝突を繰り返しつつプラズマを加熱し、自らのエネルギーを失うことにある。NBI は入射ビーム粒子が燃料補給も兼ねることから核融合炉心プラズマの運転制御に非常に有効である。プラズマ合体を用いた加熱は NBI に比べ総注入エネルギー $W = P \times t$ では劣るもののより短時間で加熱を行える (高パワー) であること、また NBI や高周波加熱では単一の加熱源では局所的な加熱しか行えないのに対しプラズマの広い範囲を加熱することができることから、特に配位生成初期段階の急速加熱法として有効である。また NBI では荷電交換によるイオン化によって閉じ込め磁界に捕捉されない場合、高エネルギー粒子が装置壁を直撃し損傷してしまう。特に小型装置では軌道制約が厳しくなる。そのよう

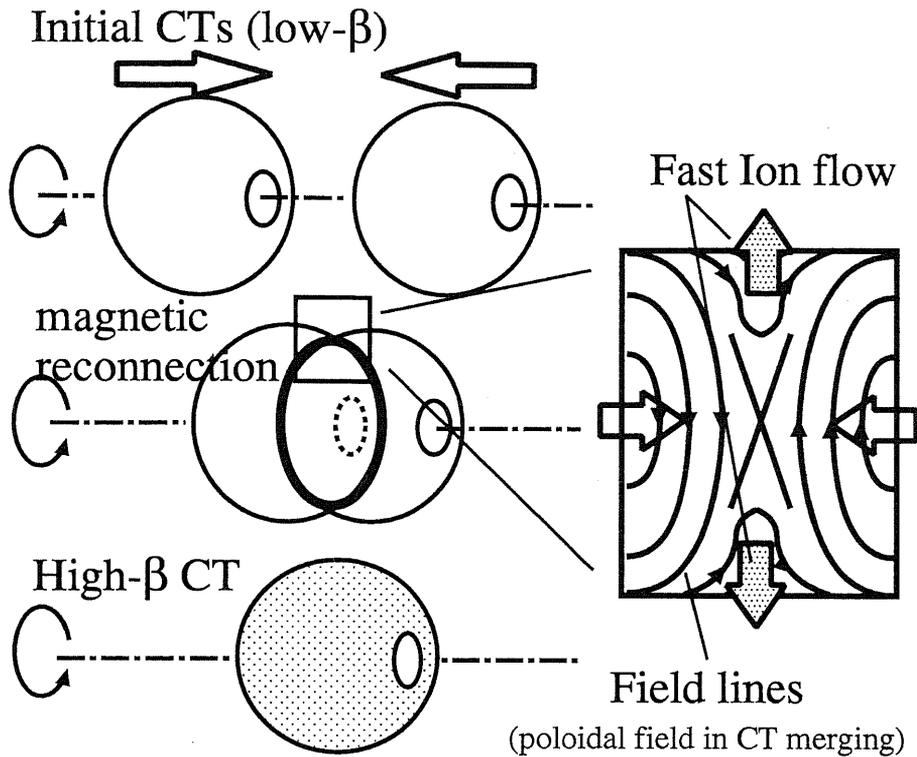


図 1.8: Schematic diagram of high-power heating by use of plasma merging.

な観点からもプラズマ合体は有効である。また、電磁波を用いた高周波 (RF) 加熱は、局所的な加熱に非常に有効である。

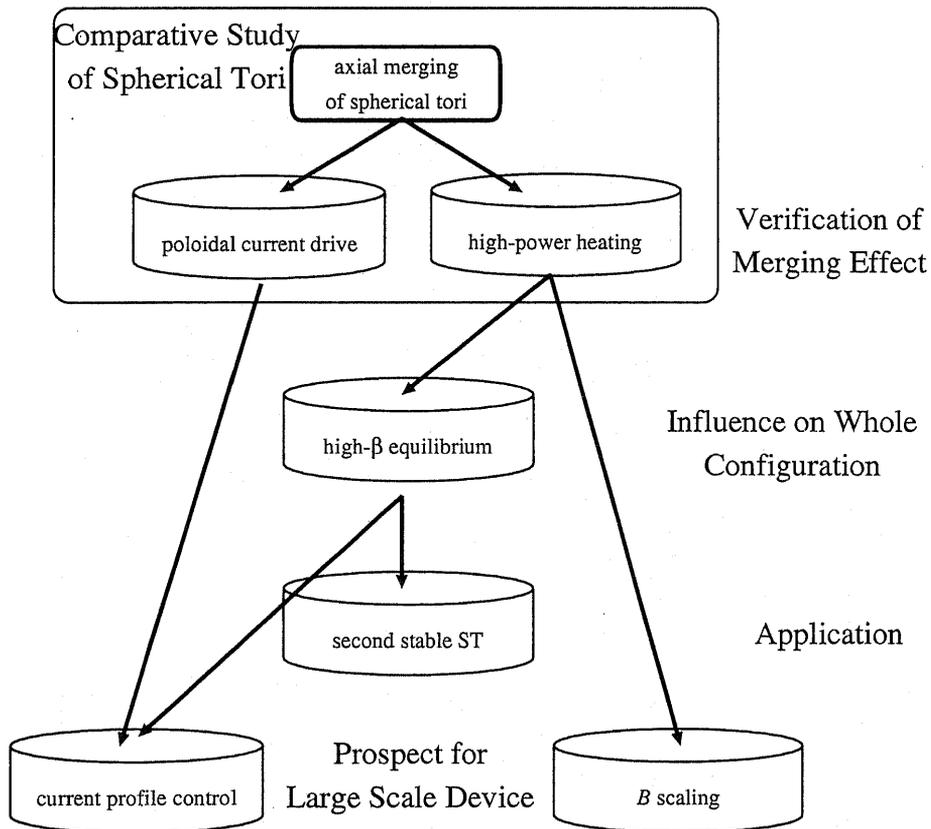
以上を考慮すると、各種加熱方式にはそれぞれ特徴があり用途に応じて使い分ける必要がある。NBI や RF による電流駆動も行われている等現状はより複雑であるが簡単にまとめると表 1.2 の様になる。プラズマ合体はその高速、高パワーの性質から核融合プラズマの初期立ち上げに有効である。

1.4 本研究の目的

以上に述べたようなコンパクトトラスの研究課題をふまえ、本研究では革新的な電流駆動、加熱法としてプラズマの軸対称合体を提案し、高性能なコンパクトトラスを実現することを目的とする。具体的にはポロイダル電流駆動による磁束変換 (ダイナモ) 抑制、メガワット級の強力な加熱、ホローな電流分布による高ベータ配位、特にバルーニングモードに対する第二安定化 ST の生成といったプラズマ合体によって実現しうる幅広い可能性を検証する (図 1.9)。

表 1.2: Comparisons among various heating methods.

	plasma merging	NBI	RF
power	> GW?	~ 40 MW	~ 20 MW
duration	short (τ_A order ~, controlled by external force)	long (> s)	long (> s)
application	initial heating repetitive heating	main heating	local heating
fueling	OK	OK	none



☒ 1.9: Outline of this research.

第2章 TS-3 プラズマ合体実験装置

2.1 放電装置

本実験において使用した TS-3 装置 (図 2.1) は全長 0.96 m, 直径 0.75 m のステンレス製円筒真空容器に片側 8 対づつ計 16 対の放電電極と片側 1 つずつのポロイダル磁界コイル (PF コイル) をもち, z 放電 θ ピンチ方式により 2 つのプラズマを独立に生成することが可能である.

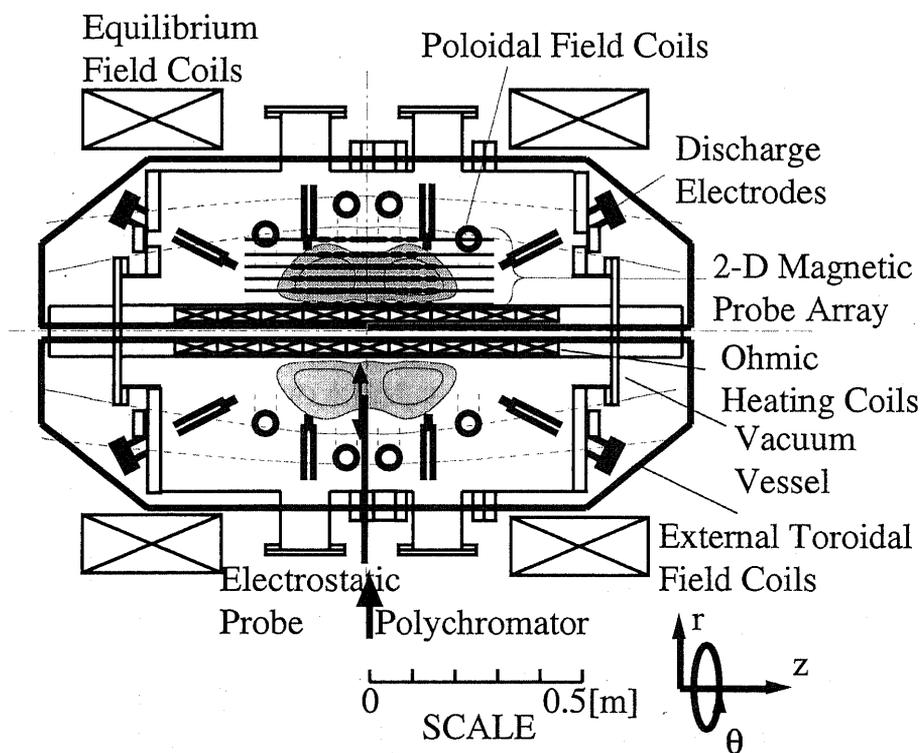


図 2.1: TS-3 plasma merging device.

2.1.1 装置構成

以下に装置構成の概略を示す.

ポロイダル磁界発生用コイル (PF コイル) ポロイダル磁界コイルはプラズマ生成時に変流器のようにプラズマ中に電流を誘起するために用いられる。平均半径 0.255 m, 4 ターンのコイルで 0.3 mm の薄肉ステンレスで覆われている。真空容器の両端に 1 つずつ備えつけられており並列接続して使用する。

放電電極 プラズマ生成時にトロイダル磁束の注入を行うために用いる。2 つのプラズマを生成するために 1 つのプラズマにつき 8 対の計 16 対が真空容器に設置されている。そのそれぞれについて独立に放電を行うことが可能である。これらは電源となるコンデンサバンクにトランスを介して接続されている。これにより電源と電極間のマッチングをとり大きな放電電流を引き出すことができ、また 8 対の放電のばらつきを抑える役割も果たしている。

変流器コイル (Ohmic Heating コイル) 真空容器の中心対称軸上に設置され、プラズマ中の電流を変流器の原理で駆動するソレノイドコイルである。2 層構造になっており内側、外側ともに 11 ターンのコイルが 3 本一組、4 並列 (コイルは 12 本) で巻かれている。結線により往復 22 ターンから 88 ターンまでの巻き数を選択することができる。不純物対策のため 0.3 mm 薄肉ステンレスで被覆してある。

外部トロイダル磁界印加コイル 真空容器の中心対称軸を貫き、外部を迂回して戻る 16 ターンのコイルである。ST, コンパクト RFP 生成時に外部トロイダル磁界を印加するために用いる。

平衡磁界発生コイル (Equilibrium Field コイル) プラズマの持つトロイダル電流によるフープ力を抑えるために外部から印加する磁界を発生する。外径 1.033m, 内径 0.83m, 巻き数 117 ターンの水冷却コイルで、プラズマの生成される部分にほぼ様な磁界を生成する。

2.1.2 電源構成

電源としてコンデンサバンクとモータジェネレータを以下のような振り分けで用いた。

高速コンデンサバンク 容量 18.75 μ F, 定格電圧 40 kV のコンデンサバンクで 3 台ある。そのうち 1 つを PF コイルに、残りの 2 つを 2 組の放電電極に用いる。コンデンサの電圧値の影響を受けにくいクローバスイッチをもっており、任意の時刻においてクローバをかけ放電波形をコントロールすることができる。

中速コンデンサバンク 容量 250 μ F, 定格電圧 20 kV のコンデンサバンクで主に OH コイルに接続する。

低速コンデンサバンク 容量 850 μ F, 定格電圧 10 kV のコンデンサバンクで 3 台ある (充電電圧の設定は 1 種類のみ)。主に外部トロイダル磁界コイルに接続する。

モータジェネレータ 3 相 3 kV の交流で動作する誘導機により定格 1.2 MW, 800 V の直流発電機を駆動する。平衡磁界コイルに接続する。

予備電離系 3 kV, 3 A の直流電源を用いて、放電電極間でグロー放電を起こし電極放電を促進させる。

2.1.3 放電過程

z 放電 θ ピンチ方式によるプラズマ生成の過程を示すと、

1. EF コイルにより一様磁界を印加し、予備電離を開始する。
2. PF コイルに電流を流す
3. PF コイルとコンデンサバンクとの LC 共振により PF コイル電流が立ち下がり始めた時に電極放電を行う。電極放電電流が最大となる付近でクローバをかける。電極放電によりプラズマが生成されトロイダル磁束が注入される。
4. PF コイルの立ち下がりによりプラズマ中にトロイダル電流が誘起される。
5. PF コイル電流が 0 を横切ると (反転すると) プラズマが PF コイルから切り離され閉じた磁気面を形成する。反転した PF コイル電流がさらに振動ないようにクローバをかける。
6. プラズマ電流のフープ力が外部磁界とつりあって平衡に達する。

放電に際し中心導体 (TF コイル) に任意の電流 I_{tfc} を流すことで安全係数 q の高い ST からスフェロマック、低 q のコンパクト RFP まで幅広いプラズマ配位を生成できることが大きな特徴である。ここで q 値とはトーラスプラズマ中の磁力線は (FRC の様な一部の例外を除き) 小円方向にねじれながら大円を周回するが、この螺旋のピッチのことであり安全係数とも呼ばれ MHD 安定性の指標となる。適当な仮定をおけば q 値は I_{tfc} に比例する。配位形成後、PF コイルに流れる反転電流 (プラズマ電流と逆向きの電流) は生成されたプラズマ同士を外から押しつける力として働き、合体を促進する役割も果たしている。

図 2.2 に典型的な放電波形を示す。以後本論文において時間の基準を電極放電開始時刻とする。プラズマ合体は 45-55 μ sec 付近で行われる。表 2.1 に TS-3 装置における主要なプラズマパラメータを示す。

2.2 計測装置

本研究では主に磁気計測を磁気プローブ、イオン温度計測を分光計測、電子温度・密度計測を静電プローブによって行った。また、プラズマ生成、制御用コイル電流はログウスキコイルによって計測している。

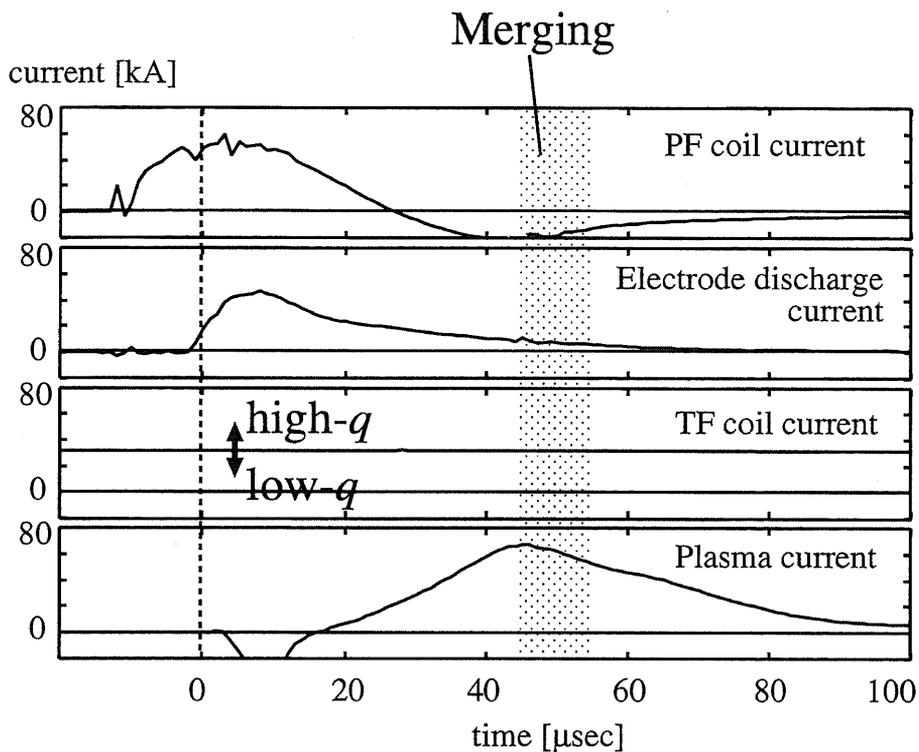


図 2.2: Typical waveforms of plasma discharge in TS-3.

表 2.1: Major plasma parameters in TS-3 experiments.

major radius R	~ 0.2 [m]
minor radius a	~ 0.14 [m]
electron temperature T_e	5-20 [eV]
ion temperature T_i	5-10 [eV] (without merging)
electron density n_e	$\sim 10^{20}$ [m $^{-3}$]
lifetime	~ 50 [μsec] (without current drive)

2.2.1 磁気計測

本研究で主に用いた磁気計測系は r - z 平面をカバーする二次元磁気プローブ列である。図 2.3 に磁気プローブの配置を示す。

磁気プローブのコイル両端にあらわれる電圧 V はプローブ内を貫通する磁束 Φ およびコイル巻数 N から

$$V = N \frac{d\Phi}{dt} \quad (2.1)$$

で与えられる。ただし電圧の符号は省略した。プローブ内における面に垂直な方向の磁束密度 B が一様であるならば $\Phi = SB$ であり

$$B = \frac{1}{NS} \int V dt \quad (2.2)$$

によって求められる。積分操作にはコンデンサ、抵抗およびオペアンプを用いた。

z 方向磁界を計測する B_z プローブ 62 点、トロイダル方向磁界を計測する B_t プローブ 44 点を設置した。軸対称性 ($\partial/\partial\theta = 0$) が成立すれば、 B_z 分布からポロイダル磁束 Ψ

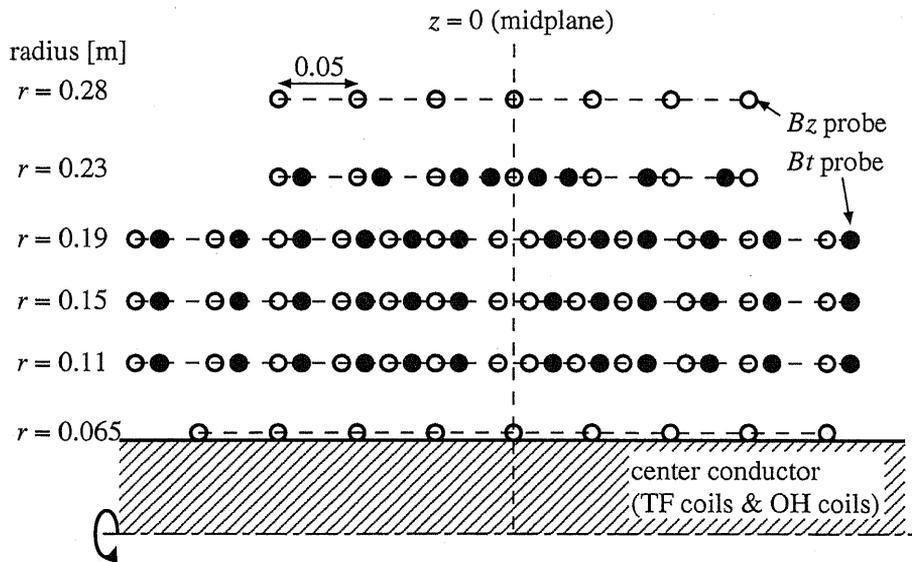


図 2.3: Positions of the r - z magnetic probe arrays.

$$\Psi(r, z) = \int_{r_{\min}}^r B_z(r, z) 2\pi r dr \quad (2.3)$$

および径方向磁界

$$B_r = -\frac{1}{2\pi r} \frac{\partial \Psi}{\partial z} \quad (2.4)$$

を計算することができる。

さらに磁界の二次元分布から圧力平衡成立時の圧力分布を求めることができる。圧力平衡は

$$\nabla p = \mathbf{j} \times \mathbf{B} \quad (2.5)$$

で表される。電流密度 \mathbf{j} は Ampere の法則から

$$\begin{aligned}\mu_0 \mathbf{j} &= \nabla \times \mathbf{B} \\ j_t &= \frac{1}{\mu_0} \left(\frac{\partial B_z}{\partial r} - \frac{\partial B_r}{\partial z} \right) \\ j_z &= \frac{1}{\mu_0} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial(r B_t)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial B_r}{\partial \theta} \right) = \frac{1}{\mu_0 r} \frac{\partial(r B_t)}{\partial r}\end{aligned}\quad (2.6)$$

で計算される。圧力勾配の径方向成分を書き出すと

$$\frac{\partial p}{\partial r} = j_t B_z - j_z B_t \quad (2.7)$$

なので圧力は積分

$$p(r, z) = \int_{r_{\min}}^r (j_t B_z - j_z B_t) dr \quad (2.8)$$

を実行することにより求まる。ここで r_{\min} はプラズマ端 ($p = 0$) の位置を示す。TS-3 装置においてこの手法で計算した圧力分布が温度、密度計測から求めた圧力分布に良く一致することが分かっている [27]。

磁気プローブから得られる信号を時間積分せず、フーリエ変換を行うことで磁気揺動計測を行う。磁気プローブの $\dot{B} = dB/dt$ 信号をある時間幅 T においてフーリエ変換して得られるスペクトル $\delta \dot{B}_n$ は、磁界そのもののフーリエスペクトル δB_n に対し

$$\delta \dot{B}_n = j \frac{2\pi n}{T} \delta B_n \quad (2.9)$$

の関係があることから、磁界の変動成分 ΔB は

$$\Delta B = \sqrt{\sum_n \delta B_n^2} = \sqrt{\sum_n \left(\frac{T}{2\pi n} \delta \dot{B}_n \right)^2} \quad (2.10)$$

と計算される。定常的な揺動であれば $n \geq 1$ の範囲で加算すれば良いが、実際にはプラズマの電気抵抗による拡散等数 \sim 数十 μ sec の時間スケールでの磁界構造の変化の影響を取り除くため本論文では 1.25 MHz 以上の成分で計算する。 ΔB を B で規格化した $\Delta B/B$ を磁気揺動と呼び磁界の揺動の大きさを表す指標とする。

また、図 2.4 に示す様にプラズマの非軸対称性を計測するためプラズマセパトリクス付近 ($r = 0.29$ m) に 32 点のトロイダルモード計測用 B_z 磁気プローブ列を設置した。角度方向 32 点の信号をフーリエ変換し、各モードの係数を $n = 0$ 成分と比較することでトロイダル磁界の非対称性を検証することができる。

2.2.2 イオン温度計測

プラズマのような多数の原子が熱運動している時、プラズマから放射されるスペクトル強度 $I(\lambda)$ は中心波長の周りにイオン温度に応じた広がり (ドップラー広がり) をもちが

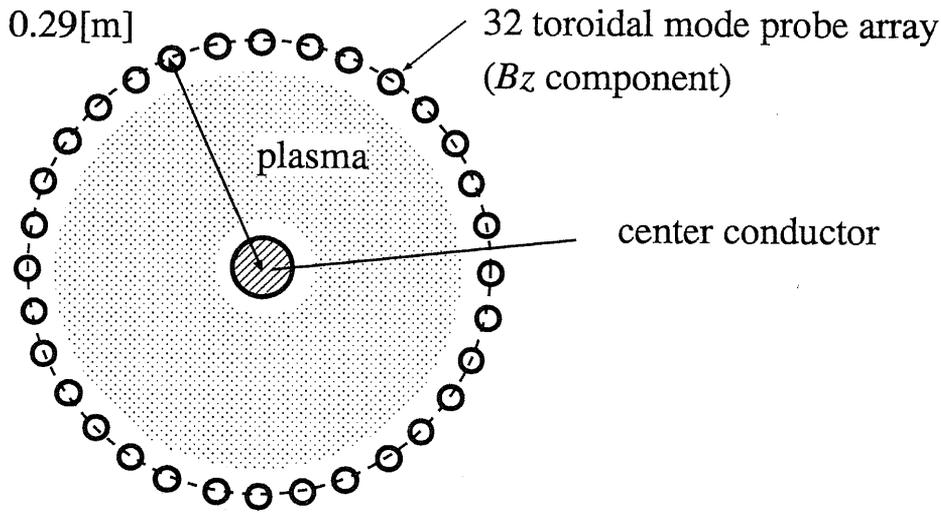


図 2.4: Positions of the 32 points toroidal mode magnetic probes.

ウス分布をなす.

$$I(\lambda) = \frac{I_0}{\pi^2 \lambda_D} \exp \left[- \left(\frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_D} \right)^2 \right] \quad (2.11)$$

$$\lambda_D = \frac{\lambda_0}{c} \sqrt{2\kappa T_i m_i} \quad (2.12)$$

ただし, λ_0 , T_i , m_i はそれぞれ中心波長, イオン温度 ([K]), イオン質量を示している. 子の時の全半値幅 $\lambda_{\frac{1}{2}}$ とイオン温度の間には

$$T_i[\text{eV}] = 1.7 \times 10^8 \times A \times \left(\frac{\lambda_{\frac{1}{2}}}{\lambda_0} \right)^2 \quad (2.13)$$

という関係が成り立つ. ここで A はイオンの質量数である. この広がり $\lambda_{\frac{1}{2}}$ を観測することによりイオン温度を測定する. 本研究では $H_\beta = 486.1\text{nm}$ スペクトルを利用した. プラズマから放出された光は 中心対称平面 ($z = 0$ 面) 内にある観測窓を通り視野拡大のための凹レンズ, 集光のための凸レンズを通過して分光器を通りイメージインテンシファイアつき CCD 検出器に入る (図 2.5). インテンシファイアはゲートパルスから送られる矩形波がシャッターとなり任意の時刻のプラズマ光を二次元的 (波長方向, 空間方向) に取り込むことができる. 本研究では矩形波の幅は $4 \mu \text{sec}$ に設定した. 検出器に入った信号はコントローラによって A/D 変換されパソコン, イーサネットを介してワークステーションのハードディスクに格納される. 送られた信号は波長方向分布をマルカート法を用いてガウス分布に最小二乗近似する. マルカート法は非線形最小二乗法の一つで, 最適解から離れた点では最急降下法的な最適化を行い, 最適解に近づくにつれ最急降下法よりも速いニュートン法的な最適化を行う, 両者の長所を採り入れたアルゴリズムである.

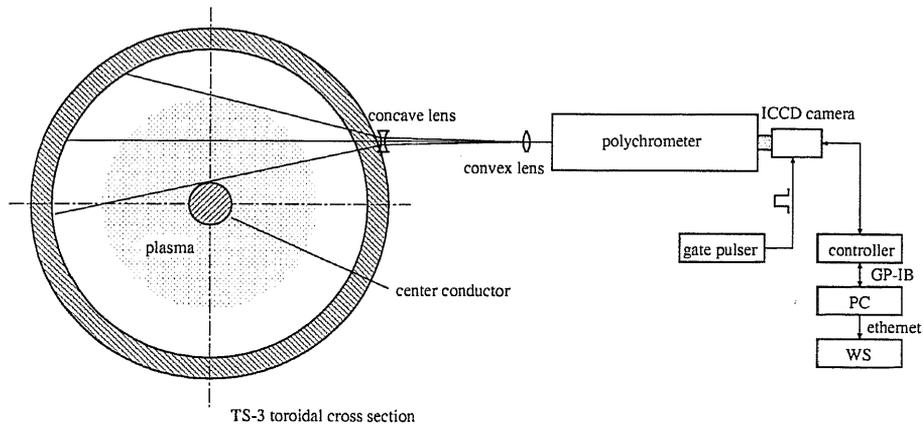


図 2.5: Schematic view of ion temperature measurement.

2.2.3 電子温度・密度計測

静電プローブはその精度に限界はあるもののプラズマ中での位置を容易に変化させることができ空間分解能に優れる計測手段である。特にプローブ自身の電位がプラズマと切り離されるフローティングプローブはプラズマに対する擾乱が比較的少ないという利点がある。本研究では単一放電で電子温度・密度の時間発展を得ることのできるステンレス製円筒型トリプルプローブ方式を用いて、電子温度・密度の中心対称平面上径方向分布を計測した。

トリプルプローブ法の原理を簡単に述べる。図 2.6 の様に近接した 3 本のプローブ $P_{1,2,3}$ をプラズマ中に挿入し、 P_1 - P_2 、 P_1 - P_3 間にそれぞれ V_{d2} 、 V_{d3} のバイアス電圧を印加する。 $V_{d2,3} > 0$ とすると、 P_1 には電子電流が、 $P_{2,3}$ にはイオン電流が流れる。プローブ系は閉回路を構成するのでプローブ電流 $I_{1,2,3}$ の間には

$$I_1 + I_2 + I_3 = 0 \quad (2.14)$$

の関係が成り立つ。無衝突プラズマで、電子のエネルギー分布が Maxwell 分布をなしており、3 本のプローブがおかれた位置の空間電位やプラズマパラメータが等しいとすればプローブ電流は次の様に表される。

$$I_i = -j_{e0} S_i e^{-\phi_i} + j_{ii} S_i \quad (2.15)$$

ここで j_{e0} は空間電位における熱拡散電子電流密度、 j_{ii} は各プローブにおけるイオン電流密度、 ϕ_i は各プローブの規格化電位 $\frac{eV_i}{kT_e}$ である。一般に、プローブ電位の変化に対し電子電流 $-j_{e0} S_i e^{-\phi}$ は大きく変化するが、イオン電流はそれほど大きく変化しない。そこで $j_{ii} \sim j_{i0}$ とし、式 (2.14, 2.15) から I_1 を消去して

$$\frac{\left(1 + \frac{S_1}{S_2}\right) I_2 + I_3}{I_2 + \left(1 + \frac{S_1}{S_3}\right)} = \frac{1 - e^{-\frac{eV_{d2}}{kT_e}}}{1 - e^{-\frac{eV_{d3}}{kT_e}}} \quad (2.16)$$

が得られる。ただし $V_{di} = V_i - V_1$ の関係を用いた。 $V_{2,3}$ は既知の値なので、プローブに流れる電流の瞬時値 I_2, I_3 を測定すれば式 (2.16) から電子温度 T_e が求まる。また同様に、 $I_{2,3}$ 求まった T_e を用いることにより P_2 のイオン電流 I_2 が次式より求まる。

$$I_{i2} = j_{i0} S_2 = \frac{\frac{S_2}{S_3} I_3 - I_2 e^{-\frac{e(V_{d3}-V_{d2})}{kT_e}}}{1 - e^{-\frac{e(V_{d3}-V_{d2})}{kT_e}}} \quad (2.17)$$

これとイオン飽和電流の式

$$I_{i2} = \exp\left(-\frac{1}{2}\right) e n_e \sqrt{\frac{kT_e}{m_i}} S_2 \quad (2.18)$$

とから電子密度を求めることができる。

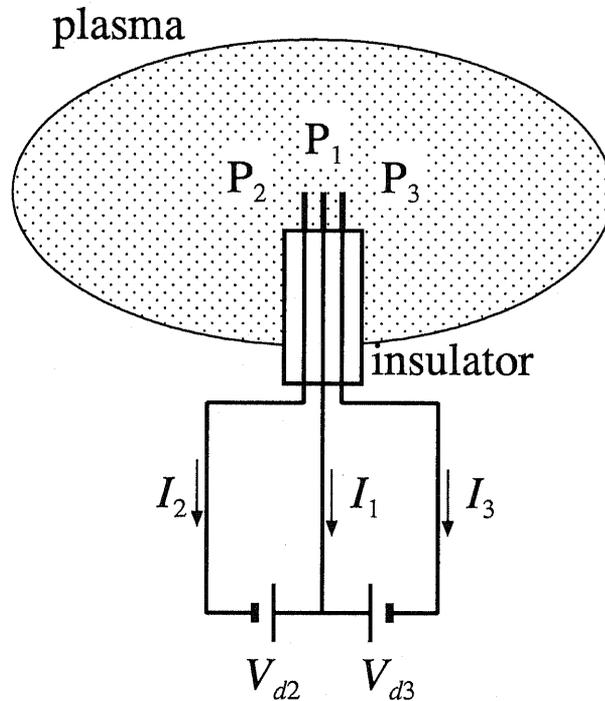


図 2.6: Schematic view of triple-probe measurement.

第3章 単一生成球状トーラスの相互比較

3.1 本実験の目的

本章では任意の外部トロイダル磁界下で z - θ ピンチ法によりスフェロマック, ST, コンパクト RFP を生成し, 相互比較することで球状トーラスの特徴を統一的に理解し核融合炉心プラズマに要求される高圧力, 高閉じ込めを実現するための課題を明らかにする. 以降, 本論文では特に断らない限りコンパクト RFP を RFP, 従来の RFP を大アスペクト比 RFP と呼ぶことで区別する.

3.2 実験内容

TS-3 装置の軸方向に 2ヶ所あるプラズマ生成部のうち 1つだけ用いてトーラスプラズマを生成する. その為 TS-3 中心対称平面の左右いずれかの側でプラズマが生成された後, 平衡磁界の形状に従って中心対称平面上に動いてくることになる. この際 I_{tfc} を z 放電によって生成されるプラズマのポロイダル電流と同方向および逆方向に大きさを変えつつ印加する. 本論文では 同方向の場合 I_{tfc} を正とする. すなわち, $I_{tfc} > 0$ では ST 配位が, $I_{tfc} < 0$ では RFP 配位が形成されることになる.

また, プラズマのトロイダル電流およびポロイダル磁束を維持するための OH 電流駆動も状況によって適用する.

図 3.1 に実験の概念図を示す.

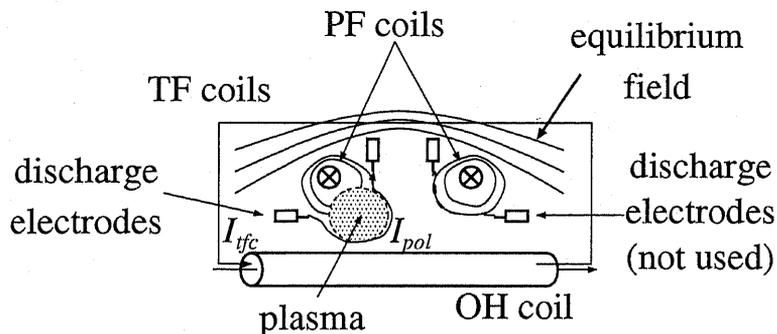


図 3.1: Schematic view of single plasma experiment in TS-3.

3.3 実験結果

3.3.1 磁気面, トロイダル磁界分布時間変化における相互比較

図 3.2-3.4 に 7kV に充電した 50kJ コンデンサバンクによる OH 電流駆動を行った RFP ($I_{tfc} = -3.4\text{kA}$), スフェロマック ($I_{tfc} = 0$), ST ($I_{tfc} = 47.6\text{kA}$) のポロイダル磁気面および磁気軸を含む平面におけるトロイダル磁界径方向分布の時間変化を $43\ \mu\text{sec}$ から $2\ \mu\text{sec}$ おきに示す. 図 3.1 に示した様に TS-3 左右の放電電極のうち左側のみ使用したためプラズマは左側から徐々に中心に進出する.

トロイダル磁界分布の比較 RFP では文字通り磁気軸付近と周辺部とではトロイダル磁界の向きが逆転していることが分かる (図 3.2). また, ST の場合には外部トロイダル磁界とプラズマのポロイダル電流による内部トロイダル磁界の向きが同一で, 合成されたトロイダル磁界は外部磁界よりも強くなる常磁性を示している. スフェロマックの場合には外部トロイダル磁界が存在しないため, 端部ではほぼ 0, 磁気軸付近やや内よりでピークを示す. トロイダル磁界のピークと磁気軸とが一致しないのは, 有限アスペクト比の効果であり (大アスペクト比近似のスフェロマック平衡解では一致する) 球状トラスとしての性質を表している.

プラズマ生成部からの進出時間比較 $t = 43\ \mu\text{sec}$ における磁気軸の位置を比較すると, スフェロマック, ST では B_t プロブの計測範囲内に達しているが, RFP の磁気軸は計測範囲外にある. これは RFP の電極放電電流が中心対称軸上を流れる I_{tfc} と逆向きであるため, z - θ 放電においてプラズマが PF コイルから切り離される際にそれを妨げるような力が働いたためと考えられる. 同様にスフェロマックと ST とを比較した場合, 電極放電電流と I_{tfc} が引きつけ合う ST の進出が若干早い. ただしこれらの差は $1\ \mu\text{sec}$ 程度の差であり今後の考察, 検討に与える影響はほとんどない.

プラズマ減衰の比較 どのケースにおいても, OH 電流駆動によってポロイダル磁束の減衰を補っているにも関わらず若干のポロイダル磁束減衰が見られる. これは現在の TS-3 装置においてはコンデンサバンクと OH コイルの組合せが配位形成直後の大きなプラズマ電流を定常的に維持するには十分でないために生じるものだが, その減衰の度合を比較すると RFP で最も早く ST で最も緩やかであることが分かる. この減衰の違いに関しては, ポロイダル電流 (内部トロイダル磁界) の減衰と合わせ後程再び検討する.

3.3.2 安全係数分布の検証

RFP, トカマクの低アスペクト比化 (コンパクト RFP, ST) に期待される特徴として, 強いトロイダル効果が挙げられる. これは有限アスペクト比を持つために大半径方向の外部トロイダル磁界分布が大きく変化する所に起因している. トロイダル効果によって ST 配位は周辺部の安全係数 ($q \gg 1$) が上昇しやすく, 安定性向上に寄与していると考えられ

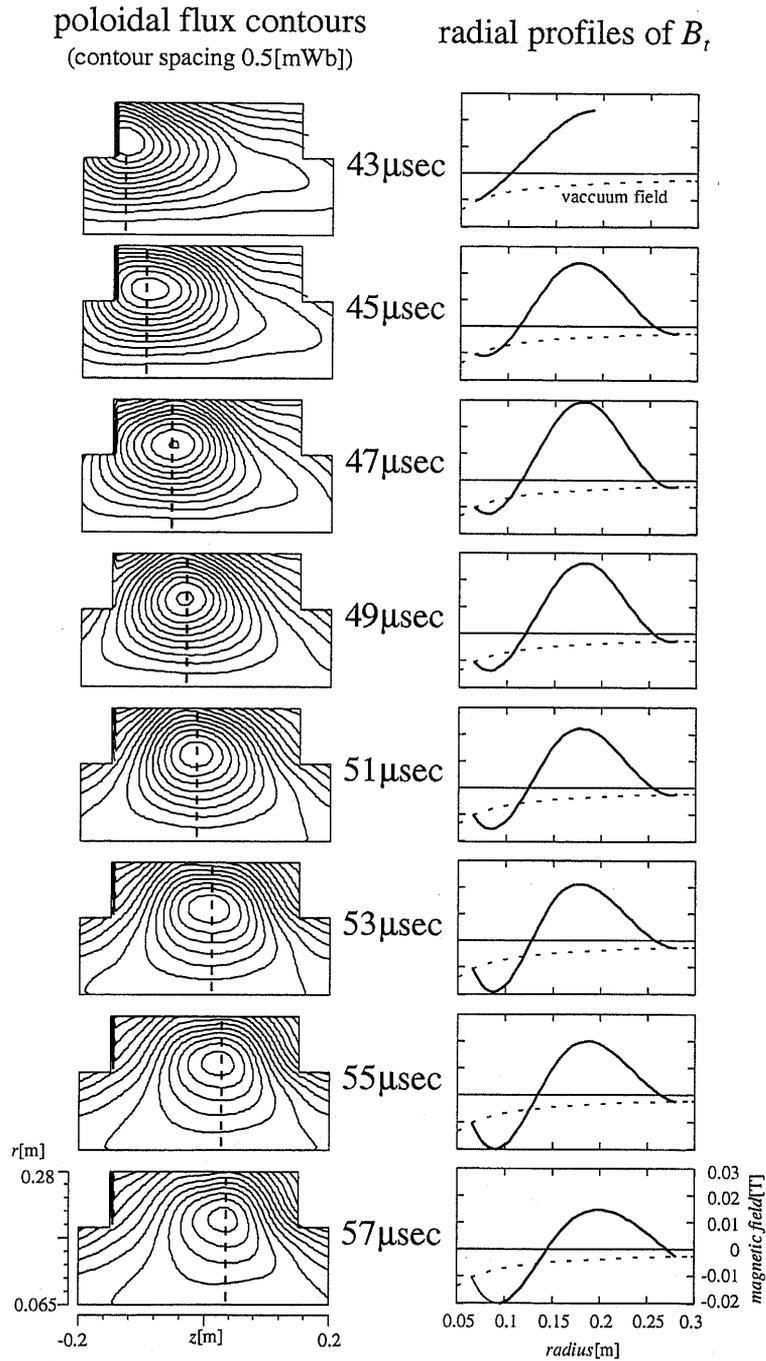


図 3.2: Poloidal flux contours and radial profiles of toroidal magnetic field in a single RFP ($I_{tfc} = -3.4$ [kA]).

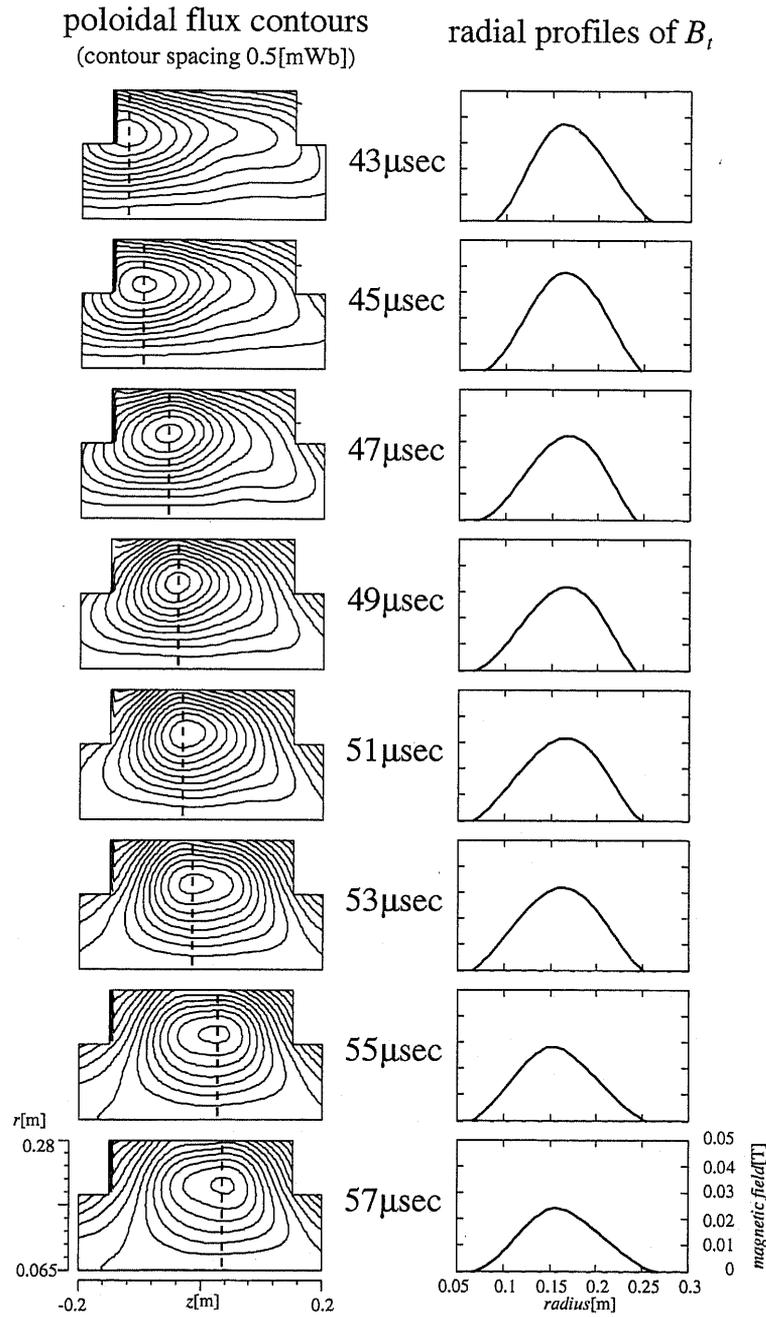


図 3.3: Poloidal flux contours and radial profiles of toroidal magnetic field in a single spheromak ($I_{tfc} = 0$).

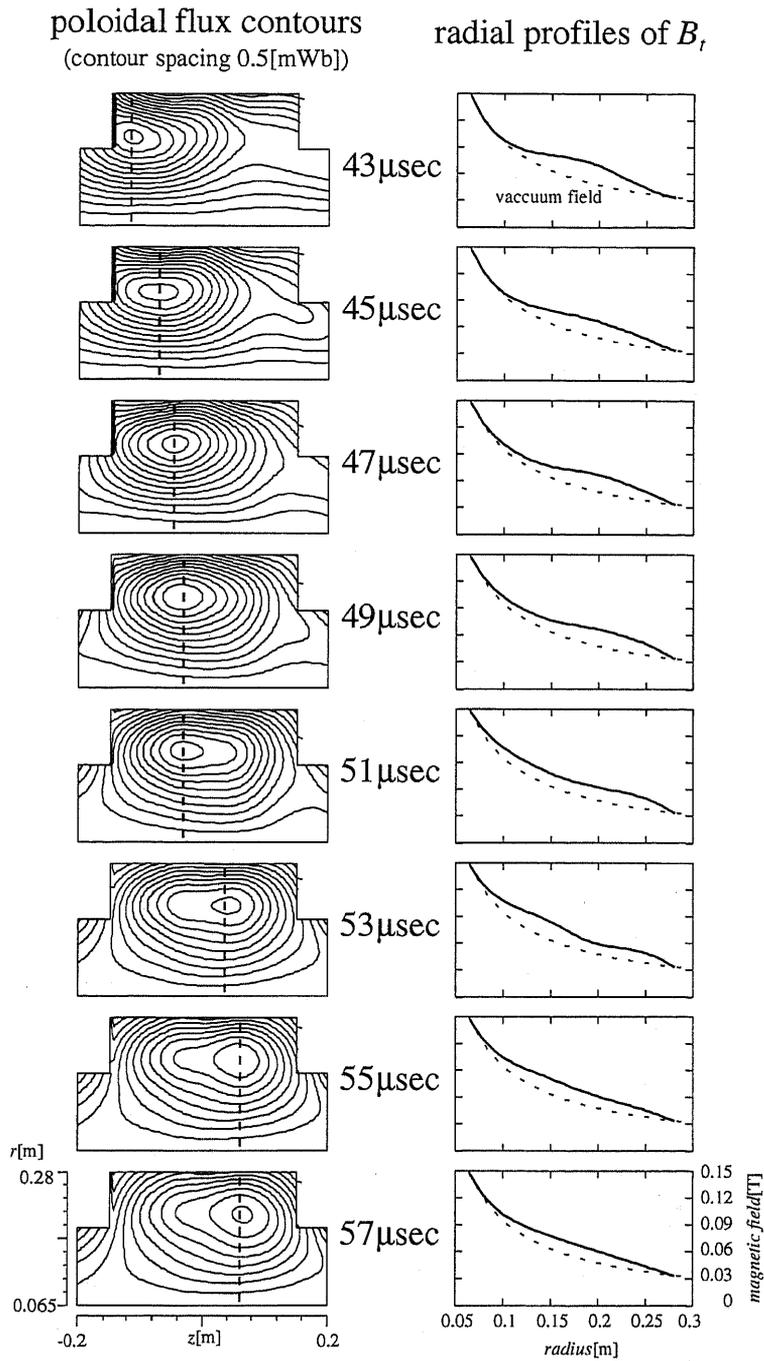


図 3.4: Poloidal flux contours and radial profiles of toroidal magnetic field in a single ST ($I_{tfc} = 47.6$ [kA]).

ている。一方 RFP では、中心部の安全係数 ($q \ll 1$) が高まり、有理面間隔が広がることで MHD モードを単一モードにすることで閉じ込め改善が期待されている。大アスペクト比の RFP では、図 3.5(b) に模式的に表した様にプラズマ中心部に q 値の有理面が近接して多数存在する為に、お互いの有理面における摂動が相互に重なり合い中心から周辺部へとつながる磁力線 (stochastic field line) が生じやすく粒子が外部に逃げ出してしまふ。平衡計算によって得られるコンパクト RFP 配位は中心 (高温) 部の q 値が上昇し、図 3.5(a) の様に有理面の間隔が広がることで摂動モードが離散的となると期待される。

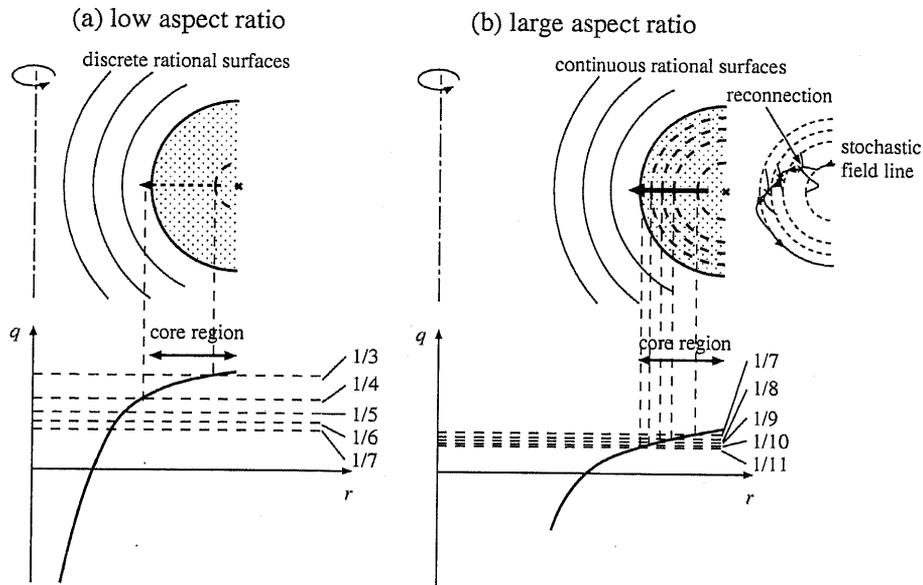


図 3.5: Schematic diagram of relation between q profile and single-helicity mode. (a) Low aspect ratio case and (b) large aspect ratio case are shown. Stochastic field line is produced by fluctuations in nearby rational surfaces.

本節では実験で生成された球状トーラスの q 分布が予測されたものになっているかどうか検討する。 q 値はある磁気面を磁力線がポロイダル方向に 1 周する間にトロイダル方向に何周するかを表すもので、軸対称トーラスでは

$$q = \frac{d\Phi}{d\Psi} \quad (3.1)$$

と計算することができる。トロイダル磁束 Φ は

$$\Phi(\Psi) = \int_S B_t dS \quad (3.2)$$

である。ここで S はポロイダル磁気面によって囲まれる領域を表す。本研究では二次元磁気プローブ列によって囲まれる領域の 50×50 のメッシュに分割し、各メッシュにおける Ψ, B_t をスプライン補間によって計算した後に $\Phi(\Psi)$ の Ψ に関する勾配を求めることで q 値を計算した。メッシュ分割の際に生じる Ψ の離散化の為に計算される q 分布は若

干のガタツキ (誤差) を伴うが, 本論文では微細構造の検討は行わないため十分と判断した. 図 3.6 に $I_{tfc} = -3.4, 0, 47.6\text{kA}$ におけるポロイダル磁気面およびトロイダル磁界分布, q 値の径方向分布を示す. それぞれ RFP ($t = 53\mu\text{sec}$), スフェロマック ($t = 55\mu\text{sec}$), ST ($t = 60\mu\text{sec}$) 配位を形成している. 各配位ポロイダル磁束がほぼ 3.5mWb となる時刻における値を示す

外部トロイダル磁界の存在する RFP, ST では予想通りトロイダル効果のためにプラズマ端部に強い q の傾きが現れた. すなわち大きな磁気シアーが存在し、プラズマの安定化に寄与すると考えられる. また RFP の q の最大値が約 0.3 と一般的な大アスペクト比の RFP (~ 0.15) と比べ高く, 中心部付近の有理面間隔が広がっている様子が見られる.

3.3.3 ポロイダル磁束減衰に関する検討

図 3.2-3.4 の磁気面の時間変化から明らかな様に, 各配位において同様な OH 電流駆動を行っているにも関わらず RFP ではポロイダル磁束の減衰が大きく, ST では緩やかである. そこで OH 電流駆動を行わない状態でポロイダル磁束の減衰の様子を観測し, 減衰時定数を比較した. 減衰時定数 τ_{Ψ} はポロイダル磁束の時間変化を

$$\Psi(t) = \Psi_0 e^{-\frac{t}{\tau_{\Psi}}} \quad (3.3)$$

という関数に近似することで求められる. ポロイダル磁束の減衰時定数の I_{tfc} 依存性を図 3.7 (a) に示す. I_{tfc} の大きい, すなわち q の高い配位程減衰が緩やかであることがわかる. また, 図 3.7 (b) に示した磁気揺動の I_{tfc} 依存性は q の低い配位程大きい.

3.3.4 トロイダルモード観測

これまでの検討はトーラスの軸対称性を仮定してきたが, 前節で触れた磁気揺動によって非対称性が生じることが考えられる. ここでは非対称性を検証するために OH 電流駆動によってトロイダル電流をほぼ定常に維持した状態でセパトリクス周辺の B_z 強度に関するトロイダルモードを計測した. 図 3.8 に $n = 0$ モードの大きさを規格化したトロイダルモード $n = 2, 3, 4$ の時間変化を示す.

RFP, スフェロマックのトロイダルモードは ST のそれに較べ明らかに大きい. この結果は以下のように説明できる. トーラスプラズマ中を流れる電流の内, トロイダル電流は温度の高い中心付近を多く流れるため減衰しにくいのに対し, ポロイダル電流は温度の低い周辺部で主に流れるため, 減衰の進行に差が生じる. すなわち, トロイダル電流に比べポロイダル電流の方が早く減衰する. そのため初期の安定な状態に比べポロイダル磁束過多の状態となる. 特に本実験のように OH 電流駆動を行った場合にはその傾向が強まる. バランスの崩れがある程度に達するとポロイダル磁束の一部が磁気揺動を通じてトロイダル磁束に変換 (ダイナモ) され, 磁気エネルギーは失われる. この際粒子あるいは熱エネルギーが中心部から逃げ出してしまうことも問題となる. 磁束変換に伴って生じる磁界の非軸対称性がトロイダルモードの成長として観測される. ST は外部電流によるトロイダ

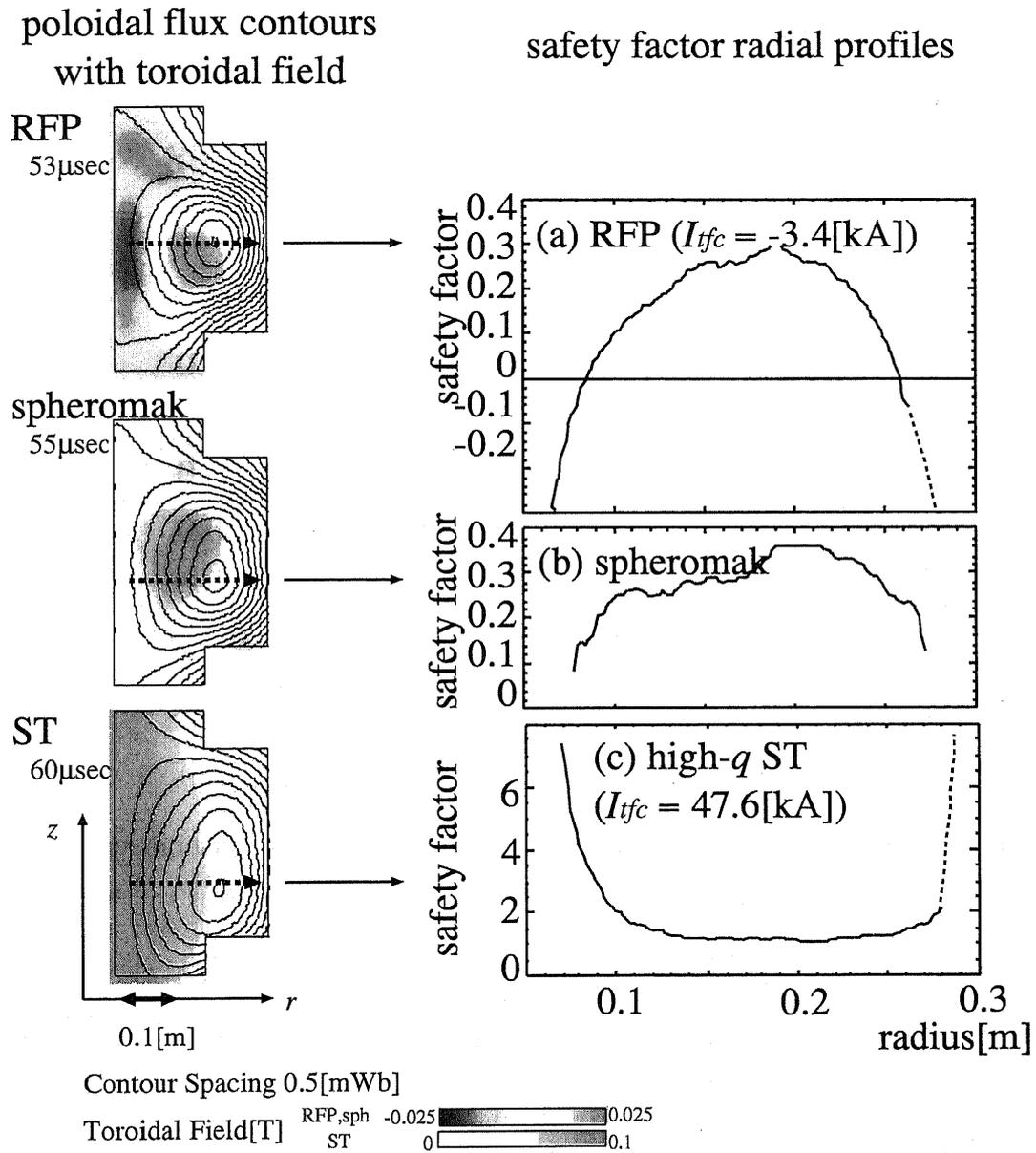


図 3.6: Poloidal flux and toroidal field contours and radial profiles of q in single plasmas (RFP, spheromak and ST).

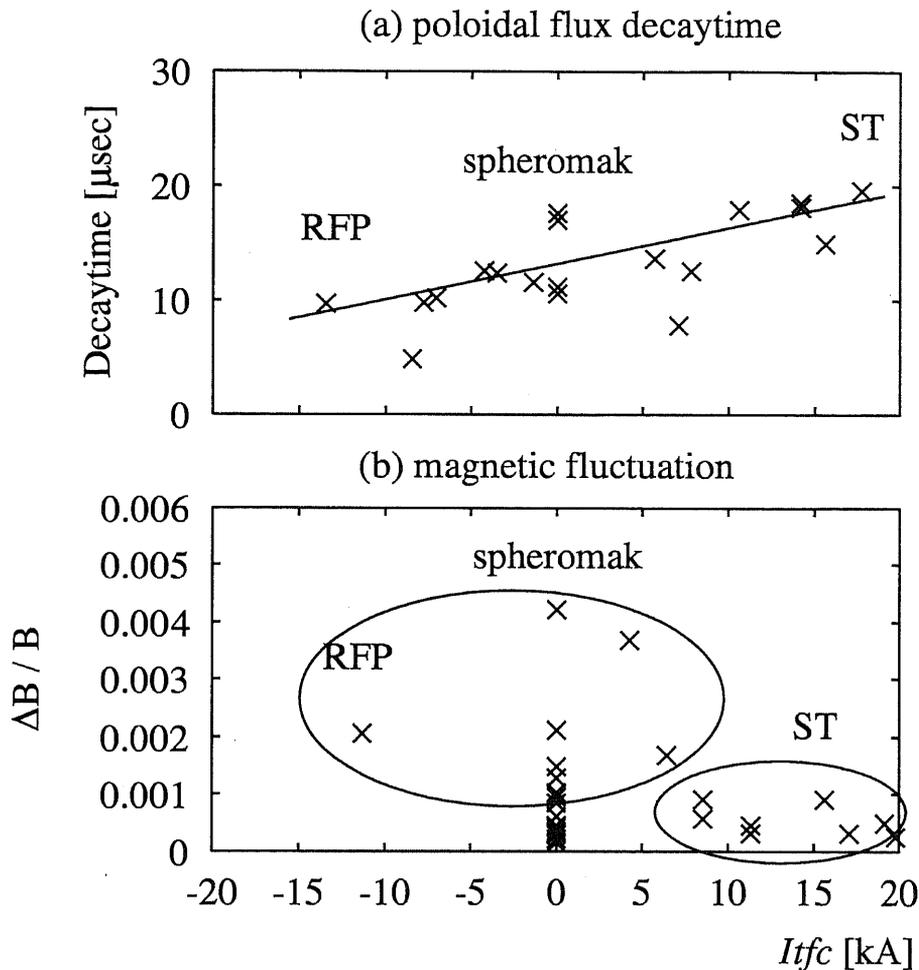


図 3.7: I_{tfc} dependencies of (a) poloidal flux decaytime and (b) magnetic fluctuations in single plasmas.

ル磁束が大半を占めるため、ダイナモが起こりにくいのに対しスフェロマックや RFP はプラズマ電流によるトロイダル磁束の割合が大きいためダイナモを生じやすいと考えられる。

3.3.5 ベータ値の比較

これまでの検討で明らかな様に、RFP やスフェロマックなどの低 q 配位は、ポロイダル磁束の減衰が大きく、ダイナモに起因すると考えられる磁気揺動やトロイダルモードの成長が見られることから閉じ込め性能は ST と比べ劣っている。しかし工学的、経済的観点から核融合炉に求められるのは高い閉じ込め性能だけでなく閉じ込め磁界の利用効率も十分高いことである。

本節では閉じ込め磁界の利用効率の観点から各配位を比較する。図 3.9 に磁気計測から

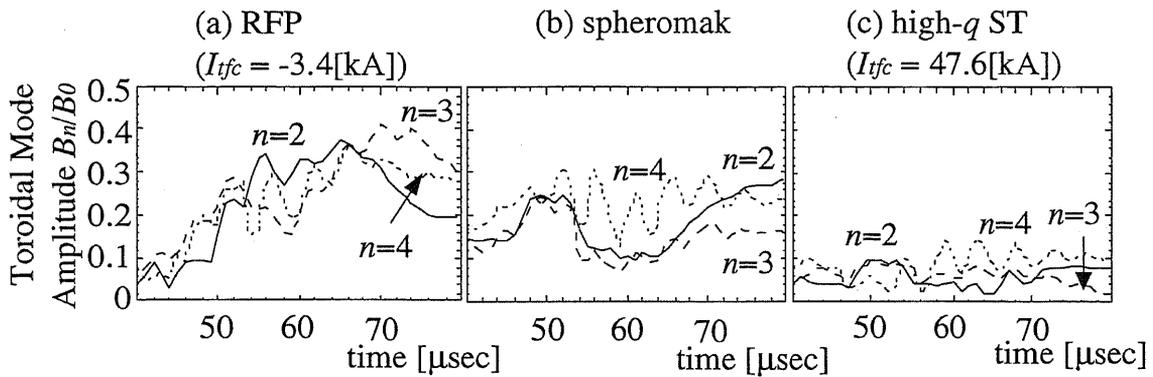


図 3.8: Time evolutions of toroidal mode amplitude in (a) RFP, (b) spheromak and (c) ST.

得られた磁界分布および圧力分布を用いて計算した体積平均ベータ値を示す。体積平均ベータ値はプラズマ電流約 30kA となる時刻の値を示した。 I_{tfc} が小さくなる程ベータ値が高くなり、特に I_{tfc} が 30 kA 以下になるとその傾向が顕著である。

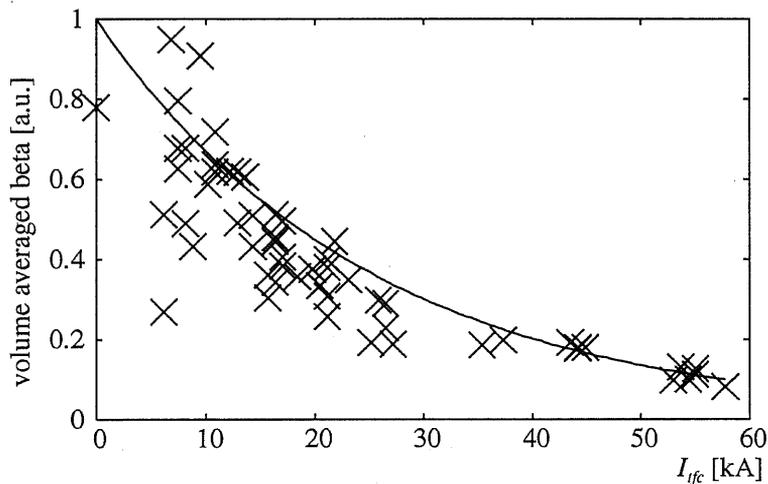


図 3.9: Beta values as a function of I_{tfc} .

3.4 単一生成球状トーラスの相互比較実験のまとめ

アスペクト比 1.5 程度で様々な q 値を持つ球状トーラス配位を単一装置内において比較した。特にコンパクト RFP 生成およびその内部磁界構造の計測を初めて行った。

安全係数 q 分布の計測から、外部トロイダル磁界の存在する配位、RFP や ST ではトロイダル効果によりセパトリス付近に大きな q 値の勾配 (磁気シア) があらわれることが確認された。磁気シアは後述するように MHD 安定性に寄与することから、この

性質により大アスペクト比配位よりも安定な閉じ込めの実現が期待される。また、RFP に関してはこれまで平衡計算等で予測されてきた通り配位中心部の q 値が大アスペクト比 RFP に比べ高く、有理面間隔が広がっており不安定モードの結合による stochastic な磁力線の発生やそれに伴う粒子損失を抑制する可能性のあることを初めて実験的に検証した。

相互比較では、 q の高い ST の方が RFP、スフェロマックよりもポロイダル磁束の減衰が緩やかであり磁気揺動も低いことが判明した。OH 電流駆動実験においてセパトリクス付近におけるポロイダル磁界のトロイダルモードを計測した結果、ST にくらべ RFP、スフェロマックでは大きな非対称性が現れることが分かった。これはプラズマ中のポロイダル電流とトロイダル電流の割合が大きすぎたために磁束変換 (ダイナモ) が生じたためと考えられる。今後は RFP やスフェロマックでは積極的なポロイダル電流の駆動を行ってダイナモを抑制すること等の手法で閉じ込めの改善を行う必要がある。

RFP、スフェロマックは閉じ込め時間 (性能) に関していえば現段階で ST に対し劣っている一方で、磁界の利用効率を表すベータ値では ST よりも格段に高いことが分かった。逆にいえば ST において RFP、スフェロマック並のベータ値が実現できればその高い閉じ込め性能から非常に有利である。以後本論文ではプラズマ合体を用いて RFP、スフェロマックの長寿命化および ST の高ベータ化を試みる。

第4章 プラズマ合体を用いたポロイダル電流駆動実験

4.1 本実験の目的

本章ではプラズマ合体によって得られると予想される効果の一つであるポロイダル電流駆動の効果を実験的に検証する。

ポロイダル電流駆動によって前節で指摘した RFP, スフェロマックの閉じ込め改善を実証する。すなわち低 q プラズマにおけるダイナモの抑制を試みる。

プラズマには有限の電気抵抗が存在するため、プラズマ電流によって生成されるポロイダル磁束および内部トロイダル磁束は次第に減衰する ($-\Delta\Psi_R, -\Delta\Phi_R$)。OH 電流駆動を用いると OH コイル磁束の変化によってプラズマにポロイダル磁束 $\Delta\Psi_{OH}$ を与えることができる。抵抗によるポロイダル磁束減衰分と OH 駆動による増加分がつり合えば ($\Delta\Psi_R = \Delta\Psi_{OH}$)、ポロイダル磁束は定常に維持されるが、トロイダル磁束は減少したままであり両者のバランスが崩れる。ST の様に外部トロイダル磁束が非常に強い配位では $\frac{\Phi - \Delta\Phi_R}{\Psi} \sim \frac{\Phi}{\Psi}$ でありその影響は少ないが、RFP, スフェロマックの様な配位では $\frac{\Phi - \Delta\Phi_R}{\Psi} \ll \frac{\Phi}{\Psi}$ となり、磁束変換 (ダイナモ) を生じポロイダル磁束の一部がトロイダル磁束に変換されバランスを取り戻す ($\frac{\Phi}{\Psi} \sim \frac{\Phi}{\Psi}$)。この緩和に伴って中心部の高温粒子が逃げ出すことが低 q 配位の閉じ込め性能を低下させる一つの要因となっている。トーラスの軸対称合体において、合体するプラズマのトロイダル磁界が互いに同じ向きであれば (同極性合体)、磁力線のトロイダル成分はつなぎ変わることはなく、磁束二関しては両者が足し合わされることになる。OH 電流駆動に加え、プラズマ合体を行うことでポロイダル磁束とトロイダル磁束のバランスを維持し、ダイナモを抑制することが本実験の目的である。図 4.1 に本実験の概念図を示す。

序論で述べた PPCD によってポロイダル電流駆動が RFP の閉じ込め改善に効果があることは知られているが、PPCD は誘導によって電流を駆動しているため駆動しうる電流には制限がある。それに比べ合体を利用した電流駆動は CT 生成の繰り返し周波数に従って何度でも可能である。さらに後述の合体加熱、粒子補給等も同時に行うことができる点で有利である。

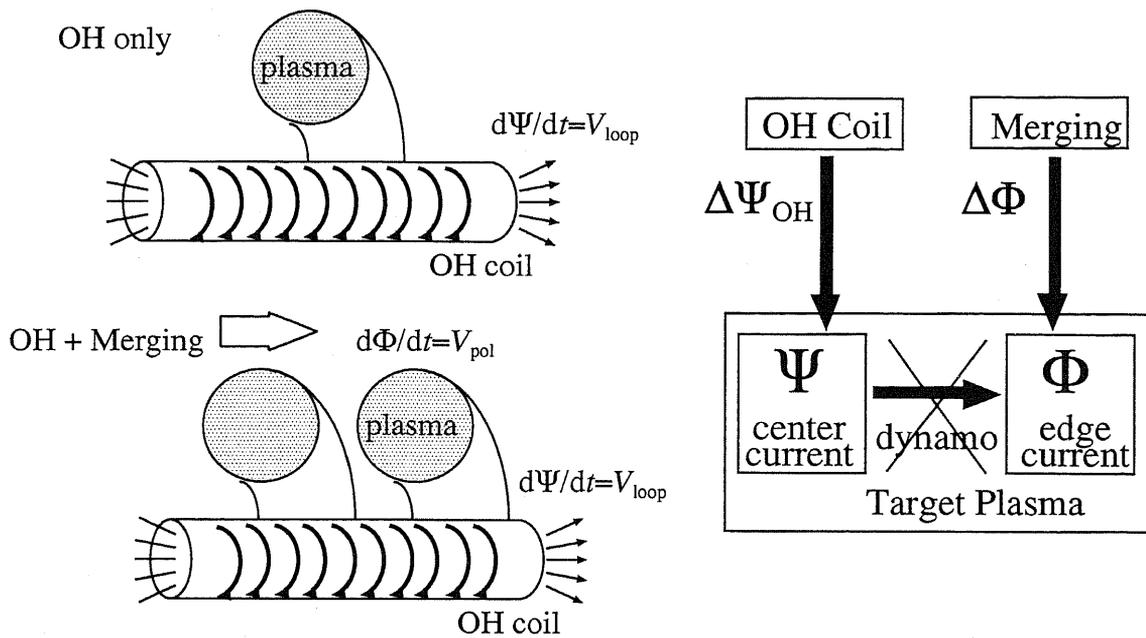


図 4.1: Schematic idea of balanced plasma sustainment by use of plasma merging and OH current drive.

4.2 実験内容

TS-3 装置の軸方向に 2ヶ所あるプラズマ生成部を共に用いて CT を生成する. この際 I_{tfc} の大きさを変化し, OH 電流駆動と併用した場合のポロイダル電流駆動の効果を相互比較する (図 4.2).

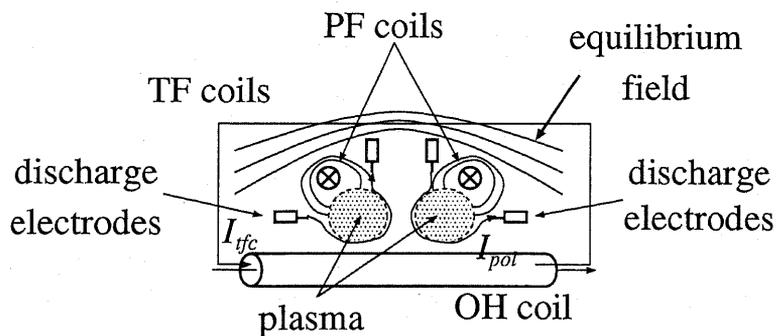


図 4.2: Schematic view of plasma merging experiment in TS-3.

4.3 実験結果

4.3.1 ポロイダル磁気面の時間変化

図4.3-4.5にOH電流駆動のみを行った場合およびOH電流駆動に合わせてプラズマ合体によりポロイダル電流駆動を行った場合の磁気面時間変化を示す。OHのみのケースは第3章で示したものである。50 μ sec すぎに磁気軸が一つになり、合体が完了する。

$t = 57 \mu\text{sec}$ におけるポロイダル磁束を合体の有無によって比較すると、RFP やスフェロマックでは合体した場合の方が1.5-2倍多いことが分かる。一方STの場合にはそれほど変化は見られない。

4.3.2 合体による非対称性の変化

第3章で述べたように、OH電流駆動のみを行った場合、低 q 配位においてはダイナモに起因すると考えられる顕著なトロイダルモードの成長が見られた。そこで合体プラズマにおいても同様の計測を行い、トロイダルモードの変化を観察した。

図4.6に正規化された軸方向磁場 B_z のトロイダルモードの時間発展を示す。RFPとスフェロマックでは合体によってトロイダルモードの成長が1/2以下に抑制されていることがわかる。一方、STではOH電流駆動のみの場合でもRFP、スフェロマックに比べてトロイダルモードが低く、合体による低減はほとんど見られなかった。

すなわち、低 q プラズマは合体によりダイナモと考えられる非軸対称モードの発生を抑制することができる。

4.3.3 ポロイダル / トロイダル磁束時間変化

以上の実験結果から、プラズマ合体の有無によるダイナモ発生 / 抑制の可能性が示唆された。そこで実際にポロイダル電流が駆動され、ダイナモが抑制されていることを確認するために外部トロイダル磁束の影響を受けないスフェロマックにおいてポロイダル磁束とトロイダル磁束の時間変化を観測した(図4.7)。電源、コイルの制約上OH電流駆動を行っていても完全に電流を維持することはできず、両ケースとも当初よりポロイダル磁束は大きく減衰してしまうが、その落ち込みは合体した場合の方が小さい。軸対称合体により直接ポロイダル磁束(トロイダル電流)を駆動することはできないため、何らかの形でOH駆動のみの場合とのポロイダル磁束差の発生機構が存在しているはずである。

OH電流駆動されたプラズマを次のような等価回路に置き換える(図4.8)。

OHコイル電流の変化による周回電圧 E 、プラズマのインダクタンス L 、プラズマのオーム抵抗 R とすると、初期電流値 I_0 を用いてプラズマ電流は

$$I = \frac{E}{R} + \left(I_0 - \frac{E}{R} \right) e^{-\frac{R}{L}t} \quad (4.1)$$

と表すことができる。 I_0 が E/R に対して大きい場合は L/R の時定数で減少、小さい場合には増加する。TS-3装置において各パラメータを見積もると、OHコイル周回電圧 E

poloidal flux contours (contour spacing 0.5[mWb])

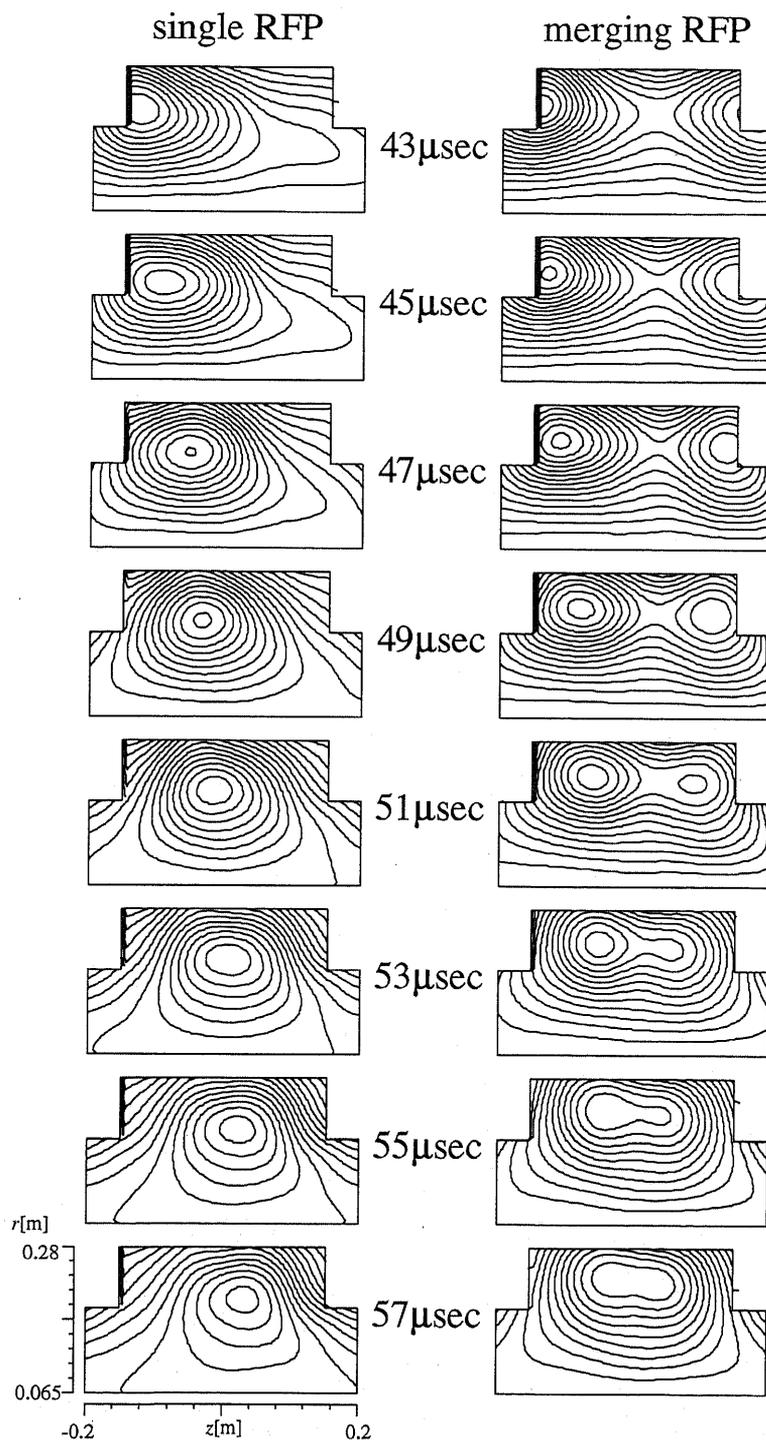


図 4.3: Poloidal flux contours of single and merging RFPs ($I_{tfc} = -3.4$ [kA]).

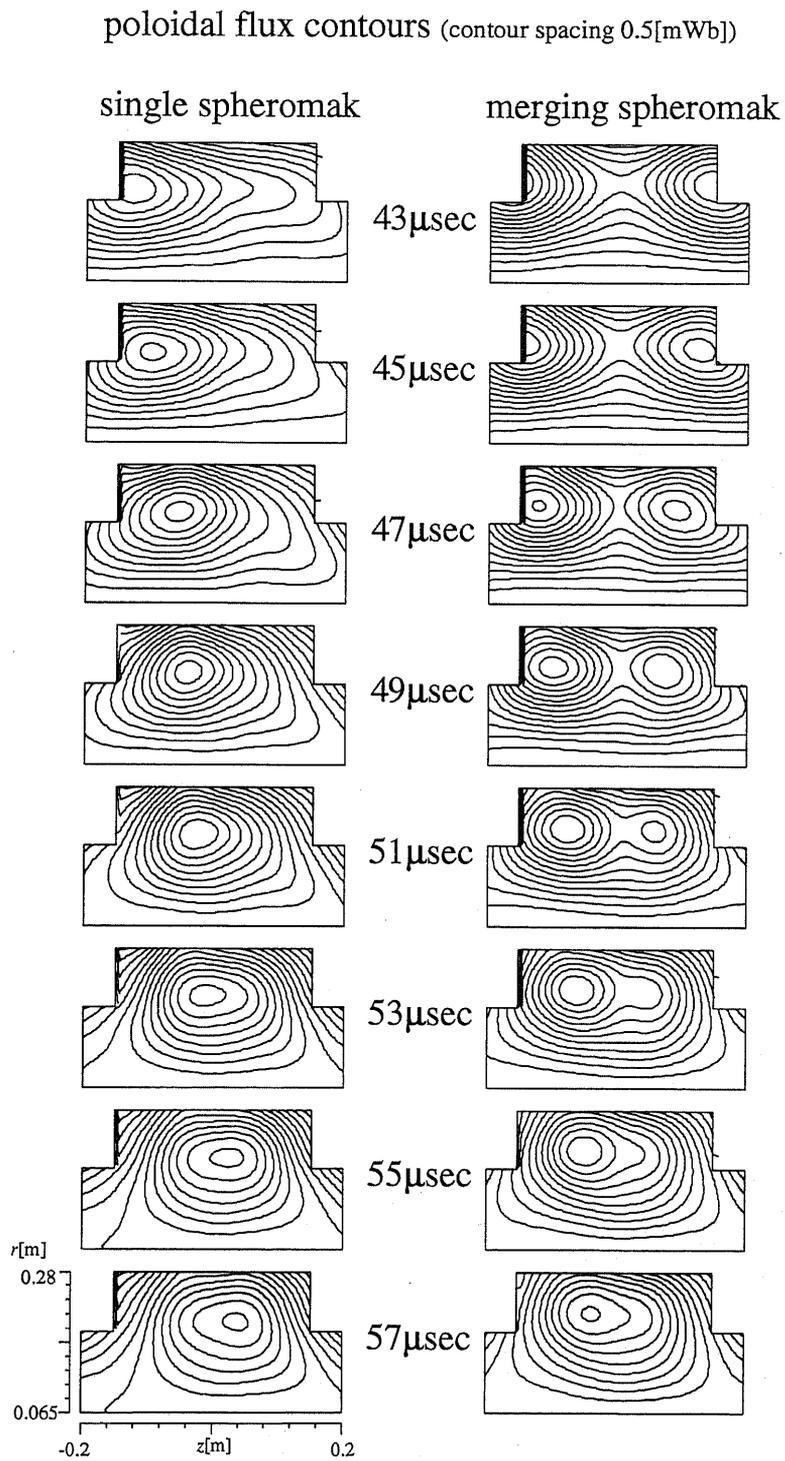


図 4.4: Poloidal flux contours of single and merging spheromaks ($I_{tc} = 0$).

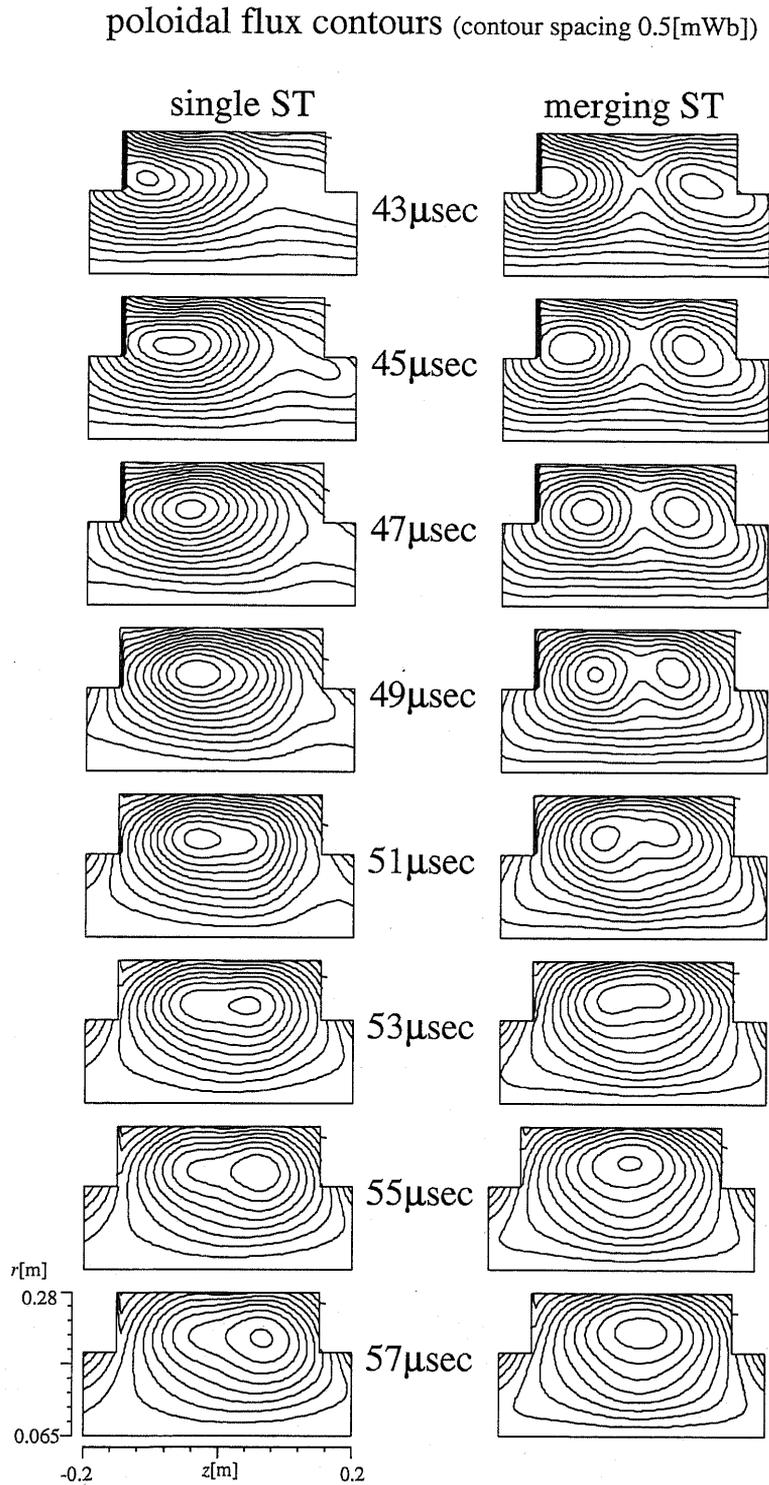


図 4.5: Poloidal flux contours of single and merging STs ($I_{tfc} = 47.6$ [kA]).

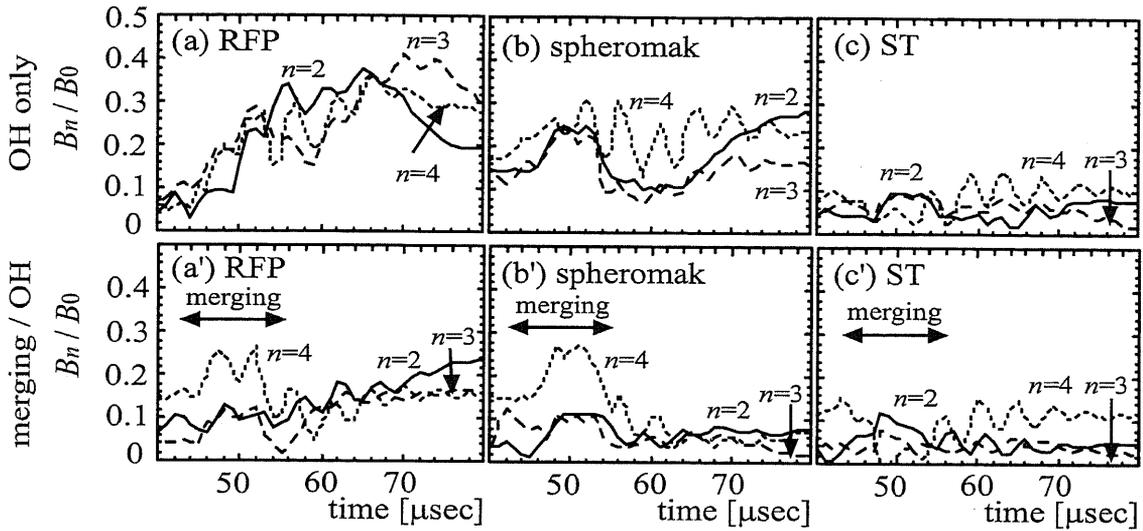


図 4.6: Time evolutions of toroidal mode amplitude of B_z if (a) RFP, (b) spheromak, and (c) ST only with OH current drive, and (a')-(b') with OH current drive and merging.

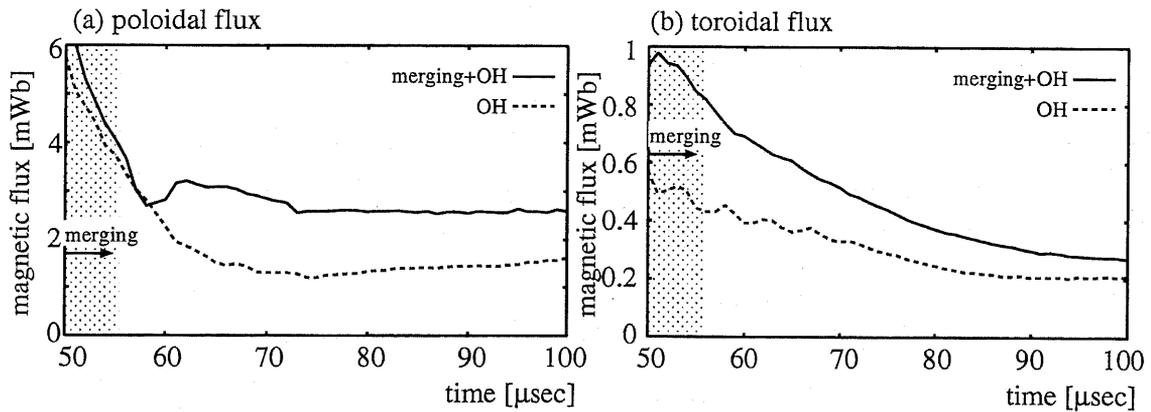


図 4.7: Time evolutions of (a) poloidal and (b) toroidal flux of single and merging spheromaks.

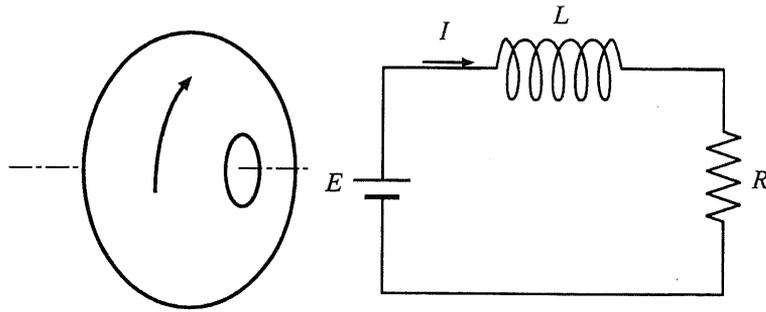


図 4.8: Equivalent circuit of plasma under OH current drive.

はコンデンサ電源の充電電圧 V_c をコイル巻き数 N で割った値

$$E = \frac{V}{N} \sim \frac{7 \times 10^3}{88} \sim 7.95 \times 10 [\text{V}] \quad (4.2)$$

とする. インダクタンス L は 1 巻き円形コイルの式からプラズマ大半径 $R_0 \sim 0.2\text{m}$, 小半径 $a \sim 0.1\text{m}$ を用いて

$$L = \mu_0 R_0 \left(\ln \frac{8R_0}{a} - 2 \right) \sim 4\pi \times 10^{-7} \cdot 0.2 \cdot \left(\ln \frac{8 \cdot 0.2}{0.1} - 2 \right) \sim 1.94 \times 10^{-7} [\text{H}] \quad (4.3)$$

となる. またプラズマ抵抗 R は Spitzer 抵抗 η を仮定して

$$\begin{aligned} R &= \frac{\eta \cdot 2\pi R_0}{\pi a^2} \\ &\sim \frac{5.2 \times 10^{-5} Z \ln \Lambda T_e^{-\frac{3}{2}} \cdot 2R_0}{a^2} \\ &\sim \frac{5.2 \times 10^{-5} \cdot 1 \cdot 15 \cdot 10^{-\frac{3}{2}} \cdot 2 \cdot 0.2}{0.1^2} \sim 9.49 \times 10^{-4} [\Omega] \end{aligned} \quad (4.4)$$

と計算できる. TS-3 では水素プラズマを使用しているため $Z = 1$ である. クーロン対数 $\ln \Lambda$ は 10-20 程度の値をとるが, ここでは 15 とした. また電子温度 $T_e \sim 10\text{eV}$ とした. 以上の関係より, 定常的に維持されるプラズマ電流 I_{cd} は

$$I_{cd} = \frac{E}{R} \sim \frac{7.94 \times 10}{9.49 \times 10^{-4}} \sim 8.38 \times 10^4 [\text{A}] \quad (4.5)$$

となりポロイダル磁束 Ψ_{cd} は

$$\Psi_{cd} = LI_{cd} \sim 1.94 \times 10^{-7} \cdot 8.38 \times 10^4 \sim 1.63 \times 10^{-2} [\text{Wb}] \quad (4.6)$$

と見積もられる. これは実際に維持されているポロイダル磁束に較べ 7-10 倍程度多い. この原因として一番大きなものは Spitzer 抵抗を仮定したためと考えられる. 実際のプラズマ中ではこの様に Spitzer 抵抗の数倍の電気抵抗を持つことは特殊なことではなく, 式 (4.5) と実際にログウスキコイルを用いて計測したプラズマ電流値約 30 kA との関係から

式 (4.4) の値に 3 を掛けたものを R として用いることにする. また L についても Ψ_{cd} が実際のポロイダル磁束に一致する様と見積もられる 0.4 倍する. その結果この等価回路の時定数 τ は

$$\tau = \frac{L}{R} \sim \frac{0.4 \cdot 1.94 \times 10^{-7}}{3 \cdot 9.49 \times 10^{-3}} \sim 2.72 \times 10^{-5} [\mu\text{sec}] \quad (4.7)$$

となる. 単一生成スフェロマックではポロイダル磁束の減衰時定数は $10\text{-}15 \mu\text{ sec}$ 程度でありこの値より小さいが, 第 6 章で示す合体スフェロマックの減衰時定数はもっとも良い放電ではほぼ一致する. また TS-3 装置の配位形成直後におけるプラズマ電流は, ログウスキコイルの設置位置の制約から正確な計測はできていないが 70 kA 以上であることが分かっており, 実験結果に見られる初期の電流, 磁束の減少も説明できる.

また, 図 4.7 の $75 \mu\text{ sec}$ 以降を見ると単一生成 (OH 駆動のみ) のポロイダル磁束は徐々に増加している. 式 (4.1) から明らかなように基本的にポロイダル磁束 (プラズマ電流) は単調な変化をすることから, プラズマに何らかの変化が生じて磁束の変化が生じたことを示唆している. 例えば, 式 (4.1), (4.6) で計算される Ψ の時間変化に関して, $t=0$ における磁束を 25mWb とし, インダクタンス $L = 7.76 \times 10^{-8} [\text{H}]$, 抵抗 $R = 2.847 \times 10^{-3} [\Omega]$, 電圧 $E = 70 [\text{V}]$ とした場合及び同様のパラメータに加えて $t = 57\text{-}65 \mu\text{ sec}$ の間のみ $R' = 4R$ とした場合に関して計算すると, 図 4.9 の様になり, 丁度合体, 非合体時のポロイダル磁束変化に似た様子を示す.

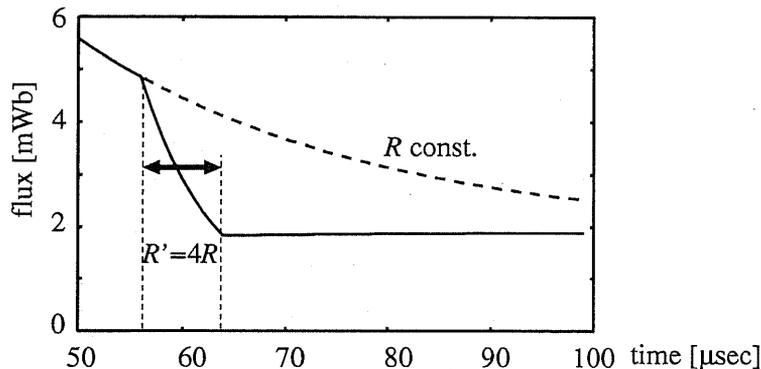


図 4.9: Time evolutions of fluxes calculated from eq. (4.1), (4.6). Extra resistivity ($t = 57\text{-}65 \mu\text{ sec}$) is added in the case of solid line.

ポロイダル磁束の変化を比較することにより, OH 駆動のみの場合には $60 \mu\text{ sec}$ 付近において何らかの原因で磁束の減少が生じていることが分かった. 一方トロイダル磁束の違いを見ると, 明らかに合体をした場合の方が多し. これはプラズマ合体によるトロイダル磁束注入の効果である.

トロイダル磁束注入がダイナモ発生にどう影響するか検討するために, スフェロマック中のポロイダル磁束に対するトロイダル磁束の比を求め, 図 4.10 に示す.

図 4.7 において合体スフェロマックと単一生成スフェロマックとの間でポロイダル磁束に差の生じる $60 \mu\text{ sec}$ 付近でポロイダル磁束に対するトロイダル磁束の割合が 2 倍以上

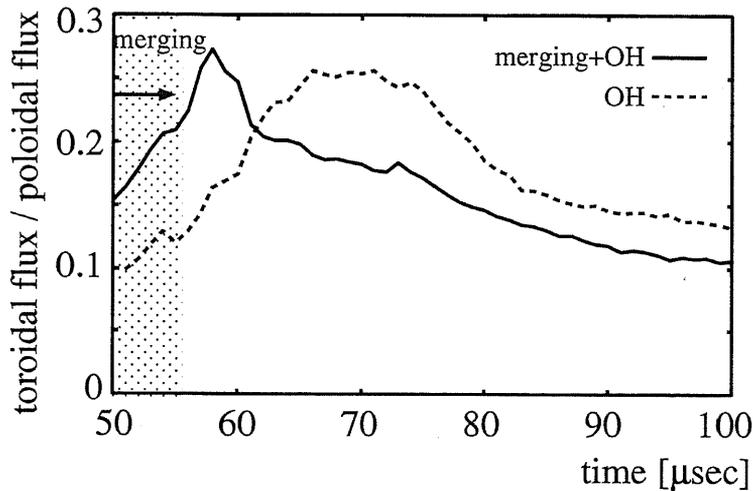


図 4.10: Time evolutions of ratios of toroidal flux and poloidal flux of single and merging spheromaks.

に増加している。これは OH 駆動によりがトロイダル電流のみが駆動されたためにポロイダル磁束とトロイダル磁束のバランスが大きく崩れ、Taylor 緩和 (ダイナモ) を起こしたためと考えられる。

ダイナモにより Taylor 状態に緩和しているかどうか検討するために Grad-Shafranov 方程式を用いた平衡計算を行い、TS-3 装置において Taylor 状態 (無力磁界配位) となるトロイダル磁束とポロイダル磁束の比を計算した。平衡計算の具体的な手順は A 節に示した。プラズマ電流と平衡磁界、ポロイダルコイルの反転電流のバランスにより若干変化はあるものの、 $\Phi/\Psi \sim 0.4-0.6$ 程度となることが分かった。図 4.11 に幾つかの例を示す。

実験で得られた Φ/Ψ は最大値で 0.25 程度であり、テーラー状態になっているとは言えない。ずれの生じる原因は、実験では存在する有限のプラズマ圧力のためではないかと考えられる。実際、平衡計算においても図 4.11(c) に示した様にプラズマ圧力が増加するにつれトロイダル磁束が減少する傾向があり、実験では有限圧力の存在下での緩和状態に遷移していると考えられる。そういった緩和状態を求める研究は特に FRC の理論研究として多くなされている (例えば [28]) が、未だ統一的な理解は得られていない。

一方で合体スフェロマックの場合も、合体完了直後に Φ/Ψ がほぼ 0.25 となる。これは合体によってトロイダル磁束が増加したことを示しており、ポロイダル磁束からの磁束変換 (ダイナモ) を経ることなく安定な状態に遷移したと考えられる。合体の後はポロイダル電流の駆動源がなくなるためトロイダル磁束は減衰してゆき不安定な状態になりダイナモが発生することが予想される。トロイダルモード計測からは $80 \mu \text{ sec}$ 以降で合体スフェロマックにおいてもモードの成長が観測されたが、トロイダル磁束の時間変化からはダイナモの兆候は観測されなかった。その原因として考えられるのは、例えば合体スフェロマックの平衡分布が次節で述べる加熱効果によって無力配位に“近い”状態から大きくずれてしまい FRC に近い性質を持つようになったことなどが考えられる。

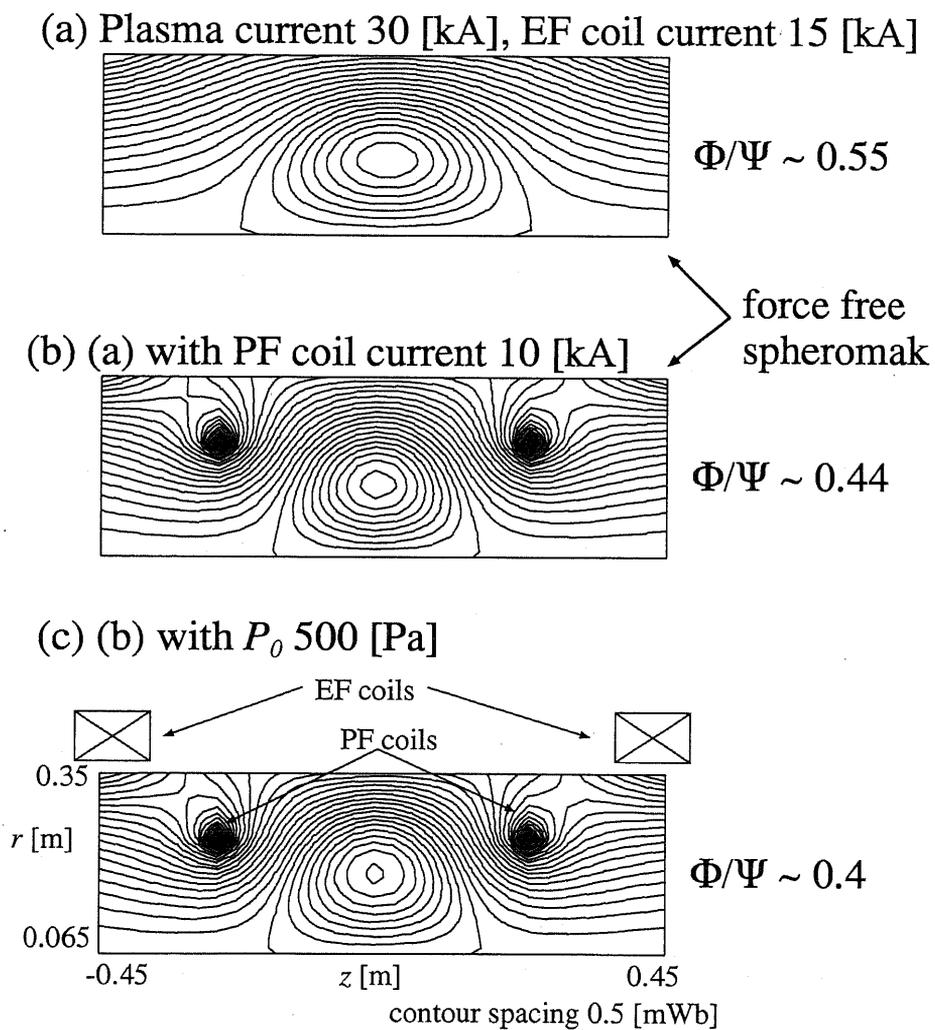


図 4.11: Poloidal flux contours calculated from Grad-Shafranov equation ($I_{plasma} = 30[\text{kA}]$). (a) EF coil current only, (b) EF and PF coil current and (c) (b) with thermal pressure.

4.4 プラズマ合体を用いたポロイダル電流駆動実験のまとめ

プラズマ合体によるポロイダル電流駆動実験を行い, OH 電流駆動のみの場合に発生していた低 q CT (RFP, スフェロマック) におけるトロイダルモードが低く抑えられることが分かった.

これは OH 電流駆動によるポロイダル磁束注入と合体によるトロイダル磁束注入が RFP, スフェロマックの磁束のバランスをとり, バランスが崩れた際にそれを回復するためのダイナモ発生を防いだためである. バランスを取った状態のスフェロマックは簡単な等価回路と比較的良く似た挙動を示すことが判明した.

ポロイダル磁束, トロイダル磁束の時間変化から OH 駆動のみを行ったスフェロマックではポロイダル磁束に対するトロイダル磁束の比が増加し, 約 0.25 程度に達した所で再びトロイダル磁束の減少が見られ, 増加期間中にトロイダルモードも成長していることからダイナモが発生していると考えられる. 一方で合体スフェロマックは維持されるポロイダル磁束の量が OH 駆動のみの場合に比べ 1.7 倍程度多く残っており, 合体後の磁束比が単一スフェロマックのダイナモ後の値とほぼ一致していることから合体によって注入されるトロイダル磁束がほぼバランスを回復するために必要な量であったことがわかった. ただし合体によるポロイダル電流駆動の効果はポロイダル電流の減衰時定数程度の効果しか持続しないことから長時間の運転では, 断続的な合体が必要とされる. そういった連続(断続)合体に関しては現在の TS-3 装置では配位持続時間が足りず検証することはできなかった.

第5章 プラズマ合体加熱効果の実験的 検証

5.1 本実験の目的

本研究で提案するプラズマ合体による加熱効果を実験的に検証する。特に

- 加熱パワーの定量的評価と予想値との比較
- q 値の違いによる加熱効果への影響

に関して調査することを目的とする。

5.2 実験内容

TS-3 装置の軸方向に 2ヶ所あるプラズマ生成部を共に用いてプラズマを生成する。この際 I_{tfc} の大きさを変化しつつ、温度、密度計測を用いて加熱効果を検証する。

本章における実験では、プラズマの電気抵抗による加熱（ジュール加熱）を極力取り除くために OH 電流駆動は用いていない。

5.3 実験結果

図 5.1, 5.2 に、(a) 単一生成 および (b) 合体プラズマのポロイダル磁気面時間発展を示す。図 5.1 はスフェロマック ($I_{tfc} = 0$)、図 5.2 は ST ($I_{tfc} = 35\text{kA}$) のものである。

時間は z 放電開始からの経過時間を示しており、放電開始後 $45 \mu\text{sec}$ ではほとんど合体が進行していないが、 $55 \mu\text{sec}$ で磁気面が完全に 1 つになり、 $65 \mu\text{sec}$ から $75 \mu\text{sec}$ にかけて磁気面形状が緩やかに z 方向に収縮する。 $75 \mu\text{sec}$ 以降は磁気面形状が変化することなく抵抗減衰し、約 $120 \mu\text{sec}$ には磁気面が完全に消滅する。OH 電流駆動を用いた場合と同様、ST の方が減衰が緩やかである。

合体加熱の効果を検証するために単一生成 / 合体それぞれに関して温度、密度の時間変化を計測した。図 5.3 は最も顕著に加熱効果の得られた $I_{tfc} = 0$ (スフェロマック) での (a) イオン温度、(b) 電子温度、(c) 電子密度の時間変化を示したものである。

イオン温度は合体開始から大きく上昇しているのに対し、電子温度、密度は合体スフェロマックと単一生成スフェロマックとの間に大きな変化は見られない。これは合体加熱は

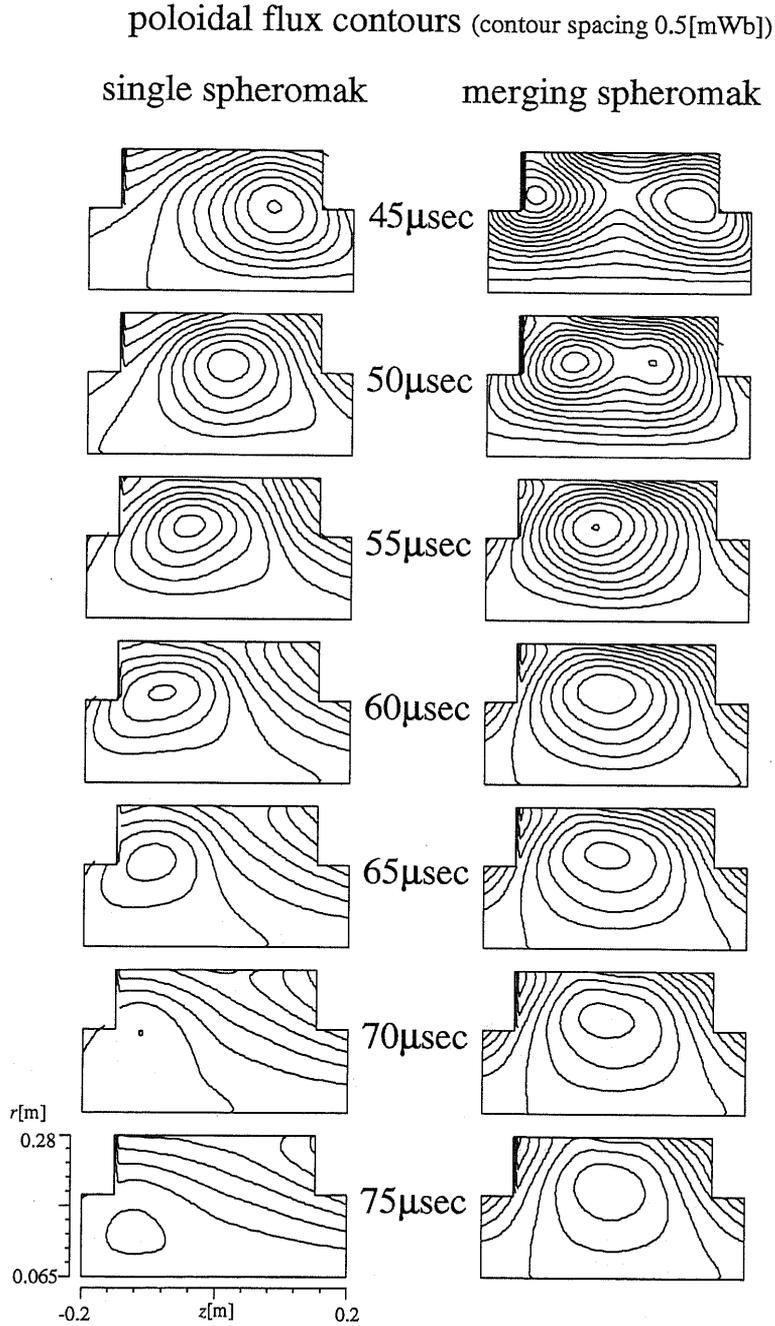


図 5.1: Time evolutions of flux surfaces of (a) single and (b) merging spheromaks ($I_{tfc} = 0$).

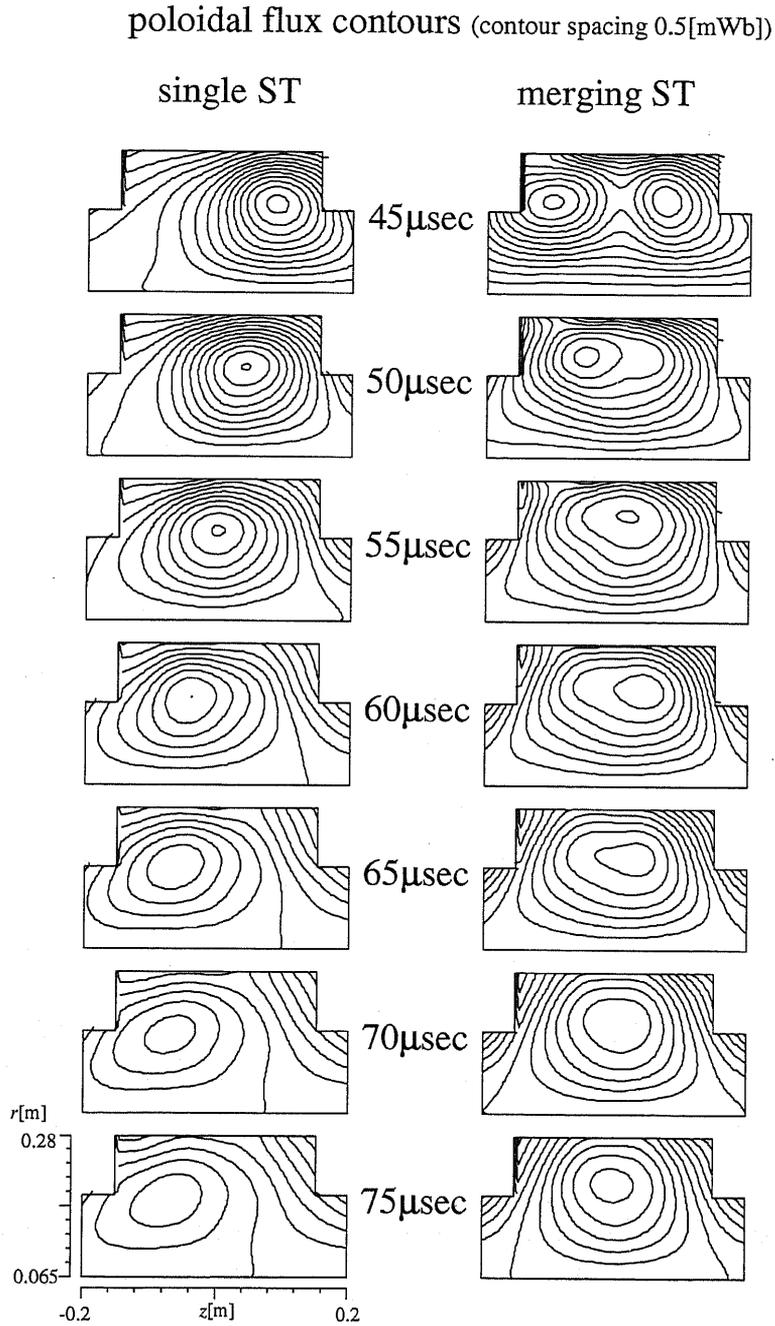


図 5.2: Time evolutions of flux surfaces of (a) single and (b) merging ST ($I_{tfc} = 35\text{kA}$).

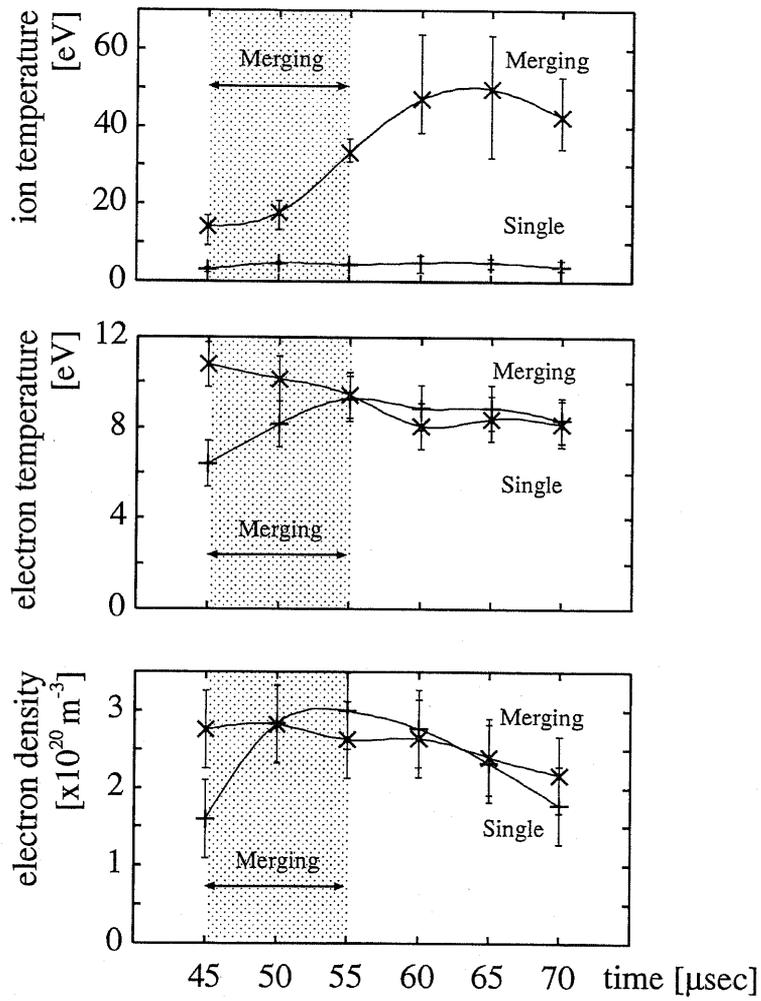


図 5.3: Time evolutions of (a) ion temperatures (b) electron temperatures and (c) electron densities in merging / single spheromak.

おもに磁気リコネクションに伴って生じるイオンの選択加熱によって引き起こされたことを示している。

イオン温度の上昇によって得られる加熱量を評価するために以下の手順で熱エネルギーを求めた。熱圧力がパラボリックな分布をしていると仮定し、ポロイダル磁気面が同心円状であると仮定すると、軸対称性から熱圧力の分布はプラズマ大半径、小半径をそれぞれ R_0, a とし、磁気軸からの距離 u を用いて $p \propto 1 - u^2/a^2$ で表される。このとき静電プローブおよび分光計測から求めた磁気軸 ($r \sim 0.2\text{m}$) における電子、イオンの温度・密度から計算される熱圧力を $P_0\text{Pa}$ 、セパトリクス体積を $V\text{m}^3$ として熱エネルギー $W\text{J}$ は

$$\begin{aligned} W &= \int_0^a \int_0^{2\pi} P_0 \left(1 - \frac{u^2}{a^2}\right) 2\pi(R_0 + u \cos \omega) u d\omega du \\ &= \int_0^a P_0 \left(1 - \frac{u^2}{a^2}\right) 4\pi^2 R_0 u du \\ &= P_0 \pi^2 a^2 R_0 \\ &= \frac{1}{2} P_0 V \end{aligned} \quad (5.1)$$

となる。ここで ω は磁気軸から見て中心対称平面径方向となす角である。厳密にプラズマ中の温度・密度プロファイルを反映していないものの、概ね妥当な値であると考えられる。図 5.4 に熱エネルギーの時間変化を示す。破線は単一生成の場合を示し、実線は合体プラズマを示している。代表的な外部 TF コイル電流 I_{tfc} として (a) 0 kA (スフェロマック), (b) 10 kA (低 q ST), (c) 35 kA (高 q ST) の 3 つのケースを示した。

図 5.1 に示したように磁気面の様子から合体開始時は $t = 45\mu\text{sec}$ であるが、このとき図 5.4 に示すように熱エネルギーも単一生成 ST と合体 ST との間に大きな差が見られない。単一磁気軸の形成された $t = 50\mu\text{sec}$ ではまだ熱エネルギーは上昇中であり、熱エネルギーが最大となるのは $t = 55\mu\text{sec}$ である (図 5.4)。この $10\mu\text{sec}$ 間の平均熱エネルギー上昇率 (加熱パワー) は (a) スフェロマックで約 15 MW, (b) 低 q トカマクで約 9 MW, (c) 高 q トカマクで約 6 MW となる。加熱パワーの I_{tfc} 依存性を図 5.5 に示す。RFP, スフェロマック, および $I_{tfc} < 5\text{kA}$ の ST では 10 MW を超える加熱が得られた。

5.4 加熱に関する考察

前節においてプラズマ合体前後における熱エネルギー上昇率を求め最大 15 MW 以上の加熱を得られることが実験的に示された。この加熱のうち何割が合体 (磁気リコネクション) そのものの効果と言えるのか検討するため、合体现象に付随して生じる幾つかの加熱機構について特に効果が大きいと考えられるものについてその寄与を見積もる。

断熱圧縮効果 合体前の 2 つのプラズマの体積の和に比べ、合体後生成される配位は減少している。そのため断熱圧縮作用 [29] が生じ、加熱された可能性がある。断熱圧縮には、大半径、小半径ともに圧縮する方法や、小半径のみ圧縮する方法などが考えられるが、球状トーラスの軸対称合体の場合には小半径横方向 (軸方向) のみの圧縮と考えられる (図 5.6)。

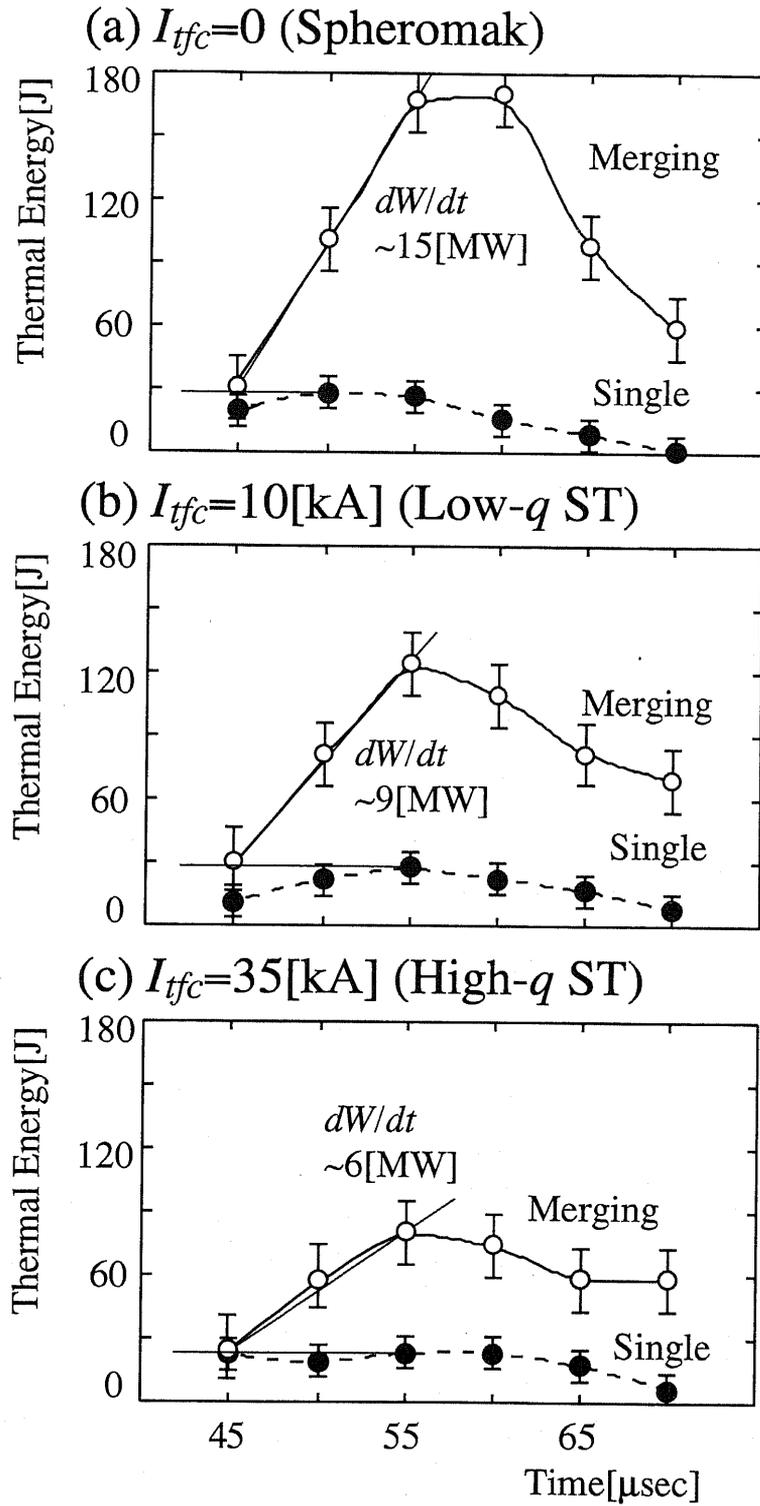


図 5.4: Time evolutions of thermal energies. (a) $I_{tfc} = 0$ (spheromak), (b) $I_{tfc} = 10$ kA (low- q ST), (c) $I_{tfc} = 35$ kA (high- q ST). Solid and dashed lines indicate merging / single STs, respectively.

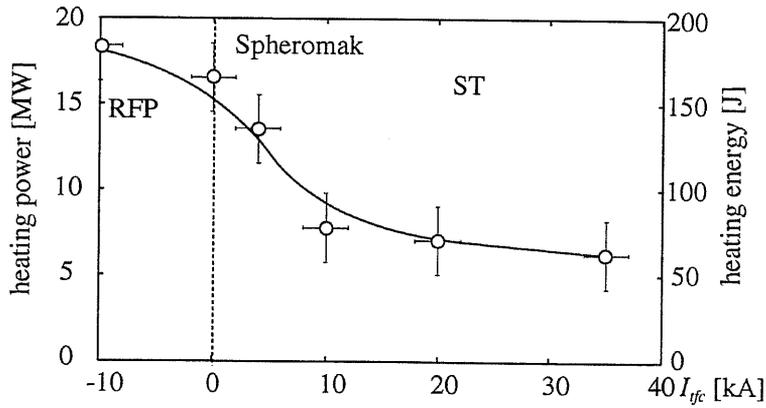


図 5.5: I_{tfc} dependency of heating power and heating energy.

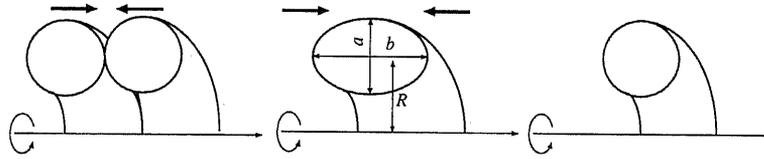


図 5.6: Schematic view of adiabatic compression in plasma merging.

最大で軸方向に半分まで圧縮されるとすると、圧力は pV^γ 一定から断熱圧縮により増加する熱エネルギー ΔW は圧縮前の熱エネルギーおよび体積を W_0, V_0 として

$$\begin{aligned} \Delta W &= - \int_{V_0}^{\frac{1}{2}V_0} W_0 V_0^{\gamma-1} V^{-\gamma} dV \\ &= \frac{2^{\gamma-1} - 1}{\gamma - 1} W_0 \end{aligned} \quad (5.2)$$

となり、 $\gamma = 3/2$ とすると $\Delta W \sim 0.88W_0$ である。

TS-3 実験においては初期熱エネルギー約 30 J, 合体期間約 $10 \mu\text{sec}$ より、断熱圧縮による加熱 P_A は

$$P_A = \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{0.88 \cdot 30}{1 \times 10^{-5}} \sim 2.6 [\text{MW}] \quad (5.3)$$

となる。

運動エネルギー TS-3 で用いた水素プラズマでは、イオン質量 $m_p \sim 1.6 \times 10^{-27} \text{kg}$, イオン密度 $n_i \approx n_e \sim 1.0 \times 10^{20} \text{m}^{-3}$, プラズマ体積 $V \sim 0.1 \text{m}^3$ から、プラズマ全体の質量 M は

$$M = m_p \cdot n_i \cdot V \sim 1.6 \times 10^{-8} [\text{kg}] \quad (5.4)$$

で表される。次に、衝突するプラズマの速度 v は合体前の移動距離 $l \sim 0.2 \text{m}$ および合体時間 $\tau \sim 10 \mu\text{sec}$ から

$$v = l/\tau \sim 2 \times 10^4 [\text{m/s}] \quad (5.5)$$

となり、合体前に一つのプラズマの持つ運動エネルギー W_k および加熱パワー P_k は式 (5.4,5.5) から

$$W_k = \frac{1}{2} M v^2 \sim 3.2 [\text{J}] \quad (5.6)$$

$$P_k = \frac{W_k}{\tau} \sim 0.3 [\text{MW}] \quad (5.7)$$

と見積もられる。合体により 2 つの ST の持つ運動エネルギーが熱エネルギーに変換されたとしても 10 J に満たず加熱効果の低い高 q ST においても約 1 割程度の寄与に過ぎない。

オーム加熱 プラズマの電気抵抗は式 (4.4) より $R \sim 9.5 \times 10^{-4} \Omega$ と見積もられる。プラズマ電流 $I \sim 30 \text{kA}$ とすると、オーム加熱 P_R は

$$P_R = I^2 R \sim 0.86 [\text{MW}] \quad (5.8)$$

である。

以上の効果のうち最も大きなものは断熱圧縮による加熱である。

磁気リコネクションによる加熱 磁気リコネクションを通じて、繋ぎ変わる磁力線の磁気エネルギーが熱エネルギーに変換されると考えると、得られる熱エネルギーは $W \sim L^3 B^2 / 2\mu_0$ である。ここで L はプラズマの典型長である。合体期間は Sweet-Parker モデルを用いると $\tau = L/u = LL'/2\delta v_A = \tau_A L'/2\delta$ となる。 L' , 2δ はそれぞれ磁気リコネクションの拡散領域の長さおよび幅を表している。アルフベン時間は $\tau_A = L\sqrt{\mu_0 n m_i} / B$ であることから。TS-3 装置においては $L \sim 0.2 \text{m}$, $B \sim 0.05 \text{T}$, $n \sim 10^{20} \text{m}^{-3}$, $m_i \sim 1.6 \times 10^{-27} \text{kg}$ であり、 $\tau = 10\tau_A$ と仮定すると加熱パワーは

$$P_{rec} = \frac{W}{\tau} \sim \frac{L^3 B^2}{2\mu_0 \cdot 10\tau_A} \sim 7.9 [\text{MW}] \quad (5.9)$$

と見積もられる。

P_{rec} 以外の加熱効果を合計すると

$$P_A + P_K + P_R \sim 3.8 [\text{MW}] \quad (5.10)$$

となり、 P_{rec} に及ばず、高速磁気リコネクション機構によるイオン加熱効果が大半を占めることがわかる。また、加熱効果の低かった高 q ST における 6MW という加熱パワーもこれら全体を合計したものの約半分程度の効率が得られている。スフェロマックや RFP の場合には見積もり以上の加熱が得られたが、これは $\tau = 10\tau_A$ の仮定から外れたためと考えられる。リコネクション領域のトロイダル磁界が弱い場合には Sweet-Parker モデルで想定されている Spitzer 抵抗をはるかに上回る抵抗が拡散領域に現れることが知られている [25]。

5.5 プラズマ合体加熱効果のまとめ

OH 電流駆動を用いない条件でプラズマ合体実験を行い、合体加熱効果に関して以下の知見を得た。

合体中および直後にかけてイオン温度は 10eV 程度から最大約 60eV まで急上昇する。このイオン温度上昇は q の低い配位程顕著である。一方で電子温度、密度計測では合体の有無による差はほとんど見られなかった。

放物線状の温度分布を仮定して熱エネルギー時間変化を計算し、合体前後の約 10 μ sec 間に 60-150J の熱エネルギー上昇がみられることを確認した。

すなわち、数十 J の熱エネルギーを持つ小型球状トーラスを軸対称合体させることで容易にメガワット級の加熱パワーを得られることが実証された。また、合体による急速加熱効果は q 値の低いプラズマ程高いことがわかった。

合体中に存在する加熱源として磁気リコネクションの他に断熱圧縮、合体プラズマの運動エネルギー、抵抗加熱等を想定し、簡単に見積もったところ、加熱パワーの大部分は磁気リコネクションによるもので、特に低 q プラズマ合体においてはリコネクション速度が非常に高速化することから、加熱パワーが増大したものと考えられる。また、磁気リコネクション以外にも断熱圧縮加熱が比較的大きな割合を占める可能性があることも分かった。

第6章 合体加熱球状トーラスの高ベータ平衡

6.1 概要

前章において合体加熱が非常に強力であることを実証したが、合体によって得た熱エネルギーは必ずしも長時間配位内に閉じ込められる訳ではない。磁気エネルギーから熱エネルギーへの変換が100%行われたとしても、結果的に残るのは閉じ込め磁界に捉えられる一部だけで全体でみた効率は低下する。

そこで、本節では合体加熱を行った場合とそうでない場合において平衡分布を比較し、その変化あるいは差異を検討する。

まず、高い熱圧力を効率的に閉じ込める為に適した高ベータ平衡の持つ特徴を述べる。MHD 圧力平衡の式の径方向成分を書き出すと

$$\frac{dp}{dr} = j_t B_z - j_z B_t \quad (6.1)$$

と表される。また、電流と磁界の間には

$$\mu_0 j = \nabla \times B \quad (6.2)$$

という関係があることから、軸対称が成り立つと式(6.2)より j_t は B_z から、 j_z は B_t からそれぞれ計算することができる。よって式(6.1)は B_z または j_t に関する項と B_t または j_z に関する項に分けて考えることができる。右辺第1項からはトロイダル電流分布が磁気軸付近に集中する (peaked) よりもセパトリクス付近に山をもつ (hollow) 分布のほうが高熱圧力領域をより広く保持することができる (図6.1)。また、右辺第2項からは、トロイダル電流のより少ない、すなわちトロイダル磁界の常磁性成分が少ない方が大きな圧力勾配を支えられる (図6.2)。これらが組み合わさることによって同程度の磁気エネルギーでより大きな熱エネルギーを閉じ込めることができる。

6.2 平衡分布計測結果

図6.3は図5.4における合体スフェロマックと合体高 q STの時間変化を重ねたものである。スフェロマックは合体後非常に大きな熱エネルギーを得るがその後急激にエネルギーを失っているのに対し、STは増加した熱エネルギーをほとんど失うことなく保持してい

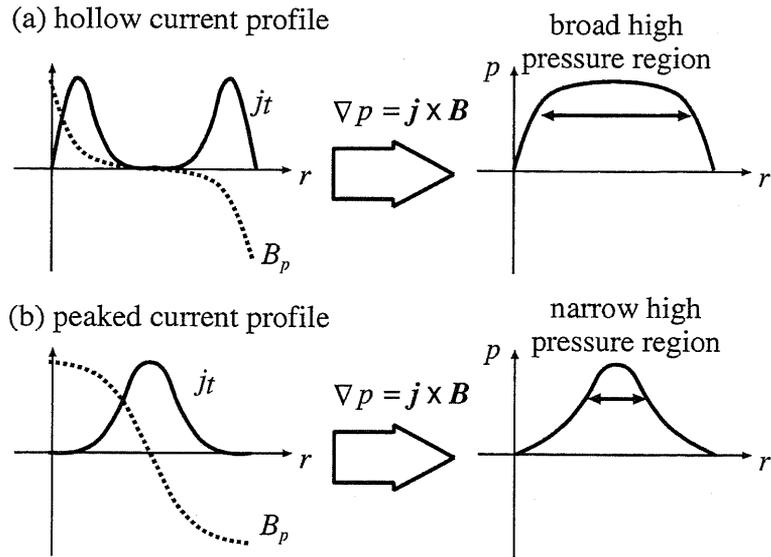


図 6.1: Relation between current and pressure profiles. (a) Broad high pressure region confined by a hollow current profile, (b) narrow region by a peaked current profile.

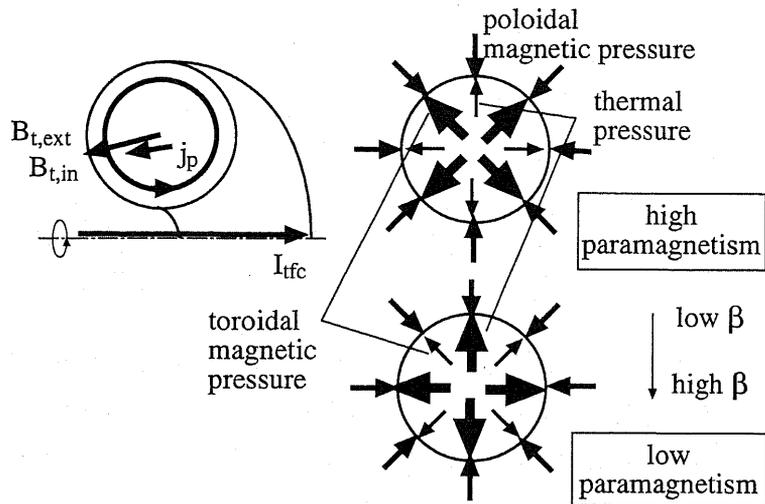


図 6.2: Pressure balance between thermal and magnetic pressure with high / low paramagnetism.

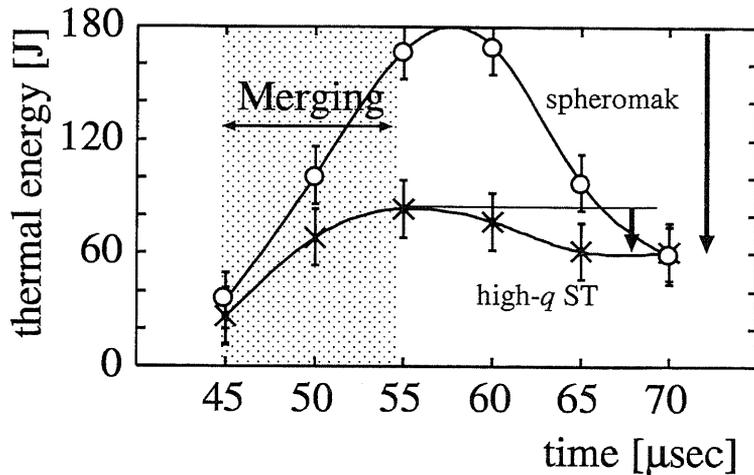


図 6.3: Time evolutions of thermal energies of merging spheromak and high- q ST.

る。これは ST の磁界構造がより大きな熱エネルギーを閉じ込められる高ベータなものに変化したことを示唆している。

前節に述べた高ベータ平衡の特徴が実際に現れているか否か確認するためにトロイダル電流とトロイダル磁界の径方向分布を求めた。

図 6.4 (a) は 2 次元磁気プローブ列から求めたトロイダル電流密度の径方向分布である ($t = 65 \mu\text{sec}$)。実線は合体 ST を、破線は単一生成 ST ($I_{tfc} = 35 \text{kA}$) をそれぞれ示している。単一生成 ST は磁気軸付近にピークを持つ分布をしているのに対し、合体 ST では磁気軸から外れたところに 2 つのピークがあり、ホローな電流分布をしている。このホロー電流分布は次のような過程で形成される。ターゲット ST に入射 ST を近づけると、両者の間の X ポイント (同心円) には ST のトロイダル電流とは逆向きの電流 (シート電流) が新たに誘起される。この逆向き電流が減衰することによってお互いの磁力線は繋ぎ変わり一つの閉じた磁気面を形成するため合体直後、磁気軸付近の電流はほとんど零である。図 6.5 に示すように配位が減衰、消滅するまでホロー分布は維持され、単一生成 ST の様なピーク分布に戻ることはない。

図 6.4 (b) は同じ ST におけるトロイダル磁界の径方向分布を示している。外部トロイダル磁界が強いため、プラズマのトロイダル電流の作る常磁性トロイダル磁界はあまり大きくないものの、その割合は合体 ST の方が単一生成 ST に比べ小さくなっている。興味深いことは、合体直後は第 4 章で行ったトロイダル磁束注入効果により一旦状磁性が強まった後に急激な低下を示すことである。図 6.6 に示した通り、 $55 \mu\text{sec}$ 以降でその傾向が見られる。

電流、磁界分布から、圧力分布を計算した結果を図 6.4 (c) に示す。圧力ピーク値の差はそれほど大きくないが、合体 ST は単一生成 ST に比べ高圧力領域が非常に大きい様子が分かる。

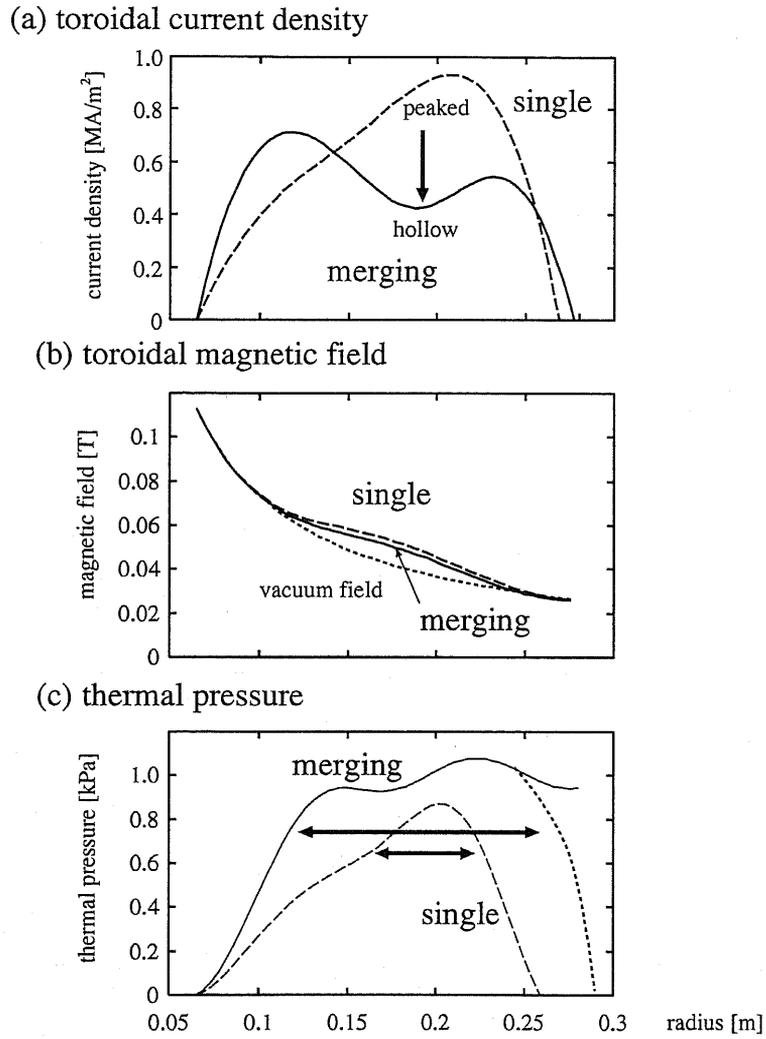


図 6.4: Radial profiles of (a) toroidal current density, (b) toroidal magnetic field and (c) thermal pressure in high- q STs. Solid lines indicate a merging ST, dashed lines indicate a single ST, respectively.

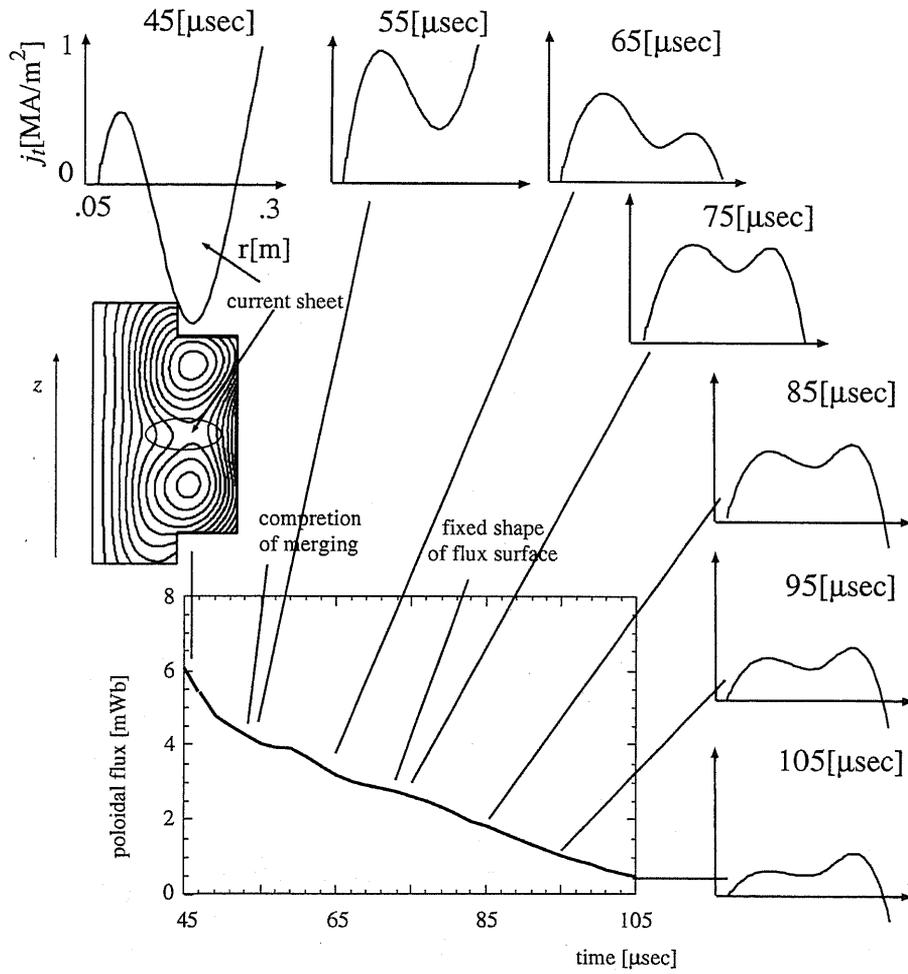


図 6.5: Time evolutions of hollow toroidal current profile.

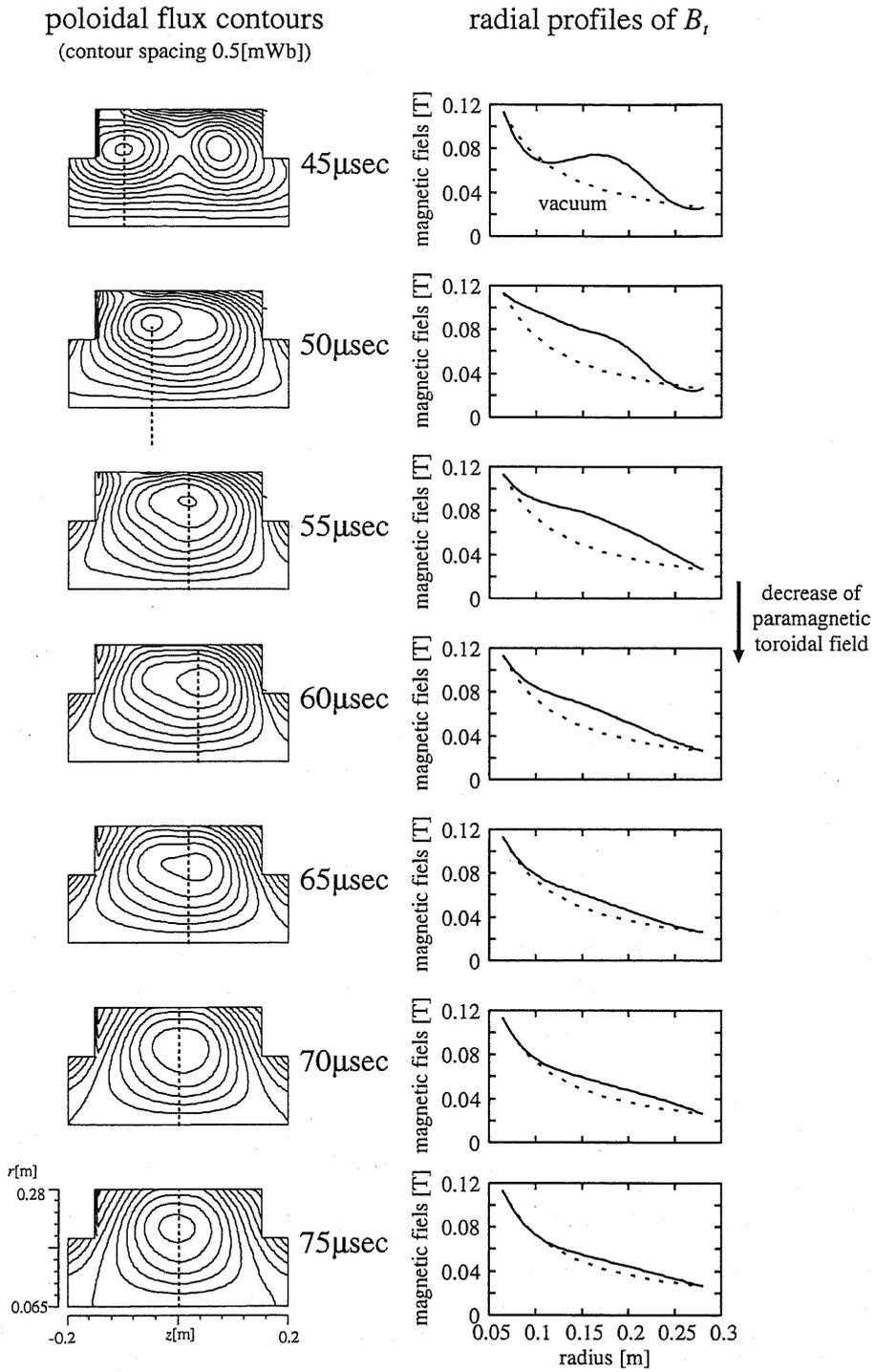


図 6.6: Decreasing of paramagnetic toroidal field in merging ST.

6.3 ベータ値の向上

次に合体 ST が単一生成 ST に比べどの程度ベータ値が上昇したのか検討するため、次の手順でプラズマのベータ値を計算した。まず式 (6.1) より、TS-3 装置の中心導体半径を r_{\min} とすると軸対称性仮定の下で熱圧力 $p(r, z)$ は

$$p(r, z) = \int_{r_{\min}}^r (j_t B_z - j_z B_t) dr \quad (6.3)$$

と計算することができる。すると、セパトトリクス内の平均熱圧力 \bar{p} は

$$\bar{p} = \int_S p(r, z) 2\pi r dr dz / V \quad (6.4)$$

となる。ここで S はセパトトリクスのポロイダル断面積、 V はセパトトリクス体積である。次にベータ値を求めるために必要な磁気圧として以下の 2 種類を導入する。1 つはセパトトリクスにおけるポロイダル磁気圧 $B_{pa}^2/2\mu_0$ 、もう 1 つはセパトトリクス内の平均磁気圧 $\bar{B}^2/2\mu_0 (= \int_S |B|^2 2\pi r dr dz / 2\mu_0 V)$ である。 \bar{p} を各々の平均磁気圧で割ったものがベータ値となり、それぞれポロイダルベータ $\beta_p (= 2\mu_0 \bar{p} / B_{pa}^2)$ 、体積平均ベータ $\beta (= 2\mu_0 \bar{p} / \bar{B}^2)$ とする。

図 6.7 に (a) ポロイダルベータ、(b) 体積平均ベータのプロットを示す。各放電においてプラズマ電流が 30 kA となる時刻におけるベータ値を計算した。横軸には I_{tfc} をとり、白丸は合体 ST における値を、黒丸は単一生成 ST のものを示す。ポロイダルベータの分布は合体 ST、単一生成 ST とともに I_{tfc} の大きい、すなわち q の高い程高くなる傾向にある。これは q の低い ST 程トロイダル磁界の常磁性が強いことと一致している。また、同一の I_{tfc} において合体 ST と単一生成 ST とで比較を行うと、値のばらつきは大きいものの平均として 2-3 倍、また各々の最小値と最大値とを較べても合体 ST の方が高い。体積平均ベータの分布はポロイダルベータと対照的に I_{tfc} の大きい、すなわち q の高い程低くなる。これは外部トロイダル磁界が強くなり平均磁気圧が高くなるためである。しかし体積平均ベータの場合も合体 ST の方が単一生成 ST よりも高い値を持っている点で共通している。

6.4 ポロイダル減衰時定数の変化

また合体により高ベータ化したプラズマは、単一生成の場合に比べポロイダル減衰が緩やかになることが分かった。図 6.8 にポロイダル磁束の減衰時定数の I_{tfc} 依存性を示す。 I_{tfc} によらず合体により減衰時定数が増加しているが、特に $I_{tfc} > 20$ [kA] の範囲で顕著に現れる。図 5.3 にあるようにプラズマの電子温度は合体による変化はほとんどなく、電子温度の $-3/2$ 乗に比例するプラズマの電氣的抵抗 (Spitzer 抵抗) は変化がないにも関わらずこのような結果が得られたのは、Spitzer 抵抗以外の電流拡散要因、いわゆる異常抵抗が低下した可能性が高い低 q 配位ではダイナモ抑制による改善が考えられるが、高 q 配位 (ST) では元々ダイナモは起きにくくそれ以外の原因を考える必要がある。ホローな電流分布という特徴は高温のトカマクにおいて見られるプラズマ内、端部に断熱層を持つ閉じ

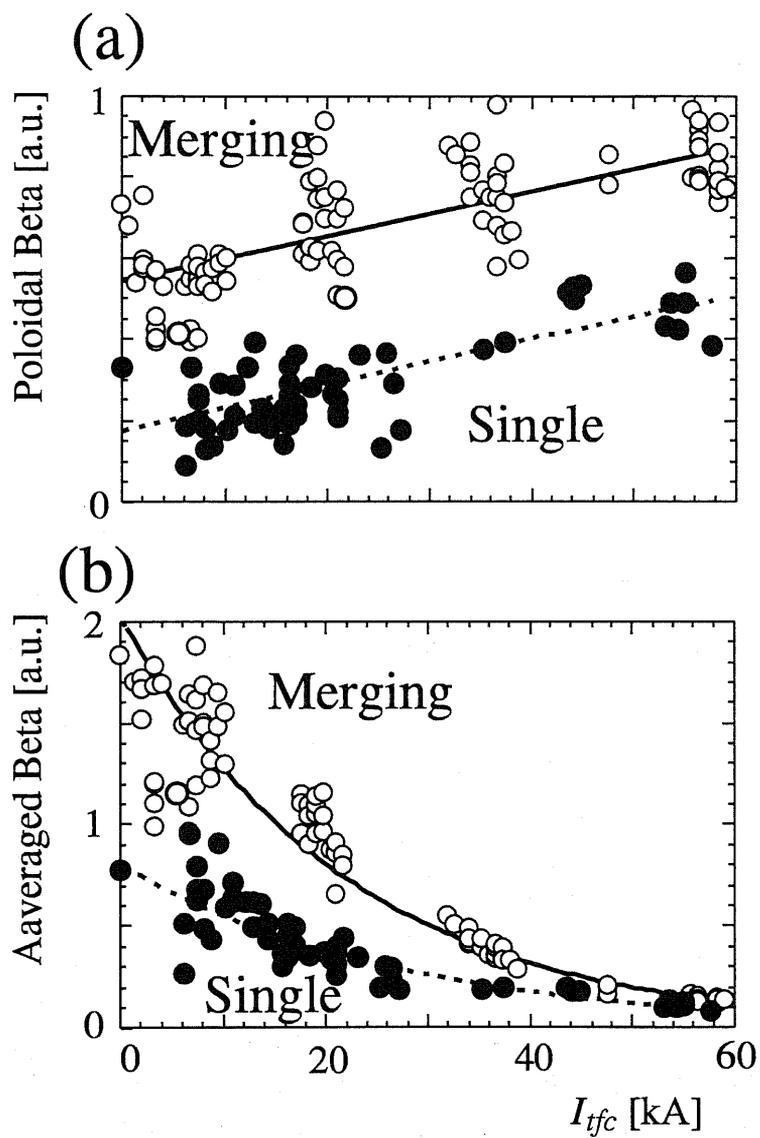


図 6.7: (a) Poloidal and (b) volume averaged betas as a function of I_{tfc} . White circles indicate merging STs, black circles, single STs respectively.

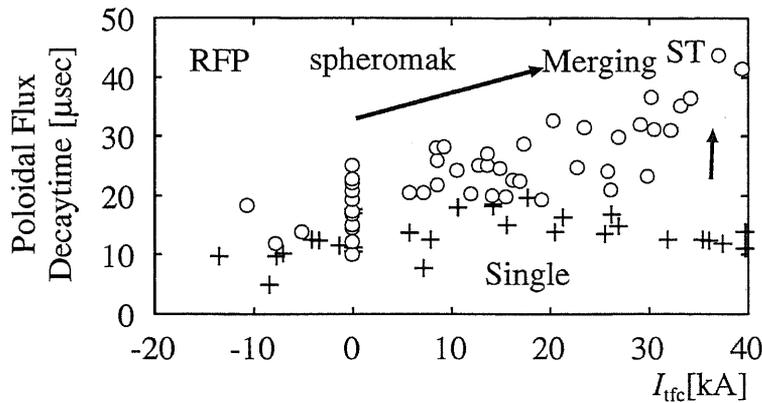


図 6.8: I_{tfc} dependency of poloidal flux decaytime. “o” denotes merging ST, “+” denotes single ST.

込め改善モード（Hモード，負磁気シアモード）と関連する可能性があるが，まだ十分検討できる証拠とはいえない。

6.5 合体加熱球状トーラスの高ベータ平衡のまとめ

合体加熱した ST と単一生成 ST の平衡分布計測を行い，以下の知見を得た。

合体 ST は，合体中（磁気リコネクション期間）に存在する電流シートにおけるプラズマ電流と反対向きの電流に起因する凹状のトロイダル電流分布を持ち，合体後十分時間が経過した後も単一生成 ST の持つピークのある分布には戻らないことが判明した。この凹状電流分布によって高圧力領域の広い分布を形成することができる。

また，熱圧力を下げる要因となるトロイダル磁界の状磁性も，合体直後の高い状態から急速に低下し，結果として単一生成 ST よりも小さくなることが判明した。

これらの特徴から合体によりプラズマのベータ値は単一生成プラズマに比べ 2-3 倍高い値を持つことが分かった。

また合体 ST は高ベータとなるだけでなくプラズマ減衰も緩やかとなる。低 q ST，スフェロマック，RFP においてはダイナモ抑制による効果と考えられるが，元々ダイナモの生じない高 q ST においても改善が見られるだけでなくその度合はスフェロマック，RFP よりも大きい。これは高 q ST において本質的な閉じ込め性能の変化が現れたためと考えられる。

第7章 球状トカマク合体を用いた第二安定化実験

前章までの結果から、プラズマ合体により大きな熱エネルギーを得た ST は高ベータ平衡を形成し、特に高 q ST ではポロイダルベータの上昇とともに閉じ込めが非常に改善されることが分かった。

ここでは高ベータ化した ST がバルーニングモードに対する第二安定化を実現しているかどうか、実験および数値解析から検証する。

7.1 実験解析

プラズマの β 値が高くなり、配位内部における圧力勾配が大きくなると、圧力駆動型の MHD 不安定性であるバルーニングモードが成長する。バルーニングモードに対する安定性は通常、磁気シア s と圧力勾配 α によって決まり、模式的に表すと図 7.1 の様に区分される。中央から右上にかけての不安定領域を挟み、左上を第一安定化領域、右下を第二安定化領域と呼ぶ。 s, α は磁気面関数であり、プラズマ中の位置によって様々な値をとる。この軌跡が不安定領域にかからない様に如何に圧力勾配を大きくし β 値を上げるか、ということが問題となる。通常のトカマク、ST は図 7.1 の点線の様に第一安定化領域に位置しており、圧力勾配 α が大きくなると不安定となる。一方第二安定化領域では圧力勾配の制約がなくなるため通常のプラズマをはるかに上回る高ベータを達成できる。

本実験では ST に合体加熱を適用し、第二安定化の達成を目指した。図 6.7 から明らかな様に、 I_{tfc} を増やす程ポロイダルベータが上昇し、第二安定化の可能性が高くなる。そこで図 6.8 に示された実験条件の I_{tfc} 上限を大幅に延長した実験を行った結果が図 7.2(a) である。減衰時定数は I_{tfc} が大きい程大きくなるが、 $I_{tfc} = 45\text{kA}$ を超えると急激に減衰時定数が低下した。また、図 7.2(b) は同様の実験における磁場揺動分布であるが、減衰時定数の低下に対応して磁場揺動の上昇が見られた。この急激な減衰と磁場揺動の増加がバルーニング不安定によるものかどうか検討する。

ポロイダル磁束の時間変化を観察すると、この急激な減衰は合体後 10-15 μsec 頃から生じる。本実験は水素プラズマを用いており、磁場強度約 0.05 T, 小半径 0.14 m であることを考慮すると、アルフベン時間は 1-2 μsec 程度であり、かなり早い時間スケールで発生している。また、磁場揺動の発生が $r/a \sim 0.8$ に局在していることもバルーニング不安定性の可能性を示唆している。

そこでバルーニング不安定性を判断する指標となる s - α ダイアグラム上で両者の比較

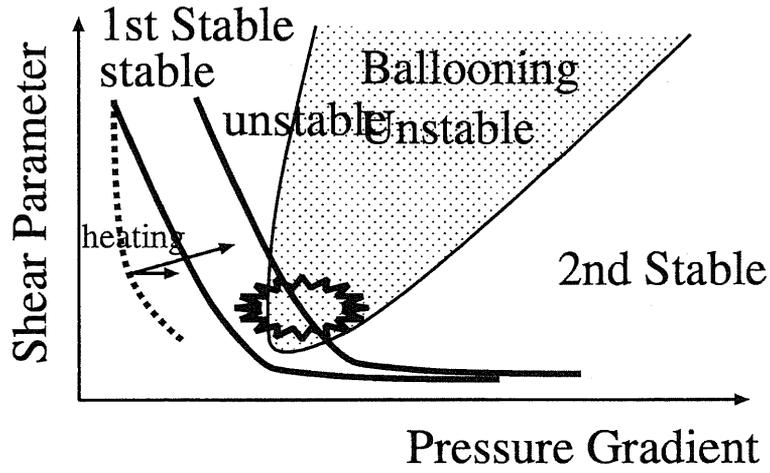


図 7.1: Schematic diagram of ballooning stability in s - α space.

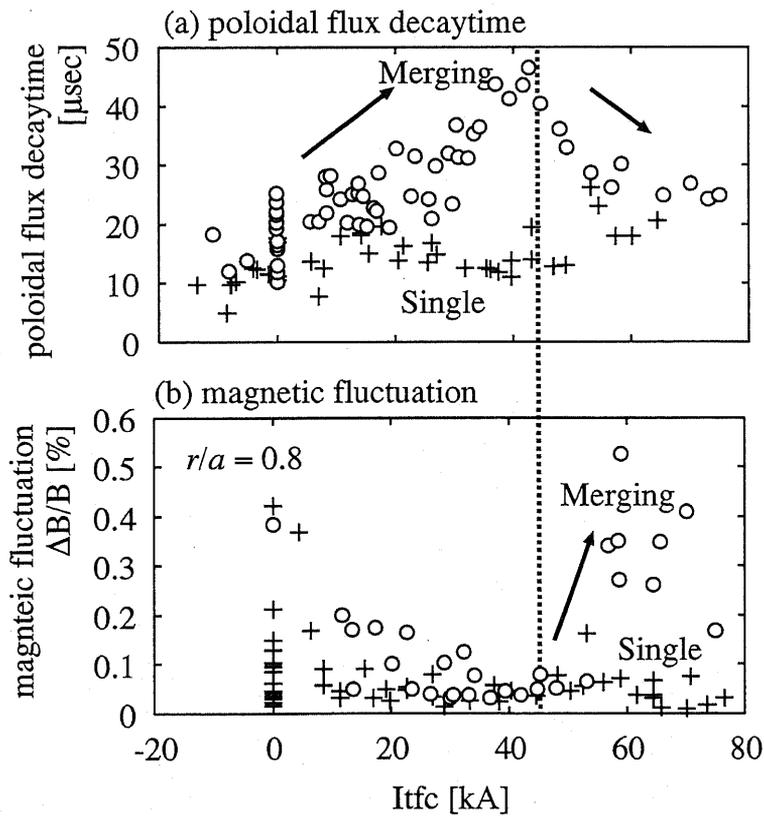


図 7.2: I_{tfc} dependencies of (a) poloidal flux decaytime and (b) magnetic fluctuation. “o” denotes merging ST, “+” denotes single ST.

を行う。通常 s, α は

$$s = \frac{dq}{dr} \frac{r}{q}, \quad \alpha = -\frac{2\mu_0 R q^2}{B^2} \frac{dp}{dr} \quad (7.1)$$

という無次元量で定義されるが、これは大アスペクト比近似を用いた式であり ST に関するバルーニング安定解析例 [30] 等では

$$s = \frac{dq}{d\Psi}, \quad \alpha = -\frac{dp}{d\Psi} \quad (7.2)$$

が代りに用いられているので、本論文においても式 (7.2) の定義を用いる。参考として、TS-3 実験における有次元量の s, α は、式 (7.1) に定義される無次元 s_0, α_0 との間にオーダとして

$$s = s_0 \cdot 10^3 [\text{Wb}^{-1}], \quad \alpha = \alpha_0 \cdot 10^5 [\text{Pa} \cdot \text{Wb}^{-1}] \quad (7.3)$$

の関係がある。

まず図 7.3 に磁気軸で 0, セパトロリクスで 1 とした規格化ポロイダル磁束に対する q, p の分布を示す。

これらの傾きから s, α を求め、図 7.4 に s - α ダイアグラム上で減衰の遅い典型的な ST ($I_{tfc} = 40\text{kA}$) と減衰の早い典型的な ST ($I_{tfc} = 70\text{kA}$) の分布を示した。ただし計測、計算誤差の大きな磁気軸、セパトロリクス近傍は除いた。二つの軌跡に大きな違いが現れるのはセパトロリクス付近である。どちらも急激にシアーが上昇するが、圧力勾配の値が $I_{tfc} = 70\text{kA}$ の方が 2 倍大きな値を持つ。例えば図 7.4 上に模式的に示したようなバルーニング不安定境界が存在する可能性がある。安定境界形状は文献 [30] において求められた ST 配位における境界を参考にした。

7.2 数値解析

実験で観測された高 q , 高 β ST における磁場揺動を急激な減衰が実際にバルーニング不安定性に起因するものかどうか、そしてどのような配位を形成すれば第二安定化を実現できるか等を考察するため数値解析を行った。

7.2.1 平衡計算コード

バルーニング安定性解析を行うには、ST の平衡を磁気面座標系 (Ψ, ϕ, θ) において求めなければならない。本研究では米国 GA の V. Chang らによって開発された計算機コード TOQ [30] を元に C 言語によってコードを作成した。

計算コードは軸対称 MHD 平衡を表す Grad Shafranov 方程式

$$L(\Psi) = -(2\pi r)^2 \frac{dP}{d\Psi} - 2\pi I_{pol} \frac{dI_{pol}}{d\Psi} \quad (7.4)$$

$$L(\Psi) \equiv \left(r \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \Psi \quad (7.5)$$

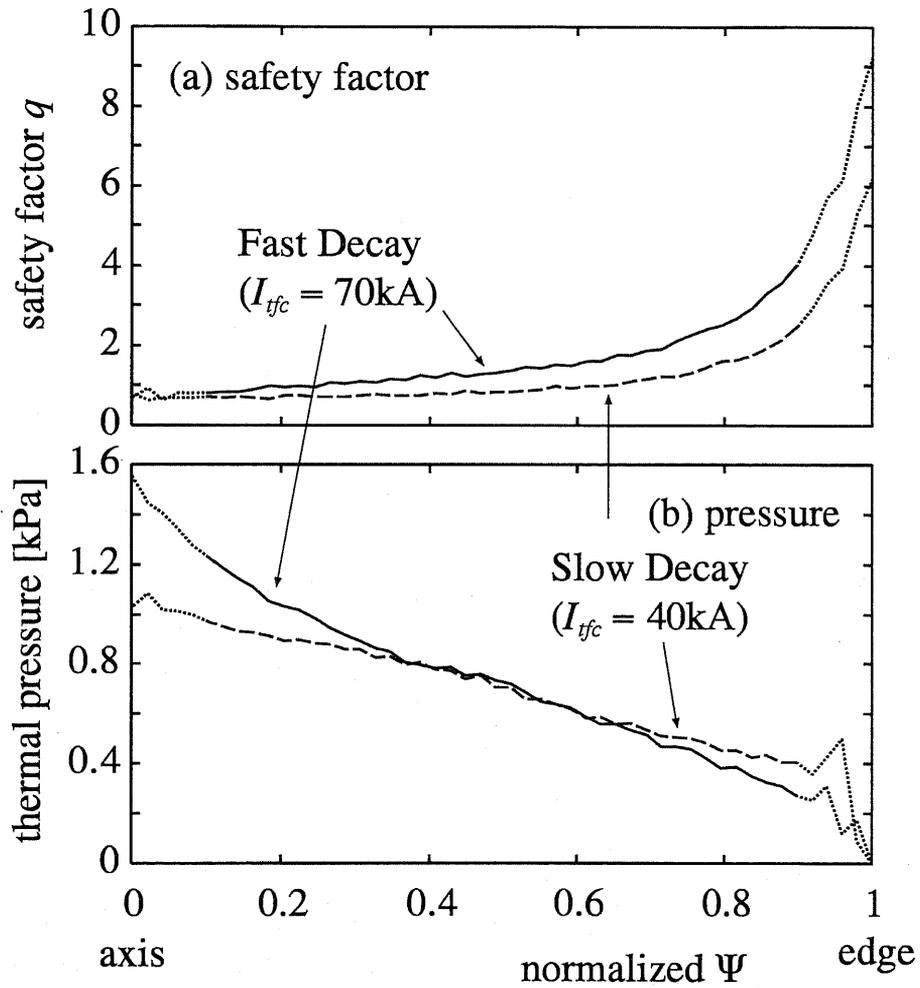


図 7.3: (a) Safety factor and (b) pressure profiles as a function of normalised poloidal flux. Solid lines indicate fast decaying case ($I_{tfc} = 70\text{kA}$), dashed lines indicate slow decaying case ($I_{tfc} = 40\text{kA}$).

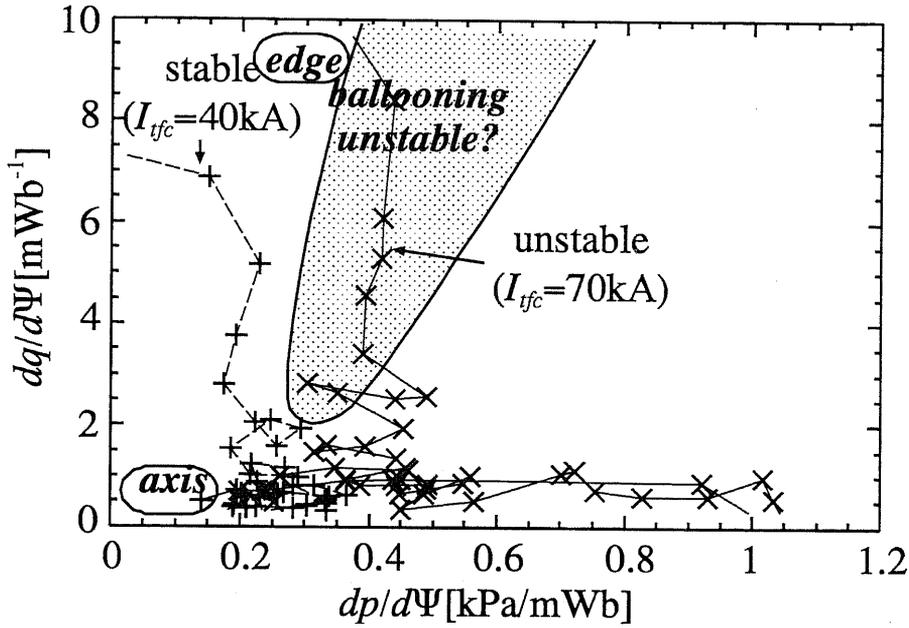


図 7.4: s - α profiles of merging STs. “ \times ” denotes fast decaying ST ($I_{tfc} = 70\text{kA}$), “ $+$ ” denotes slow case ($I_{tfc} = 40\text{kA}$).

を与えられた境界条件および p , I_{pol} 関数に合わせて解く。ここで I_{pol} はポロイダル電流関数であり $2\pi r B_t = \mu_0 I_{pol}$ の関係がある。

最初に指定された最外磁気面の形状 $r(1, \theta)$, $z(1, \theta)$ を求める。このとき θ に関しては

$$dl = \sqrt{\left(\frac{\partial r}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2} \quad (7.6)$$

が一定となる様にする。そして最外磁気面に相似な暫定的な磁気面形状 $r(\Psi, \theta)$, $z(\Psi, \theta)$ を計算する。以下式 (7.4) の各係数を求め、格子分割数を段階的に増やすことで収束させて行く multigrid 収束計算 [31] を用いて $\Psi(\Psi, \theta)$ 分布を計算する。発散を防ぐためのバックアベレージングを行った後に収束計算を行う前の Ψ との差を比較し、その差が指定した打ちきり誤差以下であれば $r(\Psi, \theta)$, $z(\Psi, \theta)$ が最終的な磁気面形状となる。打ちきり誤差以上であれば得られた $\Psi(\Psi, \theta)$ 分布を $\Psi(r, z)$ 分布に直し、新たな磁気面 $r(\Psi, \theta)$, $z(\Psi, \theta)$ を作成し、GS 方程式の係数を作成し multigrid 収束計算を繰り返す。その際にプラズマ電流と圧力が指示値に合うよう、ポロイダル電流関数 I_{pol} の内部電流分 (外部トロイダル磁場以外の成分) を調整する。全体のフローチャートを図 7.5 に、磁気面再構成の概念を図 7.6 に示す。

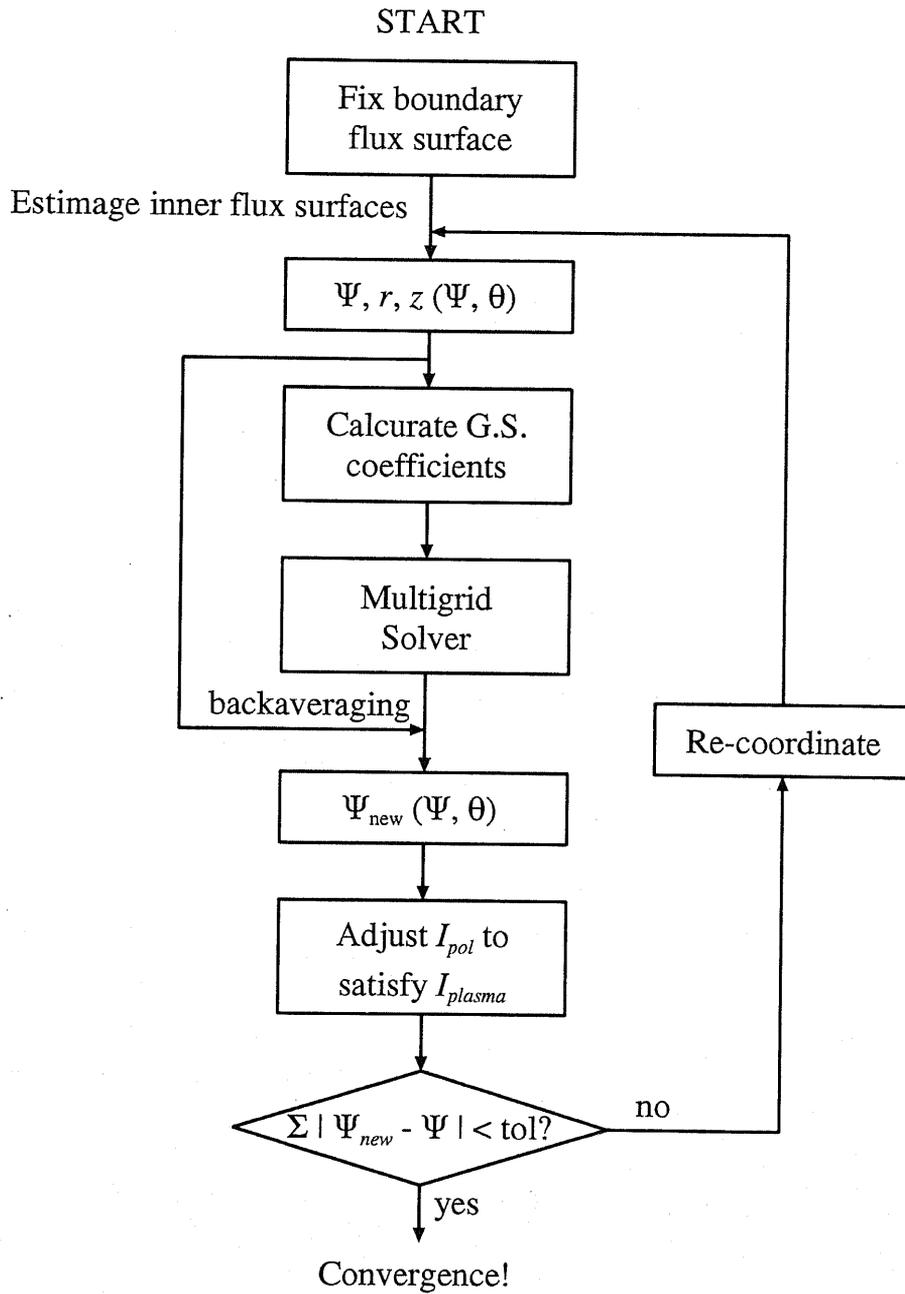


図 7.5: Flow chart of equilibrium solver.

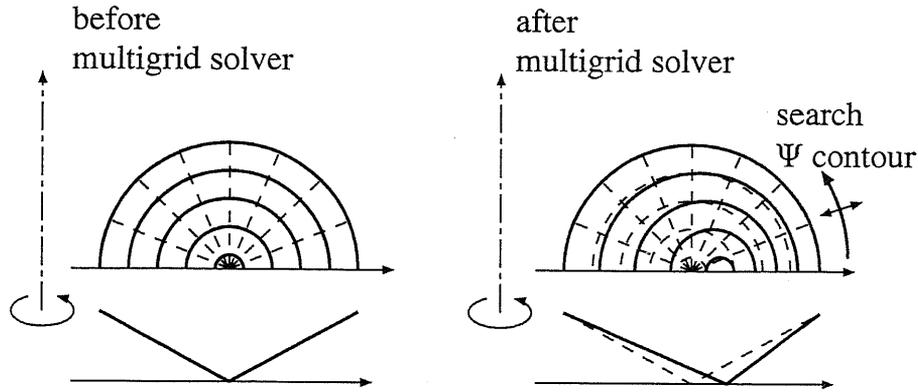


図 7.6: Schematic diagram of re-coordination.

7.2.2 安定解析コード

磁気面座標系で得られた平衡分布を式 (C.49) に適用しバルーニング安定性を解析する. 米国 GA の V. Chang らによって開発された計算機コード BALOO [30] を元に C 言語によってコードを作成した.

$k_{\perp} \rightarrow \infty$ となるモードの安定性を総合的に解析するためには式 (C.46) のエネルギー積分を行う必要があるが, ここでは経験的にもっとも不安定なのは $\chi = 0$ であることから, 式 (C.49) における X の $\chi = 0$ における微係数から安定性を判別する. すなわち,

$$\left. \frac{\partial X}{\partial \chi} \right|_{\chi \rightarrow +0} - \left. \frac{\partial X}{\partial \chi} \right|_{\chi \rightarrow -0} < 0 \quad (7.7)$$

であれば摂動 X は 0 に戻ろうとする性質を持ち安定である.

実際には以下の手順で安定判別を行う. 最初に平衡計算結果を入力し, 式 (C.49) の係数を求める. $X(\pm\infty) \rightarrow 0$ の初期条件を元に Runge-Kutta 法を用いて $X(0)$, $X'(0)$ を計算しなければならないが計算の都合上 $X(\pm 2\pi m + 1) = 0$ とし m は 5-13 の範囲で適当に選んだ. $m > 5$ の範囲でいくつかのケースを試したが結果に有意な差は見られなかった. X, X' が式 (7.7) を満たせば安定となる.

各磁気面の安定, 不安定の判定だけでなく, 以下に示した Greene [32] の手法を用いて各磁気面における安定境界を求める. これにより第一, 第二安定の判定が可能となる.

(摂動のない) バルーニング方程式を

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \alpha(\theta) \frac{\partial}{\partial \theta} \xi - [K(\theta) - \omega^2] \xi = 0 \quad (7.8)$$

とする. 不安定となるのは $\omega^2 < 0$ の場合である.

$$\alpha(\theta) \equiv \frac{4\pi f^2}{X^2 B^2} |\nabla[\phi - q(\theta - \theta_k)]|^2 \quad (7.9)$$

は磁力線の張力に関する項であり、

$$\begin{aligned}
 \mathbf{B} &= f(\Psi)\nabla\phi \times \nabla\Psi + Rg(\Psi)\nabla\phi \\
 q(\Psi) &\equiv \frac{\nu g(\Psi)}{2\pi f(\Psi)} \\
 |\nabla\Psi|^2 &= \frac{4\pi^2 R^2}{\nu^2 X^2} (X_\theta^2 + Z_\theta^2) \\
 \nabla\Psi \cdot \nabla\theta &= -\frac{4\pi^2 R^2}{\nu^2 X^2} (X_\Psi X_\theta + Z_\Psi Z_\theta) \\
 |\nabla\theta|^2 &= \frac{4\pi^2 R^2}{\nu^2 X^2} (X_\Psi^2 + Z_\Psi^2) \\
 &= \left[\frac{4\pi^2 R^2}{\nu^2 X^2} + (\nabla\Psi \cdot \nabla\theta)^2 \right] / |\nabla\Psi|^2
 \end{aligned}$$

を用いると、式 (7.9) は

$$\begin{aligned}
 \alpha &= \frac{4\pi^2 f^2}{X^2 B^2} \left[\frac{1}{X^2} + q^2 |\nabla\theta|^2 + 2(\theta - \theta_k) q q_\Psi \nabla\Psi \cdot \nabla\theta \right. \\
 &\quad \left. + (\theta - \theta_k)^2 q_\Psi^2 |\nabla\Psi|^2 \right] \\
 &= \frac{4\pi^2 f^2}{X^2 |\nabla\Psi|^2} + \frac{4\pi^2 f^4 |\nabla\Psi|^2}{X^2 B^2} I^2
 \end{aligned} \tag{7.10}$$

となる。\$I\$ はローカルシアー \$S\$ の積分を表す。摂動のない場合には

$$\begin{aligned}
 I &\equiv \frac{1}{f} \int S \frac{dl}{|B|} = \frac{1}{f} \int S \frac{d\theta}{\mathbf{B} \cdot \nabla\theta} \\
 &= q_\Psi (\theta - \theta_k) + q \frac{\nabla\Psi \cdot \nabla\theta}{|\nabla\Psi|^2}
 \end{aligned} \tag{7.11}$$

であり、摂動が加わった場合には

$$I = (q_\Psi^{(0)} + q_\Psi^{(1)}) (\theta - \theta_k) + q \left(\frac{\nabla\Psi \cdot \nabla\theta}{|\nabla\Psi|^2} - D_\Psi \right) \tag{7.12}$$

となる。

磁力線の曲率に関する \$K\$ は

$$\begin{aligned}
 K(\theta) &\equiv \frac{X^2 \nu^2}{R^2 B^4} f p_\Psi \mathbf{B} \times \nabla \\
 &\quad [\phi - q(\theta - \theta_k)] \cdot \nabla (2p + B^2) \\
 &= -p_\Psi (\kappa_n + \kappa_g)
 \end{aligned} \tag{7.13}$$

となる。ここで \$\kappa_n, \kappa_g\$ はそれぞれ主曲率 (normal curvature), 従曲率 (geodesic curvature) で

$$\kappa_n \equiv \frac{\nu^2 X^2}{R^2 B^2} \left[\frac{\partial}{\partial \Psi} (2p + B^2) \right]$$

$$\left. + \frac{\nabla\Psi \cdot \nabla\theta}{|\nabla\Psi|^2} \frac{\partial}{\partial\theta} (2p + B^2) \right] \quad (7.14)$$

$$\kappa_g \equiv -\frac{\nu^2 g^2}{q B^4} I \frac{\partial}{\partial\theta} (2p + B^2) \quad (7.15)$$

と定義される。\$K\$ が負の場所でバルーニング方程式の固有関数の曲率はその値と逆の符号をとる。その結果、モードはその場所で最大となり局所化される。よって負の \$K\$ は不安定を促進し悪い曲率の領域と呼ばれる。バルーニング方程式の最後の項が安定に関する固有値問題を決定する。いずれかの \$\theta_k\$ において固有値が負 (\$\omega^2 < 0\$) となれば不安定である。厳密な安定の判定には全ての \$\theta_k\$ でチェックされなければならないが、一般に最も悪い曲率における固有値が問題となる。安定境界条件 (\$\omega = 0\$) を求める場合には固有値を含む項の形は無視できる。

摂動によるこれらの係数の変化は相対的に小さい。唯一の影響は積分されたローカルシアー \$I\$ (式 (7.12)) と曲率の項で、

$$K \rightarrow -(p_{\Psi}^{(0)} + p_{\Psi}^{(1)}) (\kappa_n + \kappa_g) \quad (7.16)$$

となる。

トロイダルモード数 \$n\$ が大きくなると、\$\Psi\$ のモードは \$n^{-1/2}\$ の領域に局所化するので、式 (7.8) は \$1 \gg \mu \gg n^{-1/2}\$ においてよい近似である。摂動を受けない領域でも、バルーニングモードの変化のスケールで平衡がゆっくり変化する。

結局、バルーニング方程式に対する摂動の総合的な影響は 2 つの変数 \$p_{\Psi}^{(1)}\$、\$q_{\Psi}^{(1)}\$ を導入することで評価することができ、これらの変数は式 (7.17, 7.18) を満たす限り独立に動かしても平衡を満足する。

$$\begin{aligned} f_{\Psi}^{(1)} &= -f \left(\oint \frac{X^2 B^2 d\theta}{|\nabla\Psi|^2} \right)^{-1} \\ &\quad \left[p_{\Psi}^{(1)} \oint \frac{X^2 d\theta}{|\nabla\Psi|^2} + \frac{R^2 g^2}{q} q_{\Psi}^{(1)} \oint \frac{d\theta}{|\nabla\Psi|^2} \right] \\ g_{\Psi}^{(1)} &= g \left(\oint \frac{X^2 B^2 d\theta}{|\nabla\Psi|^2} \right)^{-1} \\ &\quad \left[2\pi \frac{f^2}{g} q_{\Psi}^{(1)} - p_{\Psi}^{(1)} \oint \frac{X^2 d\theta}{|\nabla\Psi|^2} \right] \end{aligned} \quad (7.17)$$

$$\begin{aligned} D_{\Psi\theta} &= \frac{p_{\Psi}^{(1)}}{f^2} \left(\oint \frac{X^2 B^2 d\theta}{|\nabla\Psi|^2} \right)^{-1} \\ &\quad \left(\frac{X^2 B^2}{|\nabla\Psi|^2} \oint \frac{X^2 d\theta}{|\nabla\Psi|^2} - \frac{X^2}{|\nabla\Psi|^2} \oint \frac{X^2 B^2 d\theta}{|\nabla\Psi|^2} \right) \\ &\quad - q_{\Psi}^{(1)} \frac{g^2}{q} R^2 \left(\oint \frac{X^2 B^2 d\theta}{|\nabla\Psi|^2} \right)^{-1} \\ &\quad \left[\frac{2\pi}{|\nabla\Psi|^2} - \oint \frac{d\theta}{|\nabla\Psi|^2} \right] \end{aligned} \quad (7.18)$$

式 (7.17) は式 (7.19, 7.20) から計算される.

$$p_{\Psi}^{(1)} \oint \frac{X^2 d\theta}{|\nabla\Psi|^2} + R^2 g g_{\psi}^{(1)} \oint \frac{d\theta}{|\nabla\Psi|^2} + f f_{\Psi}^{(1)} \oint d\theta = 0 \quad (7.19)$$

$$q_{\Psi}^{(1)} = q \left[\frac{q_{\Psi}^{(1)}}{q} - \frac{f_{\Psi}^{(1)}}{f} \right] \quad (7.20)$$

例えば, 式 (7.19) に式 (7.20) の両辺を $R^2 g \oint d\theta / |\nabla\Psi|^2$ 倍したものを加えると,

$$\begin{aligned} p_{\Psi}^{(1)} \oint \frac{X^2 d\theta}{|\nabla\Psi|^2} + f f_{\Psi}^{(1)} \oint d\theta + \frac{R^2 g^2 q_{\Psi}^{(1)}}{q} \oint \frac{d\theta}{|\nabla\Psi|^2} \\ = -\frac{R^2 g^2 f_{\Psi}^{(1)}}{f} \oint \frac{d\theta}{|\nabla\Psi|^2} \end{aligned} \quad (7.21)$$

となる. $f_{\Psi}^{(1)}$ に関して整理すると,

$$\begin{aligned} f_{\Psi}^{(1)} \left[f \oint d\theta + \frac{R^2 g^2}{f} \oint \frac{d\theta}{|\nabla\Psi|^2} \right] \\ = -p_{\Psi}^{(1)} \oint \frac{X^2 d\theta}{|\nabla\Psi|^2} - q_{\Psi}^{(1)} \frac{R^2 g^2}{q} \oint \frac{d\theta}{|\nabla\Psi|^2} \end{aligned}$$

となる. さらに左辺の大括弧 \square 内を変形すると

$$\begin{aligned} f \oint d\theta + \frac{R^2 g^2}{f} \oint \frac{d\theta}{|\nabla\Psi|^2} \\ = \frac{1}{f^2} \oint \frac{d\theta}{|\nabla\Psi|^2} (f^2 |\nabla\Psi|^2 + R^2 g^2) \\ = \frac{1}{f^2} \oint \frac{d\theta}{|\nabla\Psi|^2} X^2 B^2 \end{aligned} \quad (7.22)$$

ここで,

$$\begin{aligned} B^2 &= (f \nabla\phi \times \nabla\Psi + Rg \nabla\phi)^2 \\ &= f^2 |\nabla\phi|^2 |\nabla\Psi|^2 + R^2 g^2 |\nabla\phi|^2 \\ &= \frac{f^2 |\nabla\Psi|^2}{X^2} + \frac{R^2 g^2}{X^2} \end{aligned} \quad (7.23)$$

を用いた.

7.2.3 実験結果の適用

前節にの数値解析手法を用いて図 7.4 に示された実験プロファイルに関するバルーニング安定性を解析した.

平衡計算の計算メッシュは (Ψ, θ) 方向に $(131, 129)$ とした. パラメータとしては $R = 0.18\text{m}$, $A = 1.5$, $\kappa = 2.0$, $\delta = 0.5$ とし, プラズマ電流は 26 kA 程度になる様調整した. ポロイダル電流関数 I_{pol} に関しては $I_{pol} I'_{pol} = \left(\frac{2\pi R_0 B_{t0}}{\mu_0} \right)^2 (1 - \gamma \bar{\Psi})$ とした. ここでプライム ($'$) は規格化したポロイダル磁束による微分を表す. 圧力分布関数として磁気プローブ列から得られた磁場分布を元に $\nabla p = (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} / \mu_0$ を計算し, ポロイダル磁束分布と比較して計算した圧力勾配を 10 箇所求め, スプライン補間したものを用いた.

実験結果と同様に安定なケース A ($B_0 = 0.05\text{T}$, $\beta_0 = 0.4$, $\beta_N = 4.135$) に関しては全ての磁気面においてバルーニング安定性が確認された. また, 不安定なケース B ($B_0 = 0.07\text{T}$, $\beta_0 = 0.9$, $\beta_N = 5.599$) では $0.52 < \bar{\Psi} < 0.96$ の広い範囲で不安定であることが判明した. 図 7.7 に, ケース A, B, そして B の圧力分布形状を維持したままベータ値を下げ, $\bar{\Psi} \sim 0.53$ の磁気面のみバルーニング不安定を示す平衡 C ($\beta_0 = 0.25$, $\beta_N = 2.538$) の s - α 分布を示す. さらにその平衡における不安定な磁気面 ($\bar{\Psi} \sim 0.53$) を基準に BALOO コード内に実装されている先に述べた Greene らによる方法で求めたバルーニング安定境界を描いた. 図から読み取れるように, 圧力調整を行った平衡は第一安定化領域と第二安定化領域の間に途中まで進出している. この磁気面は小半径方向約 0.046 m に位置し, 磁場揺動の観測された位置よりも若干内側に寄っている.

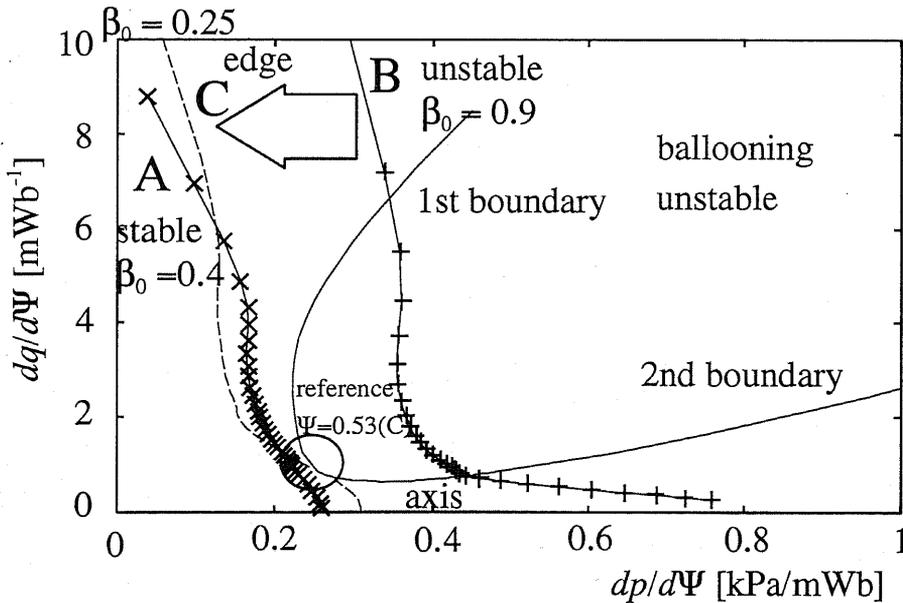


図 7.7: s - α profiles of stable ST (\times : $B_0 = 0.05\text{T}$, $\beta_0 = 0.4$), unstable ST ($+$: $B_0 = 0.07\text{T}$, $\beta_0 = 0.9$) and critical equilibrium (dashed line). Stability limit for one flux surface ($\Psi = 0.53$ of C) is also shown.

また, ケース A がこの安定限界に迫っているようにも見える. 果して安定なプロファイルは第二安定化領域に達しているのだろうか. 図 7.8 に $\bar{\Psi} = 0.46, 0.53, 0.61, 0.69, 0.76$ である磁気面に関してバルーニング安定境界を計算した結果を示す. 磁気シアアの非常に低い $\bar{\Psi} = 0.46$ 磁気面では第一安定境界と第二安定境界の中間付近に位置していることがわ

かる. $\Psi = 0.53$ から外側の磁気面はシアアの増加とともに圧力勾配が減少し, $\Psi \sim 0.61$ の磁気面で第一安定境界に最も接近する. すなわち, $\Psi = 0.6$ 付近の圧力勾配を抑えつつ $\Psi < 0.5$ の圧力勾配を高めることができれば第二安定化を達成する可能性が強い.

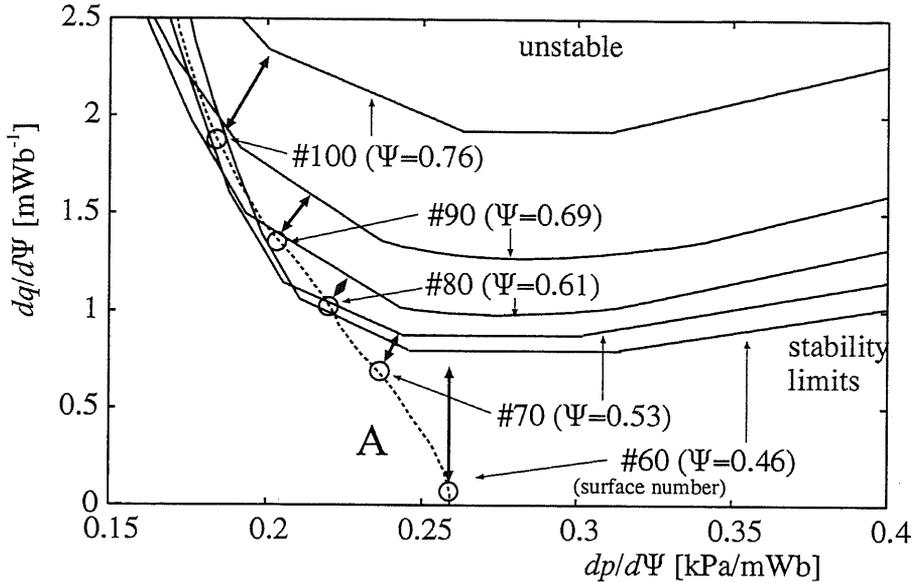


図 7.8: Ballooning stability limits for several flux surfaces ($\Psi = 0.46, 0.53, 0.61, 0.69, 0.76$ of A).

7.3 FRC 起源の高ベータ球状トカマクによる第二安定化

次に, 文献 [33] において示された手法を用いて高ベータ ST を生成し, その安定性を検討する.

この手法は低ベータ, 低シアーナスフェロマックを出発点とし, 高ベータ, 低シアーナ FRC という状態を経て外部トロイダル磁場によりシアアを加え高ベータの ST を生成するものである (図 7.9). 第一安定領域と第二安定領域の中間に位置する窓を通過させることなく第二安定 ST を生成できる可能性がある.

7.4 実験内容

FRC 起源の高ベータ ST 生成手順は以下の通りである. 図 7.10 に概念図を示す.

1. 外部トロイダル磁界のない状態で互いに逆向きのトロイダル磁界をもつスフェロマックを 2 つ同時に生成する.
2. スフェロマックの合体により, トロイダル磁界が打ち消されて逆転磁場配位が形成される.

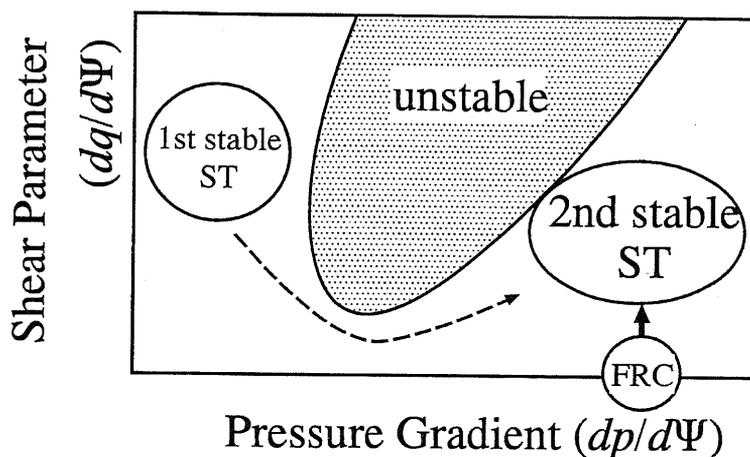


図 7.9: Schematic diagram of second stable ST formation by way of FRC.

3. 合体に際して, 磁気リコネクションを介して顕著なイオン加熱が発生する.
4. プラズマの減衰を抑制するために OH コイル電流を立ち上げることによってプラズマを準定常に維持する.
5. 外部トロイダル磁場コイルの電流を急速に立ち上げ ST 配位を生成する.

スフェロマック合体により生成された FRC はトロイダル磁界を持たないためシアアが無く, また高い圧力勾配を有していることから, 第二安定化領域の α 軸上に存在すると予想される. このような FRC に外部トロイダル磁場を印加することで圧力勾配を維持しつつシアアを強めることができ, FRC の圧力勾配が十分に高ければ第二安定化領域に存在することになる.

7.5 実験結果

FRC に外部トロイダル磁場を印加することにより生成された高ベータ ST は, OH 電流駆動により 50-100 μ sec の間安定に存在するが, 条件によっては ST 合体実験と同様に急激な減衰を示すケースも見られた. この現象は外部トロイダル磁場コイル電流の立ち上げが早く, かつ電流値の大きな場合で, イオン温度が 40 eV 程度の場合に観測された.

図 7.11 に安定なケース ($T_i = 150\text{eV}$) および不安定なケース ($T_i = 40\text{eV}$) の s - α 分布を示す. この場合図 7.4 と対照的に減衰の早い方が圧力勾配が小さいが, 両者の不安定な配位同士を比較すると端部がほぼ同じ空間領域に存在していることがわかる. すなわち, TS-3 装置においては圧力勾配の異なる 2 つの安定な領域と, その中間の不安定領域の存在が予想される.

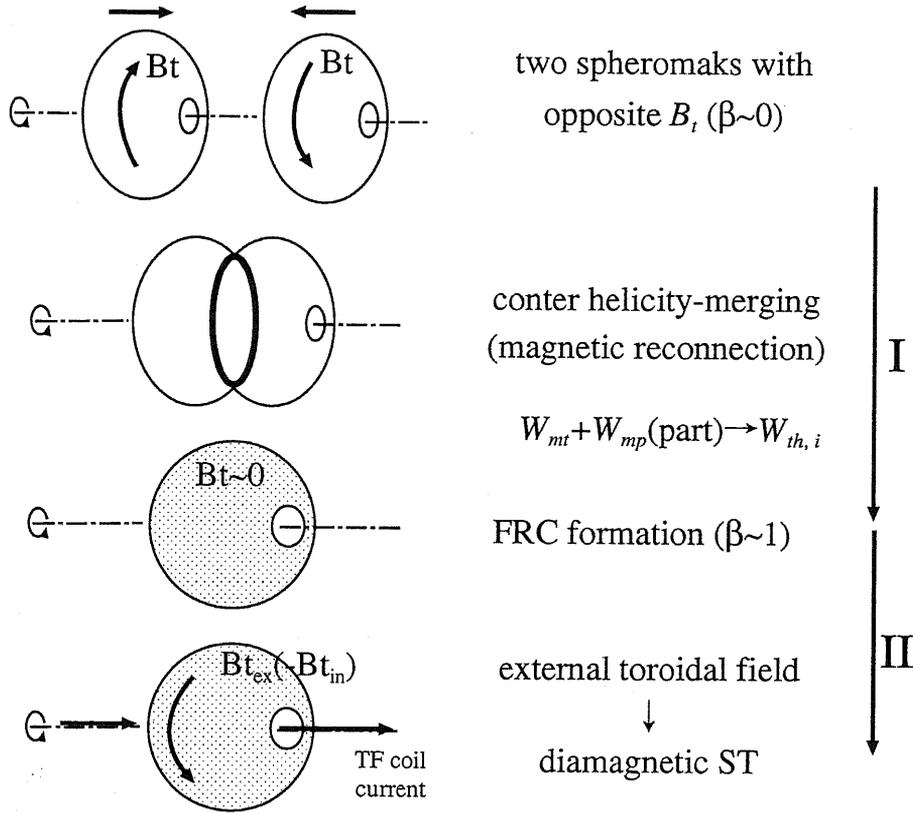


図 7.10: Schematic diagram of diamagnetic ST formation.

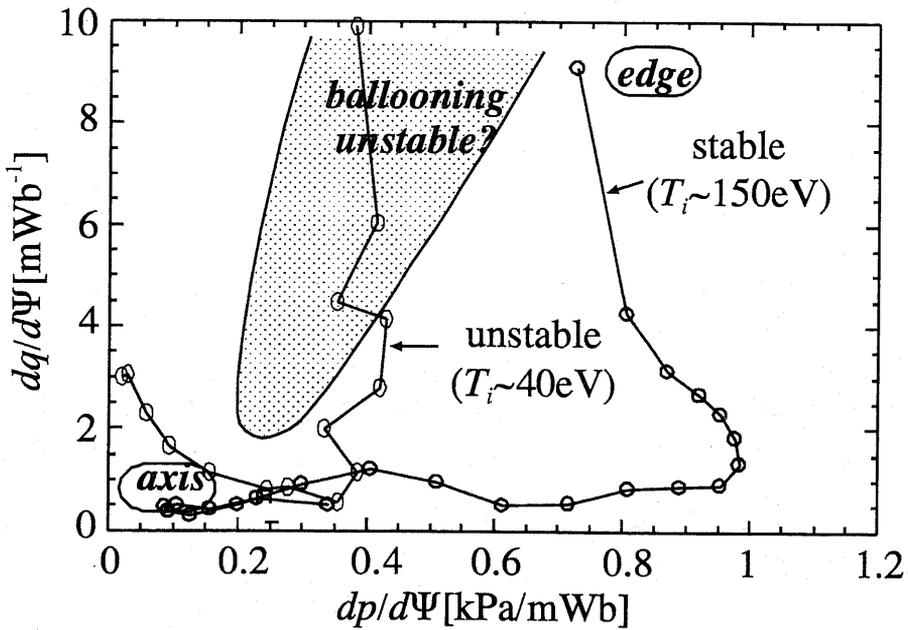


図 7.11: s - α profiles of diamagnetic STs.

7.6 数値解析

一方 $T_i = 150\text{eV}$ の FRC 起源の高ベータ ST を模した平衡 D ($B_0 = 0.05\text{T}$, $\beta_0 = 1.5$) においては全ての磁気面において安定であった. そこで, この圧力分布を維持しつつベータ値を下げバルーニング安定性を調べた所, $\beta_0 = 1.0$ (ケース E) においてセパトリクス付近 ($\bar{\Psi} > 0.95$) でバルーニングに対し不安定となることが分かった. 図 7.12 にケース D, E の s - α 分布および ケース E において $\bar{\Psi} = 0.95$ の磁気面を基準に求めた安定境界を示す. ケース E の分布と安定境界とを比較すると, 第二安定化領域側から境界を越えていることが分かる. すなわち高ベータを保った FRC 起源の ST は第二安定化を達成していると言える.

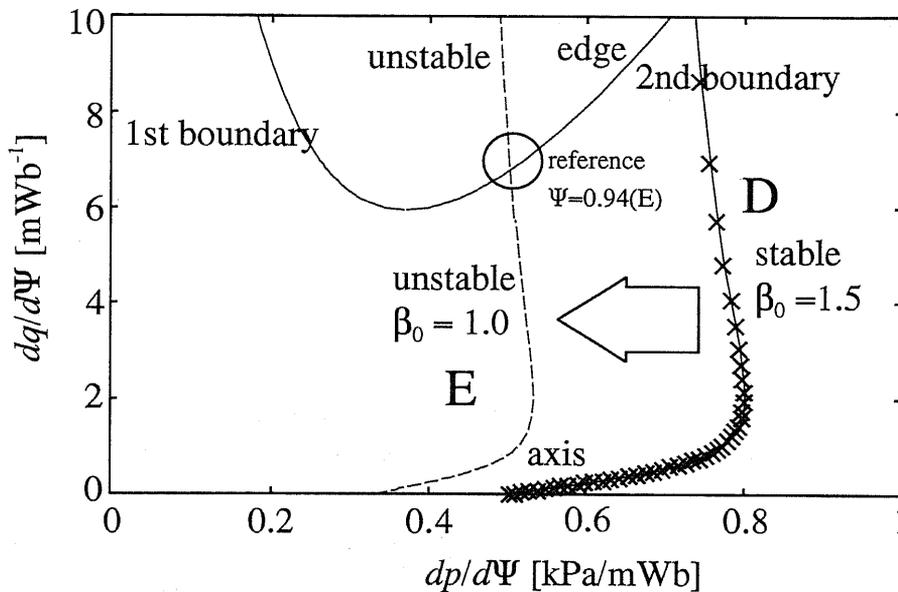


図 7.12: s - α profiles of diamagnetic ST. Stability limit for one flux surface ($\bar{\Psi} = 0.94$ of E) is also shown.

興味深いことは, 第一安定化領域と第二安定化領域の間を結ぶ窓の大きさが, ST 合体に生成された高ベータ ST の場合と FRC から生成された ST の間で大きく異なる点である. 図 7.12 で安定境界を求めた FRC 起源の ST について合体 ST と同様 $\bar{\Psi} \sim 0.53$ における安定境界を求め比較した所窓の高さが約 2 倍あり, かつ第二安定境界の傾きが急で圧力勾配に関する条件が緩やかになることも判明した (図 7.13). これは FRC 起源の ST が絶対極小磁場配位を形成していることに関係していると考えられる.

7.7 バルーニング不安定性のまとめ

本節では同極性合体により加熱された高ベータ ST とスフェロマックの異極性合体に生成した FRC に外部トロイダル磁場を印加する高ベータ ST に関してバルーニング安定境

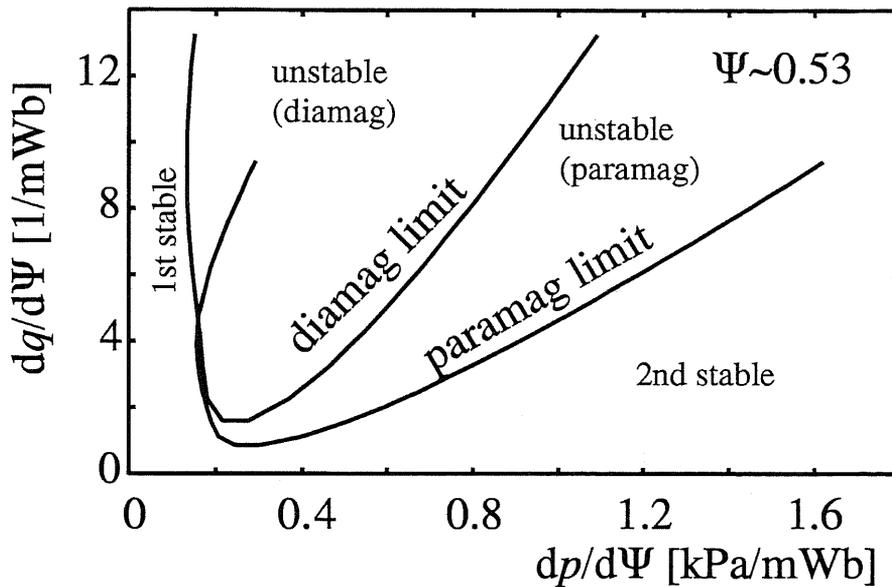


図 7.13: Comparison of s - α limits of paramagnetic and diamagnetic STs .

界を実験的, 数値的に検証した.

その結果, ST 合体により生成された高ベータ ST の場合には外部トロイダル磁場コイル電流 I_{tfc} が 45 kA までは I_{tfc} の増加と共にポロイダル磁束の閉じ込めが改善されるが, 45 kA を超えると磁場揺動を伴った急激な減衰が見られ, 数値解析の結果からバルーニングに対し不安定であることが分かった. また急激な減衰を示さない安定な平衡の一部はバルーニングモードに対する第一, 第二安定化領域の中間付近に位置することがわかり, 圧力分布の調整に成功すれば第二安定化の可能性もある.

また, 絶対極小磁場をもつ FRC 起源の ST は FRC 生成時に十分な圧力勾配を確保することで長時間安定に維持され, 第二安定化を達成できることが示された. ただし FRC 起源の高ベータ ST は配位形成中に一時的とはいえ $q=1$ を通過しなければならず, また追加熱等による q 値の低下も考えられることから, キンク不安定性などに関しても安定性を確保することが今後の課題となる.

第8章 プラズマ合体の将来性

8.1 プラズマ合体によるポロイダル電流駆動の拡張

本研究によりプラズマ合体を用いてトラスプラズマにトロイダル磁束を注入し、ポロイダル電流を駆動できることがわかった。しかし核融合炉規模の装置を考えた場合、大きなプラズマを何度も作るのは現実的ではない。特に高温のコア部まで磁気リコネクションを起こして冷たいプラズマを混合してしまうことは逆に悪影響を与えてしまうし、そもそも OH 電流駆動等によって増大したトロイダル電流、すなわちポロイダル磁束と同量の磁束を持つプラズマを一挙に生成し、合体させること自体非常に難しい、あるいは不可能であるともいえる。

そこで本節では大規模装置におけるプラズマ合体を用いたポロイダル電流駆動の適用を考え、その指針となる予備実験結果を示す。

8.1.1 周辺ポロイダル電流分布制御の概念

大規模装置において主プラズマと同程度の磁束を持つ入射プラズマを生成することは不可能である。それでは最初から小さなプラズマを入射することを考えればよいのではないか。既に燃料補給の観点からコンパクトトラスの入射を行うという概念が実験 [34]、数値解析 [35] 両面から進められているが、これらは半径方向、あるいは軸方向であっても非軸対称な入射である。

本論文では以下のような概念を提案する。プラズマ合体によるトロイダル磁束注入はその原理から小半径外側より進行する。ここでは単純化するため外部トロイダル磁場の存在しないケース、すなわちスフェロマックについて考える。主スフェロマックに小型スフェロマックを入射する際の様子を図 8.1 に示す。

プラズマをポロイダル磁束によっていくつかの層に分割されていると想定し、磁束の保存を考慮すると各層中に含まれるトロイダル磁束はそれぞれの層内で加算され、図 8.1 右側に示した様に増加することがわかる。ここで興味深いのは一般的なスフェロマックでは $q(=d\Phi/d\Psi)$ 分布は中心部で高く周辺部で低いことから合体前の主、入射スフェロマックのトロイダル磁束は図 8.1 右上の様な分布を示すことが予想され、周辺部 ($\Psi \sim 0$) 付近では同一のポロイダル磁束の地点におけるトロイダル磁束は入射スフェロマックの方が多い。すなわちポロイダル磁束の小さなスフェロマックを入射することによって主スフェロマックの周辺部のトロイダル磁束を効率良く増加させることが可能である。また、ポロイダル電流に関しても小型スフェロマックの入射によって駆動することができる。

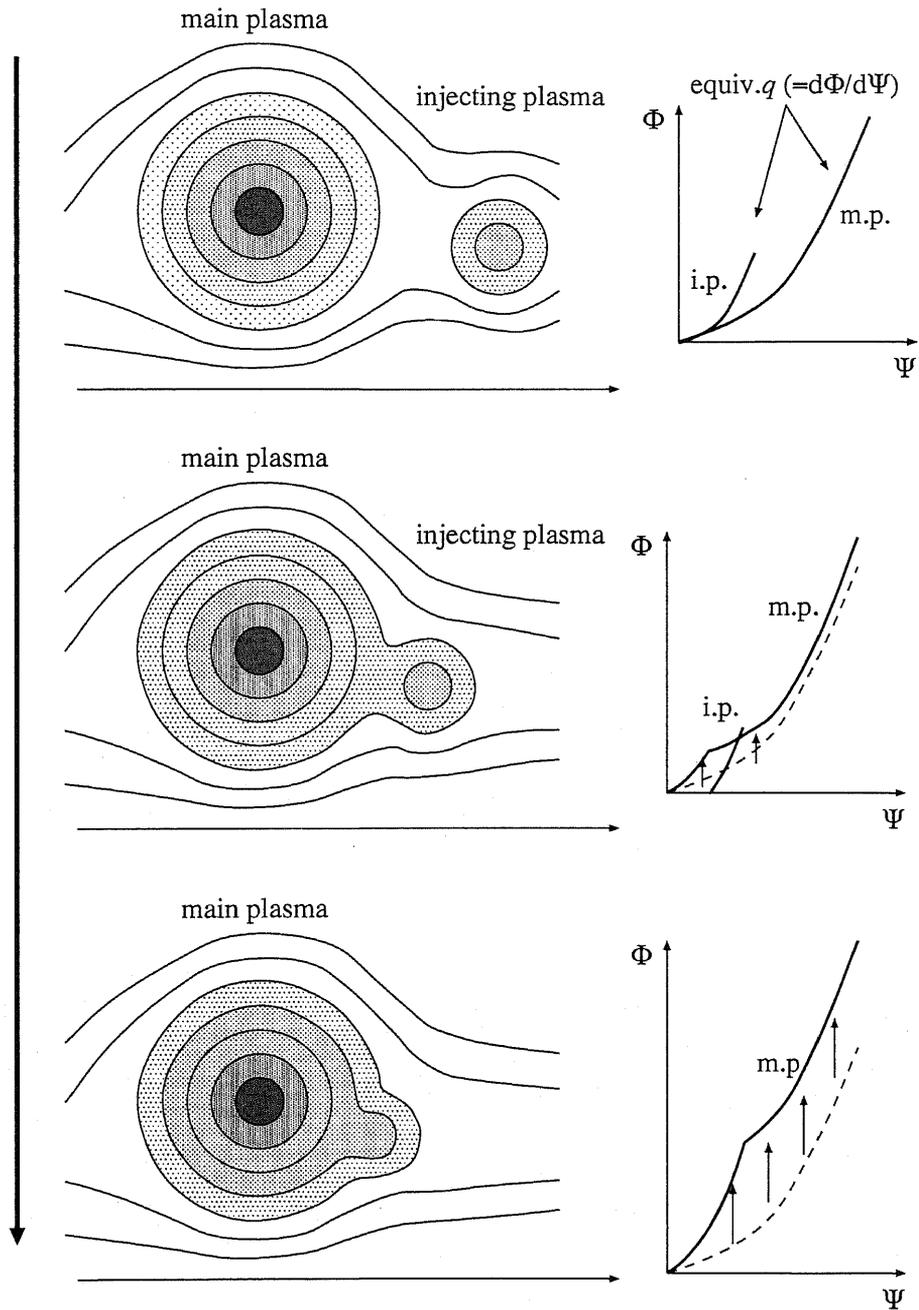


図 8.1: Schematic diagram of edge poloidal current drive by use of small CT injection.

8.1.2 周辺ポロイダル電流駆動実験

先述の小型スフェロマック入射によるポロイダル電流駆動を TS-3 装置において行いその効果を検証した。

具体的には TS-3 装置の 2 つのプラズマ生成部のうち片側をコンデンサ電源の電圧を通常の値に設定して動作させ、もう一方では通常値よりも下げて放電を行った。減衰を抑えるために OH 電流駆動を併用した。

図 8.2 に電極放電用コンデンサの設定電圧比 V_2/V_1 を 0.3 としたケースのポロイダル磁気面時間変化を示す。小さいスフェロマックが大きいスフェロマックに吸収されるように合体している様子が見られる。合体完了時点におけるポロイダル電流関数 I_{pol} の Ψ 分布を求めると図 8.3 の様になる。これはまず破線で示した初期 I_{pol} 分布 ($\lambda = dI_{pol}/d\Psi \text{ const.}$) が合体によるポロイダル電流駆動によって一点鎖線の様な状態に向かいつつプラズマ中の連続性を保つために実線のような分布になったと考えられる。

図 8.4 に $V_2/V_1 = 0, 0.3, 0.8$ の計 3 種類の実験におけるポロイダル電流、固有値分布を示す。ここで $V_2/V_1 = 0$ というのは単一スフェロマックに相当する。単一スフェロマックの場合には I_{pol} がほぼ Ψ に比例、すなわち λ 一定であるのに対し 2 つの合体スフェロマックでは特に Ψ の小さな領域での傾きが大きい。しかも $V_2/V_1 = 0.8$ の方が $V_2/V_1 = 0.3$ の場合よりも I_{pol} の傾きあるいは λ の高い領域が中心近くまで存在し、入射スフェロマックの大きさ (ポロイダル磁束) と定性的に一致している。

TS-3 装置では左右のプラズマ生成部の距離が比較的近く、また電源の制約からプラズマ生成は同時に行わなければならないため、合体前の初期プラズマの段階での相互作用の影響を完全に除去できずこのような大きさの異なるプラズマ合体に関しては提案した周辺電流駆動の効果を定量的に評価することは難しいが、本実験結果から実際に合体によって周辺部のポロイダル電流を選択的に駆動することが可能である事が示された。

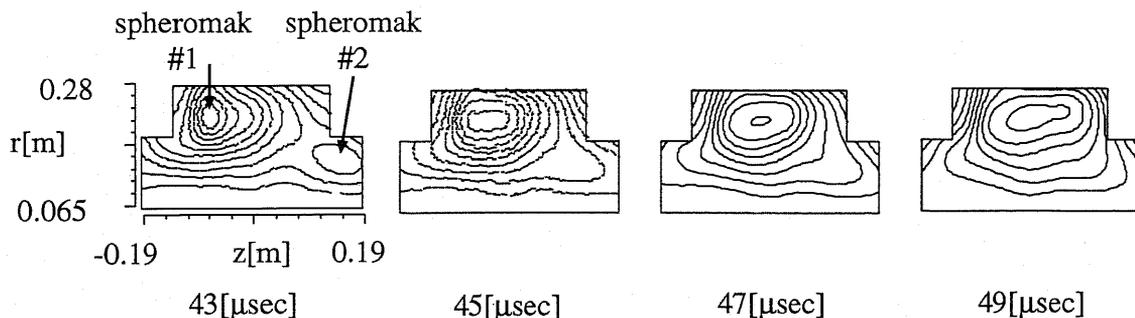


図 8.2: Poloidal flux contour plots in edge current drive experiments.

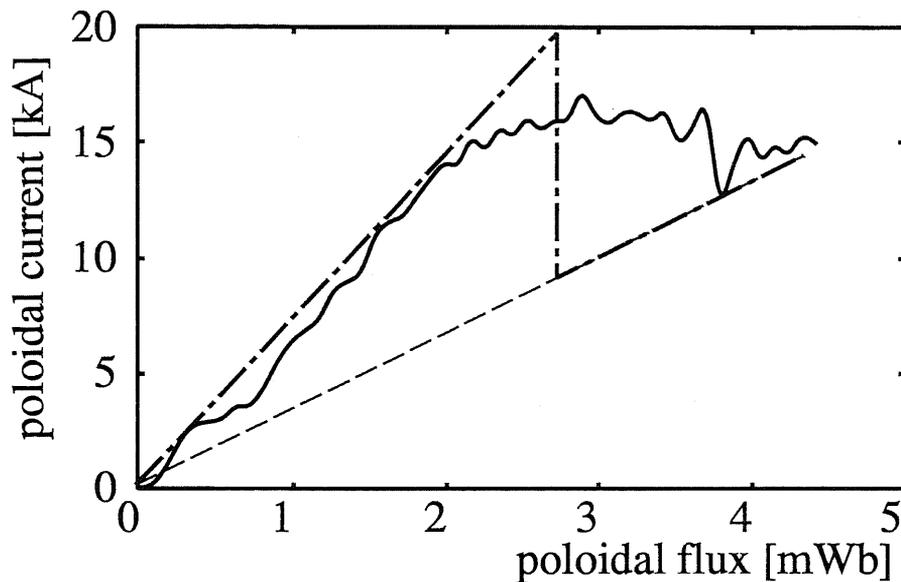


図 8.3: Poloidal current profile of merged spheromak as a function of poloidal flux.

8.1.3 周辺ポロイダル電流駆動, 分布制御による安定性向上

一般にプラズマ中心部よりも周辺部の方が電子温度が低いため, 電子温度の $3/2$ 乗に逆比例する Spitzer 抵抗が高く, 電流の減衰が早い. さらにポロイダル電流は周辺部に多く流れることから, 周辺ポロイダル電流駆動は重要性である.

また, RFP の周辺部分において電流勾配を急峻にすることで電子温度 (の $3/2$ 乗) 分布と電流分布を合わせ磁力線方向の電界を一樣にし, 電流駆動型の磁場揺動を低減する手法 [36] が提案されていることから周辺電流駆動が注目される.

ST においても端部の q 値を上昇することで安定性の向上が期待できる.

8.2 合体による急速加熱のスケーリング

第 1.3 節で述べたように, プラズマ合体のもう一つの特徴は, その高い加熱性能にある. TS-3 装置において予測した加熱パワー ($> 5\text{MW}$) の加熱が得られることは第 5 章において実証された.

この見積もりが他の装置でも成り立つ, すなわち合体加熱スケーリングが成立するならば, 今後合体加熱を大規模実験に適用する上で強い基盤となる.

そこで, 本節では合体加熱に関するスケーリングの検証を行う. スケーリングのために別の装置を建設することは困難なので, TS-3 装置において調整しうる範囲での検証を行う.

合体加熱に関して予想されるスケーリング

$$W \sim \frac{L^3 B^2}{2\mu_0} \quad (8.1)$$

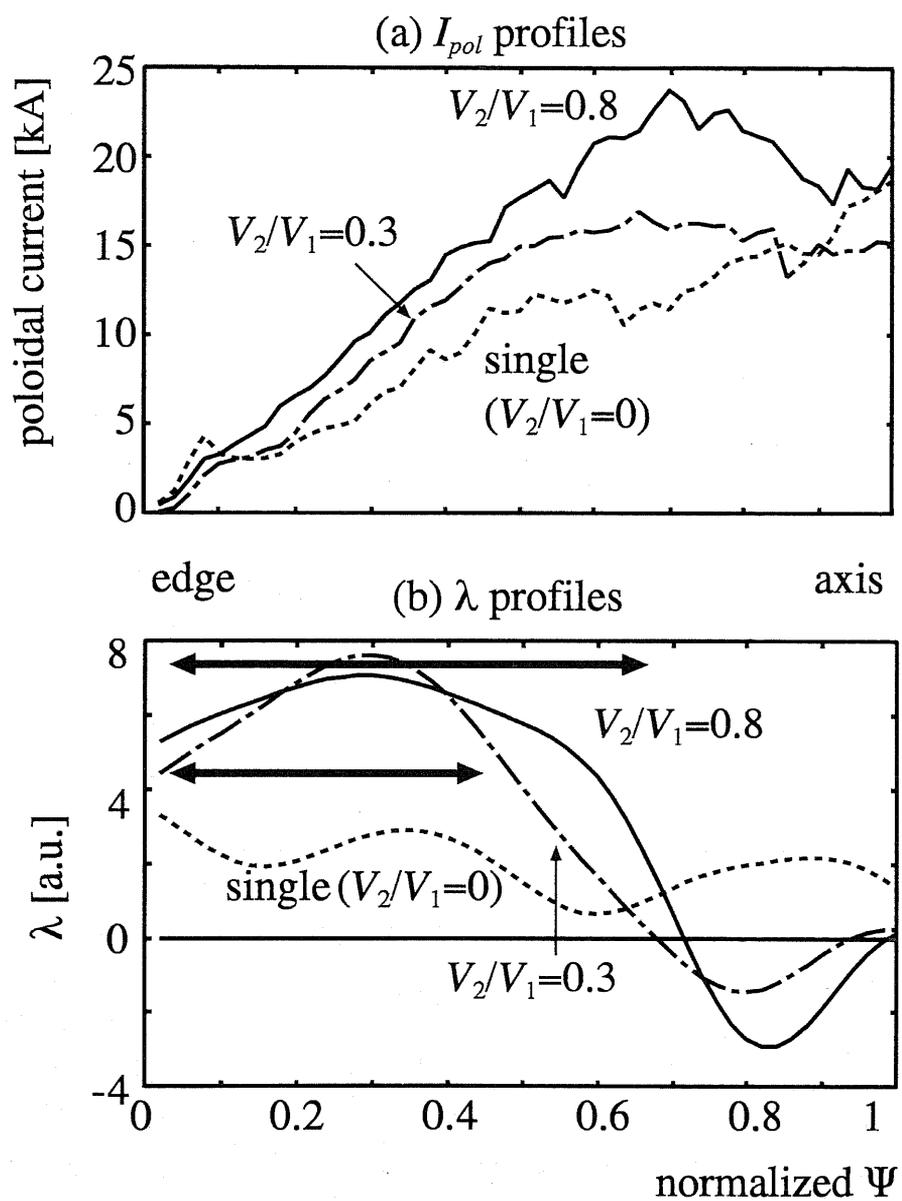


図 8.4: Poloidal current and eigenvalue profiles of poloidal current driven spheromaks as a function of normalized poloidal flux.

において TS-3 装置において最も確実な調整可能パラメータは磁場であることから、本節では合体加熱の磁場スケールリングに関して検討を行う。具体的には、最も高い加熱を得られるスフェロマック異極性合体を用い、プラズマ生成用コンデンサ電源充電電圧を調整した。熱圧力を構成する要素のうち合体によって大きく変化するのはイオン温度であるので、合体前のスフェロマックの磁気圧と合体後生成される FRC のイオン温度の関係をグラフに表すと図 8.5 の様になる。

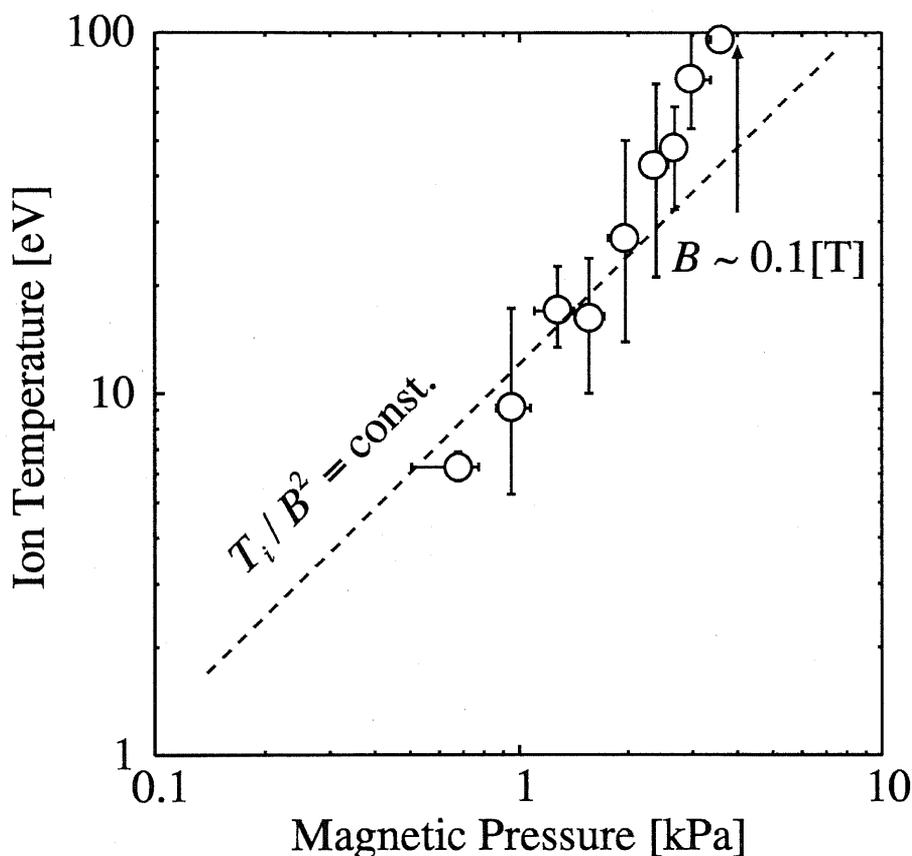


図 8.5: Ion temperatures of FRC as a function of magnetic field pressure of initial spheromaks.

磁気リコネクションによって繋ぎ変わる磁力線の磁気エネルギーがイオンの熱エネルギーに変換されるならば、合体前の熱圧力がほぼ 0 と仮定することによって合体前の磁気圧と合体後の熱圧力が比例するはずである。最も温度の高いケースで、イオン温度約 100 eV、磁気圧約 3.5 kPa であることから変換される圧力の効率 η は粗く見積もって

$$\eta = \frac{2\mu_0 p}{B^2} \sim \frac{10^{20} \cdot 100 \cdot 1.6 \times 10^{-19}}{3.5 \times 10^3} \sim 0.46 \quad (8.2)$$

となる。ここで密度 $n = 10^{20} \text{m}^{-3}$ 、 $T_e \sim 0$ とした。電子密度に関するファクターに大きな誤差が含まれているが、磁気エネルギーをかなりの割合で熱エネルギーに変換できていることがわかる。

また、イオン温度は磁気圧に比例すると予想したが、結果的にイオン温度上昇は磁気圧以上に大きくなる傾向が得られた。

このようなずれが生じた原因を考察する。TS-3 プラズマ合体実験においては、プラズマ生成に用いた PF コイル電流はプラズマ生成後コンデンサ電源との LC 共振により電流の向きが逆転する。その反転電流はプラズマ電流と逆向きであり、PF コイルは 2 つのプラズマの外側から挟むように位置しているためプラズマをお互いに押しつける働きをする。この反転電流を強めることで磁気リコネクションが加速されることが分かっており [37]、高温イオンの損失が減少したことが第一に考えられる。もう一つの可能性としては、合体に圧力の上昇した FRC は広がりとうとするが、エネルギーの大きな FRC の方がより大きく、形状変化を抑えるための周辺コイル (PF コイルを含む) に近づいて押えられる (圧縮される) ために温度が上昇した可能性がある。このような効果を割り引いて考えると $T_i \propto B^2/2\mu_0$ の関係がほぼ満たされているとみなせる。

コイル電流 (外力) の影響などプラズマの磁場以外の要素を考慮しなければならないため、まだ合体加熱の磁場スケージングが完全に実証されたとは現段階で判断することはできないが、成立する可能性は高いと思われる。また、本実験で行わなかった同極性合体に関しても、磁気リコネクションが生じていることに関しては同様であり、加熱による最大到達温度そのものは異極性合体よりも低下するが同様の傾向が得られると考えられる。

本実験で得られた結果 ($B \sim 0.1\text{T}$ において $T_i \sim 100\text{eV}$) がそのまま延長されれば 1 T の磁場をもつスフェロマック異極性合体によって 10 keV イオン温度を持つ FRC を生成可能であり、核融合三重積に関してまだ閉じ込め時間の問題は未解決であるものの温度的には十分なプラズマを作ることができる。あるいは FRC に外部トロイダル磁界を印加する手法によって閉じ込めの良い ST に転換する運転も有効であると考えられる。

第9章 結論

本研究では経済的な核融合炉心プラズマとして期待される球状トーラスの電流駆動, 加熱方式として高速磁気リコネクション機構を用いた軸対称合体を提案し, その実験的評価を行った.

まず合体を用いない状態での各種球状トーラスの相互比較を単一装置内において行い, 安全係数 q 値の高い配位程寿命が長く, また粒子, エネルギー損失の一因である磁気揺動も低下することが判明した. また, OH 電流駆動状態においてセパトリティクス周辺部におけるポロイダル磁界の軸対称性を計測した結果, 低 q プラズマはトロイダルモード数 $n = 2, 3, 4$ といった低次モードの成長が見られた. これはトロイダル電流 (ポロイダル磁束) しか駆動しない OH 電流駆動では, 時間が経つにつれ大きくなる Taylor 状態からのずれを解消するため磁束変換 (ダイナモ) が発生したためと考えられ, ポロイダル電流の割合の大きな低 q 配位で長時間安定に維持するためにはトロイダル電流だけでなくポロイダル電流も駆動する必要のあることが分かった.

次に, プラズマ合体によるポロイダル電流駆動法に着目し, OH コイルによるトロイダル電流駆動と併用することで, スフェロマックや RFP 等の低 q 配位の長寿命化を計った. その結果, 単一生成時に大きく成長した低 q 配位のセパトリティクス付近に現れるポロイダル磁界の非対称性を大きく低減することに成功した. スフェロマックにおいてポロイダル磁束およびトロイダル磁束の時間変化を合体/ 単一生成プラズマにおいて比較した結果, 合体中は両者ポロイダル磁束はほぼ同程度で, トロイダル磁束は合体プラズマが 2 倍近く多かったものが, 合体完了後 OH 電流駆動によって維持されるポロイダル磁束は合体プラズマの方が約 1.7 倍多くなり, またトロイダル磁束の差は減少していることから, 単一生成スフェロマックで生じていると考えられるダイナモの発生を抑制しうることを実証した.

合体加熱実験では磁気エネルギー $\sim 100\text{J}$ 程度の小型球状トーラスの合体実験でも短時間 ($\sim 10\mu\text{sec}$) の間に大きな熱エネルギー ($\sim 60\text{--}150\text{J}$) を発生することができメガワット以上のパワーが得られた. また増加する熱エネルギーは主に磁気リコネクションによって生じるイオンの選択的加熱によるものでありその効果は q の低い配位程大きいことがわかった.

合体加熱によって生成される ST は高熱圧力領域を広く維持することのできる凹状のトロイダル電流分布をもっており, さらに同一のポロイダル磁気圧で閉じ込め得る熱圧力を低下させるトロイダル磁界の常磁性が合体前に比べ低くなることからその平衡が高ベータなものへと変化していることを見出した. 結果として同一の外部磁界において単一生成プラズマに比べ β 値が 2-3 倍上昇した. また合体プラズマは単一生成プラズマに比べ減衰が緩やかであり特に高 q ST ではその改善が顕著であることが分かった.

さらに ST 同士の合体加熱を用いて理想的な高ベータ ST と考えられるバルーニングモードに対する第二安定化を検証する実験を行った。閉じ込めの良い高 q ST において、外部トロイダル磁界コイル電流 I_{tfc} が 45 kA 以上になると大きな磁気揺動と共に急激に減衰する現象が観測された。最も寿命の長い $I_{tfc} = 40\text{kA}$ の合体 ST の平衡プロファイルと減衰の激しい $I_{tfc} = 70\text{kA}$ の合体 ST とを比較した結果、減衰の激しいケースの方が強い圧力勾配を持っていることが分かり、バルーニング安定性に関する指標となる s - α ダイアグラム上での比較からバルーニング不安定が発生した可能性が示唆された。

高ベータ配位で問題となるバルーニングモードに対する安定性を数値的に検証するために BALOO コードを整備し、ST 合体実験によって得られた平衡の安定性を調査した。その結果減衰の激しい合体 ST は第一、第二安定領域中間の窓付近で安定境界を越え不安定となっていること、寿命の長い合体 ST は最も圧力勾配の強い部分よりも若干外側の磁気面が不安定境界に接近していることが判明した。

さらに近年第二安定化を達成する可能性が高い手法として期待されているスフェロマックの異極性合体により生成した FRC に外部トロイダル磁界を印加することで生成される高ベータ ST に関して、バルーニング不安定性を数値的に検証した。その結果実験において長時間安定に維持される、圧力勾配の強いプロファイルは第二安定化が達成されており、圧力勾配を弱めて行くとバルーニング不安定となることを実証した。

最後に、今後プラズマ合体を大型装置において適用する手がかりとなる 2 つの予備実験を行った。一つはターゲットとなるプラズマへの小型プラズマを入射するによる配位周辺部分のトロイダル電流駆動で、実際に周辺部のトロイダル電流が制御されていることを確認した。この手法を大型装置に適用することで、温度が低いことによる減衰しやすい周辺部分電流の選択的に駆動や、閉じ込め改善の為に分布制御などへの応用が期待される。また、合体加熱に関する磁界スケーリングの検証を行い、磁気リコネクションによるイオン加熱が最も高いスフェロマックの異極性合体に関しては予想された p/B^2 一定程度の結果を得ることができた。

以上の実験、数値解析結果および考察から、高速磁気リコネクション機構を利用したプラズマ合体は、プラズマ中の磁界、電流および熱分布の効果的な制御手法であることが立証され、大型装置への適用に向けた基本特性が明らかになった。

謝辞

長きにわたって親身に御指導くださいました小野靖助教授, 桂井誠教授に心より感謝致します。

板垣敏文助手をはじめとして研究室関連各位には実験, 研究環境の整備あるいは日頃の議論などで多大な御協力をいただきました。

本研究の基盤であるところの電気工学について御教授いただいた本学工学部電気工学科の諸先生方, 学会, 研究会等で有益な示唆をお与え下さった各大学・研究機関の諸先生方に感謝致します。特に BALOO コードの利用を許可していただいた米国 General Atomics 社の V. S. Chang 博士, コードの使用方法について御教授いただいた文部省核融合科学研究所の長山好夫教授に感謝致します。

また, 学内外の同世代の学生, 研究者諸氏との議論においては研究を進める上でのヒントや研究に対する大きな意欲を得ることができました。

その他, 数多くの方々のご助力のもとで本研究が遂行されましたことをここに記します。最後に桂井・小野研究室の益々の発展を願って謝辞とさせていただきます。

参考文献

- [1] B. C. Stratton, R. V. Bundy, D. S. Darrow, R. K. Fisher, E. D. Fredrickson, G. Y. Fu, S. S. Medley, R. Nazikian, M. P. Petrov, M. H. Redi, E. Ruskov, G. Taylor, R. B. White, S. J. Zweben, TFTR Group, *Nuclear Fusion*, Vol. 39, No. 9Y, p. 1309 (1999).
- [2] JET Team, *Nuclear Fusion*, Vol. 39, No. 9Y, p. 1227 (1999).
- [3] S. Ishida, JT-60 Team, *Nuclear Fusion*, Vol. 39, No. 9Y, p. 1211 (1999).
- [4] ITER Joint Central Team, "ITER Final Design Report", IAEA, 1998.
- [5] ITER Director, "ITER-FEAT Outline Design Report", ITER Meeting, Tokyo, 2000.
- [6] J. B. Taylor, *Physical Review Letters*, Vol. 33, No. 19, p. 1139 (1974).
- [7] J. S. Starf et al., *Physical Review Letters*, Vol. 78, No. 1, p. 62 (1997).
- [8] P. L. Brunsell et al. *Physics of Fluids B*, Vol. 5, p. 885 (1993).
- [9] P. Martin et al., *Physics of Plasmas*, Vol. 7, p. 1984 (2000).
- [10] Y. Ono et al., *Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research 1992*, Vol. 2, p. 619 (1992).
- [11] 植田喜延, 小野靖, *電気学会論文誌 A 部門誌*, Vol. 117-A, p. 899 (1997).
- [12] J. Slough et al., *Physics of Plasmas*, Vol. 7, No. 5, p. 1945 (2000).
- [13] H. Ji et al., *Physics of Plasmas*, Vol. 5, No. 10, p. 3685 (1997).
- [14] M. Peng et al., *Nuclear Fusion*, Vol. 26, No. 6, p. 769 (1986).
- [15] A. Sykes et al., *Physics of Plasmas*, Vol. 4, p. 1665 (1997).
- [16] M. Ono, *18th IAEA Fusion Energy Conference*, Sorrento, October 4-10, IAEA-CN-77/OV4/2 (2000).
- [17] A. Sykes et al., *18th IAEA Fusion Energy Conference*, Sorrento, October 4-10, IAEA-CN-77/OV4/1 (2000).

- [18] 長山好夫, 電気学会論文誌 A 部門誌, Vol. 119-A, p. 1280 (1999).
- [19] M. Ono, *Physics of Plasmas*, Vol. 2, p. 4075 (1995).
- [20] T. Jarboe et al, *Physics of Plasmas*, Vol. 5, No. 5, p. 1807 (1998).
- [21] M. Nagata et al, *17th IAEA Fusion Energy Conference*, Yokohama, October 19-24, IAEA-CN-69/EXP4/10 (1998).
- [22] B. B. Kadomtzev, *Sov. J. Plasma Phys.*, Vol. 24, p. 389 (1975).
- [23] H. A. B. Bodin and A. A. Newton, *Nuclear, Fusion*, Vol. 20, p. 1225 (1980).
- [24] P. A. Sweet, in "*Electromagnetic Phenomena in Cosmical Physics*", edited by B. Lehnert (Cambridge U. P., New York, 1958).
- [25] Y. Ono et al., *Physical Review Letters*, Vol. 76, No. 18, p. 3328 (1996).
- [26] Y. Kusama and JT-60 Team, *Physics of Plasmas*, Vol. 6, p. 1935 (1999).
- [27] 植田喜延, 東京大学修士論文 (1998).
- [28] L. C. Steinhauer, *Physics of Plasmas*, Vol. 5, p. 2609 (1998).
- [29] 関口忠, "プラズマ工学", (オーム社, 東京, 1979).
- [30] R. L. Miller, Y. R. Lin-Liu, A. D. Turnbull, V. S. Chan, L. D. Pearlstein, O. Sauter, L. Villard, *Physics of Plasmas* 4, 1092 (1997).
- [31] P. M. Zeeuw, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, Vol. 33, p. 1 (1990).
- [32] J. M. Greene, M. S. Chance, *Nuclear Fusion*, Vol. 21, No. 4, p. 453 (1981).
- [33] 井通暁, 東京大学学位請求論文 (2000).
- [34] 福本直之, 永田正義, 宇山忠男, 小川俊英, 小川宏明, 長谷川浩一, 柴田孝俊, 木村晴行, 小野靖, 電気学会論文誌 A 部門誌, Vol. 119-A, p. 1300 (1999).
- [35] 鈴木喜雄, 林隆也, 三好隆博, 岸本泰明, NEXTグループ, プラズマ・核融合学会誌, Vol. 76, No. 3, p. 288 (2000).
- [36] B. E. Chapman, T. M. Biewer, P. K. Chattopadhyay, C.-S. Chiang, D. J. Craig, N. A. Crocker, D. J. Den Hartog, G. Fiksel, P. W. Fontana, S. C. Prager, and J. S. Sarff, *Physics of Plasmas*, Vol. 7, No. 9, p. 3491 (2000).
- [37] 井通暁, 小野靖, プラズマ・核融合学会誌, Vol. 75, No. 3, p. 253 (1999).

- [38] J. W. Connor, R. J. Hastie and J. B. Taylor, *Proc. Roy. Soc. London*, Ser. A p. 365 (1979).
- [39] 宮本健郎, “プラズマ物理入門”, (岩波書店, 東京, 1991).
- [40] J. P. Freidberg, “Ideal Magnetohydrodynamics”, (Plenum Press, New York and London, 1987).
- [41] H. P. Furth, J. Killeen, M. N. Rosenbluth, B. Coppi, *Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research 1964*, IAEA Vienna, Vo. I, p. 103 (1964).
- [42] J. M. Greene, J. L. Johnson, *Plasma Physics*, Vol. 10, p. 729 (1968).
- [43] A. Bondeson et al., *Phys. Fluids*, Vol. 24, p. 1682 (1981).
- [44] J. M. Finn et al., *Phys. Fluids*, Vol. 24, p. 1336 (1981).
- [45] 坂井真一郎, 東京大学修士論文 (1997).

発表文献

学術論文 (主著)

1. 植田, 小野, 電気学会論文誌 A 部門誌, Vol. 117-A, No. 8, p. 899 (1997).
2. Y. Ueda and Y. Ono, Journal of Plasma and Fusion Research, Vol. 2, p. 202 (1999).
3. 植田, 小野, 電気学会論文誌 A 部門誌, Vol. 119-A, No. 11, p. 1319 (1999).
4. Y. Ueda and Y. Ono, submitted to Earth, Planets and Space.
5. Y. Ueda, Y. Ono, M. Tsuruda, Y. Murata, G. Yamada, H. Hayashiya, T. Itagaki and M. Katsurai, to be published in Fusion Energy 2000.
6. Y. Ueda and Y. Ono, submitted to Nuclear Fusion.
7. 植田, 小野, 井, 宮寄, 桂井, プラズマ・核融合学会誌投稿準備中.

学術論文 (共著)

1. Y. Ono, M. Katsurai, M. Inomoto, Y. Ueda, H. Yasuda and T. Itagaki, Fusion Energy 1996, Vol. 2, p. 263 (1997).
2. Y. Ono, M. Inomoto, T. Okazaki and Y. Ueda, Physics of Plasmas, Vol. 4, No. 5-II, p. 1953 (1997).
3. K. Tokimatsu, N. Hayashi, Y. Ueda, Y. Ono and M. Katsurai, Fusion Engineering and Design, Vol. 34-35, p. 635 (1997).
4. M. Inomoto, Y. Ueda, Y. Ono, T. Murakami, M. Tsuruda, M. Yamada and M. Katsurai, Fusion Energy 1998, Vol. 3, p. 927 (1999).
5. Y. Ono et al., to be published in Fusion Energy 1998.
6. Y. Ono, M. Inomoto, Y. Ueda, T. Matsuyama and T. Okazaki, Nuclear Fusion, Vol. 39, No. 11Y, p. 2001 (1999).
7. Y. Ono et al., to be published in Fusion Energy 2000.
8. Y. Ono et al., submitted to Nuclear Fusion.

国際会議

1. Y. Ueda, M. Inomoto, Y. Ono, T. Matsuyama and M. Katsurai, Bulletin of the American Physics Society, Pittsburgh, U.S.A., Vol. 42, No. 10, p. 191 (1997).
2. Y. Ueda, T. Kataoka, Y. Ono and M. Katsurai, Bulletin of the American Physics Society, New Orleans, U.S.A., Vol. 43, No. 8, p. 1767 (1998).
3. Y. Ueda and Y. Ono, Proceedings of 9th International Toki Conference on Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion, Toki, Japan, p. 43 (1998).
4. Y. Ueda and Y. Ono, Proceedings of US-Japan Workshop Satellite Meeting of ITC-9, Toki, Japan, p. 13 (1998).
5. Y. Ueda, T. Kataoka, Y. Ono, M. Katsurai, Bulletin of the American Physics Society, Seattle, U.S.A., Vol. 44, No. 7, p. 271 (1999).
6. Y. Ueda, Y. Ono, Y. Oshima, M. Tsuruda and M. Katsurai, The 6th International ST Workshop, The US-Japan ST Workshop and The US-Japan Workshop on Physics of Innovative High-Beta Fusion plasma Confinement, Seattle, U.S.A., p. 59 (1999).
7. Y. Ueda and Y. Ono, Proc. of University of Tokyo Symposium 2000 on Magnetic Reconnection in Space and Laboratory Plasmas, Tokyo, Japan, p. 101 (2000).
8. Y. Ueda, Y. Oshima, M. Tsuruda, T. Nakahara, H. Hayashiya and T. Itagaki, A. Morita and M. Katsurai, Abstract book of the 18th IAEA Fusion Energy Conference, Sorrento, Italy, p. 38 (2000).
9. Y. Ueda, Y. Ono, M. Inomoto, Y. Oshima and M. Katsurai, Bulletin of the the 42nd Annual Meeting of the Division of Plasma Physics and the 10th International Congress on Plasma Physics, Quévec, Canada, p. 344 (2000).

国内会議

1. 植田, 松山, 井, 小野, 桂井, プラズマ・核融合学会第 13 回秋期講演会予稿集, 新潟, p. 222 (1996).
2. 植田, 上村, 松山, 井, 小野, 桂井, プラズマ・核融合学会第 14 回講演会予稿集, 東京, p. 86 (1997).
3. 植田, 上村, 松山, 井, 小野, 桂井, プラズマ・核融合学会第 14 回年会予稿集, 大阪, p. 74 (1997).
4. 植田, 井, 小野, 桂井, 第 2 回核融合エネルギー連合講演会予稿集, 東京, p. 65 (1998).

第 章 結 論

5. 植田, 小野, 桂井, 日本物理学会講演概要集, 第 53 卷, 第 2 号, 第 4 分冊, 沖縄, p. 951 (1998).
6. 植田, 片岡, 小野, 桂井, プラズマ・核融合学会第 15 回年会予稿集, 筑波, p. 148 (1998).
7. 植田, 片岡, 小野, 桂井, 日本物理学会講演概要集, 第 54 卷, 第 1 号, 第 4 分冊, 広島, p. 792 (1999).
8. 植田, 小野, 電気学会プラズマ研究会資料, EP-99-44, 土岐, p. 1 (1999).
9. 植田, 井, 大島, 小野, 桂井, 研究会「高ベータトロイダルプラズマの平衡と安定性」, 土岐 (1999).
10. 植田, 林屋, 第 3 回若手科学者によるプラズマ研究会, 那珂, p. 14 (2000).
11. 植田, 井, 小野, 桂井, 第 3 回核融合エネルギー連合講演会予稿集, 春日井, p. 276 (2000).
12. 植田, 鶴田, 名嘉原, 宮寄, 山田, 小野, 桂井, 電気学会東京支部連合研究会プラズマ研究会資料, EP-00-70, 東京, p. 13 (2000).
13. 植田, 小野, 井, 松山, 桂井, プラズマ・核融合学会第 17 回年会予稿集, 札幌, p. 72 (2000).
14. 植田, 宮寄, 山田, 名嘉原, 井, 小野, 桂井, プラズマ・核融合学会第 17 回年会予稿集, 札幌, p. 109 (2000).

付録 A 電磁流体力学的平衡配位の計算

プラズマの電磁流体力学 (MHD) 安定性を議論する際に出発点となるのがプラズマの平衡配位である。プラズマ平衡配位は一部の解を除き解析的に求めることは難しく、数値的な手法が必要となる。

本論文では軸対称 MHD 平衡を記述する Grad-Shafranov 方程式を収束計算によって数値的に解く手法を用いたので本章ではこれについて説明を行う。

A.1 Grad-Shafranov 方程式

プラズマの力学的平衡は、MHD 方程式において時間微分の項を 0 とし、さらに幾つかの近似的仮定をおくことで、式 (A.1) の様に表すことができる。

$$\mathbf{j} \times \mathbf{B} = \nabla p \quad (\text{A.1})$$

この式と、静磁界における Maxwell 方程式

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} \quad (\text{A.2})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (\text{A.3})$$

とを組み合わせることで、プラズマの巨視的な平衡が表現される。プラズマの軸対称平衡配位を、これらの式から計算する手法について簡単に述べる。その際、次の条件を満たす関数 Ψ および I_{pol} を導入する。

$$B_r = -\frac{1}{2\pi r} \frac{\partial \Psi}{\partial z}, \quad B_z = \frac{1}{2\pi r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} \quad (\text{A.4})$$

$$j_r = -\frac{1}{2\pi r} \frac{\partial I_{pol}}{\partial z}, \quad j_z = \frac{1}{2\pi r} \frac{\partial I_{pol}}{\partial r} \quad (\text{A.5})$$

Ψ はポロイダル磁束を表す表面関数を表している。

まず、式 (A.1), (A.2) を、式 (A.4), (A.5) を用いて軸対称 ($\partial/\partial\phi = 0$) の条件の下円筒座標を用いて書き下すと、

$$j_\phi \frac{\partial \Psi}{\partial r} - B_\phi \frac{\partial I_{pol}}{\partial r} = 2\pi r \frac{\partial p}{\partial r} \quad (\text{A.6})$$

$$\frac{\partial I_{pol}}{\partial r} \frac{\partial \Psi}{\partial z} - \frac{\partial I_{pol}}{\partial z} \frac{\partial \Psi}{\partial r} = 0 \quad (\text{A.7})$$

$$j_\phi \frac{\partial \Psi}{\partial z} - B_\phi \frac{\partial I_{pol}}{\partial z} = 2\pi r \frac{\partial p}{\partial z} \quad (\text{A.8})$$

$$2\pi \frac{\partial}{\partial z}(rB_\phi) = \mu_0 \frac{\partial I_{pol}}{\partial z} \quad (\text{A.9})$$

$$-\frac{1}{2\pi r} \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right) = \mu_0 j_\phi \quad (\text{A.10})$$

$$2\pi \frac{\partial}{\partial r}(rB_\phi) = \mu_0 \frac{\partial I_{pol}}{\partial r} \quad (\text{A.11})$$

となる. 式 (A.9), (A.11) から, 定数分の自由度を除き

$$2\pi r B_\phi = \mu_0 I_{pol} \quad (\text{A.12})$$

となる. また, 式 (A.7) から, I_{pol} と Ψ のヤコビアンがゼロであり

$$I_{pol} = I_{pol}(\Psi) \quad (\text{A.13})$$

で表されることが分かる.

式 (A.6), (A.8) から

$$\begin{aligned} dp &= \frac{\partial p}{\partial r} dr + \frac{\partial p}{\partial z} dz \\ &= \frac{1}{2\pi r} j_\phi \left(\frac{\partial \Psi}{\partial r} dr + \frac{\partial \Psi}{\partial z} dz \right) - \frac{1}{2\pi r} B_\phi \left(\frac{\partial I_{pol}}{\partial r} dr + \frac{\partial I_{pol}}{\partial z} dz \right) \\ &= \frac{1}{2\pi r} (j_\phi d\Psi - B_\phi dI_{pol}) \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

よって圧力 p もまた表面関数

$$p = P(\Psi) \quad (\text{A.15})$$

の形をとることがわかる. 式 (A.14) から

$$j_\phi = 2\pi r \frac{dP}{d\Psi} + B_\phi \frac{dI_{pol}}{d\Psi} \quad (\text{A.16})$$

となる. 一般に, 式 (A.10), (A.16) を合わせた

$$\mu_0 j_\phi = -\frac{1}{2\pi r} \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right) \quad (\text{A.17})$$

$$= 2\pi \mu_0 r \frac{dP}{d\Psi} + \frac{\mu_0^2 I_{pol}}{2\pi r} \frac{dI_{pol}}{d\Psi} \quad (\text{A.18})$$

の 2 つの方程式を Grad-Shafranov 方程式と呼ぶ.

以上から分かる通り, 二つの表面関数 $I_{pol}(\Psi)$, $P(\Psi)$ が Ψ のどのような関数であるかという点に関しては Grad-Shafranov 方程式は何も言及していない. 言い替えるなら, この表面関数の選び方が方程式の示すプラズマ平衡配位を決定づけることになる.

Grad-Shafranov 方程式の解を適当な境界条件において解析的に解くことは難しいため, 一部の例外的な配位を除き数値計算によって解を求めることが一般的である.

A.2 無力磁界配位

数値計算手法の解説の前に一旦離れるが, 本論文で扱うプラズマ配位を論ずる上で重要な概念である無力磁界配位について説明する.

無力磁界配位は次のような閉じ込め配位である.

- プラズマの圧力勾配がない.
- 磁気ヘリシティ ($K = \int \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} dV$) が一定という拘束条件の下でエネルギー的に最小な状態である (Taylor 状態 [6]).

第一の条件から, プラズマの力学的平衡を表す式 (A.1) における右辺が 0 となり

$$\mathbf{j} \times \mathbf{B} = 0 \quad (\text{A.19})$$

すなわち

$$\nabla \times \mathbf{B} = \lambda(\mathbf{r})\mathbf{B} \quad (\text{A.20})$$

という条件が導かれる. さらに第二の条件より式 (A.20) を満たす系で実現されるエネルギー最小状態は $\lambda(\mathbf{r}) = \lambda(\text{const.})$ である.

Grad-Shafranov 方程式において無力磁界配位がどのように記述されるか考える. まず圧力関数 $P(\Psi)$ に関しては第一の条件から式に現れなくなることは明らかである. 次にポロイダル電流関数 I_{pol} について考える. 簡単のため N 次多項式と仮定すると, I_{pol} は

$$I_{pol}(\Psi) = \sum_{i=0}^N a_i \Psi^i \quad (\text{A.21})$$

と表せる.

式 (A.4), (A.5), (A.12), (A.18) から \mathbf{B} , \mathbf{j} はそれぞれ

$$(B_r, B_\phi, B_z) = \left(-\frac{1}{2\pi r} \frac{\partial \Psi}{\partial z}, \frac{\mu_0}{2\pi r} \sum_{i=0}^N a_i \Psi^i, \frac{1}{2\pi r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right) \quad (\text{A.22})$$

$$\begin{aligned} (j_r, j_\phi, j_z) = & \left(-\frac{1}{2\pi r} \frac{\partial \Psi}{\partial z} \sum_{i=1}^N a_i i \Psi^{i-1}, \frac{\mu_0}{2\pi r} \sum_{i=0}^N (a_i \Psi^i) \sum_{i=1}^N (a_i i \Psi^{i-1}), \right. \\ & \left. \frac{1}{2\pi r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} \sum_{i=1}^N a_i i \Psi^{i-1} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.23})$$

と書き下すことができ, これらが式 (A.20) における λ 一定であるためには $N = 1$ が必要十分条件となる. すなわち無力磁界配位におけるポロイダル電流関数 I_{pol} は

$$I_{pol}(\Psi) = a_0 + a_1 \Psi \quad (\text{A.24})$$

であることが分かる.

A.3 Grad-Shafranov 方程式の数値解法

以下, 第 4 章および付録 D において用いた円筒座標系における Grad-Shafranov 方程式の数値解法を述べる.

まず, 適当な初期トロイダル磁束分布 $\Psi(r, z) = \Psi_{[i][j]}^0$ を準備する. 図 A.1 に計算座標系を示す. ただし Grad-Shafranov 方程式は軸対称を仮定しているために実質的には r, z 二次元座標である.

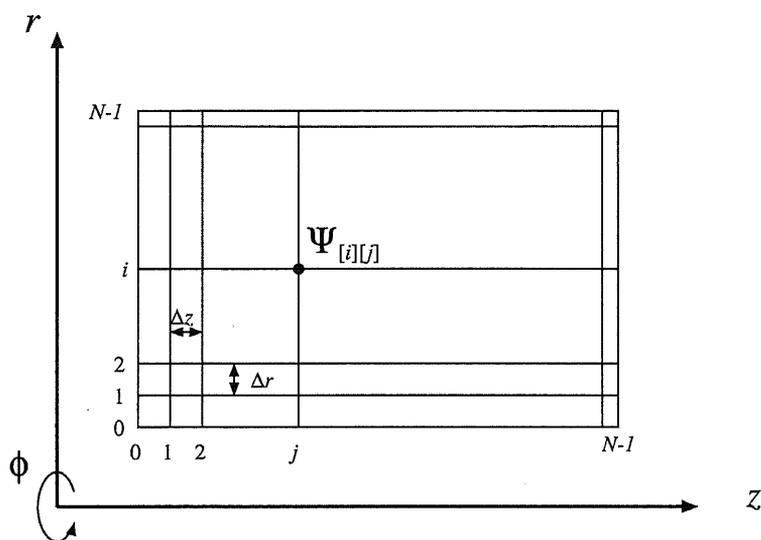


図 A.1: Schematic view of r - z mesh for Grad-Shafranov equation numerical solver.

次に与えられた P, I_{pol} 関数を用いて式 (A.18) からトロイダル電流分布 $j_{\phi[i][j]}$ を計算する.

式 (A.17) から計算メッシュ間隔 $\Delta r, \Delta z$ を用いて $j_{\phi[i][j]}$ は

$$\mu_0 j_{\phi[i][j]} = -\frac{1}{2\pi r} \left(\frac{\Psi_{[i+1][j]} - 2\Psi_{[i][j]} + \Psi_{[i-1][j]}}{\Delta r^2} - \frac{1}{r} \frac{\Psi_{[i+1][j]} - \Psi_{[i-1][j]}}{2\Delta r} + \frac{\Psi_{[i][j+1]} - 2\Psi_{[i][j]} + \Psi_{[i][j-1]}}{\Delta z^2} \right) \quad (\text{A.25})$$

と表すことができる. この式において $\Psi_{[i][j]}$ 以外の変数を既得の値とすることで更新された $\Psi_{[i][j]}$ を求めることができる.

このようにして第 n 回目の $\Psi_{[i][j]}^n$ から式 (A.26) および解を収束させるための SOR 法 (式 (A.27)) を用いて $n+1$ 回目の $\Psi_{[i][j]}^{n+1}$ を繰り返し求めて行く.

$$\Psi_{tmp[i][j]}^{n+1} = \frac{\frac{\Psi_{[i+1][j]}^n + \Psi_{[i-1][j]}^n}{\Delta r^2} + \frac{\Psi_{[i][j+1]}^n + \Psi_{[i][j-1]}^n}{\Delta z^2} - \frac{\Psi_{[i+1][j]}^n - \Psi_{[i-1][j]}^n}{2r\Delta r} + 2\pi r \mu_0 j_{\phi[i][j]}}{\frac{2}{\Delta r^2} + \frac{2}{\Delta z^2}} \quad (\text{A.26})$$

$$\Psi_{[i][j]}^{n+1} = \omega \Psi_{tmp[i][j]}^{n+1} + (1 - \omega) \Psi_{[i][j]}^n \quad (\text{A.27})$$

最終的にポロイダル磁束の変動が式 (A.28) を満たす程十分小さくなるまで繰り返し計算する.

$$\max |\Psi_{[i][j]}^n - \Psi_{[i][j]}^{n+1}| < \epsilon \quad (\text{A.28})$$

本論文においては $\epsilon = 10^{-10}$ と設定している.

付録B 理想電磁流体力学安定性におけるバルーニングモード解析

本章では理想電磁流体力学安定性高ベータ限界を与えると考えられるバルーニングモードに関してエネルギー原理を用いた定式化を行う。バルーニングモードに関する解析には [38, 39, 40] 等多くの論文, 参考書に記述されているが, 導出の過程等完全な形で示されているものは見つからなかった。そこで中でももっとも詳しく道筋を示してあった文献 [40] の手順を参考に, できるだけ詳細にバルーニング方程式を導出する。

B.1 線形化 MHD 方程式の導出

初期 MHD 平衡では以下の関係が成り立っている。

$$\mathbf{j} \times \mathbf{B} = \nabla p \quad (\text{B.1})$$

$$\mu_0 \mathbf{j} = \nabla \times \mathbf{B} \quad (\text{B.2})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (\text{B.3})$$

$$\mathbf{v} = 0 \quad (\text{B.4})$$

そこに摂動 $\tilde{\xi}$ を加える。

$$\tilde{\mathbf{v}}_1 = \frac{\partial \tilde{\xi}}{\partial t} \quad (\text{B.5})$$

$\tilde{\xi}$ は平衡位置からのプラズマのずれを表す。摂動に関する初期条件は次のようになる。

$$\tilde{\xi}(\mathbf{r}, 0) = \tilde{\mathbf{B}}_1(\mathbf{r}, 0) = \tilde{\rho}_1(\mathbf{r}, 0) = \tilde{p}_1(\mathbf{r}, 0) = 0 \quad (\text{B.6})$$

$$\frac{\partial \tilde{\xi}(\mathbf{r}, 0)}{\partial t} \equiv \tilde{\mathbf{v}}_1(\mathbf{r}, 0) \neq 0$$

質量密度 ρ , 圧力 p , 磁場 \mathbf{B} の摂動成分は次のように書き表される。

$$\tilde{\rho}_1 = -\nabla \cdot (\rho \tilde{\xi}) \quad (\text{B.7})$$

$$\tilde{p}_1 = -\tilde{\xi} \cdot \nabla p - \gamma p \nabla \tilde{\xi} \quad (\text{B.8})$$

$$\tilde{\mathbf{B}}_1 = \nabla \times (\tilde{\xi} \times \mathbf{B}) \quad (\text{B.9})$$

摂動に関する運動方程式を

$$\rho \frac{\partial^2 \tilde{\xi}}{\partial t^2} = \mathbf{F}(\tilde{\xi}) \quad (\text{B.10})$$

であらわすと、力演算子 F は式 (B.1) より

$$\mathbf{F}(\xi) = \mathbf{j} \times \tilde{\mathbf{B}}_1 + \tilde{\mathbf{j}}_1 \times \mathbf{B} - \nabla \tilde{p}_1 \quad (\text{B.11})$$

で定義される。さらに $\tilde{\mathbf{Q}} \equiv \tilde{\mathbf{B}}_1 = \nabla \times (\xi \times \mathbf{B})$, $\tilde{\mathbf{j}}_1 = \nabla \times \tilde{\mathbf{B}} = \nabla \times \tilde{\mathbf{Q}}$ を用いて

$$\mathbf{F}(\xi) = \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \tilde{\mathbf{Q}} + \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \tilde{\mathbf{Q}}) \times \mathbf{B} + \nabla (\xi \cdot \nabla p + \gamma p \nabla \cdot \xi) \quad (\text{B.12})$$

と表される。

式 (B.10) の初期値問題を解けば MHD 特性が分かる。簡単のため摂動を固有振動モードとし、摂動を

$$\tilde{\xi}_1(\mathbf{r}, t) = \xi_1 \exp(-i\omega t) \quad (\text{B.13})$$

で表現する。その結果式 (B.10) は

$$-\omega^2 \rho \xi = \mathbf{F}(\xi) \quad (\text{B.14})$$

となり、式 (B.12) は

$$\mathbf{F}(\xi) = \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \mathbf{Q}) \times \mathbf{B} + \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{Q} + \nabla (\xi \cdot \nabla p + \gamma p \nabla \cdot \xi) \quad (\text{B.15})$$

と置き換えられ、各量は

$$\mathbf{Q} \equiv \mathbf{B}_1 = \nabla \times (\xi \times \mathbf{B}) \quad (\text{B.16})$$

$$\rho_1 = -\nabla \cdot (\rho \xi) \quad (\text{B.17})$$

$$p_1 = -\xi \cdot \nabla p - \gamma p \nabla \cdot \xi \quad (\text{B.18})$$

となる。以上が一般的な 3 次元平衡の線形化 MHD 安定問題の定式化である。これを適切な ξ の境界条件を満たしたうえで解けば良い。基本的には固有値 ω^2 の固有値問題となる。すなわち、 ω^2 が正であれば安定、負ならば不安定となる。

B.2 エネルギー原理

MHD 安定性は式 (B.14) を解く事で厳密に解析できるが、一般には非常に難しい。そこで変分法を用いて解析を容易にすることを考える。式 (B.15) より、 \mathbf{F} が自己共役な関数であることがわかる。そのため式 (B.14) は簡単に変分形式にすることができる。すなわち ξ^* を用いて式 (B.15) を積分すると

$$\begin{aligned} \int \xi^* \cdot (-\omega^2 \rho \xi) dv &= \int \xi^* \cdot \mathbf{F}(\xi) d\mathbf{r} \\ -\omega^2 \int \rho |\xi|^2 &= \int \xi^* \cdot \mathbf{F}(\xi) d\mathbf{r} \end{aligned} \quad (\text{B.19})$$

ここで $\xi(\mathbf{r}), \omega^2$ は複素数である. さらに

$$\begin{aligned}\delta W(\xi^*, \xi) &= -\frac{1}{2} \int \xi^* \cdot \mathbf{F}(\xi) d\mathbf{r} \\ &= -\frac{1}{2} \int \xi^* \cdot \left[\frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \mathbf{Q}) \times \mathbf{B} + \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{Q} \right. \\ &\quad \left. + \nabla(\gamma p \nabla \cdot \xi + \xi \cdot \nabla p) \right] d\mathbf{r}\end{aligned}\quad (\text{B.20})$$

$$K(\xi^*, \xi) = \frac{1}{2} \int \rho |\xi|^2 d\mathbf{r} \quad (\text{B.21})$$

を用いて

$$\omega^2 = \frac{\delta W(\xi^*, \xi)}{K(\xi^*, \xi)} \quad (\text{B.22})$$

と表される. 固有値 ω^2 の正負が安定性を決定することから, 安定性の判定には δW の正負を見れば良いことがわかる.

B.3 理想 MHD のエネルギー原理の一般式の導出

プラズマが直接導体壁に囲まれている場合と, 壁との間に真空領域が存在する場合の両方を満たすエネルギー原理の表式を導出する. 前者の境界条件は

$$\mathbf{n} \cdot \hat{\mathbf{B}}_1|_{r_w} = 0 \quad (\text{B.23})$$

である. ここで添字 w は導体壁を表している. 後者の場合には

$$\mathbf{n} \cdot \hat{\mathbf{B}}_1|_{r_w} = 0 \quad (\text{B.24})$$

$$\mathbf{n} \cdot \hat{\mathbf{B}}_1|_{r_p} = \mathbf{n} \cdot \nabla \times (\xi_{\perp} \times \hat{\mathbf{B}})|_{r_p} \quad (\text{B.25})$$

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{B}_1|_{r_p} = \mathbf{n} \cdot \nabla \times (\xi_{\perp} \times \mathbf{B})|_{r_p} \quad (\text{B.26})$$

$$\left[p_1 + \frac{\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}_1}{\mu_0} + \xi \cdot \nabla \left(p + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) \right]_{r_p} = \left[\frac{\hat{\mathbf{B}} \cdot \hat{\mathbf{B}}_1}{\mu_0} + \xi \cdot \nabla \frac{\hat{B}^2}{2\mu_0} \right]_{r_p} \quad (\text{B.27})$$

である. キャレット (^) は真空領域の物理量であることを表す. 添字 p はプラズマと真空の境界である.

以上の境界条件を考慮して, 式 (B.20) を変形する. 最終的な表式を, いくつかの段階を経て導出する. まず第一段階では $\xi^* \cdot \nabla(\gamma p \nabla \cdot \xi)$ の項と $\xi^* \cdot (\nabla \times \mathbf{Q}) \times \mathbf{B}$ の項を展開する.

$$\begin{aligned}-\frac{1}{2} \int \xi^* \cdot \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \mathbf{Q}) \times \mathbf{B} d\mathbf{r} &= -\frac{1}{2} \int \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \mathbf{Q}) \cdot (\mathbf{B} \times \xi^*) d\mathbf{r} \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{1}{\mu_0} [\nabla \cdot (\mathbf{Q} \times (\xi^* \times \mathbf{B})) + \mathbf{Q} \cdot (\nabla \times (\xi^* \times \mathbf{B}))] d\mathbf{r} \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{1}{\mu_0} [\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) + \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B})] d\mathbf{r}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} \int_S \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{Q} \times (\boldsymbol{\xi}^* \times \mathbf{B})) \cdot \mathbf{n} dS + \frac{1}{2} \int \frac{1}{\mu_0} \mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q}^* dr \\
 &\quad \left(\int_V \nabla \cdot \mathbf{A} dr = \int_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS \right) \\
 &= \frac{1}{2} \int_S \frac{1}{\mu_0} [(\mathbf{Q} \cdot \mathbf{B}) \boldsymbol{\xi}^* - (\mathbf{Q} \cdot \boldsymbol{\xi}^*) \mathbf{B}] \cdot \mathbf{n} dS + \frac{1}{2} \int \frac{|\mathbf{Q}|^2}{\mu_0} dr \\
 &\quad (\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) \mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \mathbf{C}) \\
 &= \frac{1}{2} \int_S \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{B}) (\boldsymbol{\xi}^* \cdot \mathbf{n}) dS + \frac{1}{2} \int \frac{|\mathbf{Q}|^2}{\mu_0} dr \quad (\text{B.28}) \\
 &\quad \left(\int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS = \int \nabla \cdot \mathbf{B} dv = 0 \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 -\frac{1}{2} \int \boldsymbol{\xi}^* \cdot \nabla (\gamma p \nabla \cdot \boldsymbol{\xi}) dr &= -\frac{1}{2} \int [\nabla \cdot (\gamma p \nabla \cdot \boldsymbol{\xi} \boldsymbol{\xi}^*) - \gamma p (\nabla \cdot \boldsymbol{\xi}) (\nabla \cdot \boldsymbol{\xi}^*)] dr \\
 &\quad (\nabla \cdot (f \mathbf{A}) = f \nabla \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \nabla f) \\
 &= -\frac{1}{2} \int_S \gamma p \nabla \cdot \boldsymbol{\xi} (\boldsymbol{\xi}^* \cdot \mathbf{n}) dS + \frac{1}{2} \int \gamma p |\nabla \cdot \boldsymbol{\xi}|^2 dr \quad (\text{B.29})
 \end{aligned}$$

式 (B.20) に代入すると,

$$\begin{aligned}
 \delta W &= \frac{1}{2} \int dr \left\{ \frac{|\mathbf{Q}|^2}{\mu_0} + \gamma p |\nabla \cdot \boldsymbol{\xi}|^2 - \boldsymbol{\xi}^* \cdot [\mathbf{j} \times \mathbf{Q} + \nabla (\boldsymbol{\xi} \cdot \nabla p)] \right\} \\
 &\quad - \frac{1}{2} \int_S dS (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\xi}^*) \left(\gamma p \nabla \cdot \boldsymbol{\xi} - \frac{\mathbf{B} \cdot \mathbf{Q}}{\mu_0} \right) \quad (\text{B.30})
 \end{aligned}$$

と変形される。次に $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}_\perp + \boldsymbol{\xi}_\parallel \mathbf{b}$ ($\mathbf{B} = B \mathbf{b}$) を導入すると $\boldsymbol{\xi}_\parallel \mathbf{b} \cdot [\mathbf{j} \times \mathbf{Q} + \nabla (\boldsymbol{\xi} \cdot \nabla p)] = 0$ となる。これは以下の様に導くことができる。

$$\begin{aligned}
 \mathbf{B} \cdot (\mathbf{j} \times \mathbf{Q}) &= -\mathbf{Q} \cdot (\mathbf{j} \times \mathbf{B}) \\
 &= -[\nabla \times (\boldsymbol{\xi} \times \mathbf{B})] \cdot \nabla p \\
 &= \nabla \cdot [\nabla p \times (\boldsymbol{\xi} \times \mathbf{B})] - (\boldsymbol{\xi} \times \mathbf{B}) \cdot (\nabla \times \nabla p) \\
 &\quad (\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B})) \\
 &= \nabla \cdot ((\nabla p \cdot \mathbf{B}) \boldsymbol{\xi} - (\nabla p \cdot \boldsymbol{\xi}) \mathbf{B}) \\
 &\quad (\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) \mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \mathbf{C}, \quad \nabla \times \nabla f = 0) \\
 &= -(\nabla p \cdot \boldsymbol{\xi}) (\nabla \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{B} \cdot \nabla (\nabla p \cdot \boldsymbol{\xi}) \\
 &\quad (\nabla \cdot (f \mathbf{A}) = f \nabla \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \nabla f) \\
 &= -\mathbf{B} \cdot \nabla (\nabla p \cdot \boldsymbol{\xi}) \quad (\text{B.31})
 \end{aligned}$$

$$(\nabla \cdot \mathbf{B} = 0) \quad (\text{B.32})$$

また, $\nabla \cdot (f \mathbf{A}) = f \nabla \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \nabla f$ を用いて

$$\begin{aligned}
 \boldsymbol{\xi}_\perp^* \cdot [\mathbf{j} \times \mathbf{Q} + \nabla (\boldsymbol{\xi} \cdot \nabla p)] &= \nabla \cdot [(\boldsymbol{\xi} \cdot \nabla p) \boldsymbol{\xi}_\perp^*] - (\boldsymbol{\xi} \cdot \nabla p) \nabla \cdot \boldsymbol{\xi}_\perp^* \\
 &= \nabla \cdot [(\boldsymbol{\xi}_\perp \cdot \nabla p) \boldsymbol{\xi}_\perp^*] - (\boldsymbol{\xi}_\perp \cdot \nabla p) \nabla \cdot \boldsymbol{\xi}_\perp^* \quad (\text{B.33})
 \end{aligned}$$

となりガウスの定理を用いて発散項を表面積分に変換するとプラズマ中の体積積分

$$\delta W_F = \frac{1}{2} \int_P dr \left[\frac{|\mathbf{Q}|^2}{\mu_0} - \xi_{\perp}^* \cdot (\mathbf{j} \times \mathbf{Q}) + \gamma p |\nabla \cdot \xi|^2 + (\xi_{\perp} \cdot \nabla p) \nabla \cdot \xi_{\perp}^* \right] \quad (\text{B.34})$$

および境界項 (B.T.)

$$\text{B.T.} = \frac{1}{2} \int_S dS (\mathbf{n} \cdot \xi_{\perp}^*) \left[\frac{\mathbf{B} \cdot \mathbf{Q}}{\mu_0} - \gamma p \nabla \cdot \xi - \xi_{\perp} \cdot \nabla p \right] \quad (\text{B.35})$$

を用いて式 (B.30) は

$$\delta W = \delta W_F + \text{B.T.} \quad (\text{B.36})$$

と変形される. 積分領域のラベル P, S はそれぞれプラズマ領域, プラズマ表面を表している.

式 (B.27) を式 (B.35) に代入することにより圧力平衡の境界条件が境界積分の条件となり

$$\text{B.T.} = \delta W_S + \frac{1}{2} \int_S dS (\mathbf{n} \cdot \xi_{\perp}^*) \frac{\hat{\mathbf{B}} \cdot \hat{\mathbf{B}}_1}{\mu_0} \quad (\text{B.37})$$

$$\delta W_S = \frac{1}{2} \int_S dS |\mathbf{n} \cdot \xi_{\perp}|^2 \mathbf{n} \cdot \left[\nabla \left(p + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) \right] \quad (\text{B.38})$$

と表される. ここで $[[\mathbf{T}]]$ は真空からプラズマへのジャンプを表し $\hat{\mathbf{T}} - \mathbf{T}$ で定義される. 式 (B.38) は以下のように示される.

$$\begin{aligned} & (\mathbf{n} \cdot \xi_{\perp}) \mathbf{n} \cdot \left[\nabla \left(p + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) \right] \\ &= \left(\mathbf{n} \times \left[\nabla \left(p + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) \right] \right) \cdot (\xi_{\perp} \times \mathbf{n}) + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}) \left(\left[\nabla \left(p + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) \right] \cdot \xi_{\perp} \right) \\ & ((\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{D}) - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{D})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C})) \\ &= p_1 + \frac{\mathbf{B} \cdot \mathbf{Q}}{\mu_0} - \frac{\hat{\mathbf{B}} \cdot \hat{\mathbf{Q}}}{\mu_0} \\ & \left(\text{eq. (B.27), } \left[\mathbf{n} \times \nabla \left(p + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) \right] = 0 \right) \\ &= -\xi_{\perp} \cdot \nabla p - \gamma p \nabla \cdot \xi + \frac{\mathbf{B} \cdot \mathbf{Q}}{\mu_0} - \frac{\hat{\mathbf{B}} \cdot \hat{\mathbf{Q}}}{\mu_0} \\ & (\text{eq. (B.18), } \xi \cdot \nabla p = \xi_{\perp} \cdot \nabla p) \end{aligned}$$

$$\text{B.T.} = \frac{1}{2} \int_S dS |\mathbf{n} \cdot \xi_{\perp}^*|^2 \mathbf{n} \cdot \left[\nabla \left(p + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) \right] + \frac{1}{2} \int_S dS (\mathbf{n} \cdot \xi_{\perp}^*) \frac{\hat{\mathbf{B}} \cdot \hat{\mathbf{Q}}}{\mu_0} \quad (\text{B.39})$$

表面項 δW_S はプラズマ-真空境界を流れる表面電流のある場合のみ値を持つ. 式 (B.37) の残りの項は真空領域における摂動を受けた磁気エネルギーで,

$$\delta W_V = \frac{1}{2} \int_V dr \frac{|\hat{\mathbf{Q}}|^2}{\mu_0} \quad (\text{B.40})$$

と表される. 以下これを示す. $\hat{Q} \equiv \hat{B}_1 = \nabla \times \hat{A}_1$ ($\nabla \times \nabla \times \hat{A}_1 = 0$) とする. 式 (B.40) は以下のように変形できる.

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} \int_V dr \frac{\hat{Q}^* \cdot \hat{Q}}{\mu_0} &= \frac{1}{2} \int_V dr \frac{\nabla \times \hat{A}_1^* \cdot \hat{Q}}{\mu_0} \\
 &= \frac{1}{2} \int_V dr \frac{\hat{A}_1^* \cdot (\nabla \times \hat{Q}) - \nabla \cdot (\hat{Q} \times \hat{A}_1^*)}{\mu_0} \\
 &\quad (\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B})) \\
 &= -\frac{1}{2} \int_V dr \frac{\nabla \cdot (\hat{Q} \times \hat{A}_1^*)}{\mu_0} \\
 &= -\frac{1}{2} \int_S dS \frac{(-\mathbf{n}) \cdot (\hat{Q} \times \hat{A}_1^*)}{\mu_0} + \frac{1}{2} \int_W \frac{\mathbf{n} \cdot (\hat{Q} \times \hat{A}_1^*)}{\mu_0} \\
 &= -\frac{1}{2} \int_S \frac{\mathbf{n} \cdot (\hat{A}_1^* \times \hat{Q})}{\mu_0} \tag{B.41}
 \end{aligned}$$

但し導体壁面の積分は式 (B.24) より消える. プラズマ表面では \hat{A}_1 は \mathbf{n}, ξ を使って

$$\mathbf{n} \cdot \nabla \times (\xi_{\perp} \times \hat{B}) = \mathbf{n} \cdot \hat{Q} = \mathbf{n} \cdot (\nabla \times \hat{A}_1) \tag{B.42}$$

より $\hat{A}_1 = \xi_{\perp} \times \hat{B} + \nabla \phi$ となる. ϕ はゲージ条件 $\hat{Q} \cdot (\mathbf{n} \times \nabla \phi) = 0$ を満たすように選ぶ. すると式 (B.41) は

$$\begin{aligned}
 -\frac{1}{2} \int_S \frac{\mathbf{n} \cdot (\hat{A}_1^* \times \hat{Q})}{\mu_0} &= -\frac{1}{2} \int_S dS \frac{\mathbf{n} \cdot [(\xi_{\perp}^* \times \hat{B} + \nabla \phi) \times \hat{Q}]}{\mu_0} \\
 &= -\frac{1}{2} \int_S dS \frac{\mathbf{n} \cdot [(\xi_{\perp} \times \hat{B}) \times \hat{Q}] + \mathbf{n} \cdot (\nabla \phi \times \hat{Q})}{\mu_0} \\
 &= -\frac{1}{2} \int_S dS \left\{ \frac{\mathbf{n} \cdot [-(\hat{B} \cdot \hat{Q}) \xi_{\perp}^* + (\hat{Q} \cdot \xi_{\perp}^*) \hat{B}]}{\mu_0} + \frac{\hat{Q} \cdot (\mathbf{n} \times \nabla \phi)}{\mu_0} \right\} \\
 &\quad (\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) \mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \mathbf{C}) \\
 &= -\frac{1}{2} \int_S dS \frac{-(\mathbf{n} \cdot \xi_{\perp}^*) (\hat{B} \cdot \hat{Q}) + (\mathbf{n} \cdot \hat{B}) (\hat{Q} \cdot \xi_{\perp}^*)}{\mu_0} \\
 &= \frac{1}{2} \int_S (\mathbf{n} \cdot \xi_{\perp}^*) \frac{\hat{B} \cdot \hat{Q}}{\mu_0} \tag{B.43} \\
 &\quad (\mathbf{n} \cdot \hat{B} = 0)
 \end{aligned}$$

となり B.T. = $\delta W_S + \delta W_V$ が成り立つ.

以上をまとめると一般性のあるエネルギー原理の式は

$$\delta W = \delta W_F + \delta W_S + \delta W_V \tag{B.44}$$

$$\delta W_F = \frac{1}{2} \int_P dr \left[\frac{|\mathbf{Q}|^2}{\mu_0} - \xi_{\perp}^* \cdot (\mathbf{j} \times \mathbf{Q}) + \gamma p |\nabla \cdot \xi|^2 + (\xi_{\perp} \cdot \nabla p) \nabla \cdot \xi_{\perp}^* \right] \tag{B.45}$$

$$\delta W_S = \frac{1}{2} \int_S dS |\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\xi}_\perp|^2 \mathbf{n} \cdot \left[\nabla \left(p + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) \right] \quad (\text{B.46})$$

$$\delta W_V = \frac{1}{2} \int_V dr \frac{|\hat{\mathbf{Q}}|^2}{\mu_0} \quad (\text{B.47})$$

で表され、存在しうる全ての摂動 $\boldsymbol{\xi}$ に対し

$$\delta W \geq 0 \quad (\text{B.48})$$

であることが安定の条件となる。真空の寄与は明示的になり、式 (B.49, B.50) の境界条件を満たしつつ $\nabla \times \hat{\mathbf{Q}} = \nabla \cdot \hat{\mathbf{Q}} = 0$ を解くことでプラズマの摂動と結合する。

$$\mathbf{n} \cdot \hat{\mathbf{Q}}|_{r_w} = 0 \quad (\text{B.49})$$

$$\mathbf{n} \cdot \hat{\mathbf{Q}}|_{r_p} = \mathbf{n} \cdot \nabla \times (\boldsymbol{\xi}_\perp \times \hat{\mathbf{B}}) \quad (\text{B.50})$$

真空領域のない、すなわちプラズマが導体壁と接している場合には $\delta W = \delta W_F$ となる。

B.4 プラズマ領域のエネルギー積分の直感的表式

式 (B.44) 以下の一般化されたエネルギー原理は正確であるがより MHD 不安定性の特徴を掴みやすい表式を導くことができる。ここでは式 (B.45) を変形する。まず最初の 2 つの項を変形すると、

$$|\mathbf{Q}|^2 = |\mathbf{Q}_\perp|^2 + |\mathbf{Q}_\parallel|^2 \quad (\text{B.51})$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\xi}_\perp^* \cdot (\mathbf{j} \times \mathbf{Q}) &= \boldsymbol{\xi}_\perp^* \cdot [(\mathbf{j}_\perp + j_\parallel \mathbf{b}) \times (\mathbf{Q}_\perp + Q_\parallel \mathbf{b})] \\ &= \boldsymbol{\xi}_\perp^* \cdot (\mathbf{j}_\perp \times \mathbf{Q}_\perp + Q_\parallel \mathbf{j}_\perp \times \mathbf{b} + j_\parallel \mathbf{b} \times \mathbf{Q}_\perp + j_\parallel Q_\parallel \mathbf{b} \times \mathbf{b}) \\ &= \boldsymbol{\xi}_\perp^* \cdot (Q_\parallel \mathbf{j}_\perp \times \mathbf{b} + j_\parallel \mathbf{b} \times \mathbf{Q}_\perp) \\ &\quad (\boldsymbol{\xi}_\perp \perp \mathbf{b} \parallel \mathbf{j}_\perp \times \mathbf{Q}_\perp) \\ &= j_\parallel (\boldsymbol{\xi}_\perp^* \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{Q}_\perp + Q_\parallel \boldsymbol{\xi}_\perp^* \cdot (\mathbf{j}_\perp \times \mathbf{b}) \end{aligned} \quad (\text{B.52})$$

ここで、 \mathbf{j}_\perp と Q_\parallel は

$$\begin{aligned} \mathbf{j}_\perp &= (\mathbf{b} \cdot \mathbf{b}) \mathbf{j}_\perp - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{j}_\perp) \mathbf{b} \\ &= \mathbf{b} \times (\mathbf{j}_\perp \times \mathbf{b}) \\ &= \frac{\mathbf{b} \times [(\mathbf{j}_\perp + j_\parallel \mathbf{b}) \times \mathbf{b}]}{B} \\ &= \frac{\mathbf{b} \times \nabla p}{B} \end{aligned} \quad (\text{B.53})$$

$$Q_\parallel = \mathbf{b} \cdot \nabla \times (\boldsymbol{\xi}_\perp \times \mathbf{B})$$

$$\begin{aligned}
 &= \mathbf{b} \cdot [(\mathbf{B} \cdot \nabla)\xi_{\perp} - (\xi_{\perp} \cdot \nabla)\mathbf{B} - \mathbf{B}(\nabla \cdot \xi_{\perp})] \\
 &= -B\nabla \cdot \xi_{\perp} + 2\mathbf{b} \cdot (\mathbf{B} \cdot \nabla)\xi_{\perp} - \mathbf{b} \cdot [(\mathbf{B} \cdot \nabla)\xi_{\perp} + (\xi_{\perp} \cdot \nabla)\mathbf{B}] \\
 &= -B[\nabla \cdot \xi_{\perp} - 2\mathbf{b} \cdot (\mathbf{b} \cdot \nabla)\xi_{\perp}] - \mathbf{b} \cdot [\nabla(\mathbf{B} \cdot \xi_{\perp}) - \mathbf{B} \times (\nabla \times \xi_{\perp}) - \xi_{\perp} \times (\nabla \times \mathbf{B})] \\
 &\quad (\nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B}) + \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A}) + (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A}) \\
 &= -B[\nabla \cdot \xi_{\perp} + 2(\mathbf{b} \cdot \nabla)(\xi_{\perp} \cdot \mathbf{b}) - 2\mathbf{b} \cdot (\mathbf{b} \cdot \nabla)\xi_{\perp}] + \mathbf{b} \cdot [\xi_{\perp} \times (\nabla \times \mathbf{B})] \\
 &= -B[\nabla \cdot \xi_{\perp} + 2\xi_{\perp} \cdot (\mathbf{b} \cdot \nabla)\mathbf{b}] + \xi_{\perp} \cdot [(\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{b}] \\
 &= -B(\nabla \cdot \xi_{\perp} + 2\xi_{\perp} \cdot \kappa) + \frac{\mu_0}{B}\xi_{\perp} \cdot \nabla p \tag{B.54}
 \end{aligned}$$

と書き表される. 式 (B.53, B.54) を式 (B.51, B.52) に代入した後式 (B.45) に代入すると

$$\begin{aligned}
 \delta W_F &= \frac{1}{2} \int_P \left[\frac{|\mathbf{Q}|^2}{\mu_0} - \xi_{\perp}^* \cdot (\mathbf{j} \times \mathbf{Q}) + \gamma p |\nabla \cdot \xi|^2 + (\xi_{\perp} \cdot \nabla p) \nabla \cdot \xi_{\perp}^* \right] \\
 &= \frac{1}{2} \int_P dr \left[\frac{|\mathbf{Q}_{\perp}|^2}{\mu_0} + \frac{Q_{\parallel}^* Q_{\parallel}}{\mu_0} - j_{\parallel}(\xi_{\perp}^* \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{Q}_{\perp} - Q_{\parallel} \xi_{\perp}^* \cdot (\mathbf{j} \times \mathbf{b}) + \gamma p |\nabla \cdot \xi|^2 \right. \\
 &\quad \left. + (\xi_{\perp} \cdot \nabla p)(\nabla \cdot \xi_{\perp}^*) \right] \\
 &= \frac{1}{2} \int_P dr \left[\frac{|\mathbf{Q}_{\perp}|^2}{\mu_0} + \frac{B^2}{\mu_0} |\nabla \cdot \xi_{\perp} + 2\xi_{\perp} \cdot \kappa|^2 - |\nabla \cdot \xi_{\perp}^* + 2\xi_{\perp}^* \cdot \kappa|(\xi_{\perp} \cdot \nabla p) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{Q_{\parallel}}{B}(\xi_{\perp}^* \cdot \nabla p) - j_{\parallel}(\xi_{\perp}^* \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{Q}_{\perp} - Q_{\parallel} \xi_{\perp}^* \cdot (\mathbf{j} \times \mathbf{b}) + \gamma p |\nabla \cdot \xi|^2 \right. \\
 &\quad \left. + (\xi_{\perp} \cdot \nabla p)(\nabla \cdot \xi_{\perp}^*) \right] \\
 &= \frac{1}{2} \int_P dr \left[\frac{|\mathbf{Q}_{\perp}|^2}{\mu_0} + \frac{B^2}{\mu_0} |\nabla \cdot \xi_{\perp} + 2\xi_{\perp} \cdot \kappa|^2 + \gamma p |\nabla \cdot \xi|^2 - 2(\xi_{\perp}^* \cdot \kappa)(\xi_{\perp} \cdot \nabla p) \right. \\
 &\quad \left. - j_{\parallel}(\xi_{\perp}^* \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{Q}_{\perp} \right] \tag{B.55} \\
 &\quad (\nabla p = B\mathbf{j} \times \mathbf{b})
 \end{aligned}$$

という見通しの良い形になる. これは Furth [41] や Greene [42] らによって提案された表式である. $|\mathbf{Q}_{\perp}|^2$ の項は磁力線を曲げるために必要なエネルギーで, アルフベン波のポテンシャルエネルギーである. 第 2 項は磁力線を圧縮するために必要なエネルギーで, 磁気音波のポテンシャルエネルギーである. $\gamma p |\nabla \cdot \xi|^2$ はプラズマを圧縮するために必要なエネルギーで, 音波のポテンシャルエネルギーを表す. 以上の 3 項は全て正であり安定化に寄与する. 残りの 2 項は正負の値をとりうるので不安定を駆動する可能性がある. 最初の項は $\nabla p = \mathbf{j}_{\perp} \times \mathbf{B}$ に比例し, 2 つめは j_{\perp} に比例する. 前者は圧力駆動モードと呼ばれ, 後者は電流駆動モードと呼ばれる.

B.5 バルーニングモード

バルーニングモード (磁力線に垂直方向の端数 $k_{\perp} \rightarrow \infty$) を扱うには摂動 ξ_{\perp} を eikonal 表現

$$\xi_{\perp} = \eta_{\perp} e^{iS} \tag{B.56}$$

で表すと良い. ここで \mathbf{k}_\perp は

$$\mathbf{k}_\perp = \nabla S \quad (\text{B.57})$$

$$\mathbf{B} \cdot \nabla S = 0 \quad (\text{B.58})$$

と定義される. ここで, η_\perp は平衡の空間スケールでゆっくりと変化すると仮定する ($|a\nabla\eta_\perp|/|\eta_\perp| \sim 1$). 一方で $\mathbf{k}_\perp \rightarrow \infty$ を考慮すると $|a\nabla S| \gg 1$ である. このような S を見つける方法は各配位において個別に検討しなければならないが, ここでは S が存在するものとして論じる. eikonal 表現を用いるのは数学的に近似を用いる必要がなくなるためである. 次の様に \mathbf{Q}_\perp に ∇S が含まれないことも重要である.

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_\perp &= [\nabla \times (\eta_\perp e^{iS} \times \mathbf{B})]_\perp \\ &= [\nabla \times e^{iS} (\eta_\perp \times \mathbf{B})]_\perp \\ &= [e^{iS} \nabla \times (\eta_\perp \times \mathbf{B}) + \nabla e^{iS} \times (\eta_\perp \times \mathbf{B})]_\perp \\ &= [e^{iS} \nabla \times (\eta_\perp \times \mathbf{B}) + ie^{iS} \nabla S \times (\eta_\perp \times \mathbf{B})]_\perp \\ &= e^{iS} [\nabla \times (\eta_\perp \times \mathbf{B}) + i \nabla S \times (\eta_\perp \times \mathbf{B})]_\perp \\ &= e^{iS} [\nabla \times (\eta_\perp \times \mathbf{B}) + i(\mathbf{k}_\perp \cdot \mathbf{B})\eta_\perp - i(\mathbf{k}_\perp \cdot \eta_\perp)\mathbf{B}]_\perp \\ &= e^{iS} [\nabla \times (\eta_\perp \times \mathbf{B})]_\perp \end{aligned} \quad (\text{B.59})$$

これらを用いて式 (B.55) を変形すると (ξ_\perp の調整によって最小化される圧縮項 $\gamma p |\nabla \cdot \xi|^2$ を除く),

$$\begin{aligned} \delta W_F &= \frac{1}{2\mu_0} \int d\mathbf{r} [|\mathbf{Q}_\perp|^2 + B^2 |\nabla \cdot \xi_\perp + 2\xi_\perp \cdot \kappa|^2 - 2\mu_0 (\xi_\perp \cdot \nabla p) (\xi_\perp^* \cdot \kappa) \\ &\quad - \mu_0 j_\parallel (\xi_\perp^* \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{Q}_\perp] \\ &= \frac{1}{2\mu_0} \int d\mathbf{r} [|\nabla \times (\eta_\perp \times \mathbf{B})_\perp|^2 + B^2 |\nabla \cdot (\eta_\perp e^{iS}) + 2\eta_\perp e^{iS} \cdot \kappa|^2 \\ &\quad - 2\mu_0 (\eta_\perp e^{iS} \cdot \nabla p) (\eta_\perp^* e^{-iS} \cdot \kappa) - \mu_0 j_\parallel (\eta_\perp^* e^{-iS} \times \mathbf{b}) \cdot e^{iS} \nabla \times (\eta_\perp \times \mathbf{B})_\perp] \\ &= \frac{1}{2\mu_0} \int d\mathbf{r} [|\nabla \times (\eta_\perp \times \mathbf{B})_\perp|^2 + B^2 |ie^{iS} \eta_\perp \cdot \nabla S + e^{iS} \nabla \cdot \eta_\perp + 2e^{iS} \eta_\perp \cdot \kappa|^2 \\ &\quad - 2\mu_0 (\eta_\perp \cdot \nabla p) (\eta_\perp^* \cdot \kappa) - \mu_0 j_\parallel (\eta_\perp^* \times \mathbf{b}) \cdot \nabla \times (\eta_\perp \times \mathbf{B})_\perp] \\ &= \frac{1}{2\mu_0} \int d\mathbf{r} [|\nabla \times (\eta_\perp \times \mathbf{B})_\perp|^2 + B^2 |i\mathbf{k}_\perp \cdot \eta_\perp + \nabla \cdot \eta_\perp + 2\eta_\perp \cdot \kappa|^2 \\ &\quad - 2\mu_0 (\eta_\perp \cdot \nabla p) (\eta_\perp^* \cdot \kappa) - \mu_0 j_\parallel (\eta_\perp^* \times \mathbf{b}) \cdot \nabla \times (\eta_\perp \times \mathbf{B})_\perp] \end{aligned} \quad (\text{B.60})$$

式 (B.60) をみると, S あるいは \mathbf{k}_\perp の現れるのは磁気音波の項だけである. δW_F を系統的に最小化するために, $\mathbf{k}_\perp \rightarrow \infty$ を考慮して

$$\eta_\perp = \eta_{\perp 0} + \eta_{\perp 1} + \dots \quad (\text{B.61})$$

と展開する. $|\eta_{\perp 1}|/|\eta_{\perp 0}| \sim 1/k_\perp a$ である. δW_F の 0 次近似は

$$\delta W_0 = \frac{1}{2\mu_0} \int d\mathbf{r} B^2 |\mathbf{k}_\perp \cdot \eta_{\perp 0}|^2 \quad (\text{B.62})$$

になる. これを最小化するためには $\mathbf{k}_\perp \cdot \boldsymbol{\eta}_{\perp 0} = 0$ にすればよい. すなわち

$$\boldsymbol{\eta}_{\perp 0} = Y \mathbf{b} \times \mathbf{k}_\perp \quad (\text{B.63})$$

とすればよい. ここで Y はスカラー量で, 平衡長さスケール上でゆっくりと変化する. 2 次の項に消えない量が残る. この表現では $\boldsymbol{\eta}_{\perp 1}$ が磁気圧縮の項のみにあらわれる. これを

$$\delta W_{2(\text{comp})} = \frac{1}{2\mu_0} \int d\mathbf{r} B^2 |i\mathbf{k}_\perp \cdot \boldsymbol{\eta}_{\perp 1} + \nabla \cdot \boldsymbol{\eta}_{\perp 0} + 2\boldsymbol{\kappa} \cdot \boldsymbol{\eta}_{\perp 0}|^2 \quad (\text{B.64})$$

とすると, δW_F は $i\mathbf{k}_\perp \cdot \boldsymbol{\eta}_{\perp 1} = -\nabla \cdot \boldsymbol{\eta}_{\perp 0} - 2\boldsymbol{\kappa} \cdot \boldsymbol{\eta}_{\perp 0}$ となる様 η_1 を選ぶことで最小化される. 故に $\mathbf{k}_\perp \rightarrow \infty$ において最も不安定なモードは磁気圧縮項を含まない. δW_2 を評価する際に $\nabla \times (\boldsymbol{\eta}_\perp \times \mathbf{B})_\perp$ を次のように置き換える.

$$\begin{aligned} \nabla \times (\boldsymbol{\eta}_\perp \times \mathbf{B})_\perp &= \nabla \times [YB(\mathbf{b} \times \mathbf{k}_\perp) \times \mathbf{b}]_\perp \\ &= \nabla \times [YB\nabla S]_\perp \\ &= [\nabla(YB) + YB\nabla \times \nabla S]_\perp \\ &= [\nabla(YB) \times \nabla S]_\perp \\ &= (\nabla X \times \mathbf{k}_\perp)_\perp \end{aligned} \quad (\text{B.65})$$

ここで $X = YB$ である. さらに $\nabla X = \nabla_\perp X + \mathbf{b}(\mathbf{b} \cdot \nabla X)$ を用いると

$$\nabla \times (\boldsymbol{\eta}_\perp \times \mathbf{B})_\perp = (\mathbf{b} \cdot \nabla X) \mathbf{b} \times \mathbf{k}_\perp \quad (\text{B.66})$$

になる. この関係を用いて電流駆動項の δW_2 への寄与は

$$\begin{aligned} \delta W_{2(\text{kink})} &= -\frac{1}{2} \int d\mathbf{r} j_\parallel (\boldsymbol{\eta}_\perp^* \times \mathbf{b}) \cdot \nabla \times (\boldsymbol{\eta}_\perp \times \mathbf{B})_\perp \\ &= -\frac{1}{2} \int d\mathbf{r} j_\parallel (Y^* (\mathbf{b} \times \mathbf{k}_\perp) \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{b} \cdot \nabla X) \mathbf{b} \times \mathbf{k}_\perp \\ &= -\frac{1}{2} \int d\mathbf{r} \left(\frac{j_\parallel}{B} \right) X^* \mathbf{k}_\perp \cdot (\mathbf{b} \cdot \nabla X) \mathbf{b} \times \mathbf{k}_\perp \\ &= -\frac{1}{2} \int d\mathbf{r} \left[\left(\frac{j_\parallel}{B} \right) X^* (\mathbf{b} \cdot \nabla X) \right] [\mathbf{k}_\perp \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{k}_\perp)] \\ &= 0 \end{aligned} \quad (\text{B.67})$$

よって $\mathbf{k} \rightarrow \infty$ の極限では電流駆動項は不安定に寄与しない.

δW_2 の残りはアルフベン波 (磁力線張力) の安定化項と磁力線の悪い曲率による不安定化項の差となる.

$$\begin{aligned} \delta W_2 &= \frac{1}{2\mu_0} \int d\mathbf{r} \left[|\nabla \times (\boldsymbol{\eta}_\perp \times \mathbf{B})_\perp|^2 - 2\mu_0 (\boldsymbol{\eta}_\perp \cdot \nabla p) (\boldsymbol{\eta}_\perp^* \cdot \boldsymbol{\kappa}) \right] \\ &= \frac{1}{2\mu_0} \int d\mathbf{r} \left[|(\mathbf{b} \cdot \nabla X) \mathbf{b} \times \mathbf{k}_\perp|^2 - 2\mu_0 \left(\frac{X}{B} \mathbf{b} \times \mathbf{k}_\perp \cdot \nabla p \right) \left(\frac{X^*}{B} \mathbf{b} \times \mathbf{k}_\perp \cdot \boldsymbol{\kappa} \right) \right] \\ &= \frac{1}{2\mu_0} \int d\mathbf{r} \left[k_\perp^2 |\mathbf{b} \cdot \nabla X|^2 - \frac{2\mu_0}{B^2} (\mathbf{b} \times \mathbf{k}_\perp \cdot \nabla p) (\mathbf{b} \times \mathbf{k}_\perp \cdot \boldsymbol{\kappa}) |X|^2 \right] \end{aligned} \quad (\text{B.68})$$

これは 1 つの変数 X の関数であり, \mathbf{B} 方向の微分のみあらわれる 1 次元の式である. 安定性を検討したい配位に合わせて個別の座表系を導入すると δW_2 の 1 次元的性質が明らかになる.

付録C 軸対称トーラスにおけるバルーニング方程式の導出

本章では以下の手順でトカマクを代表とする軸対称トーラスプラズマのバルーニング安定性について述べる。まず最初に任意の軸対称トーラスプラズマにおける交換およびバルーニングモードについて検討するために磁気面座標系を導入する。そしてシアアのある場合における eikonal 関数 S を解く。その結果一次元表示のバルーニングモードのポテンシャルエネルギーを導き、バルーニング方程式の一般式を導出する。

C.1 磁気面座標系

バルーニングモードのエネルギー δW_F を 1 次元化するために磁気面座標系を導入する。一般的に用いられているのは径方向的なポロイダル磁束 ψ と角度的な χ である。次のように定義する。

$$\psi = \psi(r, z) \quad (\text{C.1})$$

$$\chi = \chi(r, z) \quad (\text{C.2})$$

$$\phi = \phi \quad (\text{C.3})$$

ψ は Grad-Shafranov 方程式を満たすポロイダル磁束関数であり、 χ はそれに直角なポロイダル角度的な関数である。 ψ が決まると、磁場や曲率ベクトルを (r, z) 座標系において求めることができる。例えば

$$\mathbf{B} = B_\phi \mathbf{e}_\phi + \mathbf{B}_p \quad (\text{C.4})$$

$$B_\phi = \frac{F(\phi)}{r} \quad (\text{C.5})$$

$$\mathbf{B}_p = \frac{1}{r} \nabla \psi \times \mathbf{e}_\phi \quad (\text{C.6})$$

$$\kappa = (\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{b} \quad (\text{C.7})$$

ここで $\mathbf{b} = \mathbf{B}/B$ である。 χ は直交条件

$$\nabla \psi \cdot \nabla \chi = 0 \quad (\text{C.8})$$

によって決定される。ここで χ を定義域を $[0 : 2\pi]$ としても一般性は失われない。

次にバルーニングモードのエネルギー積分に用いる幾つかの値を求める. 式 (C.6) より

$$B_p = \frac{|\nabla\psi|}{r} \quad (\text{C.9})$$

となる. 体積積分における体積要素は

$$d\mathbf{r} = 2\pi r dr dz = 2\pi J d\phi d\chi \quad (\text{C.10})$$

でありヤコビアン J は

$$\frac{r}{J} = \begin{vmatrix} \partial\psi/\partial r & \partial\phi/\partial z \\ \partial\chi/\partial r & \partial\chi/\partial z \end{vmatrix} = \mathbf{e}_\phi \cdot \nabla\chi \times \nabla\phi \quad (\text{C.11})$$

を満たす. 更に式 (C.6) を用いると $\mathbf{e}_\phi \cdot \nabla\chi \times \psi = r\mathbf{B}_p \cdot \nabla\chi$ なので

$$JB_p = \frac{1}{\mathbf{b}_p \cdot \nabla\chi} = \mathbf{b} \cdot \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\chi} \quad (\text{C.12})$$

これは

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mathbf{b}_p \cdot \nabla\chi} &= \frac{B_p r}{(\nabla\psi \times \mathbf{e}_\phi) \cdot \left(\frac{\partial\chi}{\partial r}\mathbf{e}_r + \frac{\partial\chi}{\partial z}\mathbf{e}_z\right)} \\ &= \frac{B_p r}{\nabla\psi \cdot \left(\frac{\partial\chi}{\partial r}\mathbf{e}_z + \frac{\partial\chi}{\partial z}\mathbf{e}_r\right)} \\ &= \frac{B_p r}{(\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C})) \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C}}, \quad (\mathbf{e}_\phi = \mathbf{e}_r \times \mathbf{e}_z) \\ &= \frac{B_p r}{\frac{\partial\psi}{\partial r} \frac{\partial\chi}{\partial z} + \frac{\partial\psi}{\partial z} \frac{\partial\chi}{\partial r}} \\ &= \frac{B_p r}{\frac{r}{J} \left(\frac{\partial\psi}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial\psi} + \frac{\partial\psi}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial\psi}\right)} \\ &= \frac{B_p r}{\text{(式 (C.10))}} \\ &= JB_p \end{aligned} \quad (\text{C.13})$$

および

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_p \cdot \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\chi} &= \frac{1}{B_p r} (\nabla\psi \times \mathbf{e}_\phi) \cdot \left(\frac{\partial r}{\partial\chi}\mathbf{e}_r + \frac{\partial z}{\partial\chi}\mathbf{e}_z\right) \\ &= \frac{1}{B_p r} \nabla\psi \cdot \left(\frac{\partial r}{\partial\chi}\mathbf{e}_z + \frac{\partial z}{\partial\chi}\mathbf{e}_r\right) \\ &= \frac{1}{B_p r} \nabla\psi \cdot \frac{J}{r} \left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\mathbf{e}_z + \frac{\partial\psi}{\partial r}\mathbf{e}_r\right) \\ &= \frac{J}{B_p r^2} |\nabla\psi|^2 \\ &= JB_p \end{aligned} \quad (\text{C.14})$$

(式 (C.9))

から導くことができる。

次に $\mathbf{k}_\perp = \nabla S$ について検討する。磁気面座標系では

$$\nabla S = \frac{\partial S}{\partial \psi} \nabla \psi + \frac{\partial S}{\partial \chi} \nabla \chi + \frac{\partial S}{\partial \phi} \mathbf{e}_\phi \quad (\text{C.15})$$

である。ここで考察を容易にするために 3 つのベクトル

$$\mathbf{n} = \frac{\nabla \psi}{|\nabla \psi|} \quad (\text{C.16})$$

$$\mathbf{t} = \frac{B_\phi}{B} \mathbf{b}_p - \frac{B_p}{B} \mathbf{e}_\phi \quad (\text{C.17})$$

$$\mathbf{b} = \frac{B_p}{B} \mathbf{b}_p + \frac{B_\phi}{B} \mathbf{e}_\phi \quad (\text{C.18})$$

$$(\text{C.19})$$

\mathbf{n} は磁気面の法線ベクトル, \mathbf{t}, \mathbf{b} は磁気面上に存在し, それぞれ磁力線に垂直および平行なベクトルである。それぞれの間には

$$\begin{aligned} \mathbf{t} &= \frac{B_\phi}{BB_p} \mathbf{B}_p - \frac{B_p}{B} \mathbf{e}_\phi \\ &= \frac{B_\phi r}{B|\nabla \psi|} \frac{1}{r} (\nabla \psi \times \mathbf{e}_\phi) - \frac{|\nabla \psi|}{Br} \mathbf{e}_\phi \\ &\quad (\text{式 (C.9)}) \\ &= \frac{1}{B|\nabla \psi|} \left(B_\phi (\nabla \psi \times \nabla \mathbf{e}_\phi) - \frac{\nabla \psi \cdot \nabla \psi}{r} \mathbf{e}_\phi \right) \\ &= \frac{1}{B|\nabla \psi|} \left[\nabla \psi \times (B_\phi \nabla \mathbf{e}_\phi) + \frac{1}{r} \nabla \psi \times (\nabla \psi \times \mathbf{e}_\phi) \right] \\ &\quad (\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C}) \\ &= \frac{\nabla \psi}{|\nabla \psi|} \times \left(\frac{B_\phi}{B} \mathbf{e}_\phi + \frac{B_p}{B} \mathbf{b}_p \right) \\ &= \mathbf{n} \times \mathbf{b} \end{aligned} \quad (\text{C.20})$$

ここで \mathbf{k}_\perp は以下のように表され,

$$\mathbf{k}_\perp = k_n \mathbf{n} + k_t \mathbf{t} \quad (\text{C.21})$$

$$k_n = \mathbf{n} \cdot \nabla S = (\mathbf{n} \cdot \nabla \psi) \frac{\partial S}{\partial \psi} \quad (\text{C.22})$$

$$k_t = \mathbf{t} \cdot \nabla S = (\mathbf{t} \cdot \nabla \chi) \frac{\partial S}{\partial \chi} + (\mathbf{t} \cdot \nabla \phi) \frac{1}{r} \frac{\partial S}{\partial \phi} \quad (\text{C.23})$$

式 (C.20) を用いて

$$\begin{aligned} \mathbf{b} \times \mathbf{k}_\perp &= \mathbf{b} \times (k_n \mathbf{n} + k_t \mathbf{t}) \\ &= k_n \mathbf{b} \times \mathbf{n} + k_t \mathbf{b} \times \mathbf{t} \\ &= -k_n \mathbf{t} + k_t \mathbf{n} \end{aligned} \quad (\text{C.24})$$

であることが示される。

エネルギー積分を求めるために必要なのは $\mathbf{b} \cdot \nabla X$ である。一般には $X = X(\psi, \phi, \chi)$ であるが、軸対称平衡ではトロイダル方向 ϕ に関してフーリエ変換することができ、 $\xi(r, z, \phi) = \xi(r, z) \exp(-in\phi)$ となるために式 (B.56) から

$$S(\psi, \phi, \chi) = -n\phi + \tilde{S}(\psi, \chi) \quad (\text{C.25})$$

とあらわすことができる。ここで n はトロイダルモード数である。これにより X は $X(\psi, \chi)$ となり、

$$\begin{aligned} \mathbf{b} \cdot \nabla X &= \mathbf{b} \cdot \left(\frac{\partial X}{\partial \psi} \nabla \psi + \frac{\partial X}{\partial \chi} \nabla \chi \right) \\ &= (\mathbf{b} \cdot \nabla \chi) \frac{\partial X}{\partial \chi} \\ &= \left[\frac{B_p \mathbf{b}_p + B_\phi \mathbf{e}_\phi}{B} \cdot \nabla \chi \right] \frac{\partial X}{\partial \chi} \\ &= \frac{B_p}{B} \frac{1}{JB_p} \frac{\partial X}{\partial \chi} \\ &\quad (\text{式 (C.12)}) \\ &= \frac{1}{JB} \frac{\partial X}{\partial \chi} \end{aligned} \quad (\text{C.26})$$

これらを式 (B.68) に代入すると、

$$\begin{aligned} \delta W_2 &= \frac{1}{2\mu_0} \int d\mathbf{r} \left[k_\perp^2 |\mathbf{b} \cdot \nabla X|^2 - \frac{2\mu_0}{B^2} (\mathbf{b} \times \mathbf{k}_\perp \cdot \nabla p) (\mathbf{b} \times \mathbf{k}_\perp \cdot \boldsymbol{\kappa}) |X|^2 \right] \\ &= \frac{1}{2\mu_0} \int 2\pi J d\psi d\chi \\ &\quad \left[(k_n^2 + k_t^2) \left(\frac{1}{JB} \frac{\partial X}{\partial \chi} \right)^2 - \frac{2\mu_0}{B^2} (k_t \mathbf{n} - k_n \mathbf{t}) \cdot \frac{\partial p}{\partial \psi} \nabla \psi (k_t \mathbf{n} - k_n \mathbf{t}) \cdot \boldsymbol{\kappa} X^2 \right] \\ &= \frac{\pi}{\mu_0} \int d\psi \int_0^{2\pi} J d\chi \left[(k_n^2 + k_t^2) \left(\frac{1}{JB} \frac{\partial X}{\partial \chi} \right)^2 - \frac{2\mu_0}{B^2} k_t \frac{\partial p}{\partial \psi} |\nabla \psi| (k_t \kappa_n - k_n \kappa_t) X^2 \right] \\ &= \frac{\pi}{\mu_0} \int d\psi \int_0^{2\pi} J d\chi \left[(k_n^2 + k_t^2) \left(\frac{1}{JB} \frac{\partial X}{\partial \chi} \right)^2 - \frac{2\mu_0 r B_p}{B^2} \frac{\partial p}{\partial \psi} (k_t^2 \kappa_n - k_t k_n \kappa_t) X^2 \right] \\ &= \frac{\pi}{\mu_0} \int d\psi W(\psi) \end{aligned} \quad (\text{C.27})$$

ただし

$$\boldsymbol{\kappa} = \kappa_n \mathbf{n} + \kappa_t \mathbf{t} \quad (\text{C.28})$$

である。 κ_n を主曲率 (normal curvature), κ_t を従曲率 (geodesic curvature) と呼ぶ。 χ に関する積分 $W(\psi)$ がバルーニングモードポテンシャルエネルギーの一次元表示である。

C.2 バルーニング方程式の導出

式 (C.27) によってバルーニングモードに関するエネルギー積分が表されたが、まだ S に関する検討はなされていない。ここで一般的なトカマクバルーニングモードエネルギー原理のための eikonal 関数 S を決定する。

問題を明確にするために次の 2 種類の計算を並行して行う。

- (ψ, χ) 座標系で完全なトーラス系として解く。
- 円形断面大アスペクト比近似を行い (r, θ) 座標系で解く (円筒トカマク)。

S の特徴をまとめると、

- 磁場に垂直な早い振動を起こす。
- 磁場に沿って一定 ($\mathbf{B} \cdot \nabla S = 0$)。

一般的なトカマクでは後者の条件は

$$\begin{aligned} \mathbf{B} \cdot \nabla S &= B_\phi \mathbf{e}_\phi \cdot \frac{\partial S}{\partial \phi} \frac{1}{r} \mathbf{e}_\phi + B_p \mathbf{b}_p \cdot \frac{\partial S}{\partial \chi} \nabla \chi \\ &= \frac{B_\phi}{r} \frac{\partial S}{\partial \phi} + B_p \frac{1}{J B_p} \frac{\partial S}{\partial \chi} \\ &\quad (\text{式 (C.12)}) \\ &= \frac{B_\phi}{r} \frac{\partial S}{\partial \phi} + \frac{1}{J} \frac{\partial S}{\partial \chi} = 0 \end{aligned} \quad (\text{C.29})$$

となる。円筒近似では $r \rightarrow R_0$, $\chi \rightarrow \theta$, $\psi(r, \theta) \rightarrow \psi(r)$ となりヤコビアン $J = 1/(\mathbf{B}_p \cdot \nabla \chi) = r/B_\theta$ となる。よって式 (C.29) は

$$\frac{B_\phi}{r} \frac{\partial S}{\partial \phi} + \frac{1}{J} \frac{\partial S}{\partial \chi} = \frac{B_\phi}{R_0} \frac{\partial S}{\partial \phi} + \frac{B_\theta}{r} \frac{\partial S}{\partial \theta} = 0 \quad (\text{C.30})$$

と置き換わる。先に述べたように、軸対称性から $S = -n\phi + \tilde{S}(\psi, \chi)$ あるいは $S = -n\phi + \tilde{S}(r, \theta)$ と表される。 $n \gg 1$ によって S の早い振動が満たされる。式 (C.29, C.30) から

$$S = n \left[-\phi + \int_{\chi_0}^{\chi} \frac{J B_\phi}{r} d\chi' \right] \quad (\text{C.31})$$

$$S = n[-\phi + q(r)(\theta - \theta_0)] \quad (\text{C.32})$$

を導くことができる。ここで $q(r) = r B_\phi / R_0 B_\theta$ であり、 $\chi_0(\psi)$ および $\theta(r)$ は任意の積分定数である。

S はさらに χ, θ に関する周期性を持たなければならない。円筒近似の場合を考えると、 q が有理数 m/n であればよいが、シアーのある場合 ($q' \neq 0$) には十分でない。有利面 $nq(r_0) = m$ が存在する場合、 S を $r = r_0$ 周辺で展開して

$$S \approx n[-\phi + q(r_0)(\theta - \theta_0) + (r - r_0)q'(r_0)(\theta - \theta_0)] \quad (\text{C.33})$$

とすると $n \gg 1$ より $n(r - r_0)q'(r_0)$ の項は $r - r_0$ が非常に小さな場合にも有限な値を持つ。

一般式の場合にも同様な状況が生じる。有利面 $\psi = \psi_0$ 付近で展開すると

$$S \approx n \left[-\phi + \int_{\chi_0}^{\chi} \left(\frac{JB_\phi}{r} \right)_{\psi_0} d\chi' + (\psi - \psi_0) \int_{\chi_0}^{\chi} \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\frac{JB_\phi}{r} \right)_{\psi_0} d\chi' \right] \quad (\text{C.34})$$

となる。有利面の条件は

$$n \int_0^{2\pi} \left(\frac{JB_\phi}{r} \right)_{\psi_0} d\chi = 2\pi m \quad (\text{C.35})$$

で与えられるので、円筒近似と同様である。

シアーと周期性の問題を回避するために次のような操作を行う。まず、元々のプラズマの変位は $\xi = \exp(-in\phi)\xi(\psi, \chi)$ で表されるが、物理的に適当な周期性として $\xi(\psi, \chi) = \xi(\psi, \chi + 2\pi)$ を満たさなければならない。Connor らは ξ を非周期関数 (疑似モード) の和として表せることを示した [38]。

$$\xi(\psi, \chi) = \sum_p \xi_Q(\psi, \chi + 2\pi p) \quad (\text{C.36})$$

ここで $\xi_Q(\psi, \chi)$ は $-\infty < \chi < \infty$ において定義された疑似モードである。 $\xi(\psi, \chi)$ は

$$\xi_Q(\psi, \chi \rightarrow \pm\infty) = 0 \quad (\text{C.37})$$

となるとき周期性を持つ。ここで重要なのは ξ_Q もまた ξ と同じ方程式を満たすことである。例えば、 ξ が

$$\mathbf{F}(\xi) = 0 \quad (\text{C.38})$$

を満たすとすると、 χ に関する周期性から $\mathbf{F}(\psi, \chi) = \mathbf{F}(\psi, \chi + 2\pi)$ である。従って

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(\xi) &= \sum_p \mathbf{F}(\psi, \chi)(\xi_Q(\psi, \chi + 2\pi p)) \\ &= \sum_p \mathbf{F}(\psi, \chi + 2\pi p)(\xi_Q(\psi, \chi + 2\pi p)) \end{aligned} \quad (\text{C.39})$$

であり、

$$\mathbf{F}(\xi_Q) = 0 \quad (\text{C.40})$$

が成立する。

すなわち式 (C.40) を出発点としても以下に示す 2 つの例外を除きこれまでの検討が全て適用できる。一つは式 (C.27) における X が疑似モードの大きさ X_Q を示している点、そしてもう一つは χ 積分の領域が $0 \leq \chi \leq 2\pi$ から無限大に広がる点である。

疑似モードの導入によりシアーと周期性の問題が解決された。この表現では eikonal 関数 S は χ における周期性を必要としない。従って式 (C.33, C.34) を満たす非周期関数 S が物理的に許される。

円筒近似では式 (C.33) から $\mathbf{k}_\perp = \nabla S$ において

$$\begin{aligned} k_n &= (\mathbf{n} \cdot \nabla \psi) \frac{\partial S}{\partial \psi} \\ &= nq'(r_0)(\theta - \theta_0) \end{aligned} \quad (\text{C.41})$$

$$\begin{aligned} k_t &= (\mathbf{t} \cdot \nabla \chi) \frac{\partial S}{\partial \chi} + (\mathbf{t} \cdot \mathbf{e}_\phi) \frac{1}{r} \frac{\partial S}{\partial \phi} \\ &= \frac{B_\phi nq(r_0)}{B r} - \frac{B_\theta}{B r R_0} (-n) \\ &= \frac{B_\phi n r B_\phi}{B r R_0 B_\theta} + \frac{n B_\theta}{B R_0} \\ &= \frac{n}{R_0 B} \left(\frac{B_\phi^2}{B_\theta} + B_\theta \right) \\ &= \frac{n B}{R_0 B_\theta} \end{aligned} \quad (\text{C.42})$$

が求まる。但し k_t においては $n(r - r_0)$ オーダの項は無視した。また $W(\psi)$ は

$$W(r_0) = \int_{-\infty}^{\infty} d\theta \left(\frac{B_\theta}{r B^2} \right) \left[(k_n^2 + k_t^2) \left(\frac{dX}{d\theta} \right)^2 + k_t^2 \left(\frac{2\mu_0 r}{B^2} \frac{dp}{dr} \right) X^2 \right] \quad (\text{C.43})$$

ここで r_0 の添字 r は省略している。ここで $\kappa_n = -(B_\theta^2/rB^2)$, $\kappa_t = 0$ であり, $B_\theta = \psi'(r)/R_0$ の関係を用いた。

一般式に適用すると,

$$\begin{aligned} k_n &= (\mathbf{n} \cdot \nabla \psi) \frac{\partial S}{\partial \psi} \\ &= |\nabla \psi| n \int_{x_0}^x \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\frac{J B_\phi}{r} \right) d\chi \\ &= n \left[r B_p \int_{x_0}^x \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\frac{J B_\phi}{r} \right) d\chi \right] \end{aligned} \quad (\text{C.44})$$

(式 (C.9))

$$\begin{aligned} k_t &= (\mathbf{t} \cdot \nabla \chi) \frac{\partial S}{\partial \chi} + (\mathbf{t} \cdot \mathbf{e}_\phi) \frac{1}{r} \frac{\partial S}{\partial \phi} \\ &= \left(\frac{B_\phi}{B} \mathbf{b}_p - \frac{B_p}{B} \mathbf{e}_\phi \right) \cdot \nabla \chi \frac{\partial S}{\partial \chi} - \frac{B_p}{B r} \frac{\partial S}{\partial \phi} \\ &= \frac{B_\phi}{B} \frac{1}{J B_\phi} \frac{\partial S}{\partial \chi} - \frac{B_p}{B r} \frac{\partial S}{\partial \phi} \\ &= \frac{B_\phi}{B} \frac{1}{J B_p} n \frac{J B_\phi}{r} - \frac{B_p}{B r} (-n) \\ &= \frac{n B_\phi^2}{r B B_p} + \frac{n B_p}{r B} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{n}{rB} \frac{B_\phi^2 + B_p^2}{B_p} \\
 &= \frac{nB}{rB_p} \tag{C.45}
 \end{aligned}$$

$$W(\psi) = \int_{-\infty}^{\infty} J d\chi \left[(k_n^2 + k_t^2) \left(\frac{1}{JB} \frac{\partial X}{\partial \chi} \right)^2 - \frac{2\mu_0 r B_p}{B^2} \frac{\partial p}{\partial \psi} (k_t^2 \kappa_n - k_t k_n \kappa_t) X^2 \right] \tag{C.46}$$

となる。全ての係数は共鳴面 $\psi = \psi_0$ 上で求められるが、簡単のため添字は省略した。式 (C.46) によって一般性のあるバルーニングモードのエネルギー原理が求められた。W を求めるためには Grad-Shafranov 方程式に加え逆変換を必要とする。これは k_n に関する自由パラメータ $\chi_0(\psi)$ 以外の全ての値を決定する。原理的には与えられた磁気面において全ての χ_0 に対して $W(\psi)$ は最小化されなければならないが、実際には $\chi_0 = 0$ が最も不安定であることが多い。

$W(\psi)$ を最小化する X は式 (C.46) に関するオイラー方程式の解として与えられる。式 (C.46) は

$$\int A \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 + B y^2 dx \tag{C.47}$$

の形をしていることから、オイラー方程式は

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(A \frac{\partial y}{\partial x} \right) - B y = 0 \tag{C.48}$$

で求まり、バルーニング方程式

$$\frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial \chi} \left(\frac{k_n^2 + k_t^2}{JB^2} \frac{\partial X}{\partial \chi} \right) + \frac{2\mu_0 r B_p}{B^2} \frac{\partial p}{\partial \psi} (k_t^2 \kappa_n - k_t k_n \kappa_t) X = 0 \tag{C.49}$$

が導かれる。

付録D 計算機シミュレーション

本章では、本論文において実験的に示したトーラスプラズマの球状化、および軸対称合体がどのような効果を持つか計算機を用いて解析する。

D.1 シミュレーションコード

本節では、電磁流体力学 (Magnetohydro-dynamics, MHD) 方程式に基づいたシミュレーションコードについて説明を行う。プラズマは本来各種イオン、電子、中性原子で構成された多粒子である。荷電粒子を多数含むため、各粒子間の相互作用は電磁気力の効果を考慮して記述されなければならない。プラズマを荷電粒子の集合として取り扱う粒子シミュレーションは、その計算機負荷の大きさ故、非常に限られた状態しか取り扱えない、あるいは近年の高性能な計算機を用いても非常に長い計算時間が要求されるのが現状である。そのため、ボルツマン方程式などの巨視的方程式を用いて、流体としてプラズマの運動を取り扱う電磁流体力学 (MHD) 方程式およびこの方程式を用いた MHD シミュレーションがよく用いられる。

D.1.1 MHD 方程式

MHD 方程式は、以下のような方程式群からなる。

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot \rho \mathbf{v} \quad (\text{D.1})$$

$$\frac{\partial \rho \mathbf{v}}{\partial t} = -\nabla \cdot \left[\rho \mathbf{v} \mathbf{v} - \frac{\mathbf{B} \mathbf{B}}{\mu_0} + \left(p + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) \hat{\mathbf{I}} - \boldsymbol{\sigma} \right] \quad (\text{D.2})$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} = -\nabla \cdot \left[\left(\frac{1}{2} \rho v^2 + \frac{\gamma}{\gamma-1} p \right) \mathbf{v} + \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B} - \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\sigma} \right] \quad (\text{D.3})$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\nabla \times \mathbf{E} \quad (\text{D.4})$$

$$\mathbf{j} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{B} \quad (\text{D.5})$$

$$\boldsymbol{\eta} \mathbf{j} = \mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (\text{D.6})$$

$$\sigma_{ij} = \nu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \mathbf{v}) \delta_{ij} \right) \quad (\text{D.7})$$

ここで、 \mathbf{B} , \mathbf{v} , \mathbf{j} はそれぞれ磁束密度, 流速, 電流密度を表すベクトルであり, ρ , p はプラズマ密度, 圧力を示すスカラー量である. σ は粘性項, η はプラズマの抵抗率を表す. $\hat{\mathbf{I}}$ は単位対角テンソルを表している. 式 (D.1-D.3) はそれぞれ連続方程式, 運動量輸送方程式, エネルギー輸送方程式であり, 式 (D.4) は電磁誘導の法則 (但し変移電流の項を無視している), 式 (D.5) はアンペールの法則である. 式 (D.6) は一般化されたオームの法則であり, 式 (D.7) は粘性項を表している.

なお本文で用いられているコードにおいては, 本来解かれるべきエネルギー保存の式を考慮せず, 熱圧力に関して温度一様の条件で代用している. これは激しい緩和過程においては磁気面が破壊され, 電子による磁力線方向の熱伝導が支配的となる場合には, 等温を仮定した方がむしろ実情に即していると考えたためである.

D.1.2 座標系

以上の方程式をコード化する際の座標系として, 本論文では円筒座標系を用いている. 円筒座標系を用いる場合, 中心対称軸 ($r = 0$) 付近が特異点となり, その数値計算上の扱いが問題となるが, 円筒上の内・外壁の境界条件の取り扱いが容易になる. 本論文ではアスペクト比 $A > 1.0$ であるような配位を扱うが, この場合 $r = 0$ の特異点を領域に含まないシミュレーションとなるため, 本論文においては円筒座標系を採用している.

式 (D.1), (D.2), (D.4) を円筒座標 (r, ϕ, z) を用いて書き下した場合の式を以下に示す.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \rho v_r - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} \rho v_\phi - \frac{\partial}{\partial z} \rho v_z \quad (\text{D.8})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho v_r}{\partial t} = & -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \left(\rho v_r^2 - \frac{B_r^2}{\mu_0} \right) - \frac{\partial}{\partial r} \frac{B^2}{2\mu_0} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\rho v_r v_\phi - \frac{B_r B_\phi}{\mu_0} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\rho v_r v_z - \frac{B_r B_z}{\mu_0} \right) \\ & + \frac{1}{r} \left(\rho v_\phi^2 - \frac{B_\phi^2}{\mu_0} \right) - \nu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial S_z}{\partial \phi} - \frac{\partial S_\phi}{\partial z} - \frac{4}{3} \frac{\partial S_d}{\partial r} \right) \end{aligned} \quad (\text{D.9})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho v_\phi}{\partial t} = & -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \left(\rho v_r v_\phi - \frac{B_r B_\phi}{\mu_0} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} \left[\rho v_\phi^2 + \frac{1}{2\mu_0} (B_r^2 - B_\phi^2 + B_z^2) \right] - \frac{\partial}{\partial z} \left(\rho v_\phi v_z - \frac{B_\phi B_z}{\mu_0} \right) \\ & - \frac{1}{r} \left(\rho v_r v_\phi - \frac{B_\phi B_z}{\mu_0} \right) - \nu \left(\frac{\partial S_r}{\partial z} - \frac{\partial S_z}{\partial r} - \frac{4}{3} \frac{\partial S_d}{\partial \phi} \right) \end{aligned} \quad (\text{D.10})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho v_z}{\partial t} = & -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \left(\rho v_r v_z - \frac{B_r B_z}{\mu_0} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\rho v_\phi v_z - \frac{B_\phi B_z}{\mu_0} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left[\rho v_z^2 + \frac{1}{2\mu_0} (B_r^2 + B_\phi^2 - B_z^2) \right] \\ & - \nu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r S_\phi - \frac{1}{r} \frac{\partial S_r}{\partial \phi} - \frac{4}{3} \frac{\partial S_d}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (\text{D.11})$$

$$\frac{\partial B_r}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} (v_r B_\phi - v_\phi B_r - \eta j_z) - \frac{\partial}{\partial z} (v_z B_r - v_r B_z - \eta j_\phi) \quad (\text{D.12})$$

$$\frac{\partial B_\phi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} (v_\phi B_z - v_z B_\phi - \eta j_r) - \frac{\partial}{\partial r} (v_r B_\phi - v_\phi B_r - \eta j_z) \quad (\text{D.13})$$

$$\frac{\partial B_z}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r (v_z B_r - v_r B_z - \eta j_\phi) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} (v_\phi B_z - v_z B_\phi - \eta j_r) \quad (\text{D.14})$$

ここで

$$\mathbf{S} = \nabla \times \mathbf{v} \quad (\text{D.15})$$

$$S_d = \nabla \cdot \mathbf{v} \quad (\text{D.16})$$

である。

D.1.3 規格化

実際のコードにおいては、規格化により各変数を無次元化した式を用いている。長さについては計算の目的によって異なるが円筒外壁の半径 R_{wall} を特性長 L_0 、磁束密度については初期配位における磁束密度の最大値を特性磁束密度 B_0 とし、これらを単位として規格化を行っている。質量密度の最大値を 1 とした。電流密度 \mathbf{j} 、速度 \mathbf{v} 、時間 t 、圧力 p 、抵抗率 η 、粘性率 ν については、以下で定義される $j_0, v_A, \tau_A, p_0, \eta_0, \nu_0$ で規格化を行い無次元化している。

$$j_0 = \frac{B_0}{\mu_0 L_0} \quad (\text{D.17})$$

$$v_A = \frac{B_0}{\sqrt{\mu_0 \rho_0}} \quad (\text{D.18})$$

$$\tau_A = \frac{L_0}{v_A} = \frac{L_0 \sqrt{\mu_0 \rho_0}}{B_0} \quad (\text{D.19})$$

$$p_0 = \frac{B_0^2}{\mu_0} \quad (\text{D.20})$$

$$\eta_0 = \mu_0 v_A L_0 = \frac{\mu_0 B_0 L_0}{\sqrt{\mu_0 \rho_0}} \quad (\text{D.21})$$

$$\nu_0 = \rho_0 v_A L_0 = \frac{\rho_0 B_0 L_0}{\sqrt{\mu_0 \rho_0}} \quad (\text{D.22})$$

特に、速度の規格化単位 v_A 、時間の規格化単位 τ_A はそれぞれアルフベン速度、アルフベン時間と呼ばれる量である。

D.1.4 差分化

式 (D.1), (D.2), (D.4) から分かる通り、MHD 方程式は時間微分と空間微分を含む微分方程式であり、特に空間微分の項の影響から、その時間変化を計算することは実は容易ではない。本論文で用いたシミュレーションコードにおいては、時間および空間の差分化に二段階 Lax-Wendroff 法による計算を用いる。二段階 Lax-Wendroff 法は衝撃波に強い多次元問題の計算手法として、古くから用いられてきた方法である。二段階 Lax-Wendroff 法では、空間は互い違いに配置された二種類の格子点 (仮にここでは、仮格子点と真格子点と呼ぶ) に分割される (図 D.1)。1 時間ステップは 2 段階に分けられており、まず第一

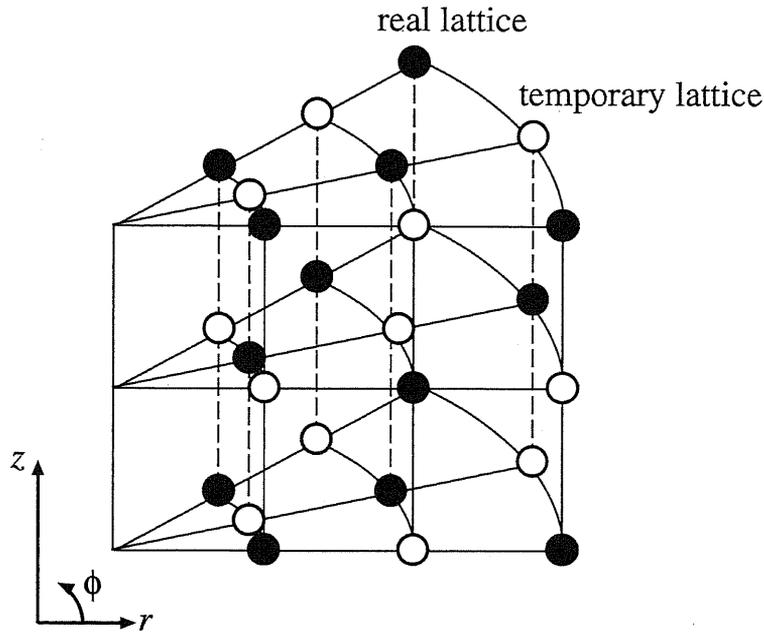


図 D.1: Schematic view of lattice geometry in 2 step Lax-Wendroff method.

段階で仮格子点における暫定的な値が計算され、それをを用いて第二段階で、真格子点における実際の値が計算される。

変数ベクトル

$$\mathbf{u} = (\rho, \rho v_r, \rho v_\phi, \rho v_z, B_r, B_\phi, B_z) \quad (\text{D.23})$$

を定義すると式 (D.8)-(D.14) は

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} &= \nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{u}) + \frac{\mathbf{G}}{r} \\ &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \mathbf{F}_r(\mathbf{u}) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} \mathbf{F}_\phi(\mathbf{u}) + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{F}_z(\mathbf{u}) + \frac{\mathbf{G}(\mathbf{u})}{r} \end{aligned} \quad (\text{D.24})$$

という形で表すことができる。

この時二段階 Lax-Wendroff 法による差分化式は以下の様に表せる。

- 第一段階

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{(i+\frac{1}{2}, j, k)}^{n+\frac{1}{2}} &= \overline{\mathbf{u}_{(i+\frac{1}{2}, j, k)}^n} \\ &+ \left[\frac{1}{r_{i+\frac{1}{2}}} \frac{r_{i+1} \mathbf{F}_r^n(i+1, j, k) - r_i \mathbf{F}_r^n(i, j, k)}{\Delta r_{i+\frac{1}{2}}} + \frac{1}{r_{i+\frac{1}{2}}} \frac{\mathbf{F}_\phi^n(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k) - \mathbf{F}_\phi^n(i+\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}, k)}{\Delta \phi} \right. \\ &\left. + \frac{\mathbf{F}_z^n(i+\frac{1}{2}, j, k+\frac{1}{2}) - \mathbf{F}_z^n(i+\frac{1}{2}, j, k-\frac{1}{2})}{\Delta z} + \frac{1}{r_{i+\frac{1}{2}}} \mathbf{G}_{(i+\frac{1}{2}, j, k)}^n \right] \frac{\Delta t}{2} \end{aligned} \quad (\text{D.25})$$

● 第二段階

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{(i,j,k)}^{n+1} &= \mathbf{u}_{(i,j,k)}^n \\ &+ \left[\frac{1}{r_i} \frac{r_{i+\frac{1}{2}} \mathbf{F}_{r(i+\frac{1}{2},j,k)}^{n+\frac{1}{2}} - r_{i-\frac{1}{2}} \mathbf{F}_{r(i-\frac{1}{2},j,k)}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta r_i} + \frac{1}{r_i} \frac{\mathbf{F}_{\phi(i,j+\frac{1}{2},k)}^{n+\frac{1}{2}} - \mathbf{F}_{\phi(i,j-\frac{1}{2},k)}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta \phi} \right] \Delta t \\ &+ \left[\frac{\mathbf{F}_{z(i,j,k+\frac{1}{2})}^{n+\frac{1}{2}} - \mathbf{F}_{z(i,j,k-\frac{1}{2})}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta z} + \frac{1}{r_i} \mathbf{G}_{(i,j,k)}^{n+\frac{1}{2}} \right] \Delta t \end{aligned} \quad (\text{D.26})$$

ここで、 i, j, k はそれぞれ r, ϕ, z 方向の格子点の番号を示し、

$$\mathbf{u}_{(i,j,k)}^n = \mathbf{u}(r_i, \phi_j, z_k) |_{t=t_n} \quad (\text{D.27})$$

$$\mathbf{F}_{a(i,j,k)}^n = \mathbf{F}_a(\mathbf{u}_{(i,j,k)}^n) \quad (\text{D.28})$$

$$\mathbf{G}_{a(i,j,k)}^n = \mathbf{G}_a(\mathbf{u}_{(i,j,k)}^n) \quad (\text{D.29})$$

但し a は r, ϕ, z のいずれかを示す。以上の式から分かる通り、第一段階においては $t = t_{n+\frac{1}{2}}$ 時点における仮格子点上の各変数の値を、 $t = t_n$ における真格子点上の値に基づき計算する。第二段階においては $t = t_n$ 時点から $t = t_{n+1}$ 時点への真格子点上の各変数の時間変化を、 $t = t_{n+\frac{1}{2}}$ 時点における仮格子点上の各辺数値を用いて計算する。計算の途中、 \mathbf{G} の計算のため真格子点上の $\mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}}$ 、仮格子点上の \mathbf{n} が必要となるが、これはそれぞれの時点における周囲の 6 点の空間平均

$$\overline{\mathbf{u}}_{(i,j,k)}^n = \frac{1}{6} \left[\mathbf{u}_{(i-\frac{1}{2},j,k)}^n + \mathbf{u}_{(i+\frac{1}{2},j,k)}^n + \mathbf{u}_{(i,j-\frac{1}{2},k)}^n + \mathbf{u}_{(i,j+\frac{1}{2},k)}^n + \mathbf{u}_{(i,j,k-\frac{1}{2})}^n + \mathbf{u}_{(i,j,k+\frac{1}{2})}^n \right] \quad (\text{D.30})$$

により計算する。なお、抵抗、粘性項については第二段階の計算のみ Euler 法を用いて取り扱っている。二段階 Lax-Wendroff 法は $O(\Delta r)^2$ の精度を有しているが、抵抗、粘性項に関しては精度は $O(\Delta t)$ である。

二段階 Lax-Wendroff 法を用いる場合、数値安定性を確保するためには Courant-Friedrichs-Levy 条件を満たす必要がある。これは、変動が 1 時間ステップの間に空間を 1 セル以上移動できないと言う条件であり、これにより空間格子間隔から時間ステップの幅が制限される。さらに非線形方程式に適用する場合には Courant-Friedrichs-Levy 条件を満たした上で、さらに人工粘性項を加えるなどの工夫が必要である。

D.1.5 境界条件

境界は完全導体でかつ流体の滑べりはないものとする。従って、 \mathbf{B} の境界に垂直な成分 $B_{\perp} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{n}$ と \mathbf{v} に対する境界条件は

$$\frac{\partial B_{\perp}}{\partial t} = 0 \quad (\text{D.31})$$

$$\mathbf{v} = 0 \quad (\text{D.32})$$

である。B の壁と平行な成分に対する境界条件は、次の様にして導かれる。式 (D.12)-(D.14) をまとめて

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \cdot \mathbf{F}_B \quad (\text{D.33})$$

とする。ここで、周囲が完全導体壁であることから、各断面内での磁束は保存されるので、磁束密度の体積積分 $\int \mathbf{B} dv$ が保存され、

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \frac{1}{\Delta t} \int \mathbf{F}_B \cdot \mathbf{n} dS \quad (\text{D.34})$$

という境界セルにおける保存条件を導くことができる。これと境界上で

$$\mathbf{j} \times \mathbf{n} = 0 \quad (\text{D.35})$$

が成立することを合わせて、B の境界と平行な成分を計算することができる。なお、二段階 Lax-Wendroff 法を用いる場合、第一段階、第二段階のそれぞれにおいて境界となる格子点上で上記の境界条件を計算する必要がある。

D.1.6 人工粘性

線形方程式系に二段階 Lax-Wendroff 法を適用すれば、Courant-Friedrichs-Levy 条件を満たす様に時間ステップ幅を設定することにより数値的安定性を確保できる。しかし、非線形方程式に適用した場合にはこれだけでは安定性は保証されない。そのために人工粘性項を導入した。

l 時間ステップ間の $\mathbf{u}(i, j, k)$ の変化分

$$\Delta_l \mathbf{u}_{(i,j,k)}^n = \mathbf{u}_{(i,j,k)}^n - \mathbf{u}_{(i,j,k)}^{n-l} \quad (\text{D.36})$$

に対して、

$$\begin{aligned} \Delta_l \mathbf{u}_{(i,j,k)}^{n'} = & a_1 \Delta_l \mathbf{u}_{(i-\frac{1}{2},j,k-\frac{1}{2})}^n + a_2 \Delta_l \mathbf{u}_{(i+\frac{1}{2},j,k-\frac{1}{2})}^n + a_3 \Delta_l \mathbf{u}_{(i-\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2})}^n + a_4 \Delta_l \mathbf{u}_{(i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2})}^n \\ & + a_5 \Delta_l \mathbf{u}_{(i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k)}^n + a_6 \Delta_l \mathbf{u}_{(i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k)}^n + a_7 \Delta_l \mathbf{u}_{(i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k)}^n + a_8 \Delta_l \mathbf{u}_{(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k)}^n \\ & + a_9 \Delta_l \mathbf{u}_{(i,j-\frac{1}{2},k-\frac{1}{2})}^n + a_{10} \Delta_l \mathbf{u}_{(i,j+\frac{1}{2},k-\frac{1}{2})}^n + a_{11} \Delta_l \mathbf{u}_{(i,j-\frac{1}{2},k+\frac{1}{2})}^n + a_{12} \Delta_l \mathbf{u}_{(i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2})}^n \end{aligned} \quad (\text{D.37})$$

を求め、

$$\mathbf{u}_{(i,j,k)}^{n'} = b \mathbf{u}_{(i,j,k)}^{n-l} + (1-b) \Delta_l \mathbf{u}_{(i,j,k)}^{n'} \quad (\text{D.38})$$

を新たな $\mathbf{u}_{(i,j,k)}^n$ の値とする。 $a_1 \cdots a_{12}$ は重み因子で、円筒座標では格子間隔の不均一を考慮して

$$a_1 = \cdots = a_4 = \frac{(r_i \Delta \phi)^2}{8(\Delta r_i)^2 + 4(r_i \Delta \phi)^2} \quad (\text{D.39})$$

$$a_5 = \cdots = a_{12} = \frac{(r_i)^2}{8(\Delta r_i)^2 + 4(r_i \Delta \phi)^2} \quad (\text{D.40})$$

$$(\text{D.41})$$

を用いた。また $b = 0.75$ とした。この操作は $l = 1$ について各時間ステップ行い、更に $l = 100$ に対しては 4 ステップ毎に行った。

D.1.7 圧力を考慮したシミュレーション

本来プラズマ圧力 $p = n\kappa T$ を扱う際、密度と温度の両方を考慮しなければならないが、本シミュレーションコードでは温度一様とし、密度変化のみ取り扱った。これは激しい緩和過程においては磁気面が破壊され、電子による磁力線方向の熱伝導が支配的となるため、等温を仮定した方がむしろ実情に即していると考えたからである。計算においては $\rho = 0$ とすることができないため、平衡計算で得られた圧力分布に一様に $p_0 = \rho_0 T_0$ ($\rho_0 = 0.1$) を加えて初期条件とする。 T_0 は p_{\max} が最大磁気圧 $B_0/2\mu_0$ で規格化したベータ値 β_0 を満たす様設定した。

$$\beta_0 = \frac{2\mu_0 p_{\max}}{B_0^2} = 2\rho_{\max} T_0 = 2T_0 \quad (\text{D.42})$$

D.2 スフェロマックの傾斜不安定性シミュレーション

本計算機コードの信頼性を検討するため、スフェロマック ($I_{tfc} = 0$) における傾斜不安定性のシミュレーションを行い、従来得られている結果と比較する。

円筒スフェロマック配位の安定性は [43][44] において検討され、縦に細長い (軸方向長さ L 、外半径 R とすると $L/R \geq 1.67$) のとき内部傾斜モードに対して不安定となることが Taylor 理論を適用した固有値 λ の解析から知られている。更に、不安定性の線形成長率 γ が $n = 1$ モードに対する 2次元線形化 MHD 方程式を用いて求められている。そこで、様々な L/R について三次元シミュレーションを行い、モード成長の初期段階の運動エネルギー W_k の増加率から線形成長率を求め [43] の結果と比較する。線形領域では全空間領域 V にわたって積分した

$$W_k = \int_V \frac{1}{2} \rho v^2 dV \quad (\text{D.43})$$

は

$$\frac{dW_k}{dt} = 2\gamma W_k \quad (\text{D.44})$$

に従って増加する。計算に用いた格子点数は (r, ϕ, z) 方向にそれぞれ (15, 29, 66) とした。図 D.2 にシミュレーション領域の形状を示す。

本シミュレーションコードでは円筒座標における原点の処理を取り入れていないため、初期平衡として外径 1.0 内径 0.1 の同心円筒状無力磁界スフェロマック配位を用いた。

式 (A.20) に関して λ 一定とした同心円筒状無力磁界スフェロマックの解は、円筒座標系では Helmholtz 方程式の解 ξ を用いて

$$\mathbf{B} = \nabla \times \xi \mathbf{z} + \frac{1}{\lambda} \nabla \times \nabla \times \xi \mathbf{z} \quad (\text{D.45})$$

$$\nabla^2 \xi + \lambda^2 \xi = 0 \quad (\text{D.46})$$

で与えられる。ここで \mathbf{z} は z 方向の単位ベクトルである。半径 $R (= 1)$ 、高さ L の円筒面上で $\mathbf{B} \cdot \mathbf{z} = 0$ となる軸対称の解は

$$B_r = -\frac{k_z}{\lambda} J_1(k_r r) \cos k_z z \quad (\text{D.47})$$

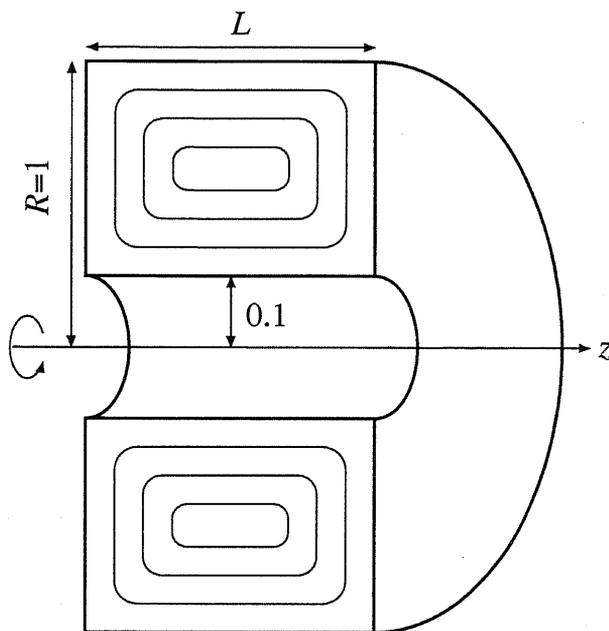


図 D.2: Simulation area for tilting mode study.

$$B_\phi = J_1(k_r r) \sin k_z z \quad (\text{D.48})$$

$$B_z = \frac{k_r}{\lambda} J_0(k_r r) \sin k_z z \quad (\text{D.49})$$

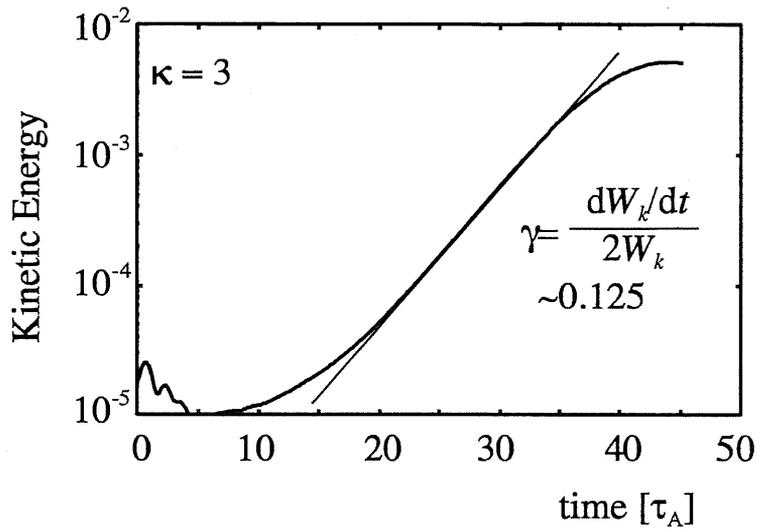
で与えられる. ここで J_n は n 次第 1 種 Bessel 関数, $k_r R = j_{11} = 3.83171$, $k_z L = \pi$ である. j_{11} は J_1 の最初の零点である.

この初期平衡解に対して流速 v を摂動として加える.

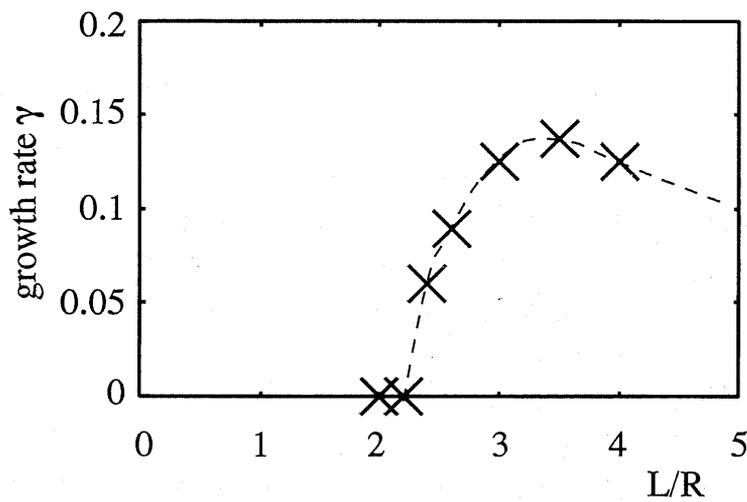
$$v_r = v_\phi = 0, \quad v_z = v_I J_1(k_r r) \sin k_z z \sin n\phi \quad (\text{D.50})$$

傾斜不安定性はトロイダルモード数が 1 であるので $n = 1$ の摂動を与える. 配位が不安定であると, この摂動により不安定モードが成長していく. 流速 $v_I = 10^{-2}$, $\eta = \nu = 0$ とした. 図 D.3 に $L/R = 3$ における運動エネルギーの時間変化を示す. 約 $20 \tau_A$ に始まる傾斜運動の運動エネルギー変化から, その成長率 $\gamma = 0.125$ と見積もることができる.

こうして得られた成長率を L/R に対してプロットすると, 図 D.4 の様になる. 傾斜不安定性は $L/R \geq 2.4$ で発生し $L/R = 3.5$ で成長率 $\gamma \sim 0.137$ と最大になる. 文献 [43] では $L/R \geq 1.6$ で発生し $L/R = 3.0$ で成長率が最大値 0.2 となっており, 本シミュレーションの方が不安定性の成長が弱い. これには完全導体である中心導体壁の影響が傾斜の成長を妨げた結果と考えられる. また, 円筒座標系を用いて中心導体のあるシミュレーション結果 [45] と定量的にもほぼ一致する.



⊠ D.3: Time evolution of kinetic energy of tilting motion ($L/R = 3$).



⊠ D.4: Growth rates of tilting instability as a function of elongation.

D.3 コンパクト RFP に関する計算機シミュレーション

D.3.1 固有値分布を持つコンパクト RFP

本節では $A = 1.5$ のコンパクト RFP に関して固有値 λ (ポロイダル電流関数) を変化させてシミュレーションを行う。

固有値が一定でない、すなわち無力磁界配位でない RFP は、磁気ヘリシティー ($K = \int \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} dV$) が一定という拘束条件の下でエネルギー的に最小な状態でないため、磁気緩和を生じて無力磁界配位を形成すると予想される。

プラズマ電流と外部トロイダルコイル電流の比は 3:1 とし、 $\eta = 10^{-5}$ とした。

ポロイダル電流関数としては

$$I_{pol} = I_{tfc} [1 + \gamma(a\Psi + (1-a)\Psi^2)] \quad (D.51)$$

という 2 次式とした。すなわち固有値 λ は

$$\lambda = \frac{dI_{pol}}{d\Psi} = a + 2(1-a)\Psi \quad (D.52)$$

となり、 $a < 1$ では λ が磁気軸に近い程上昇し、 $a > 1$ では逆に下降する。また a が小さい程ポロイダル電流は磁気軸付近に流れる。

本シミュレーションにおいては a として 0, 0.3, 0.5, 0.7, 1.0, 1.3, 1.5, 1.7, 1.9 を用いた。図 D.5 に I_{pol} , λ 分布を示す。

初期平衡にトロイダルモード $n = 1$ の z 方向摂動 ($v_i = 5 \times 10^{-2}$) を加え、変化を比較する。

$a = 0.5$ では図 D.6 の様に運動エネルギー (磁気エネルギーで規格化) の成長がみられ、磁束緩和 (ダイナモ) が発生する。磁束緩和前後において磁気軸付近で $q \sim 1/3$ だったものが $1/3$ 以上に増加し、 λ 分布も平坦になることが確認された。また、端部付近を除き最も大きなトロイダルモードの観測された $r = 0.85$ におけるトロイダル磁界の規格化トロイダルモードの時間変化を図 D.8 に示す。 $t \sim 20\tau_A$ 付近から $q_a \sim 1/3$ に対応する $n = 3$ モードのみが成長していることが分かる。

$0.7 < a < 1.7$ では $a = 1$ の場合を除き無力磁界配位ではないにも関わらずダイナモの発生は見られなかった。特に $a = 1.7$ のケースは、図 D.9 に示すように $(m, n) = (1, 1)$ の強い内部キック不安定性を生じる $q = 1$ 面を配位内に含んでいるが、 $70\tau_A$ までに有意なモードの成長は見られなかった。

a の小さい、すなわちポロイダル電流が端に多く流れている場合には $q = 1$ 面を内包する様な極端な配位においてもダイナモが生じないことから、無力磁界配位より周辺ポロイダル電流の多い配位の方がより少ない配位よりもダイナモを生じにくい。

D.3.2 RFP 安定性のアスペクト比依存性

ここではアスペクト比の異なる RFP に関して計算機シミュレーションを行い、RFP の低アスペクト比化の効果を検証する。

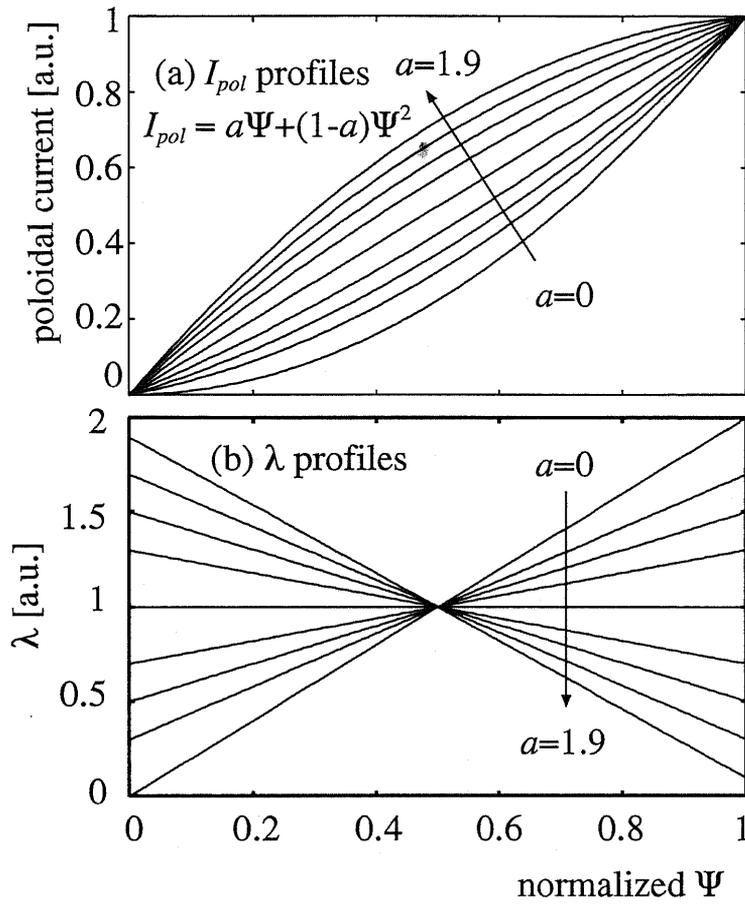


図 D.5: I_{pol} and λ functions.

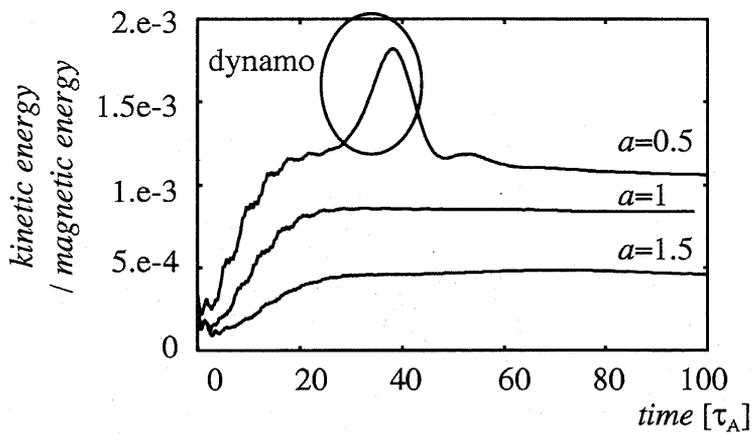


図 D.6: Time evolutions of kinetic energy of compact RFP with $I_{pol} = I_{tfc}[1 + \gamma(a\Psi + (1-a)\Psi^2)]$, $a = 0.5, 1, 1.5$.

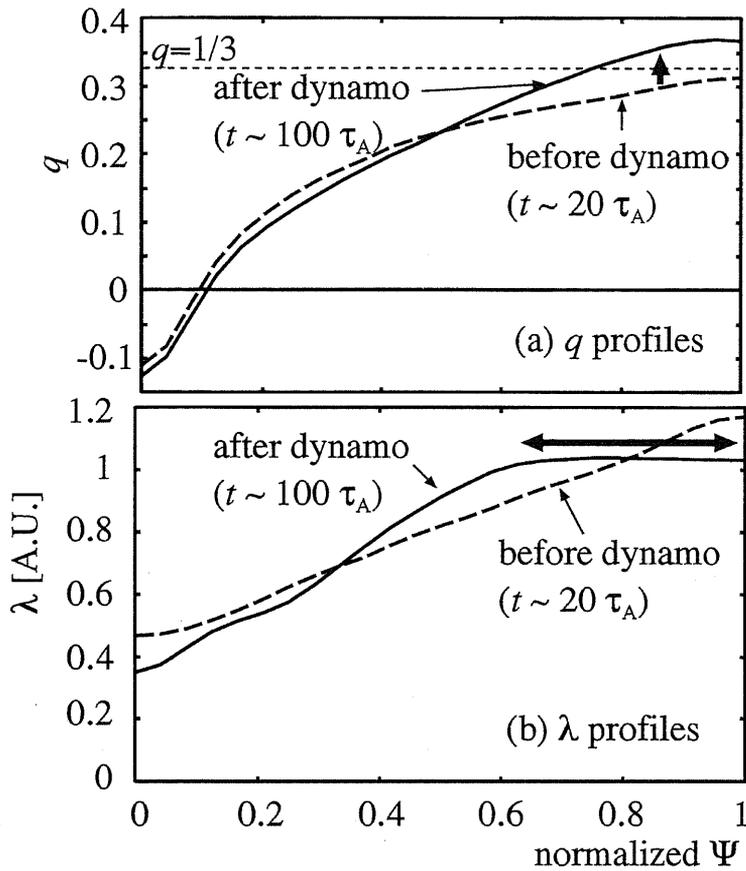


図 D.7: (a) q and (b) λ profiles of a compact RFP ($A = 1.5$) as a function of normalized Ψ . Solid / dashed lines indicate after / before dynamo, respectively.

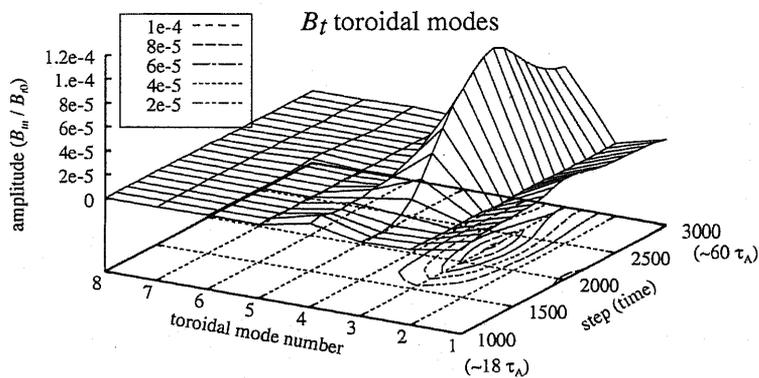


図 D.8: Time evolutions of toroidal mode amplitude of B_t ($A = 1.5$).

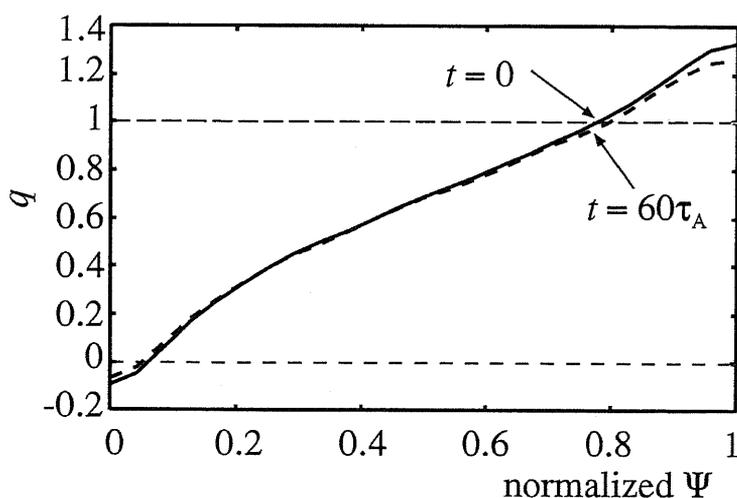


図 D.9: q profiles of high- q configuration ($I_{pol} = I_{tfc}[1 + \gamma(1.7\Psi - 0.7\Psi^2)]$).

前節においてダイナモを生じた $I_{pol} = I_{tfc}[1 + \gamma(0.5\Psi + 0.5\Psi^2)]$ を用い、配位の形状のみを変化させる。プラズマ電流と外部トロイダルコイル電流の比は 3:1 とし、 $\eta = 10^{-5}$ とした。より高次モードの成長を調べるため計算に用いた格子点数は (r, ϕ, z) 方向にそれぞれ (29, 57, 66) とした。

配位形状ポロイダル断面を長さ 1 の正方形とした (図 D.10)。すなわち、計算領域はの内径 r_{min} 、外径 r_{max} 、とアスペクト比 A 、小半径 $a = 0.5$ との間には

$$r_{max} - r_{min} = 2a \quad (D.53)$$

$$r_{max} + r_{min} = 2aA \quad (D.54)$$

という関係がある。 r_{min} , r_{max} に関して整理すると

$$r_{max} = a(A + 1) \quad (D.55)$$

$$r_{min} = a(A - 1) \quad (D.56)$$

となる。アスペクト比として $A = 1.5, 3, 5$ の 3 通りを選んだ。図 D.11 に各配位の q 分布を示す。

それぞれ初期平衡として各磁気軸に近い有理面に共鳴するトロイダルモードの z 方向摂動 ($v_i = 5 \times 10^{-2}$) を加え、ダイナモに伴う各モードの成長を比較する。初期摂動として加えたモードのモード数は $A = 1.5$ に関しては $n = 3$, $A = 3$ では $n = 5$, $A = 5$ では $n = 9$ である。

図 D.12 に各配位における磁気エネルギーで規格化された運動エネルギーの時間変化を示す。 $t \sim 10\tau_A$ においてダイナモが生じ、 q 分布が大きく変化するが、その後も小さな変化が続く。

図 D.13 に磁気軸における q 値 (q_0) の時間変化を示す。運動エネルギー同様、 $10\tau_A$ 付近で初期平衡値から上昇し、 $A = 1.5$ において $1/3$, $A = 3$ においては $1/5$, $A = 5$ において

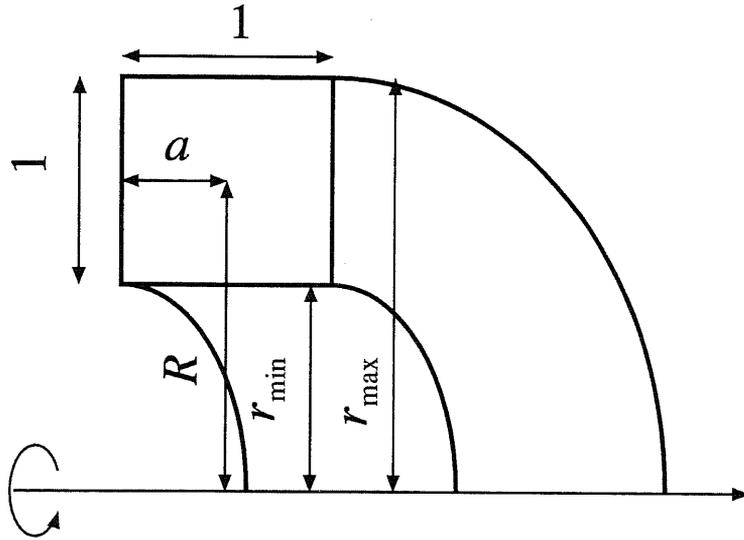


図 D.10: Simulation area for aspect ratio study.

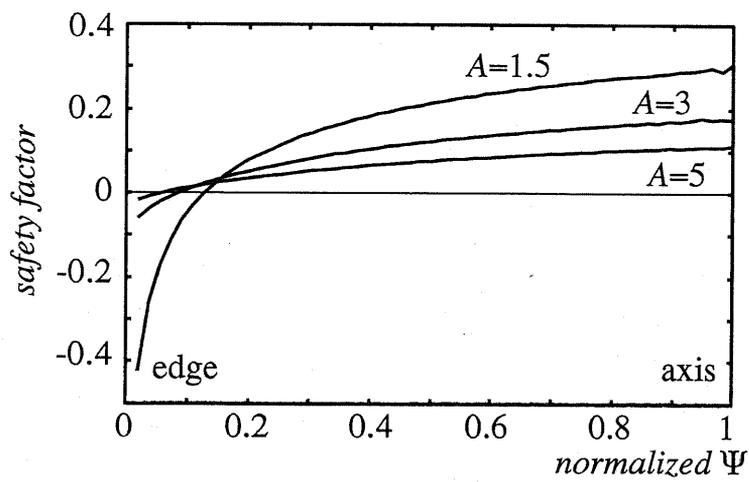


図 D.11: Safety factor profiles of RFPs with $A = 1.5, 3, 5$ as a function of normalized Ψ .

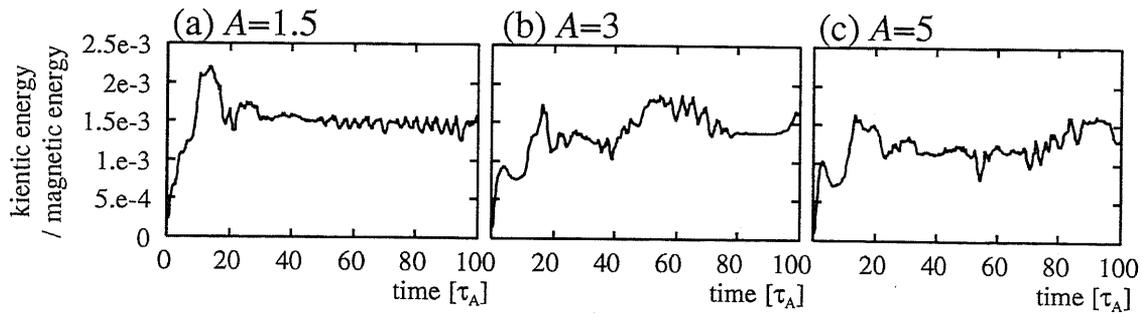


図 D.12: Time evolutions of kinetic energy normalized by magnetic energy. (a) $A = 1.5$, (b) $A = 3$ and (c) $A = 5$ are shown.

て $1/9$ 付近に至る. . . $A = 1.5$ に関しては, その後の q_0 の変動は小さい (ダイナモ後の q 値変化幅 $\Delta q < 0.01$) のに対し, $A = 3, 5$ に関しては, $\Delta q > 0.015$ と大きい. 特に $A = 5$ では隣接する有理面に q_0 値が接近しており, 複数のモードが成長する可能性が高い.

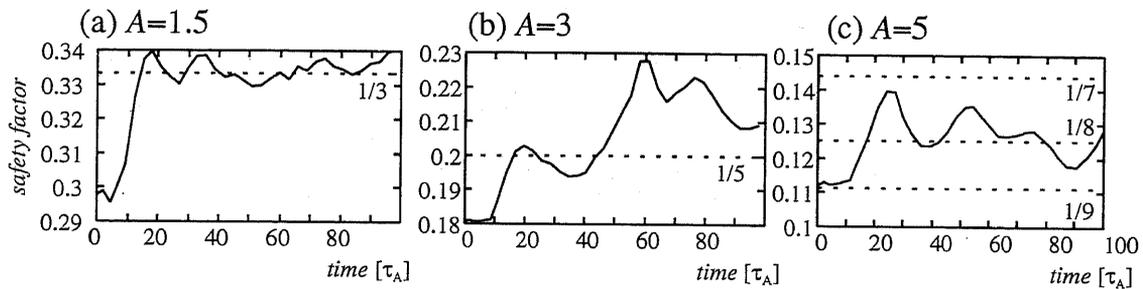
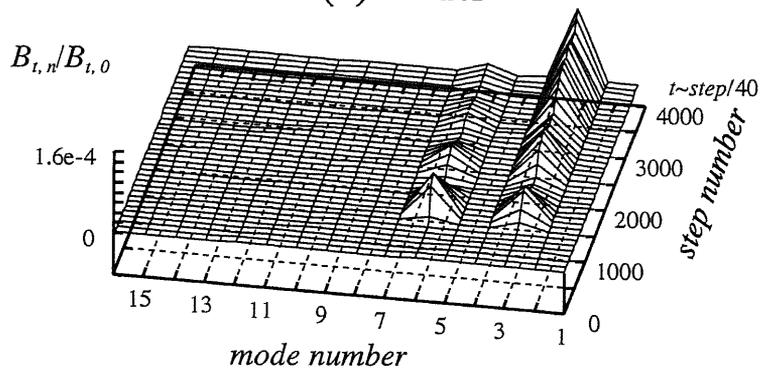


図 D.13: Time evolutions of safety factor at magnetic axis. (a) $A = 1.5$, (b) $A = 3$ and (c) $A = 5$ are shown.

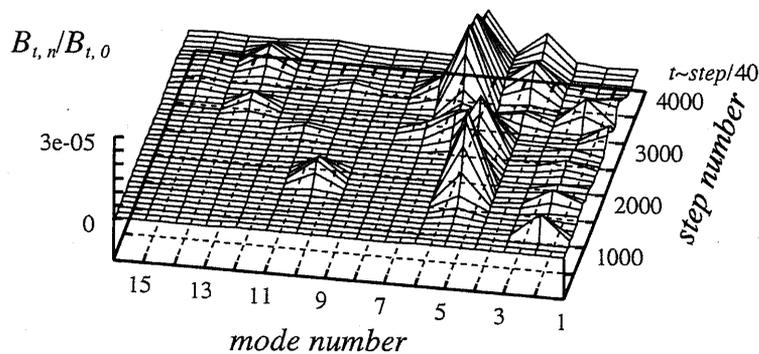
図 D.14 に各配位の中心におけるトロイダル磁界の各トロイダルモード成分を, $n = 0$ 成分で規格化した値の時間発展を示す. $A = 1.5$ の場合には $n = 3$ モードが支配的で, その他には 2 倍波である $n = 6$ モード以外はほとんど見られないのに対し, $A = 3$ では最初のダイナモの起こる時間 $t \sim 10\tau_A \approx 500\text{step}$ には $n = 5$ モードが支配的であるものの, 2500step 以降は $n = 6$ が最も強くなり, $n = 4$ モードなども観測されるようになる. 特に $A = 5$ の場合には比較的広範なモード数が観測される. $t = 2000\text{step} \sim 54\tau_A$ における各モードの強度分布を図 D.15 に示す. $n = 10$ モードが最も強く, 隣接する $n = 7, 8, 9$ の各モードもその $1/4$ から $1/2$ 程度の強さで存在していることがわかる.

このようにアスペクト比が大きくなることで有理面の間隔が狭まり, 複数のモードの活動が重なって見られるようになる. これによって stochastic な磁力線が形成され, 粒子損失が生じると考えられる. アスペクト比がさがることによってモードの重なりといった減少は見られなくなる.

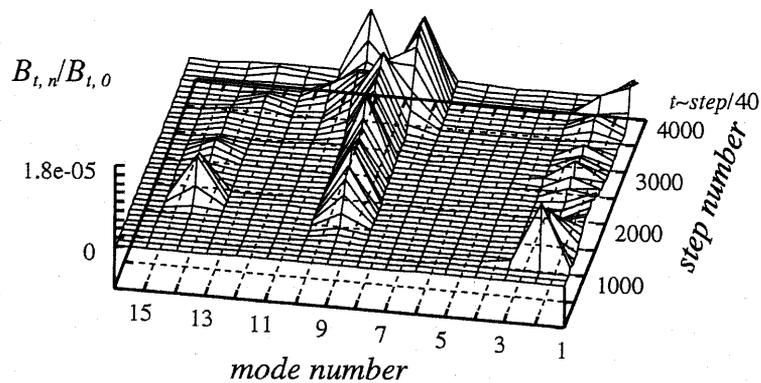
(a) $A=1.5$



(b) $A=3$



(c) $A=5$



☒ D.14: Time evolutions of toroidal mode amplitude of B_t at magnetic axis normalized by $n = 0$ amplitude. (a) $A = 1.5$, (b) $A = 3$ and (c) $A = 5$ are shown.

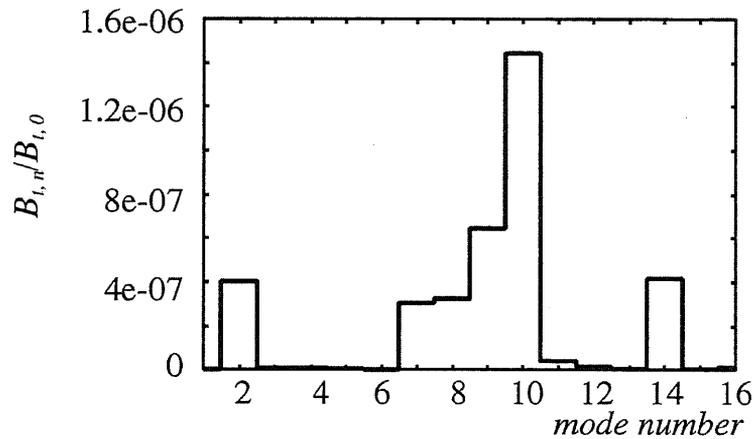


図 D.15: Toroidal mode amplitude profiles of B_t at magnetic axis normalized by $n = 0$ amplitude ($A = 5$, $t \sim 54\tau_A$).

D.4 高ベータ ST に関する計算機シミュレーション

プラズマ圧力を考慮したシミュレーションによってプラズマ合体により生成される高ベータ ST の MHD 安定性を調査する。

初期平衡はプラズマ電流 I_{plasma} および外部トロイダル磁界コイル電流 I_{tfc} に関して $I_{tfc}/I_{plasma} = 2$ の比に固定し、圧力関数およびポロイダル電流関数には

$$p(\Psi) = 0.01 + 0.77\Psi + 9.43\Psi^2 - 36.23\Psi^3 + 57.32\Psi^4 - 42.6\Psi^5 + 12.3\Psi^6 \quad (D.57)$$

$$I_{pol}(\Psi) = I_{tfc}[1 + \gamma(0.6\Psi + 10.15\Psi^2 - 38.55\Psi^3 + 64.73\Psi^4 - 51.64\Psi^5 + 15.71\Psi^6)] \quad (D.58)$$

を用いた。ただしこれらの数値は FRC から生成した高ベータ ST 実験結果から近似したものである。また、外部平衡磁界コイルの電流値を適当に調整することにより中心導体と接する部分以外のセパトリクスを完全導体壁から離れた。プラズマ電流と外部トロイダルコイル電流の比は 1:2 とし、 $\eta = 10^{-5}$ とした。

本シミュレーションで用いた楕円度 κ を変化させた 2 つの初期平衡形状を図 D.16 に示す。図 D.16 (a) に示した配位は $\kappa = 1.3$ であり、体積平均ベータ値約 0.63 である。この配位では圧力駆動型の不安定性が生じることを想定している一方 D.16 (b) に示した配位は $\kappa = 2.1$ であり、体積平均ベータ値約 0.29 であり、圧力駆動型の不安定性が生じにくい配位である。また、図 D.17 に q 分布を示す共に配位中に $q = 1$ 面を含む様にしていく。

運動エネルギー (磁気エネルギーで規格化) の時間変化を図 D.18 に示す。両者の成長率はそれぞれ $\kappa = 1.3$ の場合で $\gamma = 0.28$, $\kappa = 2.1$ の場合で 0.045 と非常に差が生じている。

両者の圧力 (密度) 分布の時間変化を図 D.19 に示す。 $\kappa = 1.3$ の場合には中心の位置はほぼ動かず配位の周辺部から変形が進行しているのに対し、 $\kappa = 2.1$ の場合には圧力ピークの位置が徐々に左上に動いて行くのが分かる。

さらに図 D.20, D.21 にそれぞれ $\kappa = 1.3, 2.1$ の場合の (a) 磁気軸および (b) セパトリクス (径方向外側) における $n = 0$ 成分で規格化したトロイダル磁界のトロイダルモー

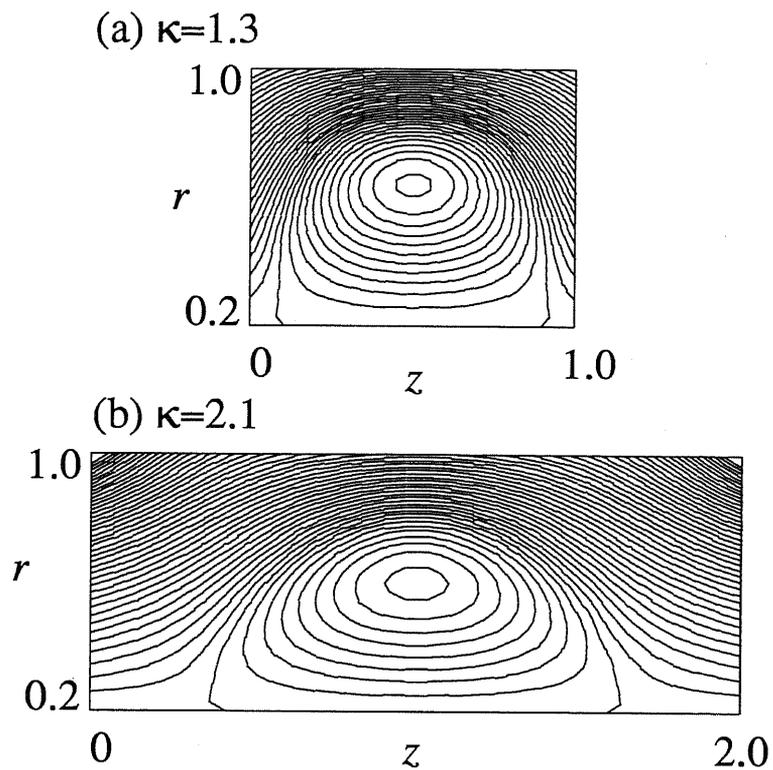


図 D.16: Poloidal flux contours of initial equilibrium. (a) $\kappa = 1.3$, and (b) $\kappa = 2.1$.

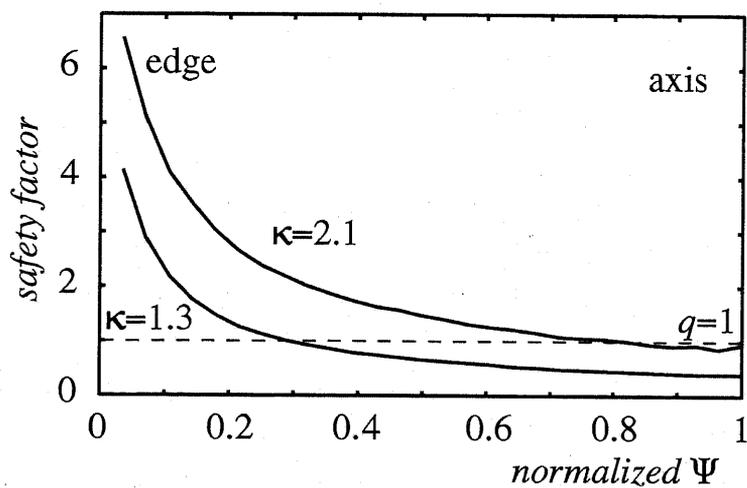


図 D.17: q profiles as a function of Ψ ($\kappa = 1.3$ and 2.1).

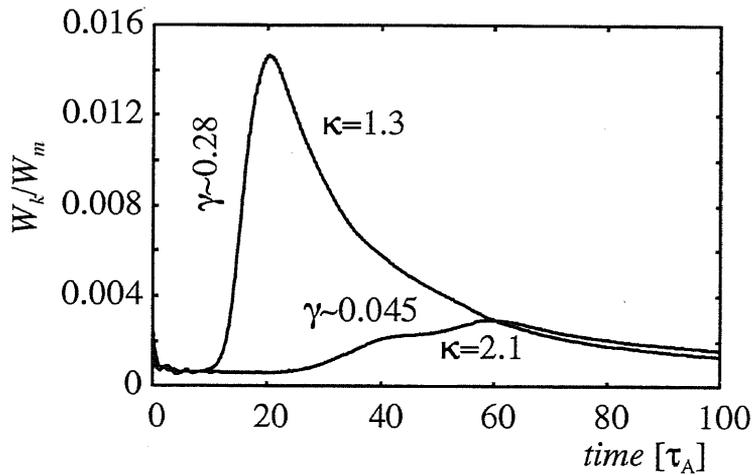


図 D.18: Time evolutions of kinetic energy in STs ($\kappa = 1.3, 2.1$).

ド時間変化を示す。

$\kappa = 1.3$ の場合には、セパトリクス付近において $n = 5$ を中心に複数のモードが急速に成長する様子が分かる。一方磁気軸付近には $n = 4$ モードが生じるが、発生時間はセパトリクス付近のモード成長よりも遅い。

$\kappa = 2.1$ の場合には、まず磁気軸付近に $n = 1$ モードが生じる。遅れてセパトリクス付近にモードが現れるが、生じているのは $n = 2$ モードである。

以上のような結果が得られた原因として考えられることは、 $\kappa = 1.3$ の場合には圧力自体が非常に高く、また楕円度も小さいことから圧力駆動型のバルーニングモードに対して不安定であり、セパトリクスの圧力勾配の強い領域から比較的モード数の高い不安定が成長した可能性がある。逆に $\kappa = 2.1$ の場合には、ベータ値は高いながらも楕円度が高いことによってバルーニングモードが安定化され、磁気軸付近の $q = 1$ 面が起点となって電流駆動型の不安定性が生じたと考えられる。

これらの推測が正しいならば、以下のような考察ができる。FRC に外部トロイダル磁界を印加し、バルーニングモードを安定化しつつ高ベータを維持しているような ST 配位では、配位生成中の外部トロイダル磁界のあまり強くない時間帯に $q = 1$ 面を内包した状態が存在するために電流駆動型の不安定性が生じる。これを防ぐためには、不安定性の成長する前に $q_0 > 1$ とする必要がある。ただしこのモードの成長率は圧力駆動モードの約 $1/6$ と緩やかであり、例えば TS-3 装置に換算すると成長時間 $50\text{-}100 \mu\text{sec}$ であるため、ST 配位の形成に要する時間約 $30\text{-}50 \mu\text{sec}$ に比べ若干長いため現在はまだ問題になっていないが、今後配位持続時間の増加や外部加熱等によって $q_0 < 1$ の状態が長時間継続する様になると問題となる。

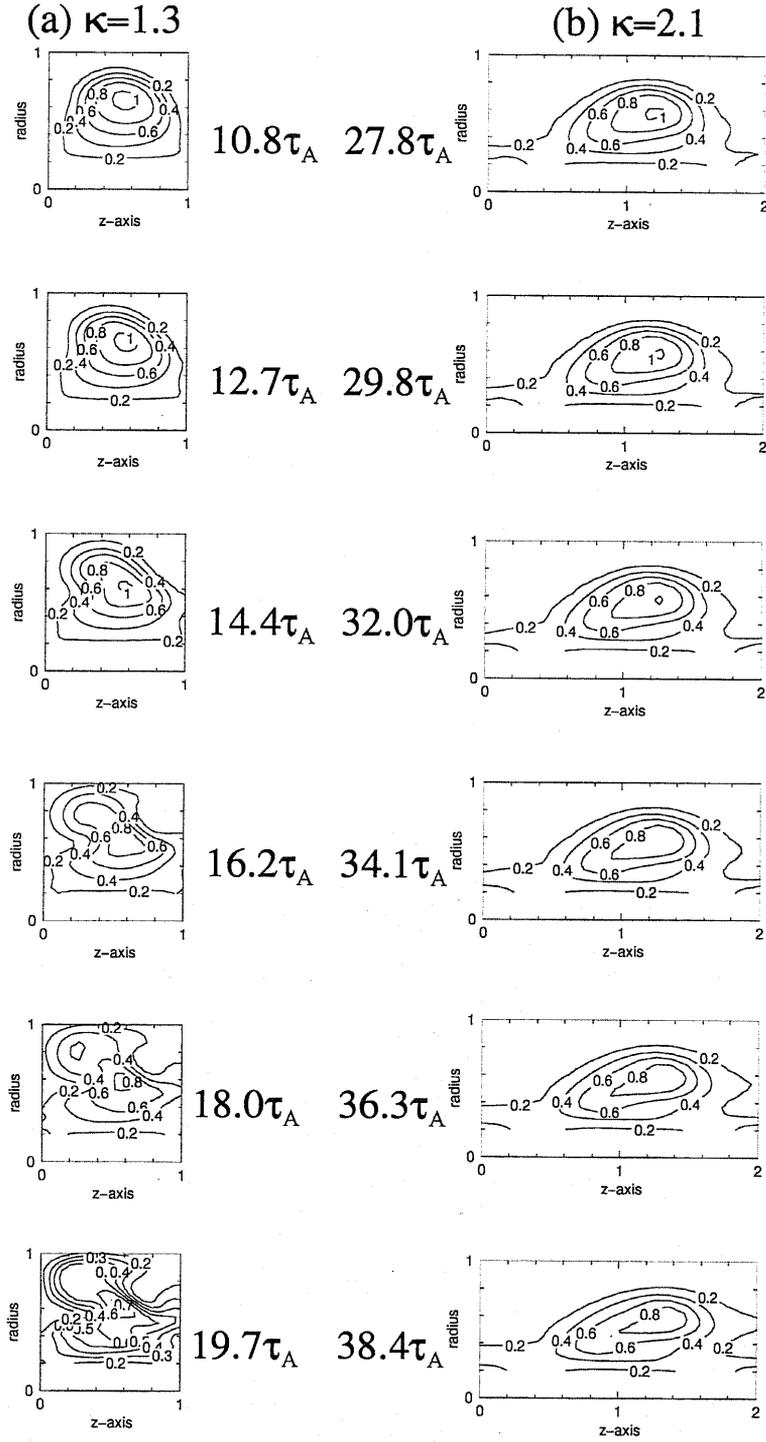
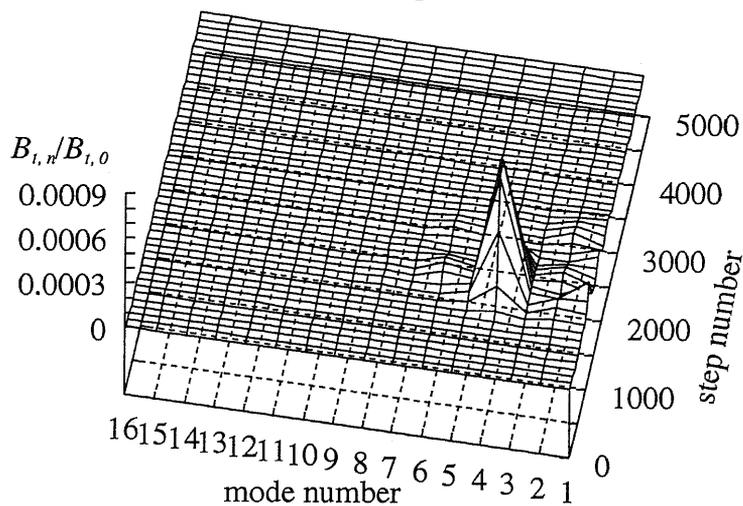
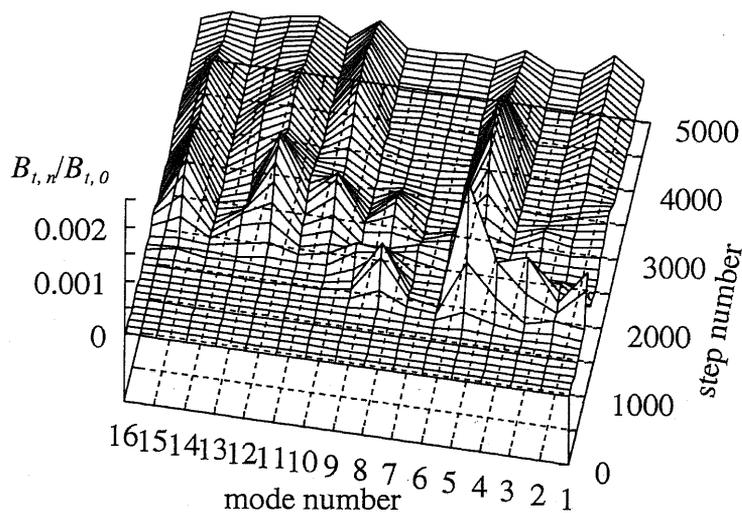


図 D.19: Time evolutions of density profiles in STs ($\kappa =$ (a)1.3, (b)2.1).

(a) $R \sim 0.5$ (magnetic axis)

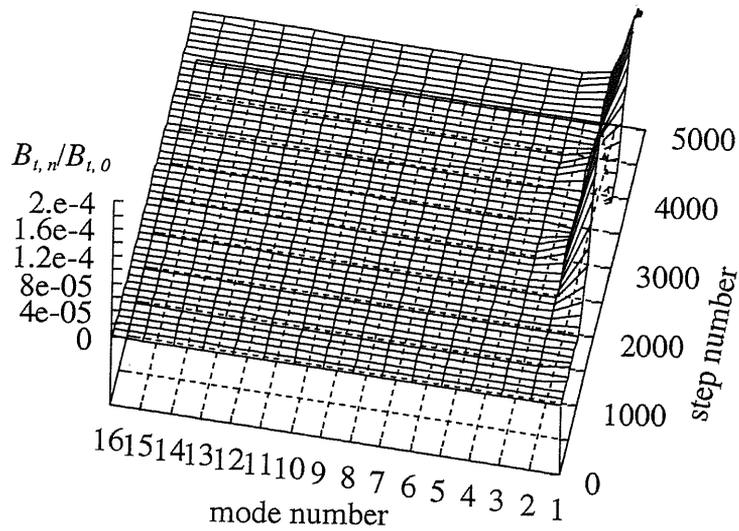


(b) $R \sim 0.8$ (separatrix)



☒ D.20: Time evolutions of toroidal mode amplitude of B_t at (a) magnetic axis and (b) separatrix (outboard side), normalized by $n = 0$ amplitude ($\kappa = 1.3$).

(a) $R \sim 0.5$ (magnetic axis)



(b) $R \sim 0.8$ (separatrix)

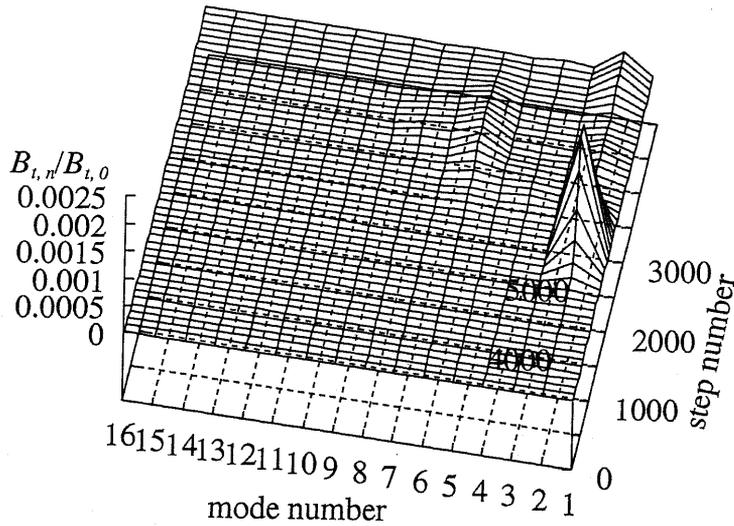


図 D.21: Time evolutions of toroidal mode amplitude of B_t at (a) magnetic axis and (b) separatrix (outboard side), normalized by $n = 0$ amplitude ($\kappa = 2.1$).