

- 修士論文 -

デジタル演算回路による  
3変数シリコンニューロンの設計

平成24年2月6日 提出

指導教員 合原 一幸 教授

東京大学大学院工学系研究科  
電気系工学専攻

(学籍番号：37096960)

氏名 小林 航

# 研究概要

本研究ではデジタル演算回路で多様なダイナミクスを持つニューロンモデル、また機能的な神経ネットワークを実装することを目的とする。

電子回路でニューロンモデルを実装することは、ニューラルネットワークの並列計算を可能にし、また生体とのハイブリッドシステムや柔軟な情報処理が可能なロボットとしても応用される可能性があるため、学術的、工学的両面の目的から研究が望まれている。デジタル演算回路でニューロンモデルを実装できれば HDL を公開することで FPGA 等のデバイスを用いて誰でも手軽にニューラルネットワークを手にするができる。

神経系の構成単位であるニューロンは単体であっても非常に複雑な挙動を示すことが知られている。しかし、ニューロンモデルをデジタル演算回路で実装する際には計算量が大きくなりすぎないように単純化したモデルを用いることで汎用プロセッサによるシミュレーションに比べて必要となるリソースを抑えたより効率的な実装が可能である。一方、神経系の挙動を忠実に再現するためにはニューロンの多様な特性を記述することが必要であり複雑なモデルになってしまう。

そのジレンマを解消するために、河野らは新たなモデルの数理的設計手法を提案した。数理的設計手法では、ニューロンの挙動の数理的構造を幾何学的にとらえ回路で実現しやすい関数で方程式を置き換え、回路実装に適した単純な方程式に変換することで従来の設計手法ではむずかしかった多様なダイナミクスを少ないリソースで実装することに成功した。

そこで本研究では、デジタル演算回路で実装するために単純で計算負荷の少ないモデルであると同時に豊富な発火パターンを再現できるものを数理的手法に基づいて設計し、考案した 3 変数のニューロンモデルを HDL 記述した。本研究の 3 変数ニューロンモデルは既存の 2 変数のモデルでは実現することのできなかったバースト発火やカオス的な挙動を実現でき、それらが Hindmarsh-Rose モデルと同等のダイナミクスを再現できることを示した。また、ネットワークの 1 つの応用例として、抑制性シナプスモデルを介して小規模ネットワークを作ることによって Half Center Oscillator としても動作することも示した。Half Center Oscillator は神経系におけるリズムを生成するパターンジェネレータの最も基本的なものであり、これを発展させることで呼吸、歩行などの生体内でのさまざまなリズムカルな運動と同等の挙動を電子回路で実現できる可能性がある。

# 目次

<b>第 1 章</b>	<b>序論</b>	<b>4</b>
1.1	背景	4
1.2	ニューロン	5
1.3	シナプス	7
1.4	シリコンニューロン、シリコンシナプス	7
1.5	研究の目的	9
1.6	論文の構成	9
<b>第 2 章</b>	<b>ニューロンモデルの設計手法</b>	<b>10</b>
2.1	イオンコンダクタンスモデル	10
2.2	現象論的モデル	10
2.3	数理的手法に基づくモデル	11
2.3.1	2 変数 Digital Spiking Silicon Neuron	11
<b>第 3 章</b>	<b>数理モデル設計</b>	<b>19</b>
3.1	2 変数 DSSN のパラメータ調整	19
3.2	3 変数 DSSN	20
3.3	シナプスモデル	26
<b>第 4 章</b>	<b>回路設計</b>	<b>28</b>
4.1	シリコンニューロン	28
4.2	シリコンシナプス	32
4.3	シリコン神経ネットワーク	34
<b>第 5 章</b>	<b>シミュレーション結果</b>	<b>35</b>
5.1	シリコンニューロン	35
5.1.1	バースト発火	35
5.1.2	カオスのバースト発火	38
5.1.3	カオスの連続発火	40
5.1.4	周期的連続発火	42
5.1.5	リアプノフ指数解析	43
5.1.6	発火周波数順応性	45
5.2	シリコン神経ネットワーク	45
5.3	回路規模と消費電力	45
<b>第 6 章</b>	<b>結論</b>	<b>48</b>
6.1	まとめ	48
6.2	今後の展望	48
	謝辞	<b>49</b>

参考文献	49
発表文献	52
付録 A	53
デジタルシリコンニューロンのパラメータ . . . . .	53
付録 B	55
リアプノフ指数解析 . . . . .	55

# 第1章 序論

## 1.1 背景

近年の大幅な技術の発展により、デジタルコンピュータの性能は大きく成長してきた。しかし、現代のデジタルコンピュータで脳全体をリアルタイムシミュレーションすることはむずかしい。また、脳はデジタルコンピュータでは難しい、曖昧でノイズの多い情報のリアルタイム処理が可能でありそのメカニズムの解明が期待されている。脳の情報処理メカニズムは、解剖学的な最小構成単位であるニューロンとシナプスによって実現されている。しかし、脳の情報処理メカニズムを解明するために脳のすべてのニューロンの内部状態を調べることは不可能である。そこで構成単位となるニューロンとシナプスを数理モデル化し、それらを用いた神経ネットワークモデルを構築、その挙動を解析する理論的アプローチが重要である。

ニューロンやシナプスの電気生理学的機能を電子回路で模倣したものをシリコンニューロン、シリコンシナプスという。シリコンニューロンによる神経ネットワークは、大規模な並列計算が可能な専用シミュレータとして、また、生体との親和性の高い医療デバイスとしての応用も期待される。先行研究では、デジタル演算回路のシリコンニューロンとして 2007 年に河野ら [1] が Digital Spiking Silicon Neuron(DSSN) を発表している。DSSN はデジタル演算回路によって実装するためにモデルが最適化されていて消費する回路リソースが少なく、パラメータを変えることによってニューロンの特徴として重要とされている Hodgkin による分類 [2]、ClassI と ClassII を選択できるよう設計されている。しかし、モデルが 2 変数であり、バースト発火などの複雑な挙動を実現できない。また、一方では Thomas ら [3] や Andrew ら [4] が FPGA を用いて Izhikevich モデルをシリコンニューロンとして実装し、シリコン神経ネットワークを構築した。しかし、Izhikevich モデルは豊富な発火パターンをもつものの、デジタル演算回路による実装に最適化されていないのでそのまま FPGA に実装するには多くのリソースを必要としてしまう。その他のデジタル演算回路への実装の研究では、モデルを極限まで単純化したバイナリニューロンモデルを用いているものがほとんどであり、神経系の挙動を忠実に再現していない可能性がある [5] [6]。そこで本研究では、上記の DSSN を基に Hindmarsh-Rose [7] モデルと同等のダイナミクスを持つ 3 変数モデルを数理的手法により設計することによって、少ない回路リソースで実装可能なバースト発火等の複雑な挙動を生成できるモデルを設計した。

## 1.2 ニューロン

脳を含む神経系での情報処理はニューロン同士の電気信号のやりとりで行われていると考えられている。ニューロンは図 1.1(a) に示すように核を持った細胞体と、そこから長く伸びる軸索と呼ばれる出力部分からなる。細胞体から伸びた入力を受け取る枝を樹状突起と呼び、通常細胞体から多数突出している。軸索は先端で枝分かれし、複数のニューロンに出力はしていても 1 つの細胞体につき一本しか持たない。軸索の先端と、入力を受け取る他のニューロンの樹状突起の結合部分はシナプスと呼ばれる。結合部分シナプスから見て軸索側の出力を送るニューロンをシナプス前ニューロン、樹状突起側の入力を受け取る側のニューロンをシナプス後ニューロンと呼ぶ。

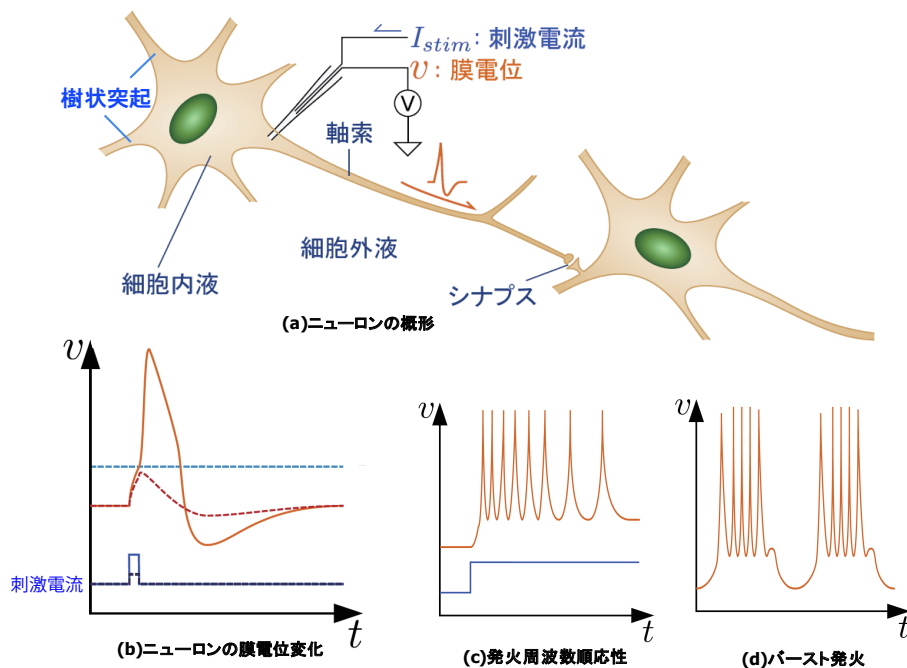


図 1.1: ニューロンの模式図と膜電位の模式図。[8] より引用。

図 1.2 にニューロンの細胞膜の模式図を示す。細胞内液、外液は、絶縁性の高い脂質二重層からなる細胞膜で仕切られている。細胞内液、外液は、様々なイオンを含む電解質溶液であり、 $\text{Na}^+$ ,  $\text{K}^+$ ,  $\text{Cl}^-$  イオンは細胞膜が持っているイオンチャネルを通して細胞内外を行き来することができる。このイオン濃度勾配により細胞膜内外では電位差が存在し、細胞外液を基準として測った細胞内液の電位を膜電位と呼ぶ。通常、ニューロンが静止状態にあるとき、膜電位は  $-100\text{mV}$  から  $-50\text{mV}$  程度で一定である。ニューロンに図 1.1(b) のような刺激電流が加わると、膜電位は急激に上昇した後やがて静止膜電位にもどる。この、膜電位の急激な上昇をニューロンの発火現象、この膜電位のパルス状の波形をスパイクという。静止状態にあるときの膜電位を静止膜電位、膜電位の様々な変動を活動電位と呼ぶ。

ニューロンの重要な特徴の一つとして、スパイクが発生する際に膜電位の閾値が存在することである。すなわち、刺激電流によって膜電位が閾値を超えたときにだけ、ニューロンはスパイクを発生させる。図 1.1(b) の例では、点線で示される不十分な刺激電流では膜電位は閾値を超えないので、点線の膜電位で示されるようにニューロンは発火しないが、実線で示されるような十分な刺激電流で膜電位が閾値を超えるとニューロンはスパイクを発生させる。上述のように入力を受け取る樹状突起は 1 つのニューロンが複数持っているので、結合を持った各ニューロンからの入力電流の時間的・空間的総和によって膜電位が閾値を超えるとスパイクが発生し、軸索を通してシナプス後ニューロンに刺激電流を伝える。

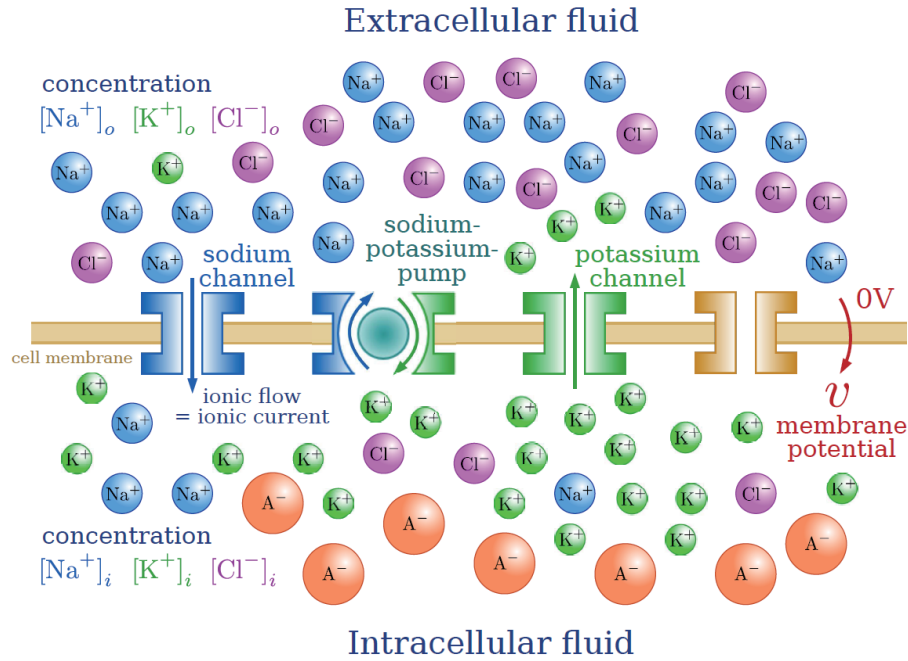


図 1.2: ニューロンの細胞膜、イオンチャネルと細胞内外に存在するイオンの模式図。[8] より引用。

ニューロンは十分な継続した刺激電流の入力を受けると連続発火をするがその発火頻度の特性がニューロンによって異なることがホジキンら [9] によって示されている。ホジキンらは連続発火の発火頻度の特性について、ニューロンを Class I と Class II という分類に分けた。図 1.3 に Class I と Class II の特性の違いを模式的に表した図を示す。持続的な刺激電流  $I_{stim}$  が閾値を超えると Class I, Class II のどちらのニューロンも連続発火を開始する (図 1.3(a))。しかし Class I のニューロンでは非常に低い周波数から連続発火が開始するのに対して、Class II のニューロンでは正のある一定の周波数で連続発火を開始する。持続的な刺激電流を変化させたときの発火周波数の変化を図 1.3(b) に示す。このように、持続的な刺激電流に対する発火周波数の立ち上がりの違いによるニューロンの分類をホジキン分類と呼ぶ。

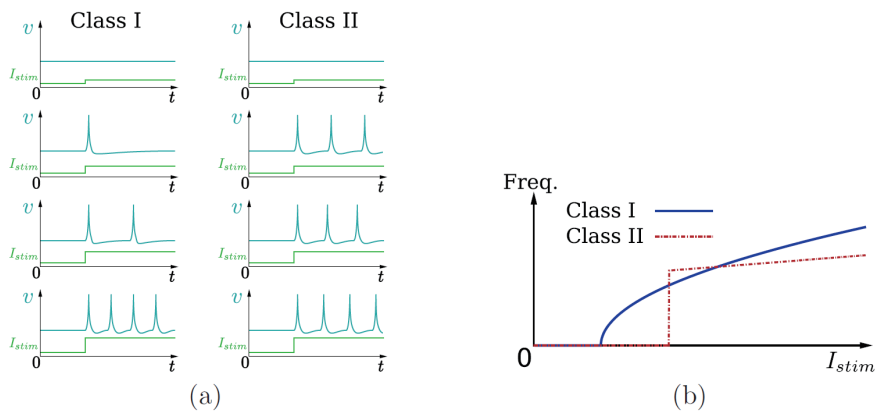


図 1.3: Class I と Class II の発火特性の違いの模式図。[8] より引用。

また、持続的な刺激電流に対するニューロンの別の特徴として図 1.1(c) に示すような発火周波数順応性と呼ばれるものがある。発火周波数順応性とは、刺激電流を与え続けたときに、発火周波数

が刺激電流を与え始めたときよりも減少していき、ある一定の周波数で安定するという現象である。神経系において、一定の感覚入力を受け続けたときに、時間が経過するに従って入力に対して順応していくという現象に対応しているとも考えらる。

ニューロンの他の重要な発火パターンとしては、ペースメーカーニューロンなど特定のニューロンが持つ、自発的バースト発火があげられる。自発的バースト発火とは、図 1.1(d) のように、刺激電流を受けずに自発的に連続発火と静止状態を交互に繰り返す現象である。自発的バースト発火は消化、呼吸、心拍や歩行などリズムカルな動きを神経系で生成する上で重要な役割を担っていると考えられる。自発的バースト発火をする有名なニューロンの一つとしてはヒルの心拍リズムを生成する神経ネットワークの中の介在ニューロンがあげられ詳細な解析が行われている [10]。

### 1.3 シナプス

この節ではニューロン同士の結合の部分、シナプスについて説明する。シナプスには化学シナプスと電気シナプスの 2 種類がある。シナプスという言葉は一般的に化学シナプスをさし、本論文でもそれに従う。

まず化学シナプスについて説明する。前節で述べたようにニューロンが発火をすると軸索を通して電気信号が送られシナプスを通して他のニューロンへ信号が伝わる。ただし、直接電流がシナプス前ニューロンからシナプス後ニューロンへ伝わるのではなく軸索の先端と樹状突起との間には図 1.4 に示すようにシナプス間隙と呼ばれる 20nm 程の隙間がある。電気信号がシナプス前ニューロンから送られ軸索の先端に達すると、軸索の先端のシナプスボタンという膨らんだ部分から神経伝達物質が放出される。神経伝達物質はシナプス後ニューロンの持つレセプターと結合しイオンチャネルが開く。イオンが細胞膜を通過することによってシナプス電流が細胞内に流れ膜電位が上昇する。前節で述べたように膜電位の上昇が閾値を超えるとニューロンは活動電位を発生させる。化学シナプスにはシナプス前ニューロンとシナプス後ニューロンのスパイクの発生タイミングにより結合強度が変化する、シナプス可塑性 (STDP) という特徴を持っており神経ネットワークにおける学習にとって重要な役割を担っている。

次に電気シナプスについて説明する。電気シナプスはギャップジャンクションとも呼ばれ、化学シナプスのように隙間を持たず、ニューロン同士がイオンなどを透過させる分子で物理的に結合している。電気シナプスは電気抵抗と同等の役割をすると考えられ、シナプス前後の 2 つのニューロン間の電位差に比例したイオン電流が流れると考えられている。

一般に神経系で化学シナプスの方が広範に見られるが、電気シナプスも大脳皮質や海馬に存在することが分かっており情報処理において重要な役割を果たしていると考えられている。

### 1.4 シリコンニューロン、シリコンシナプス

シリコンニューロンとは神経細胞の電気生理学的メカニズム、もしくは電気生理学的現象を再現する電子回路である。現実の神経細胞には様々な種類があり、1.2 節で述べたように複雑な性質を持っているため神経細胞のメカニズム、現象の本質が何であるかは難しい問題である。また、現時点では神経細胞のさまざまな性質のうち何が神経系における情報処理にとって重要なのかということに関して決定的な結論はない。そこで、シリコンニューロンを設計する際は、イオン電流によるメカニズム、発火パターン、閾値、ホジキン分類など、さまざまな特徴のうち何を再現するか取捨選択の基準については決定的な解が存在しない。ニューロンモデルのシミュレーションはソフトウェアで行うことができ、シリコンニューロンは必要はない。しかし、大規模なニューラルネットワークをシミュレーションする場合にはソフトウェア上では膨大な計算量が必要となり実時間では不可能となる。一方、リアルタイムで動作するシリコンニューロンを多数結合することで並列計算が可能であり大規模



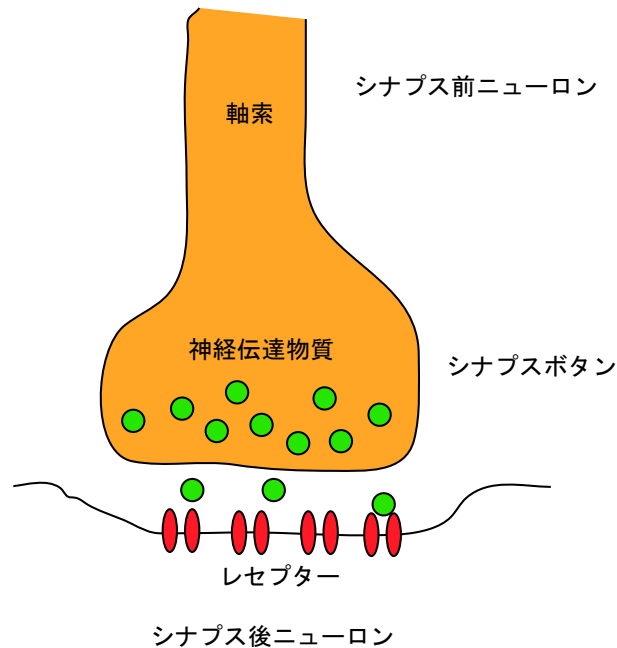


図 1.4: 化学シナプスの模式図

ネットワークのリアルタイムシミュレータを実現することができる。また、現実の神経系の神経細胞とシリコンニューロンを置き換えて動作させることでニューロンモデルの妥当性を検証でき、埋め込み医療デバイスなどの生体とのハイブリッドシステムとしても応用が期待される。さらには生物の基本的な動きである歩行、呼吸、心拍などの周期的な運動を制御するパターンジェネレータを構築することも可能でロボットにも応用の可能性がある。

シリコンシナプスもシリコンニューロン同様にシナプスの特性を電子回路で模倣したもので、シリコンニューロンと接続することで利用される。シリコンニューロン間の相互作用と信号の伝達がシナプスの役割であり、シリコンニューラルネットワークを構築する際に必要となる。

最後に、アナログ電子回路とデジタル演算回路によるシリコンニューロンについて説明する。

アナログ電子回路では、ニューロンの膜電位やイオン電流などの生体信号を、回路上の電流値や電圧に置き換えることによって連続値で取り扱うことができる。また、サブスレッショルド領域で動作する1ニューロンあたり10nWなど超低消費電力のアナログニューロンも発表されている [11]。しかし、アナログ電子回路では温度変化などによるノイズの影響を受けやすく、ノイズの影響下でも安定して動作する回路設計をする必要がある。

一方、デジタル演算回路によるシリコンニューロンを実装する場合にはアナログ電子回路のようにノイズの影響を考慮せずに済む。そのため、基本的には設計した電子回路のシミュレーション結果と同様の結果を実際の回路でも得ることができる。また、デジタル演算回路ではFPGAなどのプログラミングで再構成可能な電子回路が存在するのでシリコンニューロンの実装コストが大幅に削減できるとともに、FPGAを購入すればHDLなどの設計言語を共有することでシリコンニューラルネットワークを手軽に手にすることが可能となる。しかし、デジタル演算回路では、値はすべて離散値で表現されるので実際の生体信号のような連続量は取り扱うことができない。従って、デジタル演算回路でシリコンニューロンを設計する際には、ビット精度や時間刻み幅などから生まれる生体信号との誤差を考慮しなくてはならない。

2000年頃までは、シリコンニューロンの研究はアナログ電子回路によるものが主流であり、デジタルシリコンニューロンの研究はニューロンを極限まで単純化したバイナリニューロンモデルのものがほとんどであった。しかし近年、FPGAの性能が飛躍的に向上したことによって、2000年代よ

りデジタル演算回路で連続的なニューロンモデルを実装する研究が盛んに行われるようになってきた [3] [4] [12]。また、ニアスレッショルドロジックと呼ばれるデジタル回路を超低電圧で駆動する技術も研究されており、デジタルシリコンニューロンも低消費電力で動作できる環境が整いつつある。本研究は、数理的構造からデジタル演算回路に実装しやすいようモデルを設計することによって、デジタルシリコンニューロンの基礎研究となる役割を担っている。表 1.1 には現時点でのアナログシリコンニューロンとデジタルシリコンニューロンの特徴を比較したものをまとめた。

	アナログシリコンニューロン	デジタルシリコンニューロン
生体信号	実数値	離散値
消費電力	超低消費電力 (10nW/neuron 程度)	CLK が比較的大きな電力を消費
ノイズ耐性	敏感	強い
実装コスト	高価、発注に時間がかかる	FPGA などを用いて手軽に実装可能

表 1.1: アナログシリコンニューロンとデジタルシリコンニューロンの比較

## 1.5 研究の目的

本研究の目的について述べる。本研究の目的は先行研究で考案された 2 変数のニューロンモデルでは実現できなかった自律的バースト発火や周波数順応性などの複雑なダイナミクスを実現可能な 3 変数のニューロンモデルを設計し、モデルをデジタル演算回路で実装することである。また、単一のニューロンモデルだけではなく小規模なネットワークも実装し、その基本的な挙動を再現することを目指す。この研究は将来的には FPGA で大規模なネットワークを構築する際の基礎となることを念頭に行われている。

## 1.6 論文の構成

本論文は 5 つの章で構成される。まず第 1 章で序論を述べた。第 2 章では、従来のニューロンの数理モデル設計手法と本研究で使用された新たな設計手法について紹介する。第 3 章では、本研究で設計したシリコンニューロンの数理モデルを示す。第 4 章では、第 3 章で示した数理モデルのデジタル演算回路での実装例を示す。第 5 章では、第 4 章で示した実装例から HDL シミュレーションによって得られたシリコンニューロンの挙動の結果を示す。第 6 章では、本論文をまとめるとともに今後の展望について述べる。

## 第2章 ニューロンモデルの設計手法

従来、ニューロンモデルの設計手法には大きく分けてイオンコンダクタンスに基づく手法と現象論的手法の2つが存在した。この章では従来の2つの手法に加え、河野らが提案した数理的手法 [13] について述べるとともに、それぞれの設計手法による代表的なモデルを紹介する。

### 2.1 イオンコンダクタンスモデル

イオンコンダクタンスモデルはニューロンのイオンチャネルのダイナミクスを記述したモデルである。一般的にイオンコンダクタンスのダイナミクスを詳細に記述したニューロンモデルは常微分方程式で記述されている。最初のイオンコンダクタンスモデルが4変数のホジキン - ハクスレイ (HH) 方程式 [9] で以下の式で書き下される。

$$C \frac{dV}{dt} = I - 120.0m^3h(V - 115.0) - 40.0n^4(V + 12.0) - 0.24(V - 10.613) \quad (2.1)$$

$$\frac{dm}{dt} = \frac{0.1(25 - V)}{\exp\left(\frac{25 - V}{10}\right) - 1} (1 - m) - 4 \exp\left(\frac{-V}{18}\right) m \quad (2.2)$$

$$\frac{dh}{dt} = 0.07 \exp\left(\frac{-V}{20}\right) (1 - h) - \frac{1}{\exp\left(\frac{30 - V}{10} + 1\right)} h \quad (2.3)$$

$$\frac{dn}{dt} = \frac{0.01(10 - V)}{\exp\left(\frac{10 - V}{10}\right) - 1} (1 - n) - 0.125 \exp\left(\frac{-V}{80}\right) n. \quad (2.4)$$

$V$  は外液電位を基準にして測ったニューロン内部の膜電位、変数  $m, h, n$  は神経膜のナトリウムコンダクタンスおよびカリウムコンダクタンスの変化を説明するためにホジキンとによって導入された変数で  $I$  は膜電流、 $C$  は神経膜の静電容量、 $t$  は時間を表す。また、図 2.1 は HH 方程式の等価電気回路モデルであり、図中のナトリウムコンダクタンス  $g_{Na}$ 、カリウムコンダクタンス  $g_K$  はそれぞれ式の中では  $g_{Na} = 120.0m^3h$ 、 $g_K = 40.0n^4$  と対応している。

HH 方程式は定式化の基となったヤリイカの巨大軸索神経膜のさまざまな挙動をほぼ定量的に再現することができる。しかし、複雑な式で記述されており、その挙動をシミュレートもしくは電子回路で実装するには大きな計算量、回路リソースが必要となってしまう。

### 2.2 現象論的モデル

もう一つのニューロンモデルの設計手法の考え方は現象論的手法である。モデルの設計者はニューロンのさまざまな特長の中から重要と考えられるものを抽出し、その特徴を再現できるように数式で記述する。イオンコンダクタンスに基づく手法とは違い、重要と思われる特徴だけを再現するのでモデル設計の自由度は比較的高い。そのためある程度単純化された数式で記述でき、また、回路に実装する際にも回路実装に適した方程式におきかえることが簡単なためシンプルなシリコンニューロン回路が実現できる。しかし、その現象の背後にあるメカニズムを考えないために、ニューロンの挙動の再現には限界がある。例えば、現象論的モデルの代表例である Leaky integrate-and-fire (LIF) モデルは以下の式で記述される [14]。

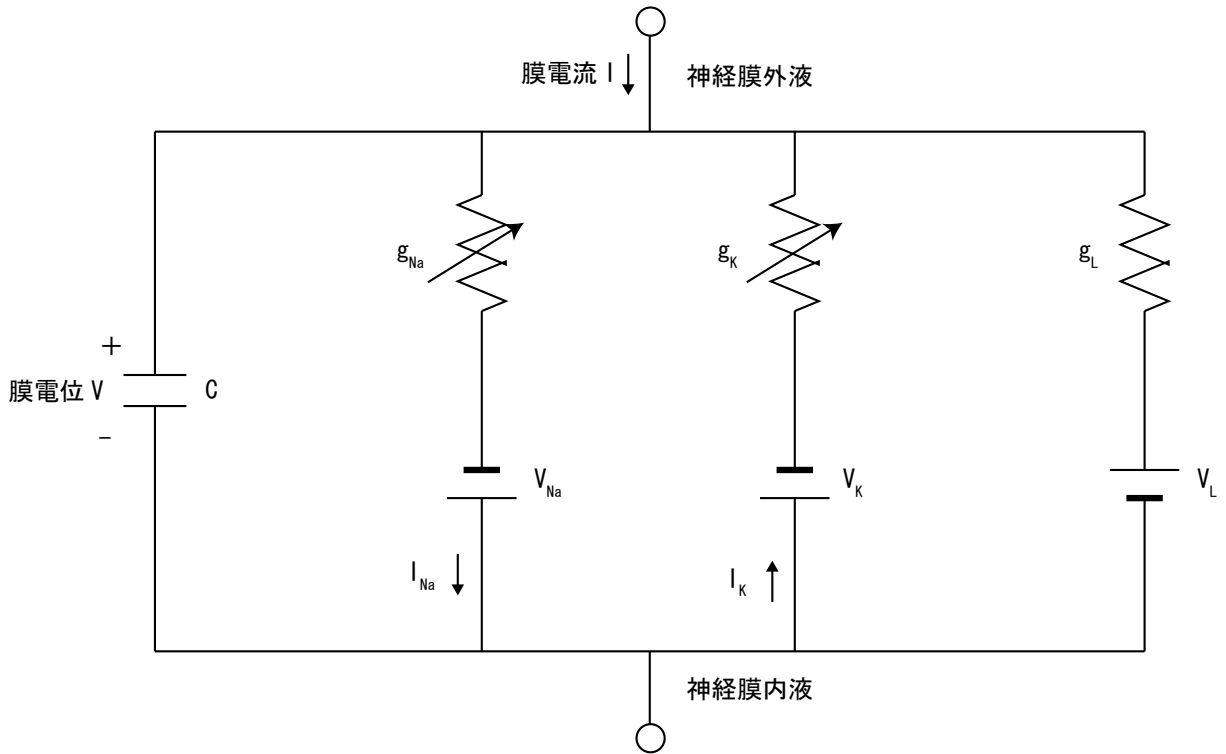


図 2.1: ホジキン-ハクスレイモデルの電気回路モデル

$$C \frac{dV}{dt} + \frac{V}{R} = I. \quad (2.5)$$

このモデルは図 2.2 の電気回路モデルに対応する。前述の HH 方程式の電気回路、図 2.1 と比較して単純化されていることがわかる。図 2.2 を見ると、LIF モデルはコンデンサ  $C$ 、抵抗  $R$  および瞬時に開閉するスイッチのみからなる並列回路と等価であることが分かる。ある時刻で膜電位  $V$  が閾値  $V_\theta$  に達するとスイッチは瞬時に閉じてコンデンサに蓄えられていた電荷を放出しコンデンサの両端の電圧は 0 にリセットされる。このスイッチの瞬時の開閉がニューロン発火に対応しており LIF モデルは発火現象に焦点を当てて再現を試みた現象論的モデルである。

## 2.3 数理的手法に基づくモデル

イオンコンダクタンスモデルや現象論的モデルを比較してわかるように、ニューロンモデルを設計する際には忠実にニューロンの挙動を再現することと単純な数式で記述するというジレンマが生じる。そこで河野らはモデルの数理構造に着目することによってニューロンの多様なダイナミクスを保持しつつ、回路に実装しやすいようにモデルを設計する数理的手法 (mathematical-structure-based-approach) を提案した。数理的手法アプローチは非線形力学の知見に基づき、位相平面を幾何学的にとらえることによってモデルを設計する。以下、2.3.1 節では河野らが数理的手法によって設計した 2 変数の Digital Spiking Silicon Neuron(DSSN) について詳細に述べる。

### 2.3.1 2 変数 Digital Spiking Silicon Neuron

ここでは本研究で考案した 3 変数のモデルを紹介する前に、河野らによって提案された 2 変数 DSSN モデルを示す [1] [13]。このモデルは次のような方程式で記述される。

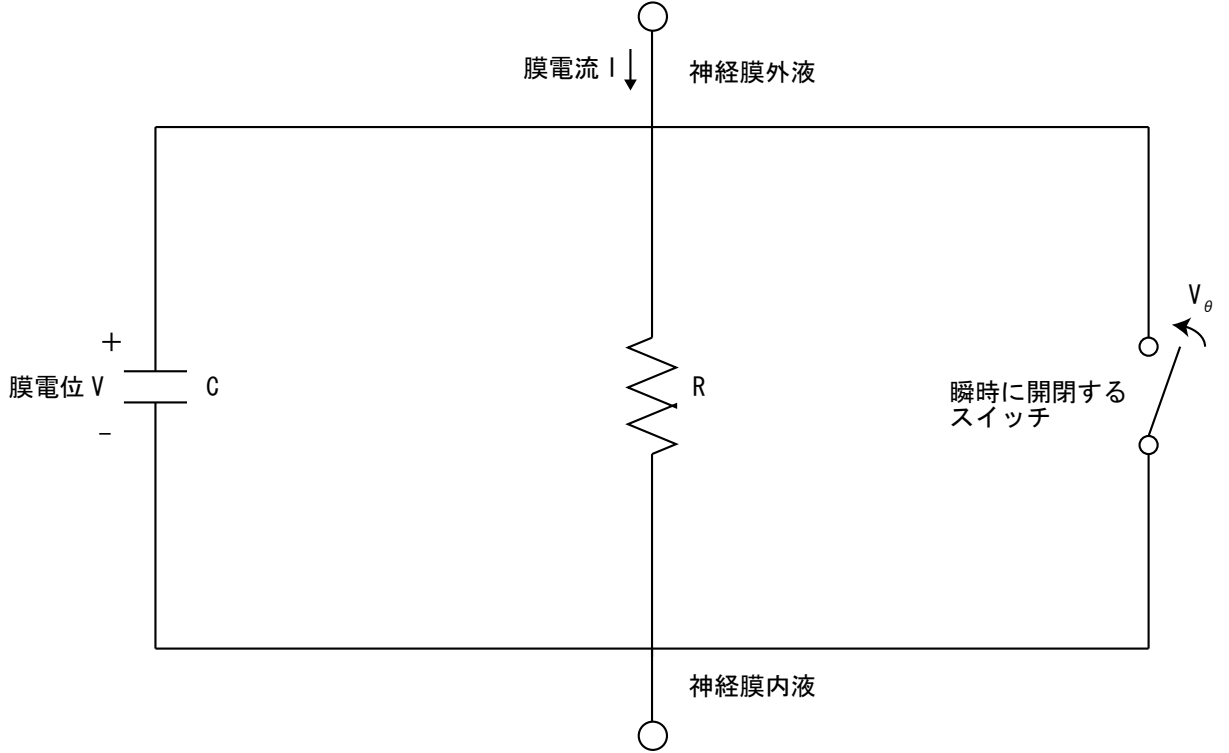


図 2.2: Leaky integrated-and-fire モデルの電気回路モデル

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\phi}{\tau} (f(v) - n + I_0 + I_{stim}) \quad (2.6)$$

$$\frac{dn}{dt} = \frac{1}{\tau} (g(v) - n) \quad (2.7)$$

$$(2.8)$$

ただし、

$$f(v) \equiv \begin{cases} a_n(v - b_n)^2 + c_n & (v < 0) \\ a_p(v - b_p)^2 + c_p & (v \geq 0) \end{cases} \quad (2.9)$$

$$g(v) \equiv \begin{cases} k_n(v - l_n)^2 + m_n & (v < r) \\ k_p(v - l_p)^2 + m_p & (v \geq r) \end{cases} \quad (2.10)$$

である。非線形関数  $f(v), g(v)$  とパラメータ  $a_x, b_x, c_x, k_x, l_x, m_x, r$  (ただし  $x=n$  または  $p$ ) により  $v$ -および  $n$ -ナルクラインが決定される。パラメータ  $\phi, \tau$  は時定数である。 $v$  はニューロンの膜電位、 $n$  はイオンチャンネルの活動度に対応している。デジタル演算回路では乗算器が大きな回路リソースを必要とするので回路規模を抑えるためにはなるべく 1 ステップあたりの乗算を少なくする必要がある。このモデルはナルクラインを決定づける関数  $f(v), g(v)$  が最も次数の低い非線形関数である 2 次関数であるので 1 ステップあたりの乗算の回数が最小に抑えられている。またパラメータ  $a_x, b_x, k_x$  は 2 のべき乗に設定されているため変数とパラメータの乗算がデジタル演算回路ではビットシフトに置き換えることができるように工夫されている。本モデルは 2 変数定性的モデルにおける数理的構造 [15] を基に、パラメータを適切に選択することによってホジキン分類 ClassI,II と ClassI のサブクラスである ClassI\* を実現できるように設計されている。図 2.3 に本モデルの刺激電流に対する発火周波数特性を示す。

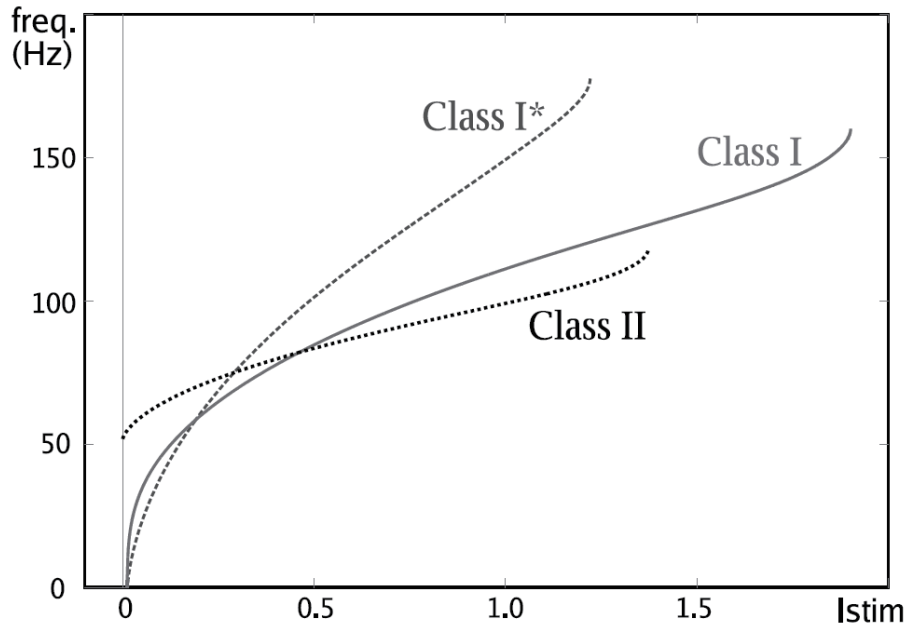


図 2.3: 2 変数 DSSN モデルの発火周波数特性。[1] より引用。

刺激電流  $I_{stim}$  が増加していくと Class I とそのサブクラスである Class I\* は 0 に近い周波数から連続発火を開始するが Class II では正の周波数から連続発火が始まることがわかる。この周波数特性の違いの詳しいメカニズムについては後述する。

図 2.4 に 2 変数 DSSN の位相平面を示す。

横軸、縦軸はそれぞれ変数  $v, n$  を、2 つの曲線はそれぞれ  $v$ -および  $n$ -ナルクラインを表している。方程式からも分かるようにナルクラインは区分 2 次関数で表現されている。 $n$ -ナルクラインのパラメータのみを変えることによって Class I, Class II および Class I\* の特性を表現できるようになっている。 $v$ -ナルクラインは式 (2.6) で左辺=0 としたものであるので  $I_{stim}$  が増大すると  $v$ -ナルクラインが位相平面上で鉛直正方向に平行移動していくことがわかる。これは刺激電流  $I_{stim}$  が 0 からしだいに増大していくとニューロンが休止状態から連続発火に切り替わることに対応している。

以下本モデルの Class I, Class II および Class I\* の特性について個々に説明していく。

### Class I モード

図 2.5 に刺激電流  $I_{stim}=0$  及び 0.015 の時の Class I モードの位相平面の拡大図を示す。

(S) は安定平衡点、(T) は鞍点、(U) は不安定平衡点である。図 2.5 からわかるように、刺激電流  $I_{stim}=0$  の時は  $v$ -ナルクラインと  $n$ -ナルクラインが 3 つの交点を持ち、それぞれ安定平衡点、鞍点、不安定平衡点である。刺激電流が増加していくと安定平衡点と鞍点は接近してゆき、やがて融合して消滅する。 $I_{stim}=0.015$  の時は  $v$ -ナルクラインと  $n$ -ナルクラインは 1 つだけ交点を持ち、それは不安定平衡点である。

図 2.6 に分岐パラメータを  $I_{stim}$  としたときの  $v$  の分岐図を示す。横軸は  $I_{stim}$ 、縦軸が変数  $v$  である。上述の  $I_{stim}$  の変化による安定平衡点と鞍点の生成、消滅が図 2.6 の  $I_{stim}=0$  付近におけるサドルノード分岐に対応している。この場合、サドルノード分岐点より安定なリミットサイクルが発生する。サドルノード分岐は、安定平衡点と鞍点が融合し、消滅するものであるが、ちょうど融合している状態では発生したリミットサイクルは、融合点を通過する際に無限時間かかる。すなわち周波数は 0 となる。さらに  $I_{stim}$  が増加し、融合点が消滅した後も、その付近では 2 つのナルクラインが接近

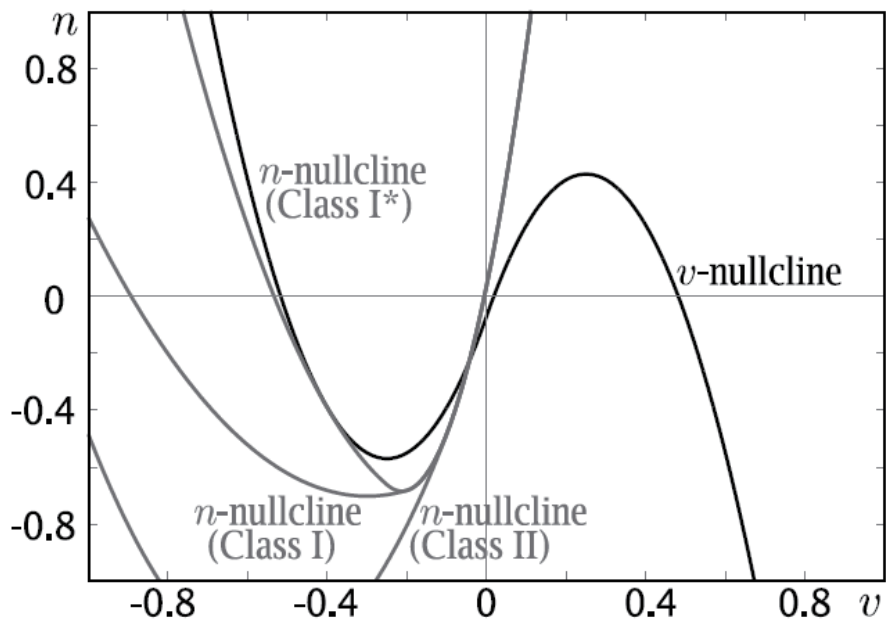


図 2.4: 2 変数 DSSN モデルの位相平面。[1] より引用。

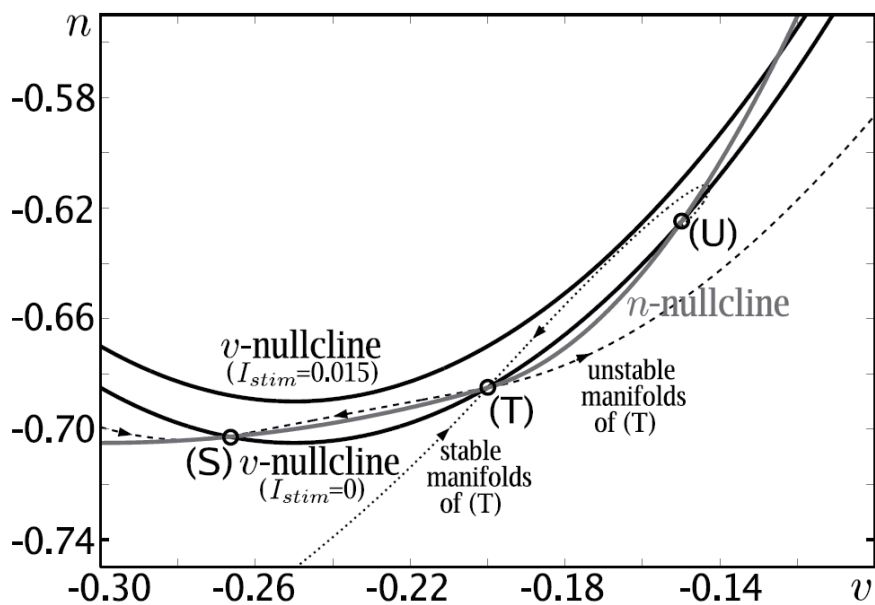


図 2.5: 2 変数 DSSN の ClassI モードの位相平面の拡大図。[1] より引用。

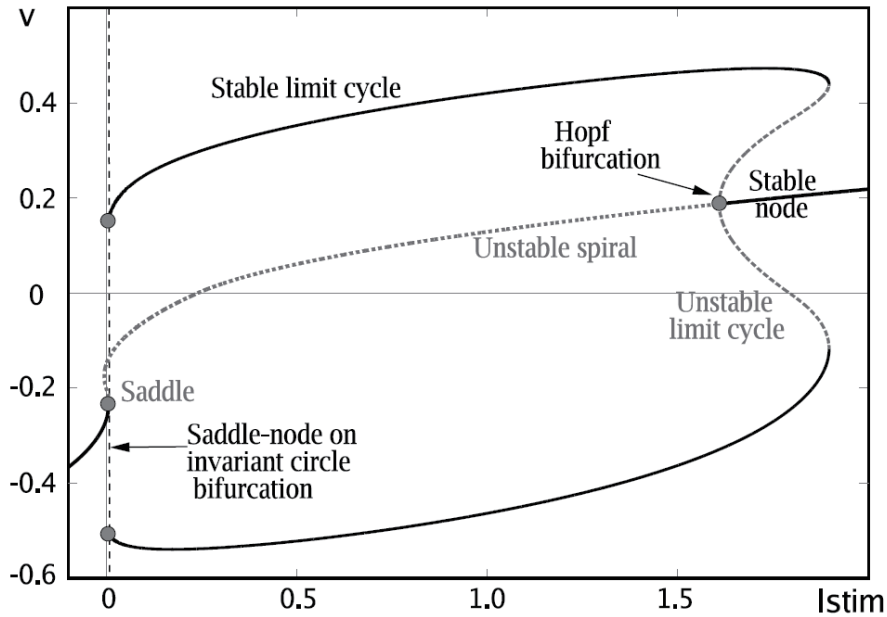


図 2.6: 2 変数 DSSN の ClassI モードの分岐図。[1] より引用。

しておりその領域を通過するのに大きな時間がかかるため、周期は非常に長くなる。すなわち周波数は 0 に近い。このメカニズムにより、図 2.3 で示したように ClassI は 0 に近い周波数から連続発火を開始する。図 2.6 中のリミットサイクルの 2 つの実線は、リミットサイクル中の  $v$  の最大値と最小値である。リミットサイクルは刺激電流が与えられた時のニューロンの周期的な発火に対応している。さらに刺激電流を増加させていくと  $I_{stim}=1.5$  付近で再び安定平衡点が発生し、さらに  $I_{stim}$  が増加すると安定リミットサイクルが消滅する。

### ClassII モード

図 2.7 に刺激電流  $I_{stim}=0$  及び 0.015 の時の ClassII モードの位相平面の拡大図を示す。

図 2.5 と同様に (S) は安定平衡点、(U) は不安定平衡点である。図 2.7 では、ClassI モードの場合とは違い、 $I_{stim}=0$  及び 0.015 のどちらの場合でも  $v$ -ナルクラインと  $n$ -ナルクラインは 1 つだけ交点を持つ。しかし、平衡点の安定性が  $I_{stim}=0$  から 0.015 に変化したときに安定平衡点から不安定平衡点と変化する。この安定性の変化は平衡点のヤコビアンを計算することによって判別できる [16]。この分岐はホップ分岐とよばれ、パラメータを変化させることによって平衡点が生成、消滅したりすることなくその安定性が変化する。ClassI のサドルノード分岐の場合はリミットサイクルが発生した時点で周期は無限時間であり、 $I_{stim}$  の増加にしたがって周期が短くなっていくものであったが、ClassII に見られるホップ分岐は、平衡点が不安定化し、その周りに周期軌道を生じるので有限の周期から始まる。すなわち、図 2.3 に示されるよう正の周波数から連続発火を開始する。

図 2.8 に分岐パラメータを  $I_{stim}$  としたときの  $v$  の分岐図を示す。横軸は  $I_{stim}$ 、縦軸が変数  $v$  である。 $I_{stim}=0$  付近でホップ分岐が発生することが分かる。ホップ分岐点より刺激電流  $I_{stim}$  が大きい領域では周期的な発火に対応する安定リミットサイクルが存在し、さらに  $I_{stim}$  が増加していくと再び安定平衡点が発生し、周期発火は停止する。また、ClassII ニューロンは周期的なパルス刺激電流に対してはカオス的な応答をすることがあることが知られており [17]、本モデルの ClassII モードでもその挙動を再現することに成功している [1]。



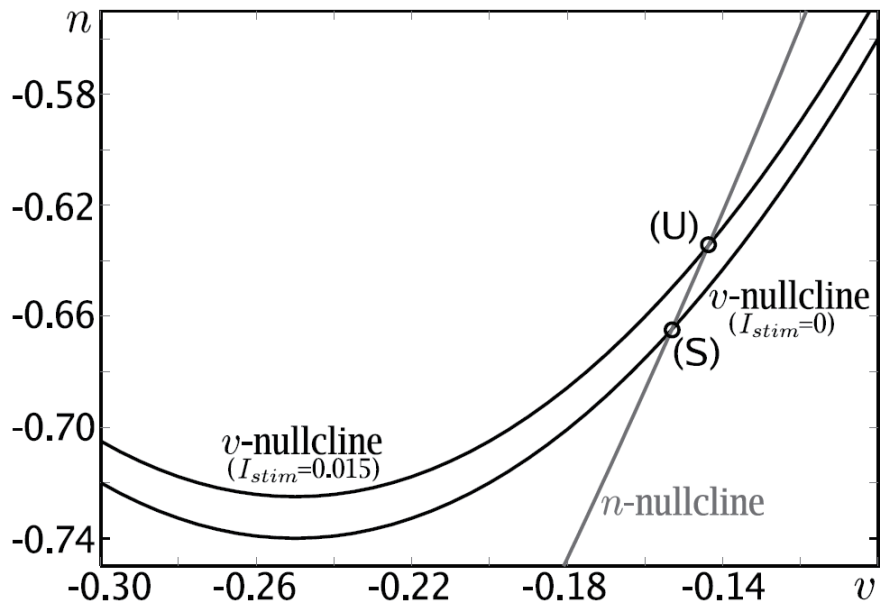


図 2.7: 2 変数 DSSN の ClassII モードの位相平面の拡大図。[1] より引用。

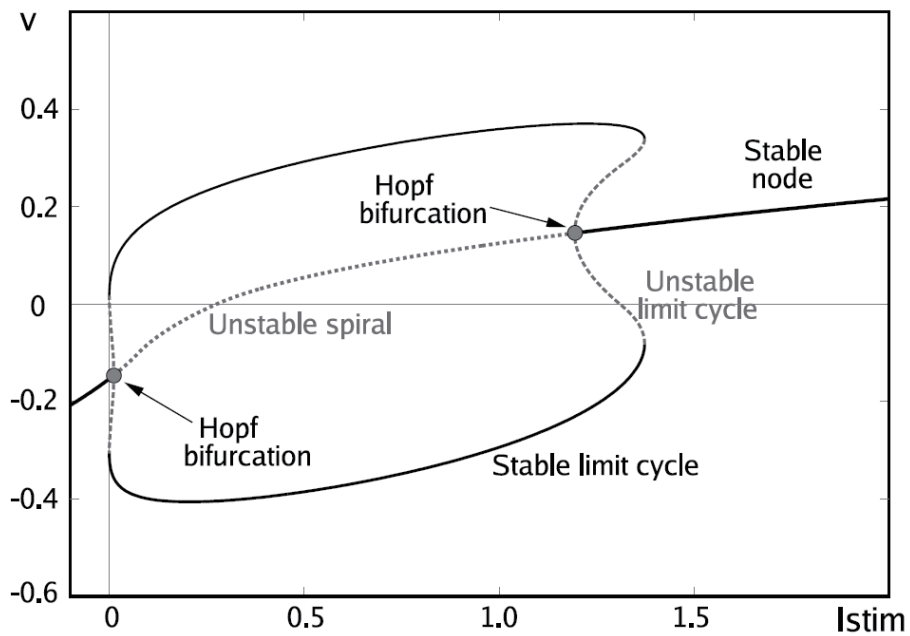


図 2.8: 2 変数 DSSN の ClassII モードの分岐図。[1] より引用。

## ClassI\*モード

ClassI\*は ClassI のサブクラスであり、刺激電流に対して発火周波数が 0 近くから開始する点は ClassI と同じである。ClassI\*のニューロンを電気シナプス、すなわちギャップジャンクションにより結合したネットワークは結合強度に依存してカオス的なふるまいを示すことがある [18]。ClassI ニューロンが位相平面上にナローチャンネルとよばれる構造を持つとき、このような現象がみられることが知られている。図 2.9 に 2 変数 DSSN の刺激電流  $I_{stim}=0$  及び 0.015 の時の ClassI\*モードの位相平面の拡大図を示す。

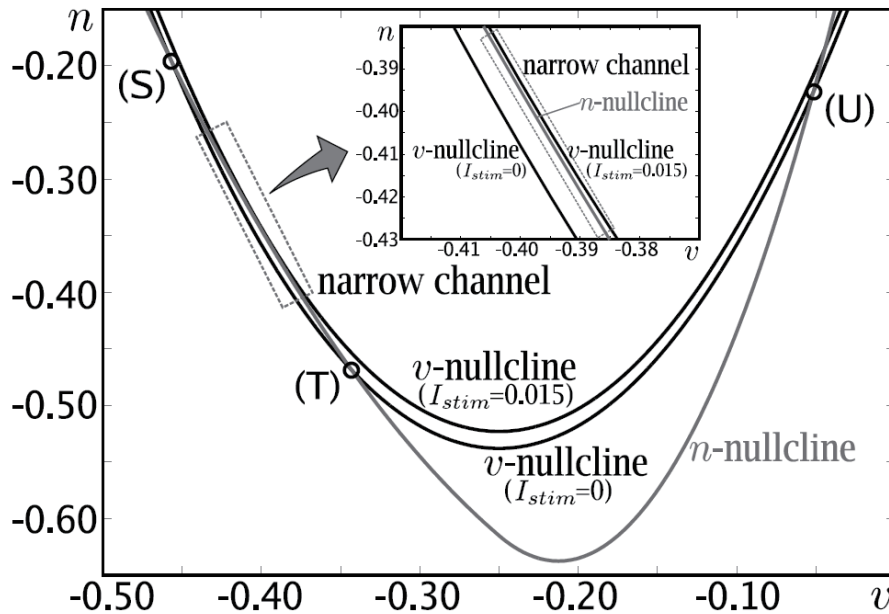


図 2.9: 2 変数 DSSN の ClassI\*モードの位相平面の拡大図。[1] より引用。

ClassI の場合と同様に (S) は安定平衡点、(T) は鞍点、(U) は不安定平衡点に対応している。図 2.9 では、刺激電流  $I_{stim}=0$  の時は  $v$ -ナルクラインと  $n$ -ナルクラインが 3 つの交点を持ち、それぞれ安定平衡点、鞍点、不安定平衡点である。刺激電流が増加していくと安定平衡点と鞍点は接近してゆき融合して消滅する。その後も  $v$ -ナルクラインと  $n$ -ナルクラインが接近した状態が保たれるが、このような  $v$ -ナルクラインと  $n$ -ナルクラインが接近した領域をナローチャンネルと呼び、藤井らはこのナローチャンネルが存在することが ClassI\*の必要条件の一つであることを示している [18]。また、藤井らは ClassI\*であるためのもう一つの必要条件として 2 つのナルクラインの交点不安定焦点であることも示しているが、本モデルではサドルノード分岐後は  $v$ -ナルクラインと  $n$ -ナルクラインが 1 つだけ交点を持ち、それは不安定焦点であるので条件を満たしている。

図 2.10 に分岐パラメータを  $I_{stim}$  としたときの  $v$  の分岐図を示す。横軸は  $I_{stim}$ 、縦軸が変数  $v$  である。分岐図を見てわかるように ClassI\*モードの DSSN の刺激電流に対する  $v$  の応答は ClassI のものと同様であり図 2.3 に示されている周波数特性からも ClassI に分類されることが分かる。しかし、ギャップジャンクション結合ネットワークでは ClassI や ClassII モードでは見られないカオス的な振る舞いが発生することが示されている [1]。

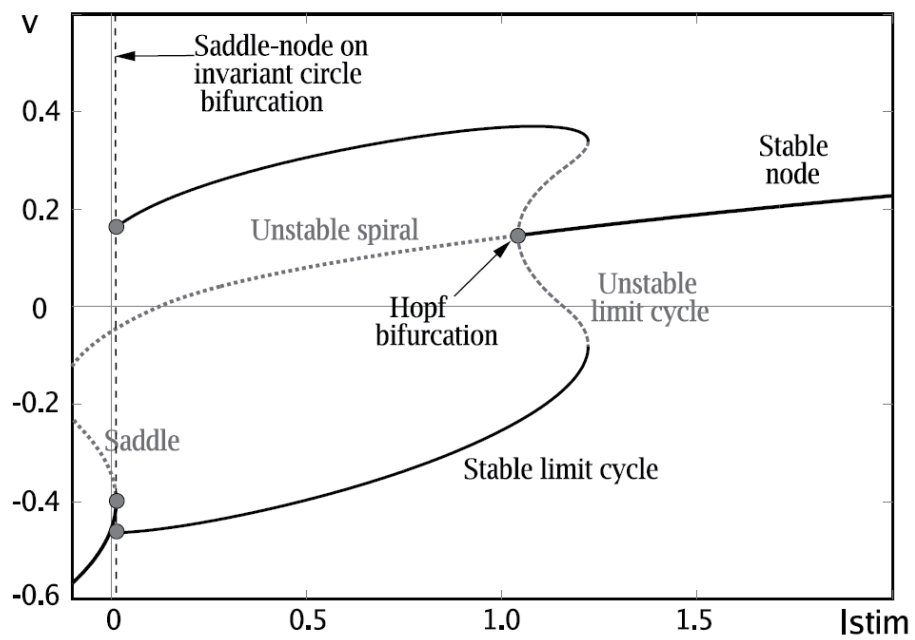


図 2.10: 2 変数 DSSN の Class I\*モードの分岐図。[1] より引用。

## 第3章 数理モデル設計

本章では、本研究で設計した3変数 Digital Spiking Silicon Neuron と神経系ネットワークを構築する際に用いたシリコンシナプスの数理モデルについて述べる。

### 3.1 2変数 DSSN のパラメータ調整

前章で述べたように河野らが提案した2変数 DSSN はパラメータを適切に選択することによって Class I, II, I\* の豊富なダイナミクスが再現できた。本研究では3変数 DSSN を設計する前に、2変数 DSSN のデジタル演算回路での実装効率を改善するためパラメータを改変した。2変数 DSSN モデルは以下の通りである。

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\phi}{\tau} (f(v) - n + I_0 + I_{\text{stim}}) \quad (3.1)$$

$$\frac{dn}{dt} = \frac{1}{\tau} (g(v) - n) \quad (3.2)$$

$$(3.3)$$

ただし、

$$f(v) \equiv \begin{cases} a_n(v - b_n)^2 + c_n & (v < 0) \\ a_p(v - b_p)^2 + c_p & (v \geq 0) \end{cases} \quad (3.4)$$

$$g(v) \equiv \begin{cases} k_n(v - l_n)^2 + m_n & (v < r) \\ k_p(v - l_p)^2 + m_p & (v \geq r) \end{cases} \quad (3.5)$$

である。従来の2変数 DSSN では式(3.1)-(3.5) から分かるように、 $f(v), g(v)$  の内部にある  $(v - b_x)^2, (v - l_x)^2$  の2つの部分でビットシフトに置き換えることのできない乗算を行わなければならない(ただし、 $x=n$  または  $p$ 。以下同じ)。言い換えれば、デジタル演算回路上では乗算器が2つ必要になることを意味している。ここで、 $f(v), g(v)$  をかっこを展開した形で記述すると、

$$f(v) \equiv \begin{cases} a_n v^2 - 2a_n b_n v + a_n b_n^2 + c_n & (v < 0) \\ a_p v^2 - 2a_p b_p v + a_p b_p^2 + c_p & (v \geq 0) \end{cases} \quad (3.6)$$

$$g(v) \equiv \begin{cases} k_n v^2 - 2k_n l_n v + k_n l_n^2 + m_n & (v < r) \\ k_p v^2 - 2k_p l_p v + k_p l_p^2 + m_p & (v \geq r) \end{cases} \quad (3.7)$$

となる。ここで、パラメータ  $a_n, b_n, k_n$  は各クラスにおいて2のべき乗に設定されているので式(3.6),(3.7)を計算するのに必要な乗算は  $v^2$  と  $-2k_x l_x v$  の項の  $l_x v$  となる。 $k_x l_x^2 + m_x$  の部分は定数であるので予め定数として回路で用意しておけば1ステップごとに計算する必要がなく、乗算器は必要ない。1ステップごとに値の変化する  $v^2$  には必ず乗算器が1つ必要となるが、パラメータ  $l_x$  を2のべき乗に調

整してやれば  $l_x v$  の乗算をビットシフトに置き換えることができるので全体に必要な乗算器は1つだけとなる。

ここではパラメータ  $l_x$  の調整方法を、ClassI を例にとって説明する。付録 A に示すように 2 変数 DSSN の従来のパラメータは  $l_p=-0.2125, l_n=-0.3$  であった。しかし、 $-0.2125$  と  $-0.3$  は 2 のべき乗になっていないため変数  $v$  と乗算をするには乗算器が必要となってしまう。ここで  $-0.2125, -0.3$  にそれぞれ最も近い 2 のべき乗は  $-2^{-2}, -2^{-2}$ 、すなわち、 $-0.25, -0.25$  である。しかし、 $l_p=-0.25, l_n=-0.25$  としてしまうと従来のパラメータとのかい離が大きく ClassI の特性を再現できなかった。そこで  $l_p, l_n$  を選ぶパラメータ領域を 2 のべき乗から拡張して  $\pm 2^n \pm 2^m$  (ただし  $m, n$  は整数) から選ぶことにした。これにより、演算回路の複雑化をなるべくさけながら、パラメータ選択の自由度をあげることができる。

ある任意の変数  $v$  と定数  $l_x$  の積を考える場合に  $l_x$  が  $2^n$  となっていれば 2 進数の世界で  $l_x v$  がビットシフトの計算だけで表される。つまりデジタル演算回路では乗算器を使わずにビットシフトのみで  $l_x v$  を演算できる。もしここで  $l_x = \pm 2^n \pm 2^m$  であった場合に、積  $l_x v$  は  $\pm 2^n v \pm 2^m v$  と表現され、それぞれの項  $2^n v$  と  $2^m v$  はビットシフトで表現されるのでその 2 項を加算器、もしくは減算器で演算することで積  $l_x v$  をデジタル演算回路で実装でき、乗算器を使用するより大幅に回路を単純化することができる。

上記の理由から  $l_p, l_n$  を  $\pm 2^n \pm 2^m$  の空間から選び出すと、 $l_p = -2^{-2} + 2^{-5} = -0.21875, l_n = -2^{-2} - 2^{-4} = -0.3125$  と従来のパラメータ、 $-0.2125, -0.3$  に近いものが得られた。また、 $l_p, l_n$  は  $n$ -ナルクラインの関数  $g(v)$  の形を決定づけるパラメータであるので、 $g(v)$  が  $v=r$  で連続であるために以下の式を満たすように他のパラメータも変更する必要がある。

$$k_n(r-l_n)^2 + m_n = k_p(r-l_p)^2 + m_p \quad (3.8)$$

$$k_n(r-l_n) = k_p(r-l_p) \quad (3.9)$$

式 (3.8) は  $v=r$  で  $g(v)$  が連続であるための条件、式 (3.9) は  $v=r$  で  $g$  の一回微分、 $dg/dv$  が連続であるための条件をそれぞれ表している。式 (3.8),(3.9) から得られた他のパラメータと  $l_p, l_n$  を従来のパラメータと比較して表 3.1 にまとめた。

	従来のパラメータ	本研究で決定したパラメータ
$l_n$	-0.3	-0.3125( $=-2^{-2}-2^{-4}$ )
$l_p$	-0.2125	-0.21875( $=-2^{-2}+2^{-6}$ )
$r$	-0.2	-0.2053
$m_n$	-0.705	-0.7058

表 3.1: ClassI における 2 変数 DSSN のパラメータの比較

パラメータを  $\pm 2^n \pm 2^m$  の形に書き換えることによって乗算器 1 つを省略し大きな回路リソースの節約に成功したがそれぞれの値自体は大きな変化はなく、分岐解析により従来のパラメータのものと同じ特性であることを確認できた (図 3.1)。式 (3.8)(3.9) の条件は各クラス共通であるので、これと同様に ClassI\*, ClassII のパラメータにおいても修正を施した。修正後のパラメータは付録 A にまとめた。

## 3.2 3 変数 DSSN

本研究では 3 変数 DSSN を、河野らが考案した 2 変数 DSSN と前節で考察された修正後のパラメータを基に設計した。本研究で提案する 3 変数 DSSN は 2 変数モデルでは発生させることのできない自律的バースト発火を実現することを目標として設計した。本研究では方形波バーストニューロンと

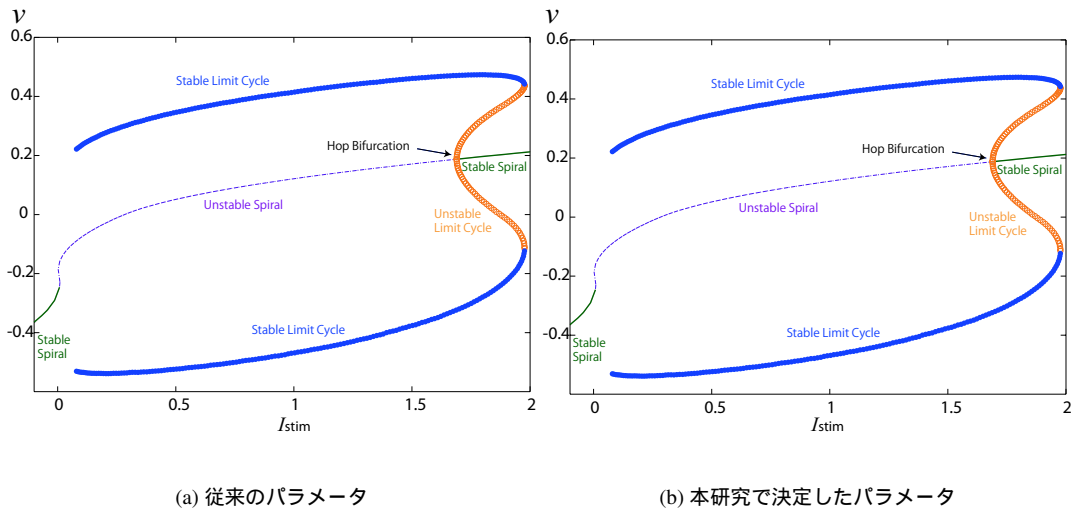


図 3.1: 2 変数 DSSN の ClassI の分岐図

呼ばれる一群のバーストニューロンにおけるダイナミクスを再現する。一般に、常微分方程式モデルでは、バースト発火やカオス的な挙動を実現するには 3 変数以上が必要であることが知られている [19]。

バースト発火は、連続的な発火と休止状態が交互に現れる現象である。2 変数系で連続的な発火に対応するリミットサイクルと休止状態に対応する安定平衡点が同時に存在する双安定状態を作ることによって、バースト発火を常微分方程式モデルで実現することができる。まず、本研究では 2 変数系で双安定領域を持つようなパラメータを探索した。

河野らが設計した 2 変数 DSSN はホジキン分類 ClassI 及び ClassII を説明できるような 2 変数モデルの位相平面の幾何学的構造を回路に実装しやすいような関数で置き換えることによって作られた。そこで、双安定領域を持つようなパラメータを発見するためには方形波バーストニューロンの定性的モデルである Hindmarsh-Rose モデルの数理的構造を理解する必要がある。3 次元 Hindmarsh-Rose モデルは以下のような式で記述される [9]。

$$\frac{dx}{dt} = y - ax^3 + bx^2 + I - z \quad (3.10)$$

$$\frac{dy}{dt} = c - dx^2 - y \quad (3.11)$$

$$\frac{dz}{dt} = r(s(x - x_1) - z) \quad (3.12)$$

$I$  は刺激電流、 $a, b, c, d, x_1, r, s$  はパラメータである。 $x$  は膜電位、 $y$  はイオンチャネルの活動度、 $z$  は非常に時定数の長い電流に対応している。変数  $z=0$  と固定したときの  $I$  に対する変数  $v$  の分岐図を図 3.2 に示す。

$I=[-0.1, 0.1]$  付近の領域で安定平衡点と安定なリミットサイクルが同時に存在することがわかる。この Hindmarsh-Rose モデルと同等な分岐構造を与えるパラメータを 2 変数 DSSN において探索した。様々なパラメータで分岐構造を調べたところ、ClassI\* のパラメータセットから  $\phi$  を変化させたときに図 3.3 の分岐構造を持つことがわかった。

3.1 節と同様に、ここでもパラメータを探索する際デジタル演算回路に実装しやすいよう  $\pm 2^n \pm 2^m$  (ただし  $m, n$  は整数) から選ぶよう注意した。結果として  $\phi=2^{-1} - 2^{-5}=0.46875$  で図 3.3 に示すような双安定領域をもつ分岐構造を得られた。

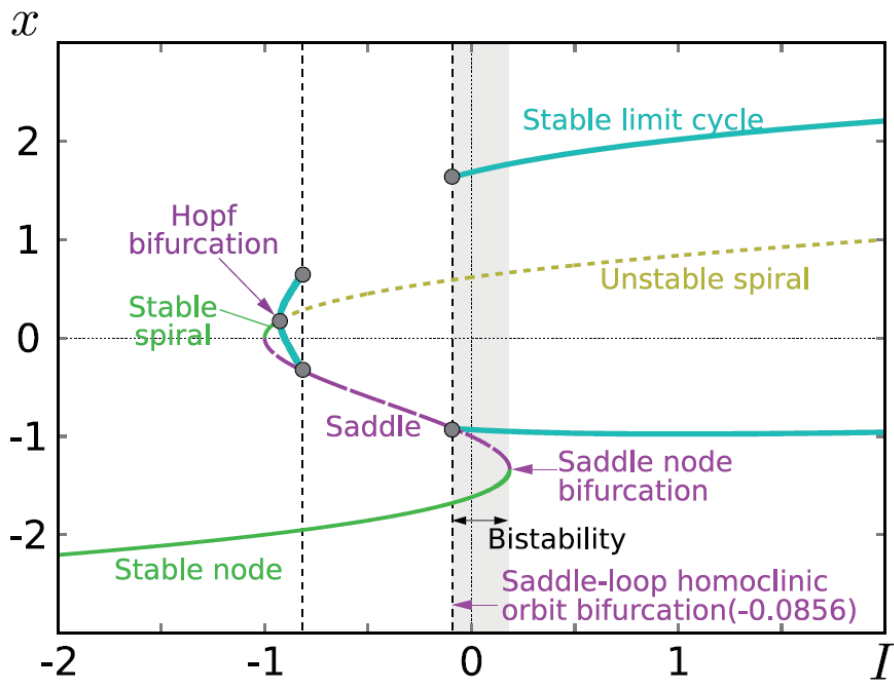


図 3.2: Hindmarsh-Rose モデルの分岐図。[8] より引用。

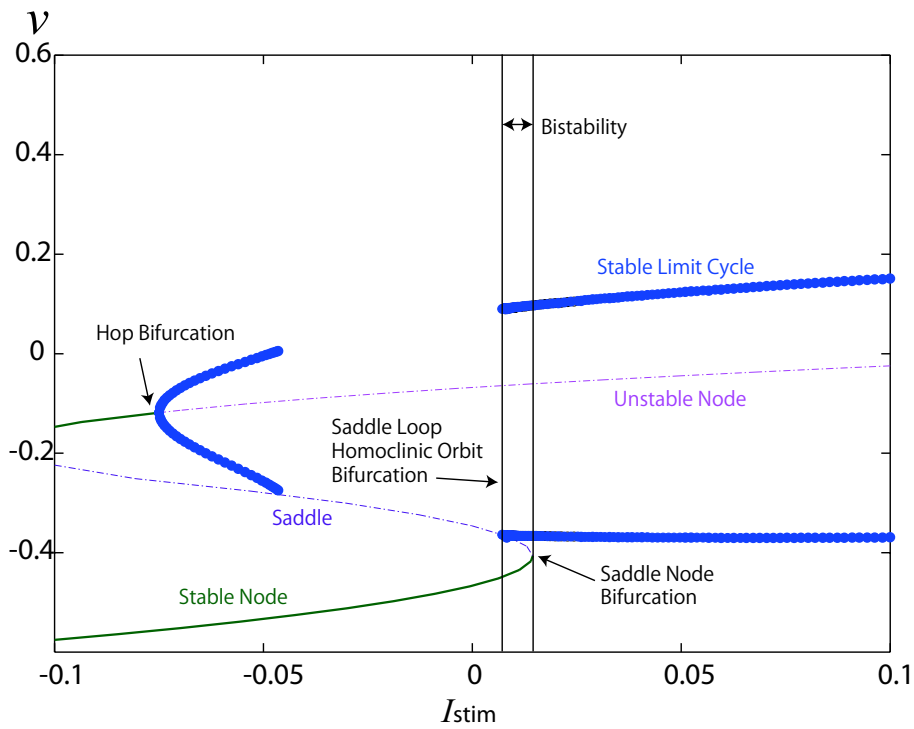


図 3.3: 2 変数 DSSN の分岐図。パラメータは  $\phi=0.46875$ 、それ以外は ClassI\* のものと同じ。

次に、Hindmarsh-Rose モデルでの  $x$ - $z$  平面の分岐図と時系列例を図 3.4 に示す。

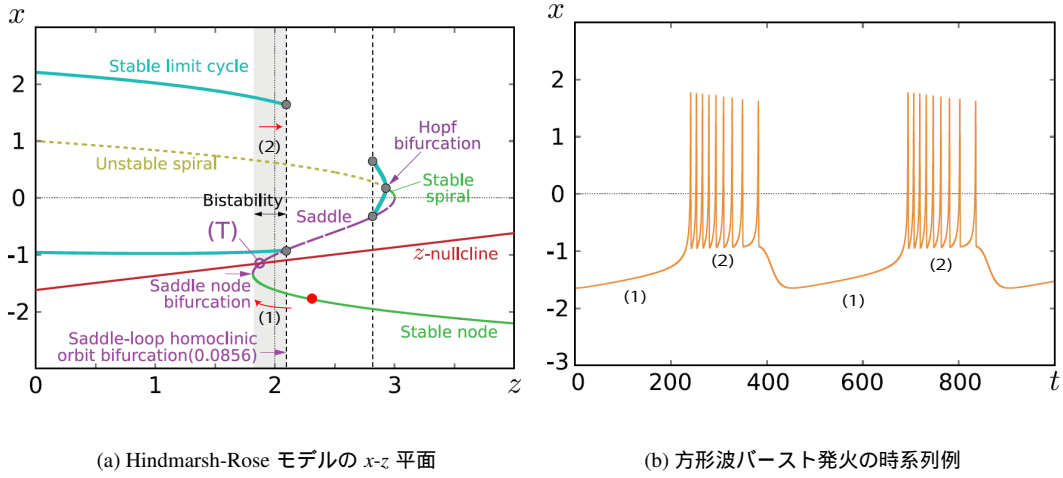


図 3.4: Hindmarsh-Rose モデルの分岐解析。[8] より引用。

図 3.4(a) では横軸  $z$ 、縦軸  $x$  の分岐図が示されている。式 (3.10) では  $I$  と  $z$  の符号が反対となっているので、基本的に図 3.4(a) は図 3.2 を  $I=0$  に関して対称移動した分岐図になっている。式 (3.12) より  $z$ -ナルクラインは  $z = s(x - x_1)$  の一次関数で記述されるので図 3.4(a) 中で  $z$ -ナルクラインは直線である。Hindmarsh-Rose モデルの方形波バースト発火のメカニズムを説明するために、例として 3.4(a) に示される赤い点に状態点が位置する場合を考える。赤い点は  $z$ -ナルクラインの下側に位置するので  $dz/dt < 0$  であり、 $z$  が減少する方向 ((1) の矢印参照) に移動していく。この過程は 3.4(b) の (1) で示される静止状態に対応している。 $z$  が十分減少し、サドルノード分岐点に到達すると安定平衡点は消滅するのでもう一つの安定状態、リミットサイクルへと状態点はジャンプする。状態点がリミットサイクルに移動した後は、状態点は  $z$ -ナルクラインの上側に位置するので  $dz/dt > 0$  であり、 $z$  が増加する方向 ((2) の矢印参照) に状態点は移動する。この過程は 3.4(b) の (2) で示される発火状態に対応している。 $z$  が十分増加し、状態点がサドルループホモクリニック軌道分岐点 (リミットサイクルの右端) に到達すると、安定なリミットサイクルが消滅するので安定平衡点へと再びジャンプする。これが Hindmarsh-Rose モデルにおける方形波バースト発火のメカニズムである。このダイナミクスでは 2 つの安定状態を分けている  $z$ -ナルクラインが重要な役割を果たしている。

以上のメカニズムを本研究では時定数の長い変数  $q$  のナルクラインを次のように定義して実現した。

$$v = \alpha q + v_0 \quad (3.13)$$

$v_0, \alpha$  はそれぞれ  $q$ -ナルクラインの  $v$  切片、傾きを決める定数である。位相平面上で、 $v_0, \alpha$  を適切に調整してやればリミットサイクルと安定平衡点を分けることができバースト発火を実現できる。また、変数  $q$  はスパイクの生成をになう 2 変数系のダイナミクスに比べ十分に長い時定数が必要であり、負のフィードバックとして働くためには  $I_{stim}$  と反対の符号が必要となる。

以上の条件をふまえて次のように 3 変数 DSSN を設計した。

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\phi}{\tau} (f(v) - n - q + I_0 + I_{stim}) \quad (3.14)$$

$$\frac{dn}{dt} = \frac{1}{\tau} (g(v) - n) \quad (3.15)$$

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\varepsilon}{\tau} (v - v_0 - \alpha q) \quad (3.16)$$



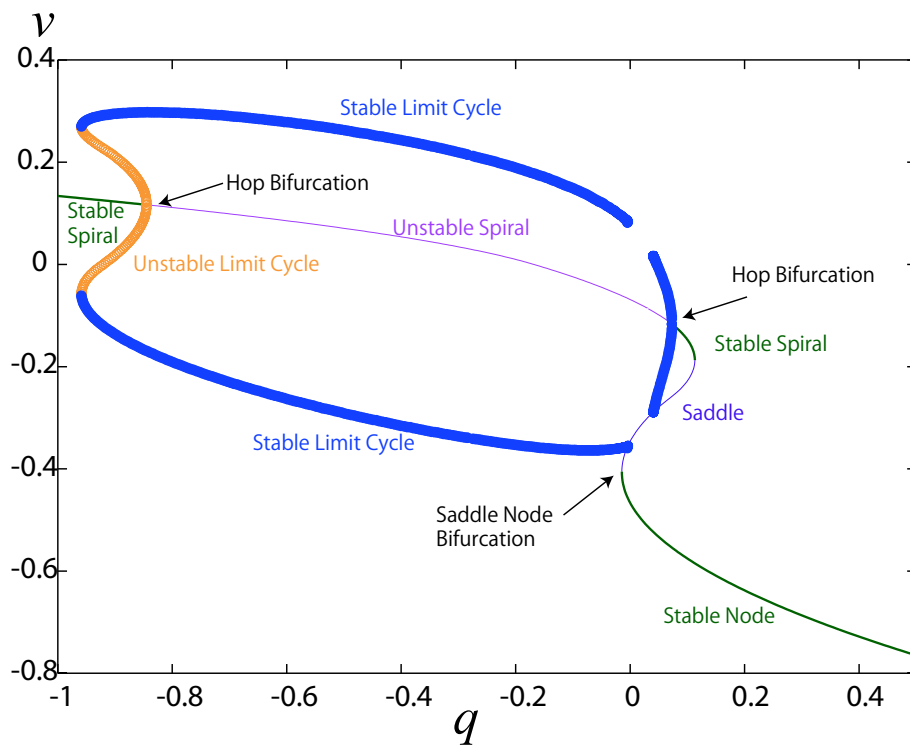
ただし、

$$f(v) \equiv \begin{cases} a_n(v-b_n)^2 + c_n & (v < 0) \\ a_p(v-b_p)^2 + c_p & (v \geq 0) \end{cases} \quad (3.17)$$

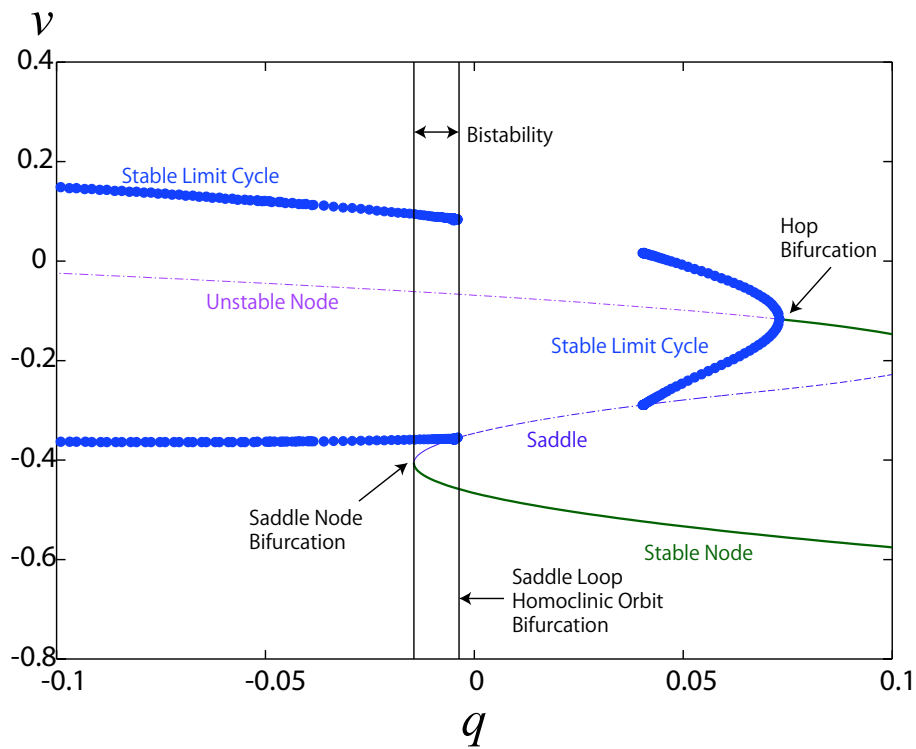
$$g(v) \equiv \begin{cases} k_n(v-l_n)^2 + m_n & (v < r) \\ k_p(v-l_p)^2 + m_p & (v \geq r) \end{cases} \quad (3.18)$$

である。2変数 DSSN と同様に、非線形関数  $f(v), g(v)$  とパラメータ  $a_x, b_x, c_x, k_x, l_x, m_x, v_0, r$  は  $v$ -および  $n$ -ナルクラインを決定する。パラメータ  $\phi, \tau, \varepsilon$  は時定数である。 $v$  はニューロンの膜電位、 $n$  はイオンチャネルの活動度、 $q$  は時定数の長い負のフィードバック電流に対応している。また、パラメータを適切に決めることによりそれぞれの変数は動作中常に-1 から 1 の間の値を取るようにすることが可能であり、固定小数点演算を容易に実装できる。式 (3.14)-(3.18) 中のパラメータ  $a_n, a_p, b_n, b_p, k_n, k_p, \tau, \varepsilon$  を  $2^n, l_n, l_p, \phi$  を  $\pm 2^n \pm 2^m$  (ただし  $n, m$  は整数) から選ぶことで、これらの式中の乗算をビットシフトと加算に置き換えた。これにより、デジタル演算回路で実装する際に乗算器を省略し、3変数 DSSN モデルにおいても 1 ステップ計算あたりの乗算数は  $v^2$  を計算する 1 つにおさえた。変数  $q$  の時定数  $\varepsilon$  は  $2^{-8}$  と非常に小さい値に設定されている。分岐パラメータを  $q$  としたときの変数  $v$  の分岐図を図 3.5 に示す。パラメータの値は付録 A に示す。

図 3.5 では、 $q=[-0.005, -0.020]$  付近の領域で安定平衡点と安定なりミットサイクルの 2 つの安定状態が存在する。従って、後述するように、 $q$ -ナルクラインを適切に設定することでバースト発火などのダイナミクスを実現することができる。



(a)



(b)

図 3.5: 2 変数系の分岐図と双安定領域の拡大図

### 3.3 シナプスモデル

本研究でシリコン神経ネットワークを構築する際に用いたシリコンシナプスモデルについて説明する [20]。このモデルではシナプスの活動度  $s$  はスパイクの入力時刻  $t_s$  によって次の方程式で記述される。

$$s(t) = a \exp\left(-\frac{t_s - t}{\tau_s}\right) \Theta(t - t_s) \quad (3.19)$$

ここで、 $a$  はシナプス活動度の最大値、 $\tau_s$  は時定数、 $\Theta(x)$  はステップ関数で  $x > 0$  のとき  $\Theta = 1$ 、 $x \leq 0$  のとき  $\Theta = 0$  である。微分方程式は式 (3.20) のように表される。

$$\frac{ds}{dt} = -\frac{1}{\tau_s} s + (a - s) \delta(t - t_s) \quad (3.20)$$

$\delta$  はデルタ関数である。図 3.6 にシナプス活動度  $s$  の時系列例を示す。

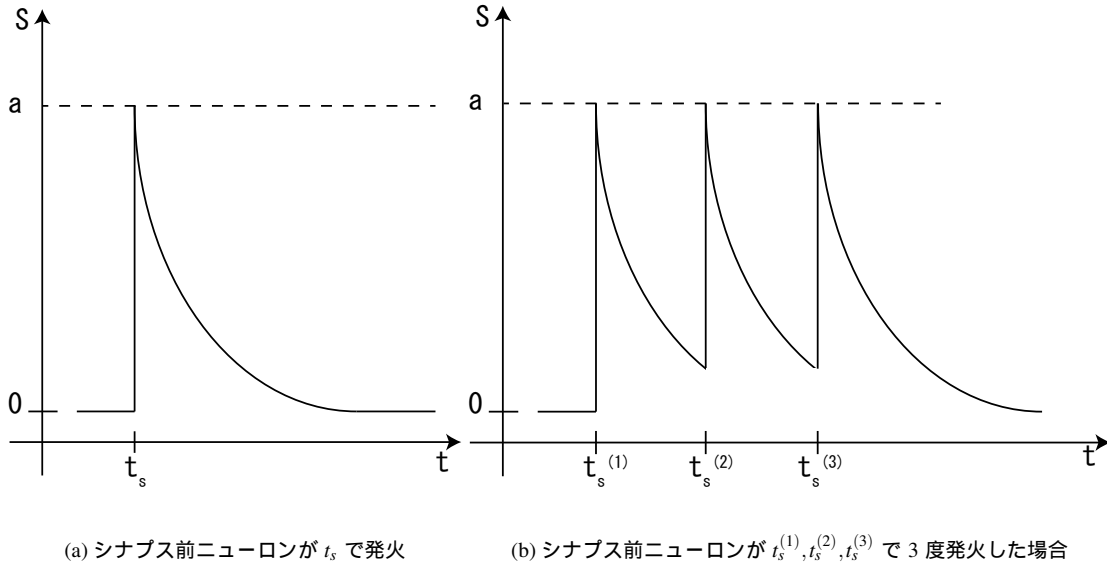


図 3.6: シナプス活動度の時系列例

図 3.6(a) ではシナプス活動度  $s$  の初期値は 0 であり時刻  $t_s$  にスパイクが入力されると活動度  $s$  は最大値  $a$  にセットされる。その後は時定数  $\tau_s$  に従って指数関数的に活動度が減少していく。図 3.6(b) では、時刻  $t_s^{(1)}, t_s^{(2)}, t_s^{(3)}$  で複数回スパイクが入力されるが、その際、減衰途中に発火しても活動度に  $a$  が加算されるのではなく、最大値  $a$  にセットされる。つまり、このシナプスモデルではシナプス前ニューロンが発火するとシナプス活動度  $s$  は直前の状態に関わらず必ず最大値  $a$  にセットされる。シナプスモデルには膜電位  $v$  に依存したものやシナプス活動度の立ち上がりに関しても時定数を持ったものなどより詳細なモデルも存在するが、本研究ではシリコンシナプスとしてデジタル演算回路に実装しやすい式 (3.19) を使用した。本モデルはシナプスの重要な特徴であるすばやい立ち上がりとゆっくりとした減衰のみにフォーカスしている。

シリコン神経ネットワーク上で  $i$  番目のシリコンニューロンへの入力電流  $I_i(t)$  は次の方程式で与えられる。

$$I_i(t) = \sum_j w_{ij} s_j(t) \quad (3.21)$$

ここで、 $w_{ij}$  は  $j$  番目のシリコンニューロンから  $i$  番目のシリコンニューロンへの結合強度、 $s_j$  は  $j$  番目のシリコンニューロンの出力を受け取るシリコンシナプスの活動度である。

シナプス結合強度  $w_{ij}$  はシリコンニューロン間の結合の強さを表し、どの程度  $j$  番目のシリコンニューロンが  $i$  番目のシリコンニューロンに影響を与えるかを示す値であり、一般的に各々のシリコンシナプスにおいて異なる値をとる。例えば、 $w_{ij}=0$  の場合  $j$  番目のシリコンニューロンが発火したとしても  $i$  番目のシリコンニューロンには全く信号が伝達されない、すなわち結合を持たないことを意味する。 $w_{ij} > 0$  の場合には  $j$  番目のシリコンニューロンが発火した場合に  $i$  番目のシリコンニューロンに正の入力を与える。これは、膜電位を上昇させる興奮性シナプスに対応する。逆に、 $w_{ij} < 0$  の場合には  $j$  番目のシリコンニューロンが発火した場合に  $i$  番目のシリコンニューロンに負の入力を与える。これは膜電位を下降させる抑制性シナプスに対応する。

## 第4章 回路設計

この章では3変数DSSNモデルのデジタル演算回路での実装例を示す。

### 4.1 シリコンニューロン

デジタル演算回路では式(3.14)-(3.16)を数値積分することによってニューロンの挙動が再現される。デジタル演算回路では連続量は取り扱えないので式(3.14)-(3.16)を大きな回路リソースを必要としないオイラー法によって差分方程式に直した。式(3.14)-(3.16)の差分方程式は次のように記述される。

$$v(t + \Delta t) = v(t) + \Delta t \times \frac{\phi}{\tau} (f(v) - n - q + I_0 + I_{stim}) \quad (4.1)$$

$$n(t + \Delta t) = n(t) + \Delta t \times \frac{1}{\tau} (g(v) - n) \quad (4.2)$$

$$q(t + \Delta t) = q(t) + \Delta t \times \frac{\epsilon}{\tau} (v - v_0 - \alpha q) \quad (4.3)$$

オイラー法ではルンゲクッタ法よりも精度が粗いため精度の低下を考慮しなくてはならないが、河野らの2変数DSSNに関する研究では十分なビット精度と時間刻み幅を選ぶことによって、倍精度小数点演算とルンゲクッタ法でシミュレートされる複雑な挙動と同等なものがオイラー法でも得られることが示されている [1] [13]。

図4.1は本研究で設計した3変数DSSNのブロック図である。

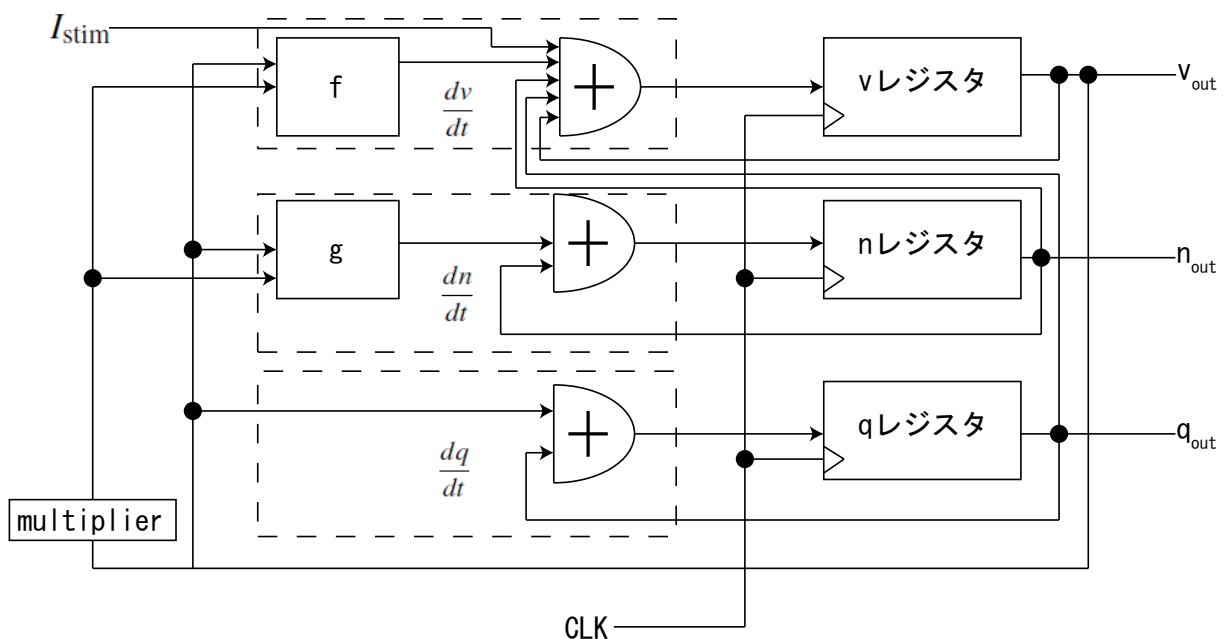


図 4.1: 設計した3変数DSSNのブロック図

図 4.1 の  $\frac{dv}{dt}$ ,  $\frac{dn}{dt}$ ,  $\frac{dq}{dt}$  は差分方程式 (4.1),(4.2),(4.3) に対応している。 $\frac{dv}{dt}$ ,  $\frac{dn}{dt}$  ブロック内の  $f$ ,  $g$  ブロックはそれぞれ  $f(v), g(v)$  の演算を担い、 $\frac{dv}{dt}, \frac{dn}{dt}, \frac{dq}{dt}$  ブロックの出力はそれぞれ  $v, n, q$  レジスタに記憶される。各ブロックは CLK の立ち上がりごとに一回計算がおこなわれ  $v_{out}, n_{out}, q_{out}$  として出力される。

図 4.2 に  $\frac{dv}{dt}$  ブロックの構成を示す。

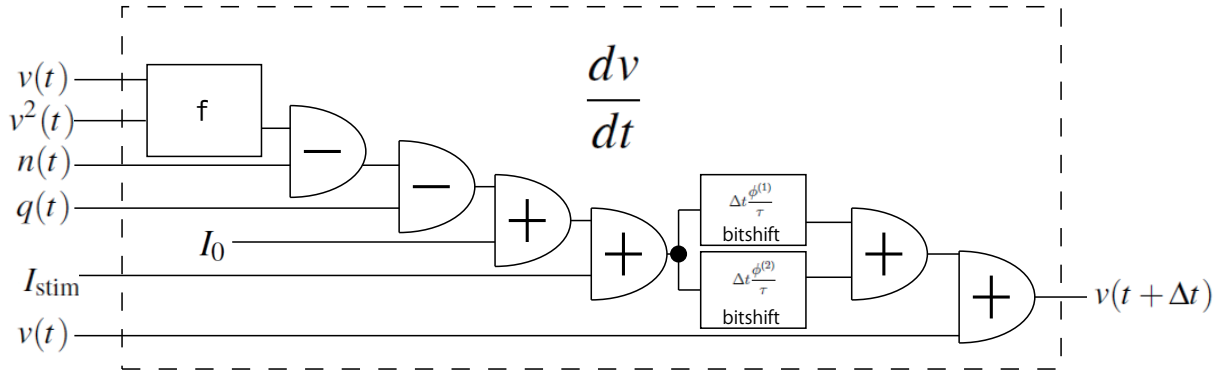


図 4.2:  $dv/dt$  のブロック図

この回路は入力  $v$  と  $v^2$  を受け取りブロック  $f$  で  $f(v)$  の値を演算する。次に  $f(v)$  の出力値と  $n$  レジスタからの出力値を減算器で演算する。その出力値が減算器で  $q$  レジスタからの出力値と演算され、次に加算器でバイアス電流  $I_0$ 、刺激電流  $I_{stim}$  と加算される。パラメータ  $\phi$  は  $\phi = \phi^{(1)} - \phi^{(2)}$  ( $\phi^{(1)}, \phi^{(2)}$  はともに 2 のべき乗)、 $\frac{\Delta t}{\tau}$  は 2 のべき乗とかけるので、 $\Delta t \frac{\phi}{\tau}$  をかける演算はビットシフトしたものである。最後にレジスタの出力値  $v(t)$  と加算され  $v(t + \Delta t)$  を出力する。

図 4.3 に  $\frac{dn}{dt}$  ブロックの構成を示す。

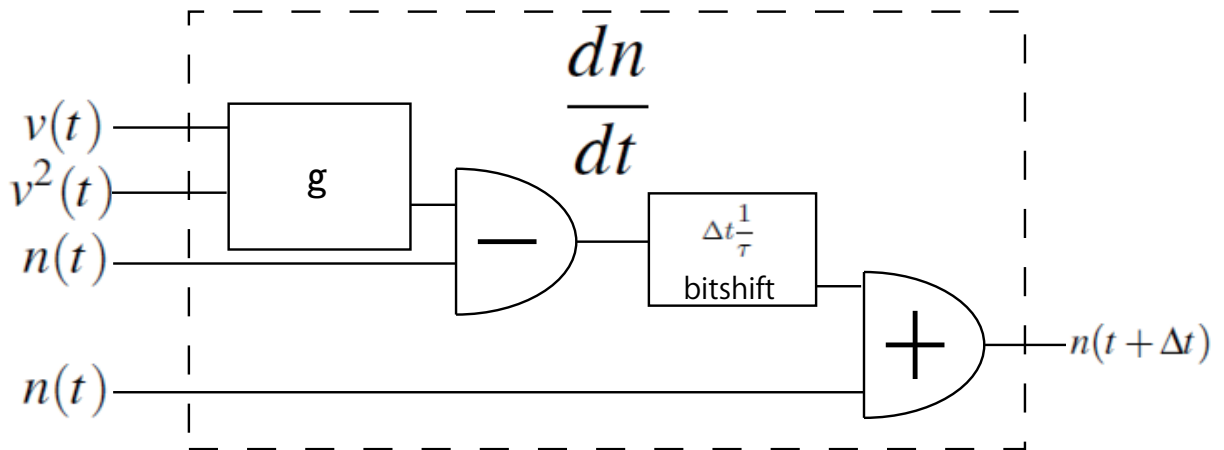


図 4.3:  $dn/dt$  のブロック図

この回路は入力  $v$  と  $v^2$  を受け取りブロック  $g$  で  $g(v)$  の値を演算する。次に  $g(v)$  の出力値と  $n$  レジスタからの出力値を減算器で演算する。 $\frac{dv}{dt}$  ブロックと同様に  $\frac{\Delta t}{\tau}$  は 2 のべき乗であるので  $\Delta t \frac{1}{\tau}$  をかける演算はビットシフトで表される。最後にレジスタの出力値  $n(t)$  と加算され  $n(t + \Delta t)$  を出力する。

図 4.4 に  $\frac{dq}{dt}$  ブロックの構成を示す。

この回路は入力  $v$  を  $v_0$  と減算器で演算する。パラメータ  $\alpha$  は 2 のべき乗であるので入力  $q$  と  $\alpha$  の積はビットシフトで表される。次に、 $v(t) - v_0$  と  $\alpha q$  を減算したものと  $\Delta t \frac{\epsilon}{\tau}$  をかけるが、この演算は  $\Delta t \frac{\epsilon}{\tau}$  が 2 のべき乗に設定されているのでビットシフトで表される。最後にレジスタの出力値  $q(t)$  と加

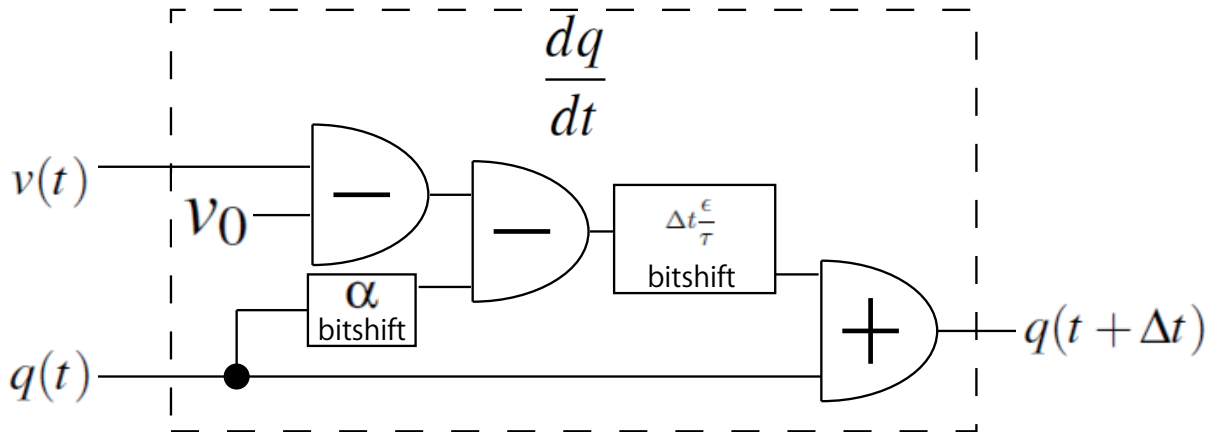


図 4.4:  $dq/dt$  のブロック図

算され  $q(t + \Delta t)$  を出力する。

$f$  ブロックは乗算器の個数をおさえるため、式 (4.4) のようにかっこを展開して実装した。 $a_x, b_x$  はすべて 2 のべき乗であるので、この場合、 $v^2$  の計算にのみ乗算器を用いればよい(ただし  $x=n$  または  $p$ 。以下同じ)。この乗算器は  $g$  ブロックの演算回路でも使用されるので  $f$  ブロックの外部に実装されている。

$$f(v) \equiv \begin{cases} a_n v^2 - 2a_n b_n v + a_n b_n^2 + c_n & (v < 0) \\ a_p v^2 - 2a_p b_p v + a_p b_p^2 + c_p & (v \geq 0) \end{cases} \quad (4.4)$$

図 4.5 に  $f$  ブロックの回路図を示す。

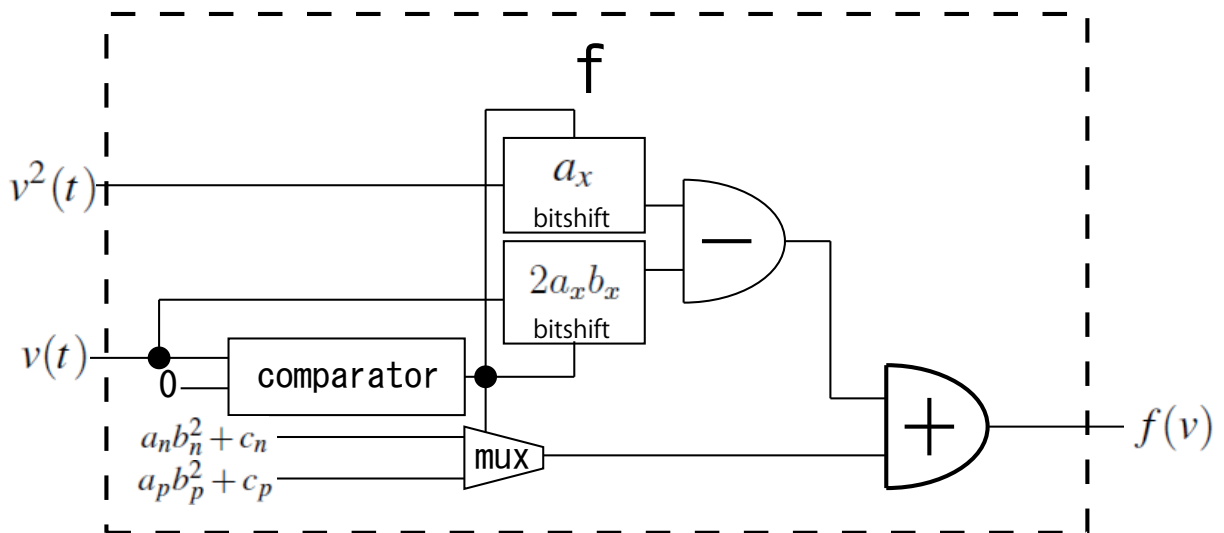


図 4.5:  $f$  ブロックの回路図

$v$  レジスタの出力はコンパレータによって符号判定され、パラメータ  $a_x, b_x, c_x$  を選択するマルチプレクサに送られる。また、 $v$  はパラメータ  $2a_x b_x$  の積を計算するためにビットシフトされる。 $a_x, b_x$  はともに 2 のべき乗であるので  $v$  と  $2a_x b_x$  との積及び  $v^2$  と  $a_x$  との積はビットシフトで表現される。これらが減算器で演算され、さらにマルチプレクサの出力  $a_x b_x^2 + c_x$  が加算されて  $f(v)$  となり出力される。

$g$  ブロックで行われる数値演算の処理過程も  $f$  ブロックのものと同様である。ただし、パラメータ  $l_p$  及び  $l_n$  が 2 のべき乗ではなく  $\pm 2^n \pm 2^m$  の形になっており、この実装分回路が複雑になる。 $g(v)$  は式 (3.18) で与えられるが  $g$  ブロックでも  $f$  ブロックと同様に、乗算の個数を抑えるために式 (4.5) のようにかっこを展開した形で実装した。 $k_x$  は 2 のべき乗であり、 $l_x = \pm 2^n \pm 2^m = l_x^{(1)} + l_x^{(2)}$  とかけるので、この場合、 $v^2$  の計算のみに乗算器を用いればよい。

$$g(v) \equiv \begin{cases} k_n v^2 - 2k_n l_n v + k_n l_n^2 + m_n & (v < r) \\ k_p v^2 - 2k_p l_p v + k_p l_p^2 + m_p & (v \geq r) \end{cases} \quad (4.5)$$

$l_x = l_x^{(1)} + l_x^{(2)}$  を用いて書くと、

$$g(v) \equiv \begin{cases} k_n v^2 - 2k_n l_n^{(1)} v - 2k_n l_n^{(2)} v + k_n l_n^2 + m_n & (v < r) \\ k_p v^2 - 2k_p l_p^{(1)} v - 2k_p l_p^{(2)} v + k_p l_p^2 + m_p & (v \geq r) \end{cases} \quad (4.6)$$

である。。

図 4.6 に  $g$  ブロックの回路図を示す。

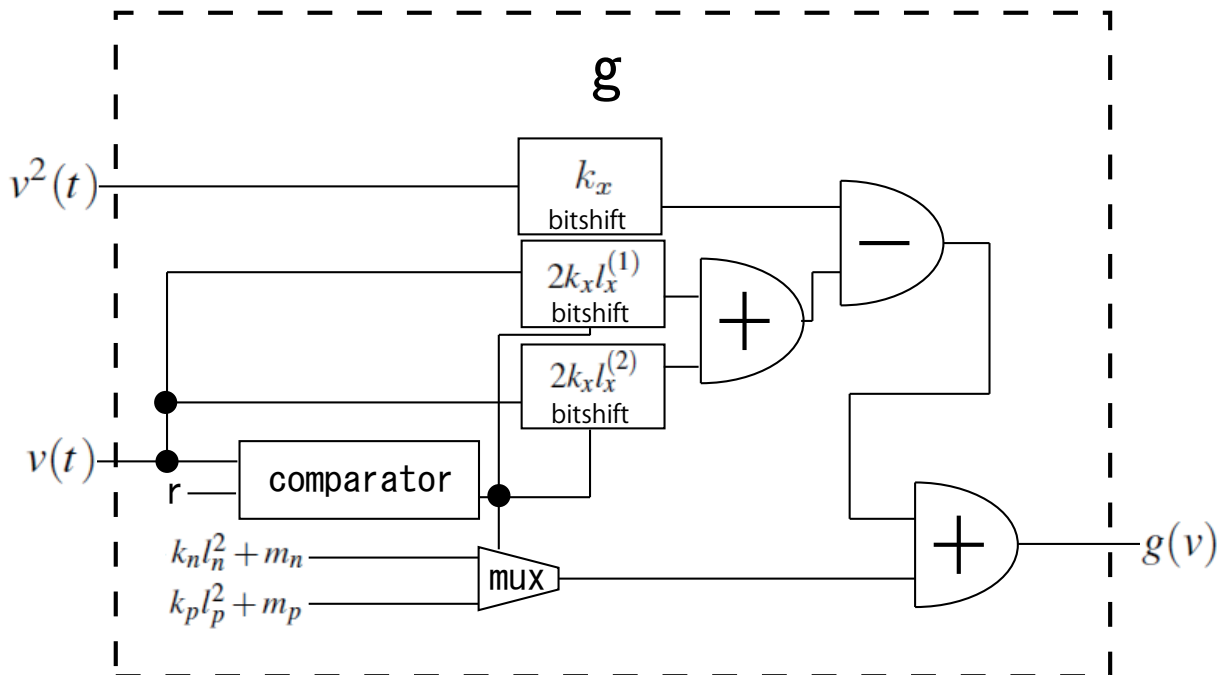


図 4.6:  $g$  ブロックの回路図

$v$  レジスタの出力はコンパレータに入力されパラメータ  $r$  との大小が比較される。比較の結果は 2 つのビットシフトとマルチプレクサーに送られる。 $v$  は  $2k_x l_x^{(1)}, 2k_x l_x^{(2)}$  との積に変換され、それらが加算器により  $2k_x l_x$  との積となる。この値が、 $v^2$  のビットシフトで得られる  $k_x v^2$  と減算器で演算され、さらにマルチプレクサーの出力  $k_x l_x^2 + m_x$  と加算され出力値  $g(v)$  が得られる。

今回設計した演算回路はすべて 25 ビットの固定小数点を用いた。その際なるべく小数部分が多く含まれるように小数点の位置を決めた。動作時に  $v, n, q$  の絶対値が常に 1 未満になるようパラメータを選んでいたので  $v, n, q$  には符号部分に 1 ビット、小数点第一位以下に残りの 24 ビットを割り当てた。また、 $f(v), g(v)$  を計算するには最大値を考慮して必要最小限のビット数を整数部分に割り当てた。時間間隔  $\Delta t$  は  $2^{-17}$  秒、すなわち周波数では 128kHz とした。ビット数を 24 ビット以下にし



たり時間間隔を  $2^{-17}$  秒よりも大きくしてしまうと後述するカオス的な挙動などが観測されなくなるなど動作に問題が生じる。

## 4.2 シリコンシナプス

本節では本研究で利用したシリコンシナプスの実装例を示す。本研究で利用したシリコンシナプスモデルは式 (3.20) で記述される。デジタル演算回路では差分方程式 (4.7) の形で実現される。

$$s(t + \Delta t) = s(t) + \Delta t \times \frac{1}{\tau_s} (-s(t)) \quad (4.7)$$

図 4.7 に今回実装したシリコンシナプスのブロック図を示す。

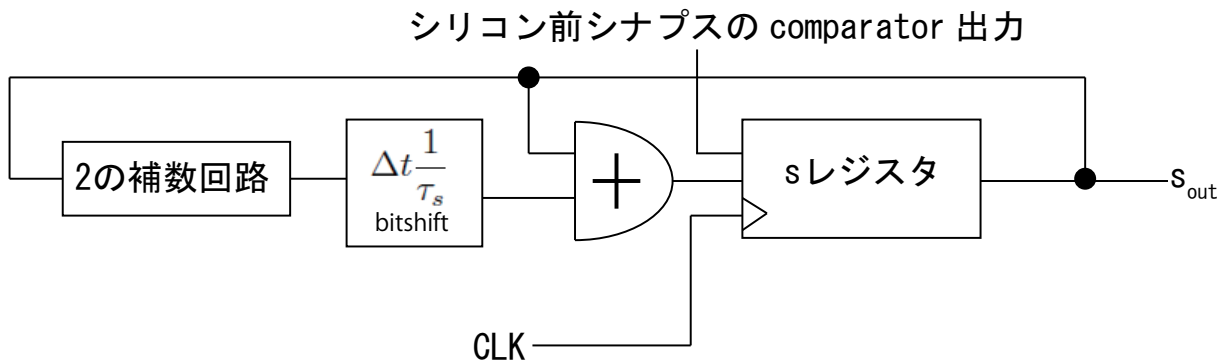


図 4.7: シリコンシナプスのブロック図

$s$  レジスタの出力を補数回路によって符号を反転し  $-s(t)$  を得る。ビットシフトにより  $\Delta t/\tau_s$  との積を計算し、最後に  $s(t)$  との和が加算器で演算され  $s(t + \Delta t)$  が得られる。ビット精度、時間刻み幅  $\Delta t$  はシリコンニューロンと同様 25 ビット、 $2^{-17}$  秒を用いた。

以上がシナプス活動度がスパイクを受けた後の減衰過程の計算である。シナプス活動度が最大値  $a$  にセットされる演算回路が必要である。

本研究では、シナプス前シリコンニューロンの膜電位  $v$  が閾値 0 を超えた時にニューロトランスミッタの放出イベントが発生するとモデル化し、シナプス活動度を  $a$  にセットする。すなわちある時刻  $t$  から  $t + \Delta t$  の間に  $v$  の符号が負から正に変化したら、スパイクが発生し、 $s$  レジスタに  $a$  をセットすることになる。図 4.8 中のコンパレータは  $v$  レジスタの出力  $v(t)$  と 1 ステップ先の  $v(t + \Delta t)$  の符号を比較する。この符号が負から正になった場合にコンパレータが  $s$  レジスタに信号を送り  $s$  レジスタに  $a$  がセットされる仕組みになっている。 $v$  の符号が変化しない時にはシリコンシナプス回路では  $s$  は図 3.6 で示されるように減衰していく。

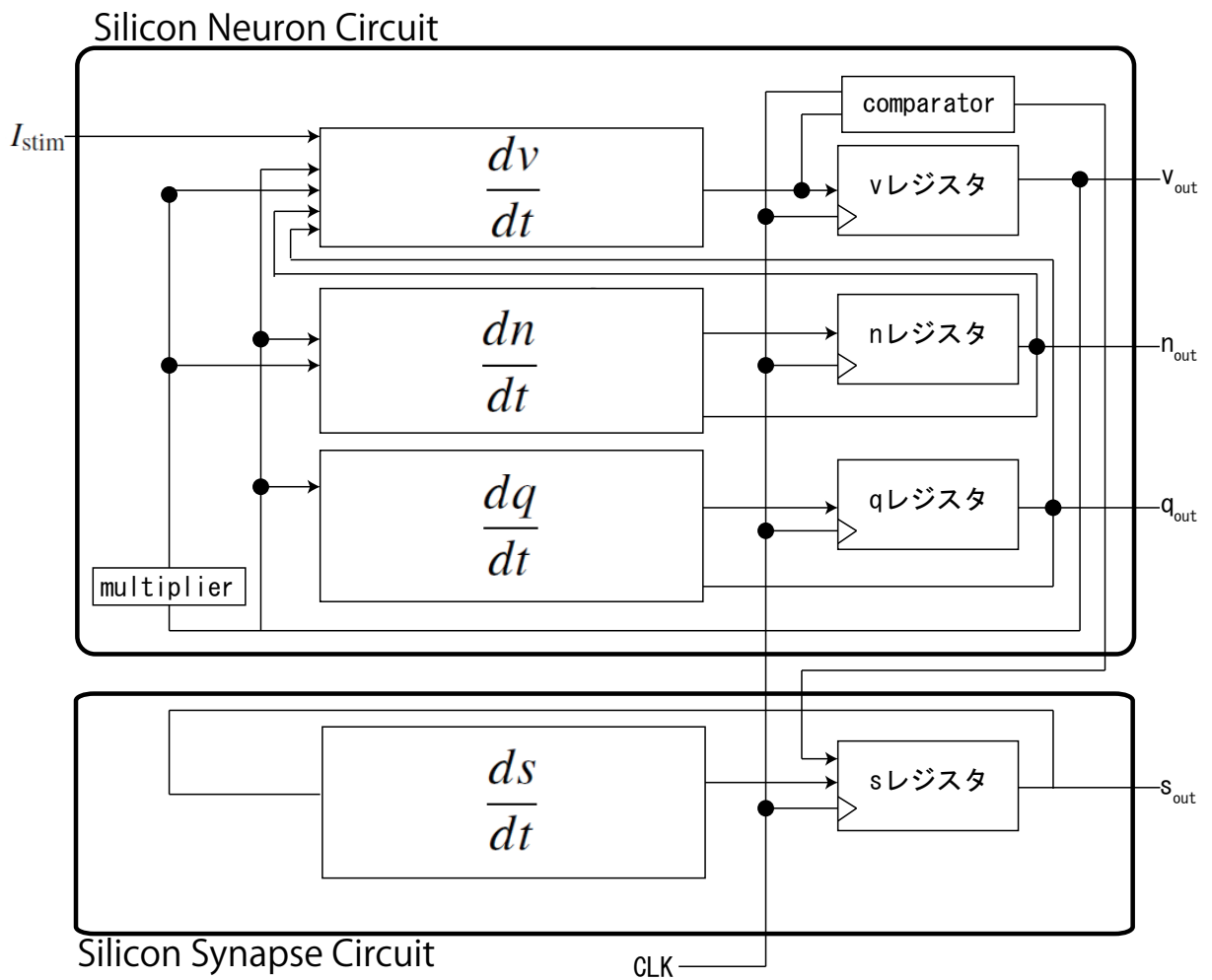


図 4.8: シリコンニューロンとシナプスのブロック図

### 4.3 シリコン神経ネットワーク

本研究では次のような小規模なシリコン神経ネットワークを構築した。4.1 節及び 4.2 節で述べたシリコンニューロンとシリコンシナプスを結合して、図 4.8(a) のような回路を設計した。1.2 節で自律的にバースト発火するニューロンがヒルの心拍リズムを生成する神経ネットワークなどで重要な役割を果たしていることを述べた。運動パターンを生成する最も基本的な神経ネットワークは、2 つのニューロンが抑制性シナプスで相互結合したものであり、その模式図が図 4.9(a) である。このような神経ネットワークでは、ニューロンがお互いに逆相相でバースト発火することが知られており、Half Center Oscillator と呼ばれる。本回路でも同様の挙動を実現することをめざす。

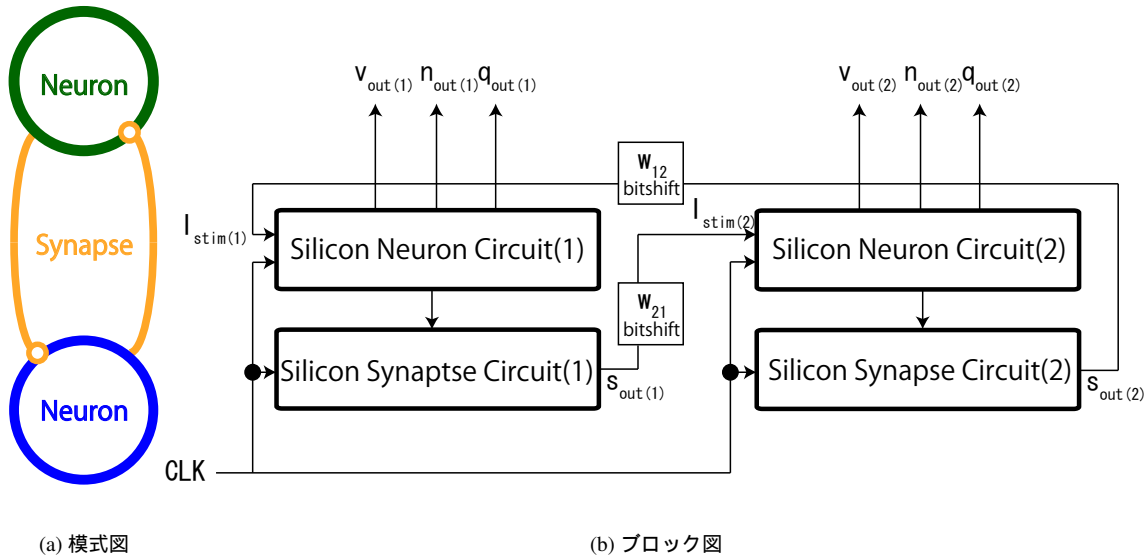


図 4.9: Silicon Half Center Oscillator

本研究で構築した Silicon Half Center Oscillator のブロック図を図 4.9(b) に示す。本回路は 2 つのシリコンニューロンを持っている。シリコンニューロン (1) が発火した場合には前節で述べたように、シリコンシナプス (1) のシナプス前シリコンニューロン、シリコンニューロン (1) のコンパレータ出力がシリコンシナプス (1) に送られる。シリコンシナプス (1) は、この出力がアクティブの場合にはシナプス活動度  $s$  を最大値  $a$  にセットし、そうでない場合は差分方程式 (4.7) に従って、活動度  $s$  を減衰させていく。シリコンシナプス (1) の活動度出力  $s_{out(1)}$  はシナプス後シリコンニューロンであるシリコンニューロン (2) に  $I_{stim(2)}$  として入力される。この際、シリコンニューロン (1) からシリコンニューロン (2) への結合強度  $w_{21}$  で重みづけされる。付録 A に示すように、本研究では  $w_{21} = -2^{-3}$  としたので  $w_{21}$  との重みづけはビットシフトで表される。上述のシリコンニューロン (1)、シリコンシナプス (1) での計算と同じ計算がシリコンニューロン (2)、シリコンシナプス (2) でも行われて  $I_{stim(1)}$  が計算され、シリコンニューロン (1) に入力される。クロックごとにシリコンニューロン (1) とシリコンニューロン (2) の内部変数は  $v_{out(1)}, n_{out(1)}, q_{out(1)}, v_{out(2)}, n_{out(2)}, q_{out(2)}$  として外部へ出力される。

## 第5章 シミュレーション結果

前章で設計したシリコンニューロン及びシリコンシナプスを VHDL によって記述し、それらを組み合わせて Silicon Half Center Oscillator を構築した。本章では VHDL シミュレーションの結果を示す。ただし、発火周波数順応性に関しては MATLAB での数値シミュレーション結果である。シミュレーションは XILINX 社の提供している Modelsim Xilinx Edition を使用し、ターゲットデバイスは XILINX 社の XC6SLX45 とした。

### 5.1 シリコンニューロン

3変数 DSSN において、パラメータを付録 A に示すように定め、式 (3.16) 中のパラメータ  $v_0$  を変化させることによって方系波バーストニューロンの特徴的な 4 種類の挙動を観測することができた。それらは、バースト発火、カオス的バースト発火、カオスの連続発火、周期的連続発火である。 $v_0$  は式 (3.13) でも述べたように  $q$ -ナルクラインの  $v$  切片を決定づけるパラメータであり  $q$ -ナルクラインの位置変化によって Hindmarsh-Rose モデルにおけるものと類似したダイナミクスの変化が生成されている。

#### 5.1.1 バースト発火

パラメータ  $v_0 = [-0.406, -0.339]$  の範囲でバースト発火が発生することを確認した。これは、適切な  $v_0$  を選び  $q$ -ナルクラインを 2 変数系の安定なリミットサイクルと安定平衡点を分けるように配置することにより、Hindmarsh-Rose モデルの分岐図 3.4 で説明したものと同様のメカニズムを再現することができるからである。図 5.1 は  $v_0 = -0.380$  としたときの  $v$ - $q$  平面と変数  $v$  の時系列例である。状態点が、安定平衡点に位置する場合、式 (3.16) より、 $q$ -ナルクラインの下側の領域では  $dq/dt < 0$  であり  $q$  が減少するので、図 5.1(a) 中の赤い矢印 (1) のように移動する。 $q$  がサドルノード分岐点に到達すると、それより  $q$  が小さな領域では安定平衡点は存在しないので状態点は  $q$ -ナルクラインの上側にある安定なリミットサイクルへジャンプする。 $q$ -ナルクラインの上側では  $dq/dt > 0$  であるのでリミットサイクルを振動しながら、赤い矢印 (2) で表されるように  $q$  が増加していく。状態点がサドルループホモクリニック軌道分岐点 (安定なリミットサイクルの右端) に到達すると、それより  $q$  が大きな領域には安定なリミットサイクルが存在しないので、 $q$ -ナルクラインの下側の安定平衡点へとジャンプする。状態点が再び  $q$ -ナルクラインの下側に来るため、これまでのシーケンスをくりかえすことになる。これが安定平衡点に対応する休止状態とリミットサイクルに対応する発火状態を交互に持つ自律的バースト発火のメカニズムである。

バースト発火において、バーストごとの発火回数を Spike per Burst (SPB) と呼ぶことにする。パラメータ  $v_0 = -0.380$  における図 5.1(b) の場合では SPB は 2 である。今回、パラメータ  $v_0$  を  $[-0.406, -0.339]$  の範囲内で変化させることによって SPB が変化した。 $v_0$  が増加するにしたがって SPB は 1, 2, 3 と増加した。図 5.2 に  $v_0 = -0.405$  と  $v_0 = -0.350$  のときの時系列例を示す。 $v_0 = -0.405$  の時は SPB が 1 であり、 $v_0 = -0.350$  のときは SPB が 3 である。

また、付録 A に示すパラメータのうち  $\varepsilon$  のみを変化させることによって SPB を調整できる。これは  $\varepsilon$  がゆっくりとした負のフィードバックに対応する変数  $q$  の時定数であり、休止状態と発火状態の

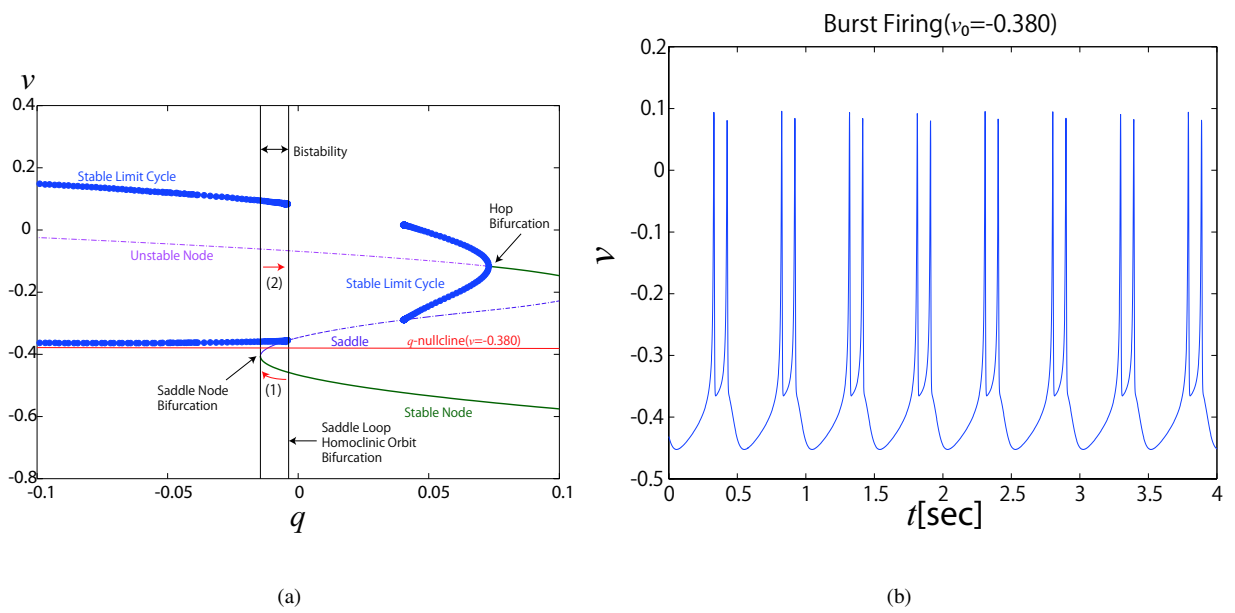


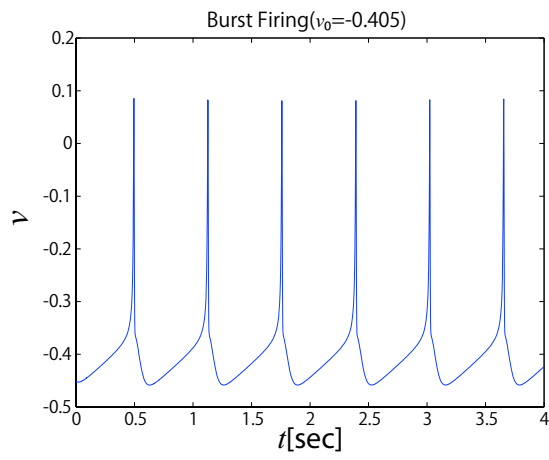
図 5.1: バースト発火の分岐図と時系列例 ( $v_0=-0.380$ )

切り替わりの速さをコントロールする役割を果たしているからであると考えられる。 $\varepsilon = 2^{-12}$  に設定したときの  $v$  の時系列例を図 5.3 に示す。 $\varepsilon$  以外のパラメータは全て図 5.2 のものと同じである。図 5.3(a) の  $v_0=-0.406$  の時は SPB が 11、図 5.3(b) の  $v_0=-0.340$  の時は SPB が 31 と増加している。

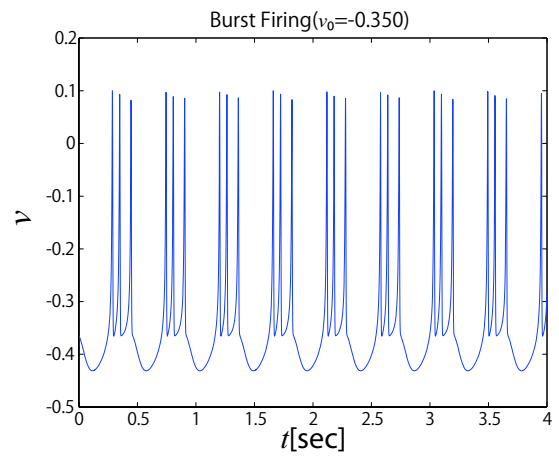
また、バースト発火における発火状態と休止状態の時間比によって他のニューロンへの影響力が決まるため、1.2 節で述べたような生体内のリズミカルな運動を生成するパターンジェネレータのダイナミクスにとって時間比は重要なパラメータであると考えられる。ここでは  $\varepsilon = 2^{-12}$  の場合について、発火状態と休止状態の時間比を次のように評価した。まず図 5.3 に示すように発火状態の時間幅を  $\tau_1$ 、休止状態の時間幅を  $\tau_2$  とした。 $\tau_1$  はバーストにおける最初の発火において  $v$  が 0 を超えた時刻から、最後の発火の終わりににおいて  $v$  が 0 を下回った時刻までの時間幅で定義した。 $\tau_2$  はバースト周期から  $\tau_1$  を引いたものである。発火状態が短く休止状態が長い  $v_0=-0.405$  の場合は時間比  $\tau_1/\tau_2=0.226$ 、発火状態が長く休止状態が短い  $v_0=-0.340$  の場合は  $\tau_1/\tau_2=1.87$  である。パラメータ  $v_0$  を  $-0.406$  から  $-0.340$  の間で変化させると時間比  $\tau_1/\tau_2$  は  $0.226$  から  $1.87$  の間を連続的に変化するので幅広い調整が可能となる。ただし、バースト周期もパラメータ  $v_0$  に依存して変化するため、 $v_0$  を変化させることのみで  $\tau_1/\tau_2$  のみを任意に選ぶことはできない。

パラメータ  $v_0 \in [-0.406, -0.339]$  の範囲内でのバースト発火の特徴をまとめると、パラメータ  $\varepsilon$  及び  $v_0$  によって SPB を調整でき、パラメータ  $v_0$  によって発火状態と休止状態の時間比  $\tau_1/\tau_2$  を調整できることが分かった。

これらの調整手法により本モデルを基にしてさまざまなパターンジェネレータを構成できる可能性がある。

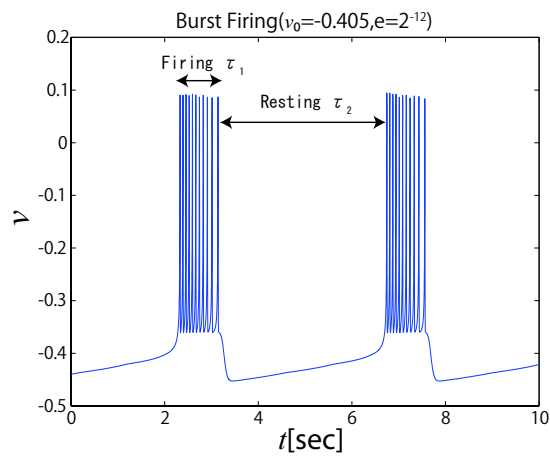


(a) ( $v_0=-0.405$ )

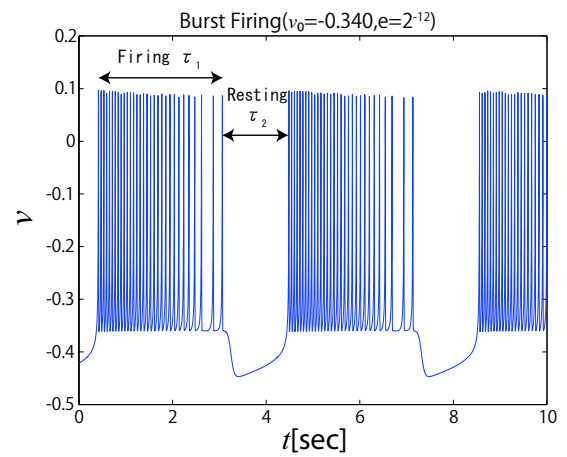


(b) ( $v_0=-0.350$ )

図 5.2:  $\varepsilon = 2^{-8}$  におけるバースト発火の時系列例



(a) ( $v_0=-0.405$ )



(b) ( $v_0=-0.340$ )

図 5.3:  $\varepsilon = 2^{-12}$  におけるバースト発火の時系列例

### 5.1.2 カオス的バースト発火

パラメータ  $v_0 = [-0.338, -0.324]$  の範囲でカオス的バースト発火が発生することを確認した。 $v_0 = -0.335$  のときの  $v$  の時系列例を図 5.4 に示す。 $v-q$  平面上では図 5.5(a) に示すように  $q$ -ナルクラインは位置する。図 5.4 は前節の規則的なバースト発火とは異なり、SPB が 3 や 2、もしくは 5 など不規則に変化している。この不規則なバースト発火が決定論的カオスであるかどうか判定するために次の解析を行った。

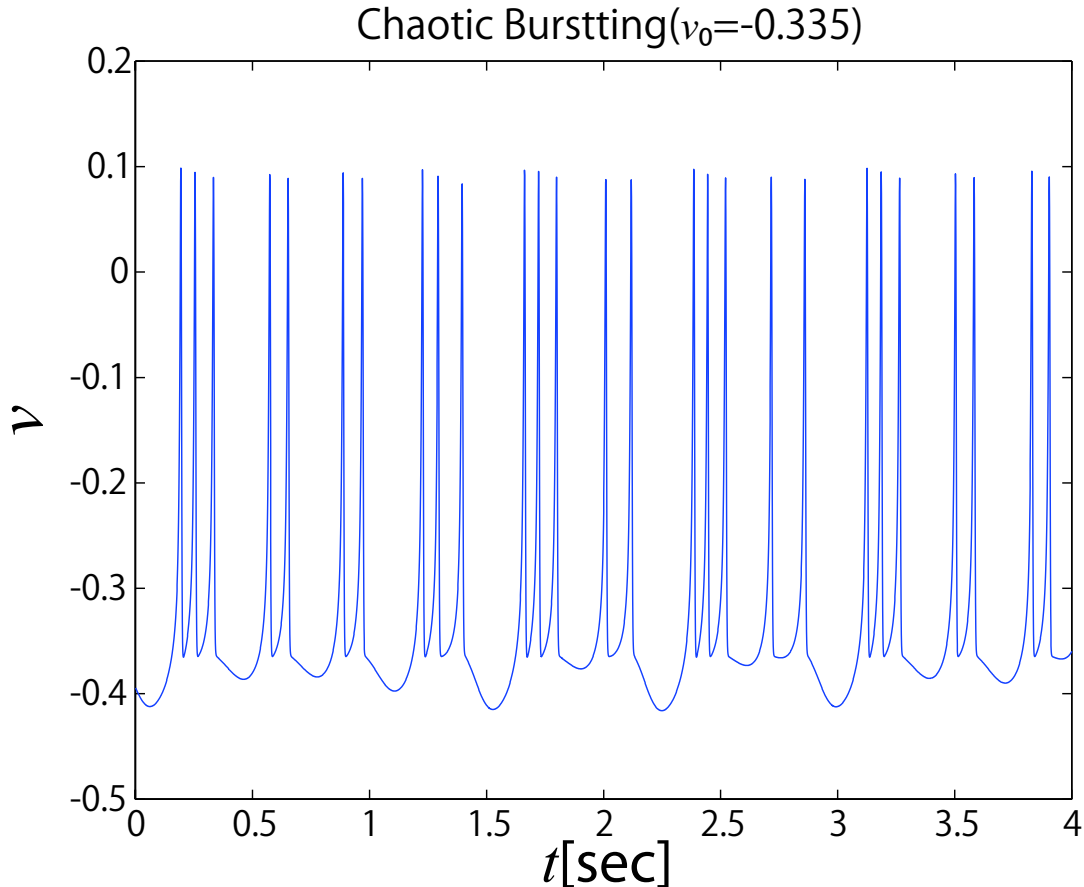
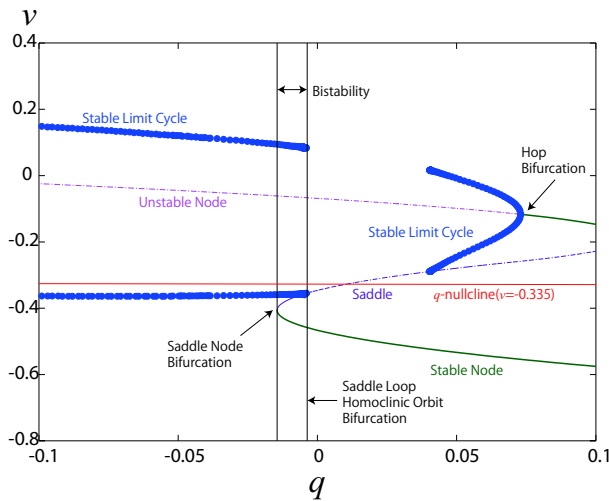


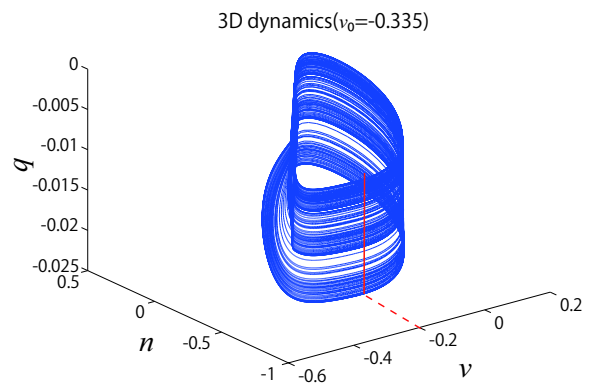
図 5.4: カオス的バースト発火の時系列例 ( $v_0 = -0.335$ )

図 5.5(b) に示すように  $v-n-q$  空間内でポアンカレ断面  $v = -0.2$  (図中赤線参照) を定義した。図 5.5(c) にはポアンカレ断面とバースト発火の軌道との交点の  $n, q$  座標がプロットされている。この 3 次元アトラクタは大まかに円筒状の構造をしているので平面  $v = -0.2$  とアトラクタとが交わる箇所は 2 つの領域に存在するが、変数  $n$  の値が小さい側、 $n < -0.5$  で定義される領域の断面を用いた。このポアンカレ断面上の各点には、時系列にそって順番がある。初期状態からアトラクタに引き込まれていく過渡期を除き、残りの各点についてポアンカレ断面上を通過した順番にしたがって、 $i$  番目に通過した状態点の座標を  $n_i, q_i$  とした。図 5.5(c) から  $v = -0.2$  におけるアトラクタは厚みがほぼなく、一次元的な構造をしていることがわかる。したがって、 $n, q$  の片方が決まればもう片方がきまるため、 $n_i, q_i$  のどちらか一方がわかれば  $n_{i+1}, q_{i+1}$  が予測できる。 $q$  方向に長い断面図であるので  $q_i$  に着目して解析を行った。図 5.5(d) は  $q_i$  のリターンマップである。例えば、ポアンカレ断面上において、5 番目の点の  $q$  座標が  $q_5 = -0.035$  であり 6 番目の点の  $q$  座標が  $q_6 = -0.030$  であった場合には、リターンマップ上に  $(-0.035, -0.030)$  の点をプロットする。こうしてすべての軌道をリターンマップにプロットすると

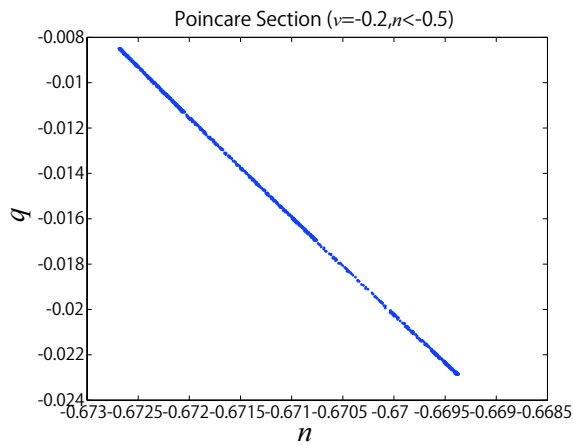
図 5.5(d) のように単価関数曲線上にすべての点がプロットされた。これはシステムが決定論的であるということを示唆しており、本シミュレーションにおけるカオス的バースト発火が決定論的なダイナミクスによって生成されていることがわかる。また、このリターンマップ上で  $q_i = q_{i+1}$  とプロットした曲線との交点において、曲線の傾きが-1 より大きいので、この交点が不安定平衡点であることが分かる。また、この一次元写像のリアプノフ指数を計算すると  $0.32 \pm 0.02$  と正であった。つまり、 $v_0 = -0.335$  としたときの図 5.4 に見られた不規則なバースト発火はカオス的バースト発火であるといえる。このようなカオス的バースト発火は生体内では方形波バーストニューロンと同等のダイナミクスを持つ膵臓の  $\beta$  細胞で観測されることが知られている [21]。



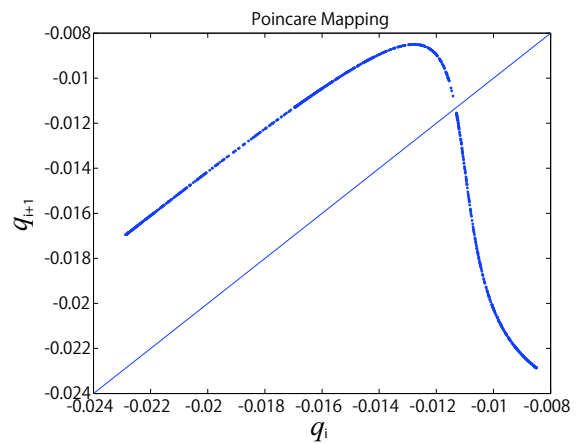
(a)  $v_0 = -0.335$  のときの分岐図



(b) 3次元のダイナミクス



(c) ポアンカレ断面



(d) ポアンカレ断面における  $q$  のリターンマップ

図 5.5: カオス的バースト発火の時系列解析



### 5.1.3 カオスの連続発火

パラメータ  $v_0 = [-0.323, -0.321]$  の範囲でカオスの連続発火が発生することを確認した。 $v_0 = -0.322$  としたときの  $v$  の時系列例を図 5.6 に示す。不規則な連続発火であり、特に発火と発火の間の  $v$  の変化の仕方に注目すると不規則性が明らかになる。 $v-n$  平面では図 5.5(a) に示すように  $q$ -ナルクラインは位置する。カオスのバースト発火、 $v_0 = -0.335$  の場合は 2 ないし、3 回発火すると、すなわちリミットサイクルを 2、3 周すると、 $q$  の増加により、サドルループホモクリニック軌道分岐点に到達し、リミットサイクルを消失、リミットサイクルの下限よりも下の領域を状態点が通って  $q$  が減少する。 $q$  が十分小さくなると、サドルノード分岐により安定平衡点が消失するため再びリミットサイクルに収束する。しかし、カオスの連続発火、 $v_0 = -0.322$  のときは常にサドルループホモクリニック軌道分岐点の近くに状態点があり、 $q$  がそれに伴って複雑な変化をするので図 5.6 のような不規則な連続発火を生成する。

この、 $v_0 = -0.322$  の時の不規則な連続発火も前節と同様の解析によってリアプノフ指数が  $0.34 \pm 0.02$  と正の値が得られた。従ってカオスであることが示唆される。図 5.5(b),(c),(d) にはそれぞれ 3 次元ダイナミクス、ポアンカレ断面、ポアンカレ断面上のリターンマップを示す。

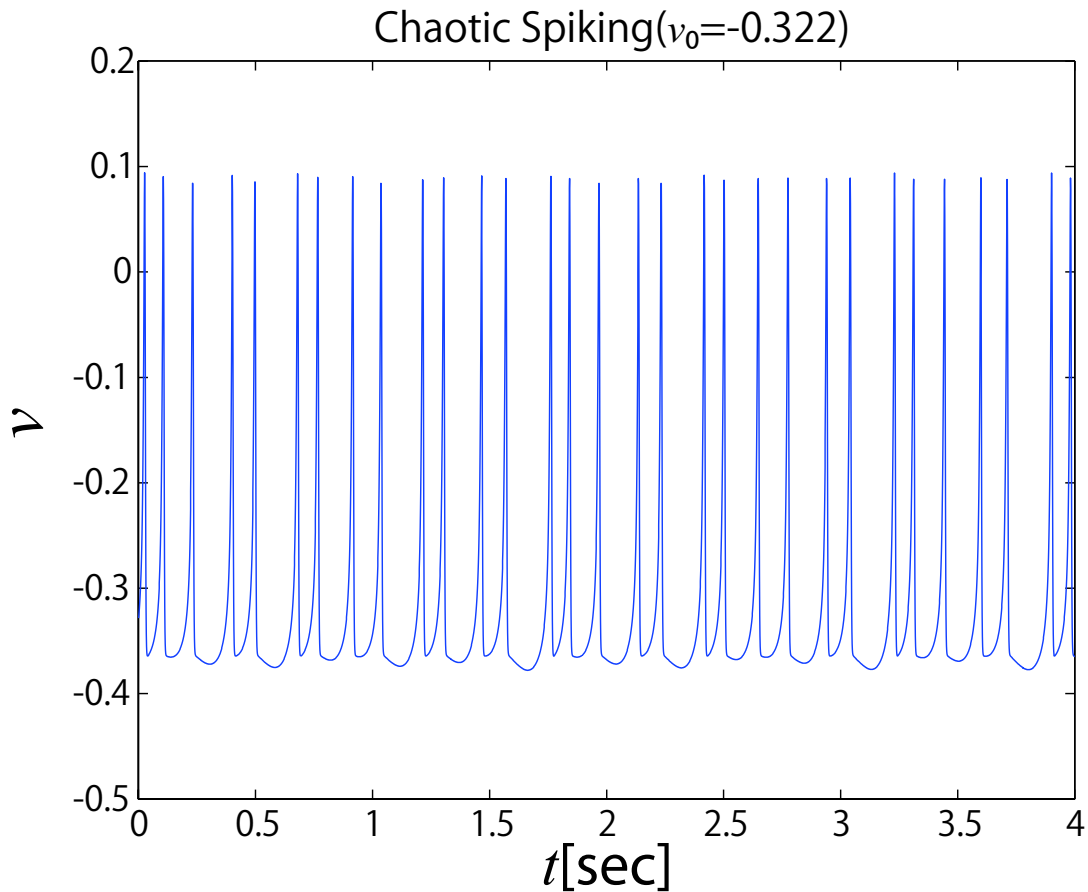
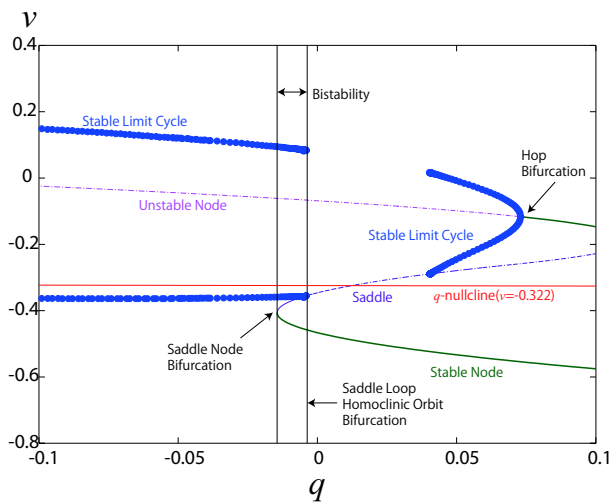
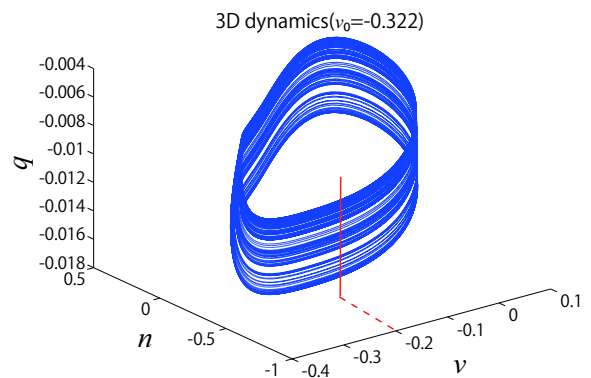


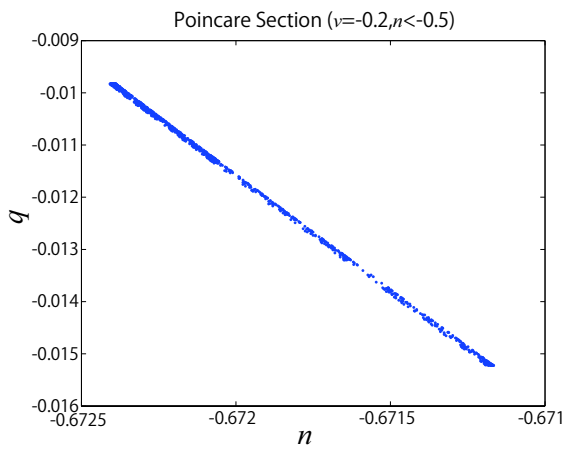
図 5.6: カオスの連続発火の時系列例 ( $v_0 = -0.322$ )



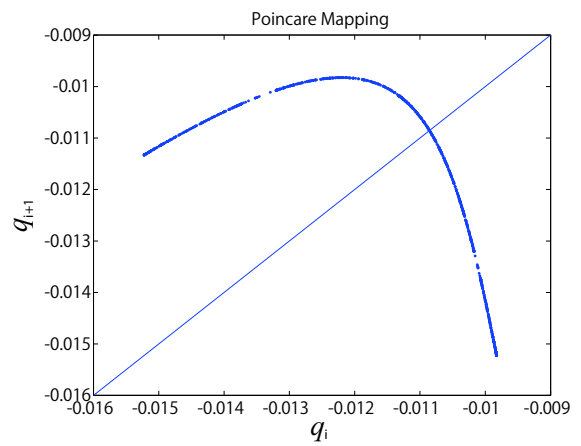
(a)  $v_0=-0.322$  ときの分岐図



(b) 3次元のダイナミクス



(c) ポアンカレ断面

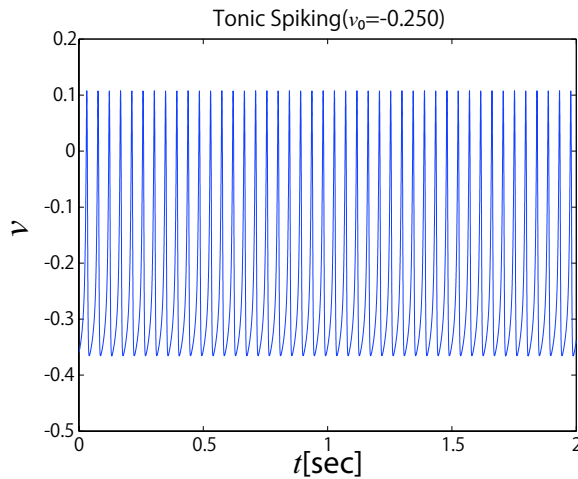


(d) ポアンカレ断面における  $q$  のリターンマップ

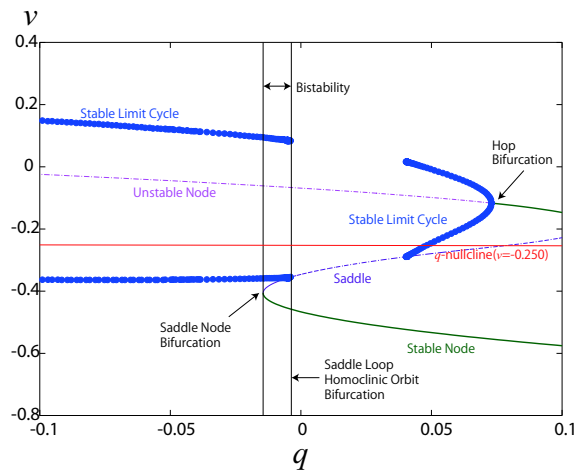
図 5.7: カオス的連続発火の時系列解析 ( $v_0=-0.322$ )

### 5.1.4 周期的連続発火

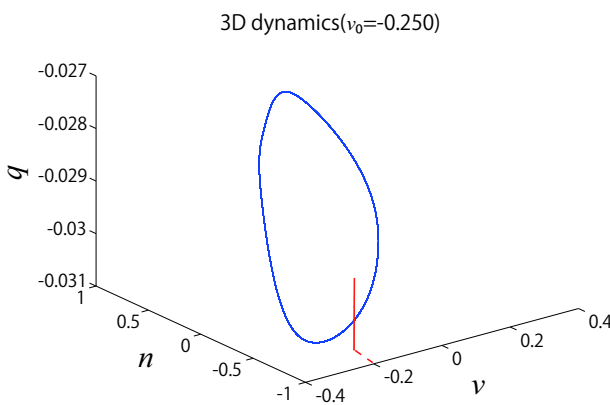
パラメータ  $v_0 = [-0.320, -0.200]$  の範囲で周期的連続発火が発生することを確認した。 $v_0 = -0.250$  のときの  $v$  の時系列例と  $v$ - $q$  平面をそれぞれ図 5.8(a),(b) に示す。図 5.8(a) より、前節のカオスの連続発火と異なりすべてのスパイクが同じ形状をしていることがわかる。図 5.8(c) には軌道を  $v$ - $n$ - $q$  空間にプロットしたものを示す。この軌道は、曲面的な構造をもたずリミットサイクルであることがわかる。図 5.8(c) 中の赤線で示される平面  $v = -0.2$  と軌道の交点を図 5.8(d) に示す。一点で交わっており、この連続発火が周期的なものだということがわかる。 $v_0 = -0.250$  のとき発火周波数はおよそ  $22 \pm 0.5$  Hz であった。



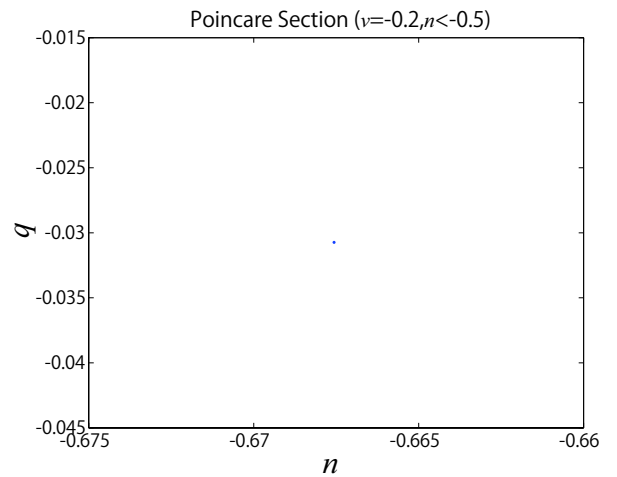
(a) 周期的連続発火の時系列例



(b)  $v_0 = -0.250$  のときの分岐図



(c) 3次元のダイナミクス



(d)  $v = -0.2$  におけるポアンカレ断面

図 5.8: 周期的連続発火の分岐図と時系列解析 ( $v_0 = -0.250$ )

### 5.1.5 リアプノフ指数解析

カオスのバースト発火、カオスの連続発火の節ではそれぞれ時系列例に対してポアンカレ断面を定義してリターンマップから一次元写像のリアプノフ指数を求めたが、本節ではパラメータ  $v_0$  を変化させたときに 3 変数 DSSN の最大リアプノフ指数がどのように変化するかを図 5.10 に示す。リアプノフ指数の計算は Wolf の方法を参考にして行った [22]。リアプノフ指数解析の詳細については付録 B で解説する。

図 5.10(a) に  $v_0$  を -0.5 から -0.2 まで変化させたときの最大リアプノフ指数を示す。領域 (a) では最大リアプノフ指数が負になっており安定平衡点が存在する状態、ニューロンモデルは静止状態である。 $v_0$  を増加させていくと (-0.408, -0.339) の領域 (b) で最大リアプノフ指数が 0 となる。このとき 5.1.1 節の周期的なバースト発火が発生している。

さらに  $v_0$  を増加させていくと (-0.339, -0.320) の領域で最大リアプノフ指数が正となる部分が現れる。(c1) の領域は 5.1.2 節のカオスのバースト発火に対応している。ただし、その領域内に最大リアプノフ指数が 0 でカオス的な挙動ではないいくつかの周期窓が観測された。さらに領域 (c3) でも最大リアプノフ指数が正であり、これは 5.1.3 節のカオスの連続発火に対応している。この領域にも周期窓が観測された。カオスのバースト発火からカオスの連続発火に移行する領域 (c2) ではいったん最大リアプノフ指数が 0 付近の値を取り周期的なふるまいを見せている。領域 (c2) のダイナミクスを図 5.9 に示す。 $v_0$  が -0.320 を超えると再び最大リアプノフ指数は 0 となるが、これは 5.1.4 節の周期的連続発火に対応する。 $v_0$  の変化に対するこれらの挙動の変化は、Hindmarsh-Rose モデルにおける  $v_0$  に対応するパラメータに対するダイナミクスの変化に類似しており [23]、本 3 変数 DSSN が方形波バーストニューロンとして十分なダイナミクスをそなえていることが裏付けられる。

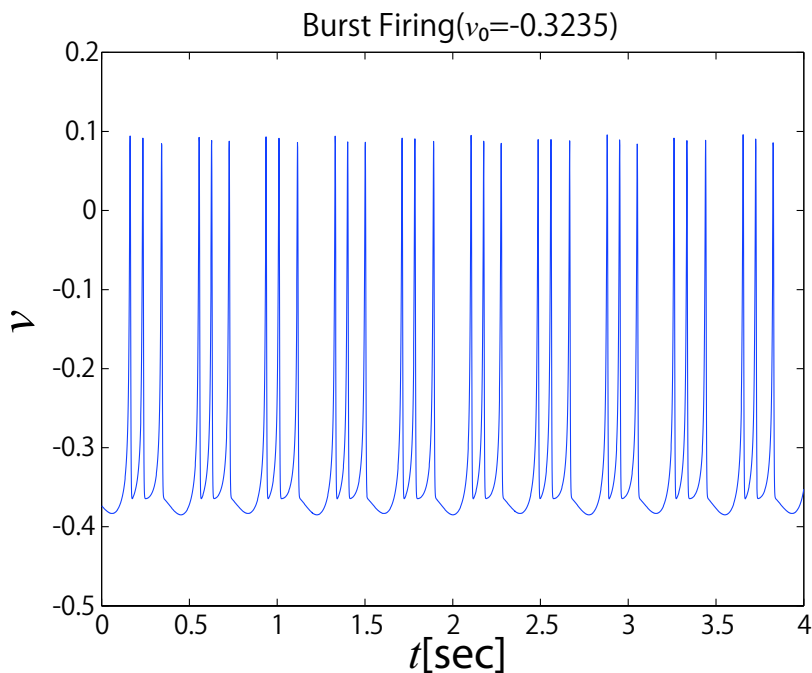
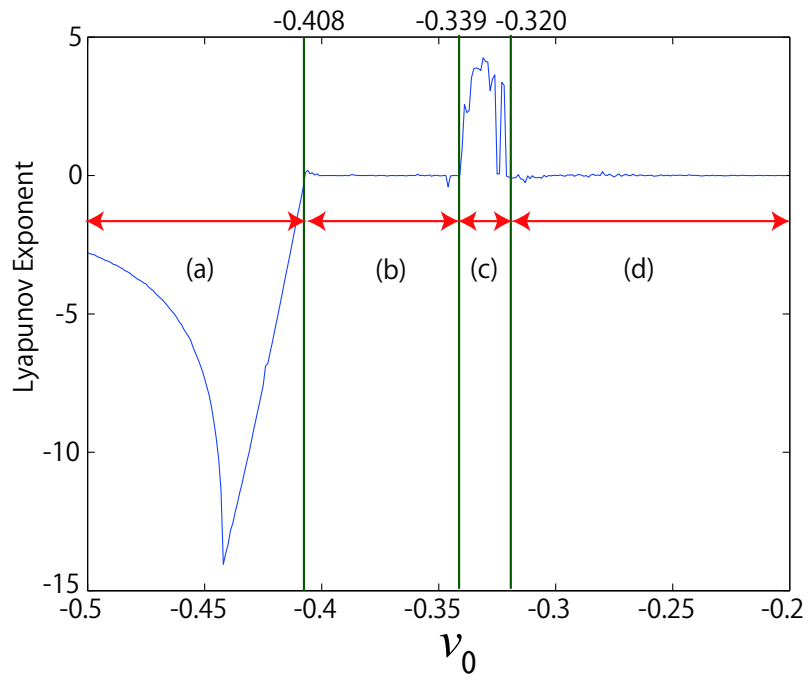
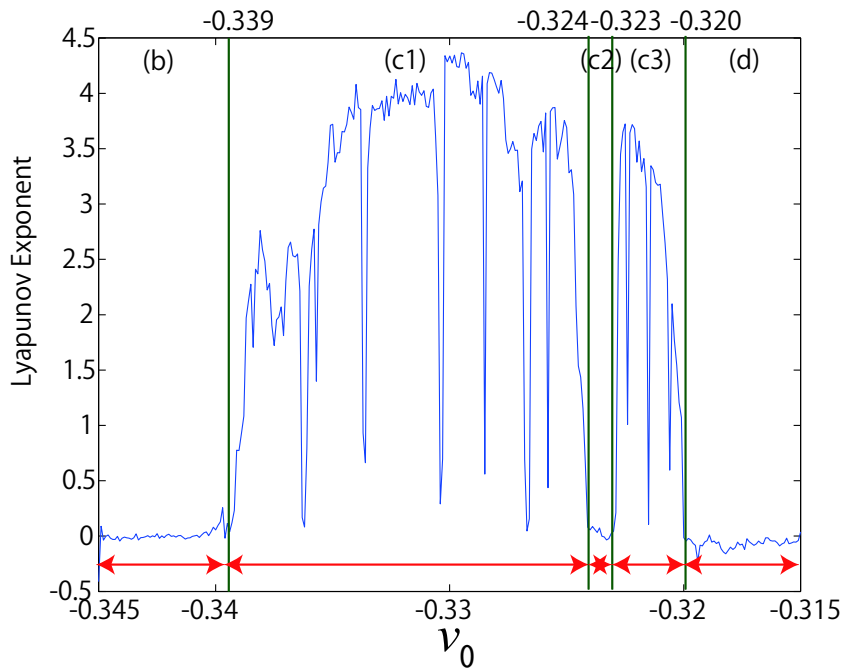


図 5.9:  $v_0 = -0.3235$  における  $v$  の時系列例



(a) パラメータ領域全体での最大リアプノフ指数



(b) カオス領域での最大リアプノフ指数の拡大図

図 5.10: パラメータ  $\nu_0$  を変化させたときの最大リアプノフ指数

## 5.1.6 発火周波数順応性

1.2 節で述べたように、発火周波数順応性はニューロンの重要な特徴の一つだと考えられている。発火周波数順応性とは、ニューロンに刺激電流を与え続けた時に、発火周波数が刺激電流を与え始めた時よりも減少していき、ある一定の周波数で安定するという現象である。本研究の3変数DSSNで、パラメータを付録Aに示すように決め、刺激入力  $I_{stim}$  を与え続けた時の時系列例を図5.11に示す。図5.11(a),(b)ともに、刺激入力  $I_{stim}=0.04$  を  $t \geq 0.2$  で連続的に与えた。刺激入力  $I_{stim}$  を与えた直後には連続発火の周期が短い、時間が経つにつれて一定の周波数に落ち着いていくことがわかる。また、負のフィードバックを担う変数  $q$  の時定数  $\varepsilon$  を変化させることによって図5.11(a),(b)では刺激入力  $I_{stim}$  に対する順応時間の違いが見られた。 $\varepsilon = 2^{-9}$  で変数  $q$  の変化がゆっくりとなる図5.11(b)の方が(a)よりも一定周波数に落ち着くまでの順応時間が長いことがわかる。

## 5.2 シリコン神経ネットワーク

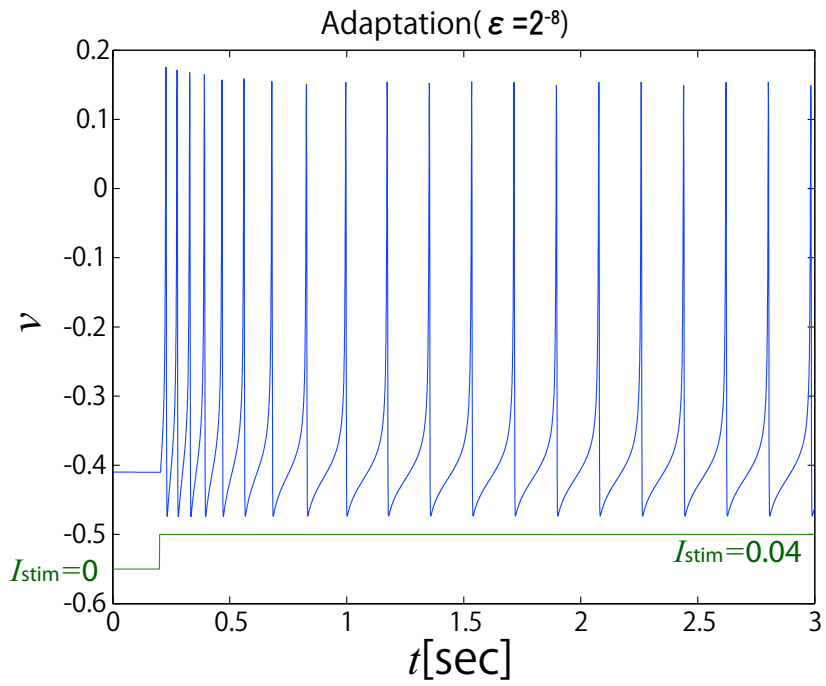
本節では4.3節で述べた Silicon Half Center Oscillator の回路シミュレーション結果を示す。パラメータは  $v_0=-0.350$  とし、その他は5.1.1節のシミュレーション時と同じもの、シリコンシナプスについては4.2節に示したものをを用いた。図5.12(a)には2つのシリコンニューロンの変数  $v$  の時系列例をそれぞれ青、緑の線で示した。2つのシリコンニューロンが逆位相で同期的なバースト発火を発生していることがわかる。つまり Half Center Oscillator と同等の挙動を、本研究の3変数DSSNと抑制性シリコンニューロンとの結合系で実現できた。図5.12(b)には(a)に対応する2つのシリコンシナプス活動度  $s$  を青、緑の線で示した。シナプス前ニューロンが発火をすると(変数  $v$  が閾値0を超えると)、シナプス活動度が最大値1にセットされ、シナプス前ニューロンが発火をしていないときはゆっくりとした減衰をしており、シリコンシナプスが正常に動作していることがわかる。このシナプス活動度  $s$  が結合強度  $w$  で重みづけされてそれぞれのシナプス後ニューロンへと入力され、(a)に示すような逆位相で同期的なバースト発火が実現されていると考えられる。

## 5.3 回路規模と消費電力

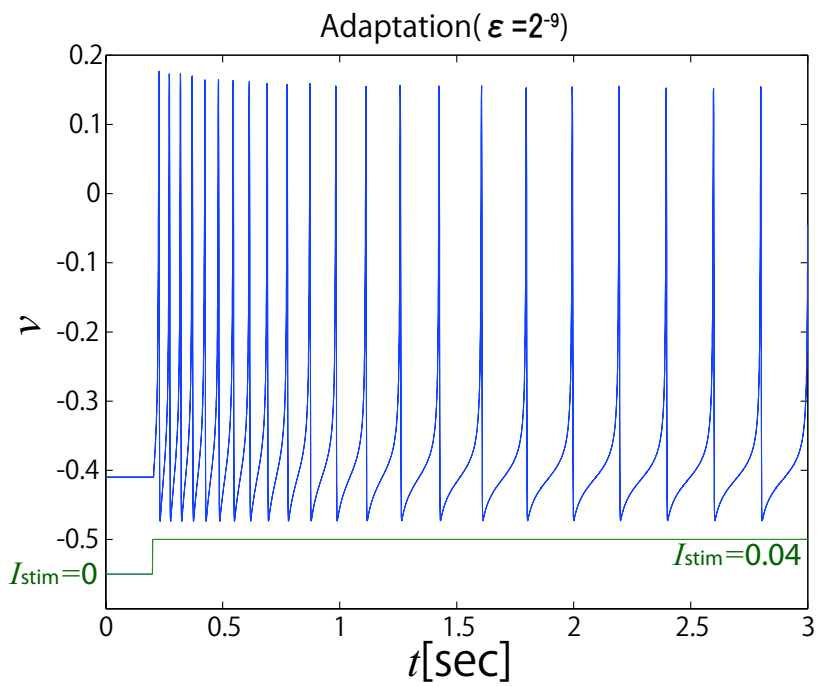
最後に本研究で構築したシリコン神経ネットワークの回路規模と消費電力について述べる。今回設計した Silicon Half Center Oscillator はターゲットデバイス XC6SLX45 の798スライスを使用した。デバイス XC6SLX45 は6822スライス保持しており、今回のネットワークのおよそ8倍の規模のネットワークを構築できるリソースを持っている。FPGA 評価ボードには、Digilent社のAtlysを使用した。ボード全体の電力消費はリアルタイム動作でおよそ1600mWであった。うち、FPGAコアが消費したとみられる電力はおよそ200mWであった。本ボードには主に4つの電力システムがあり、それぞれの消費電力を表5.1にまとめた。

供給電圧	消費電流	消費電力	主な用途
3.3V	400mA	1320mW	FPGA I/O, video, USB ports, clocks, ROM, audio
2.5V	32mA	80mW	FPGA aux, VHDC, Ethernet PHY I/O, GPIO
1.8V	5mA	9mW	DDR & FPGA DDR I/O
1.2V	160mA	192mW	FPGA core, Ethernet PHY core

表 5.1: FPGA 評価ボードの電力消費

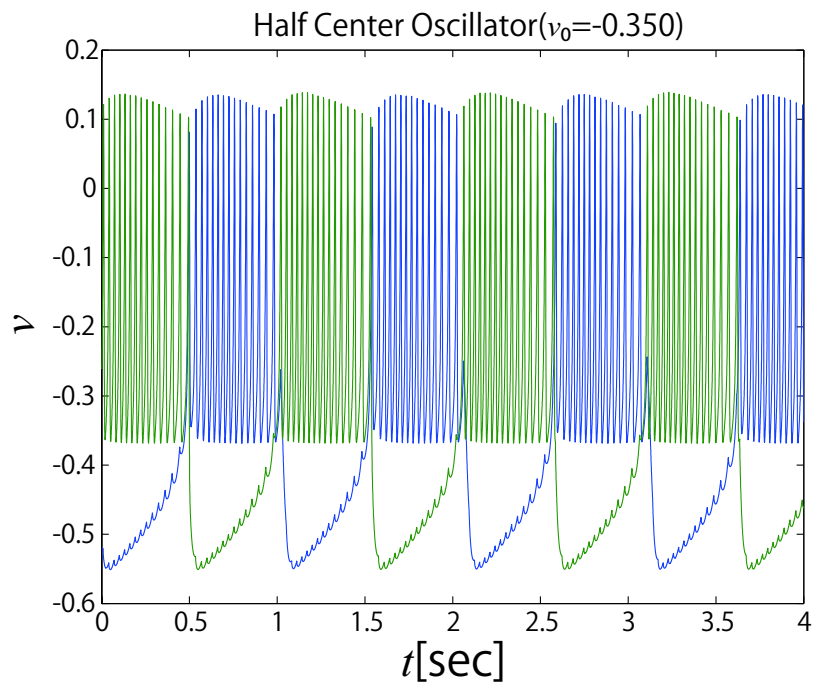


(a)  $\epsilon = 2^{-8}$  の時

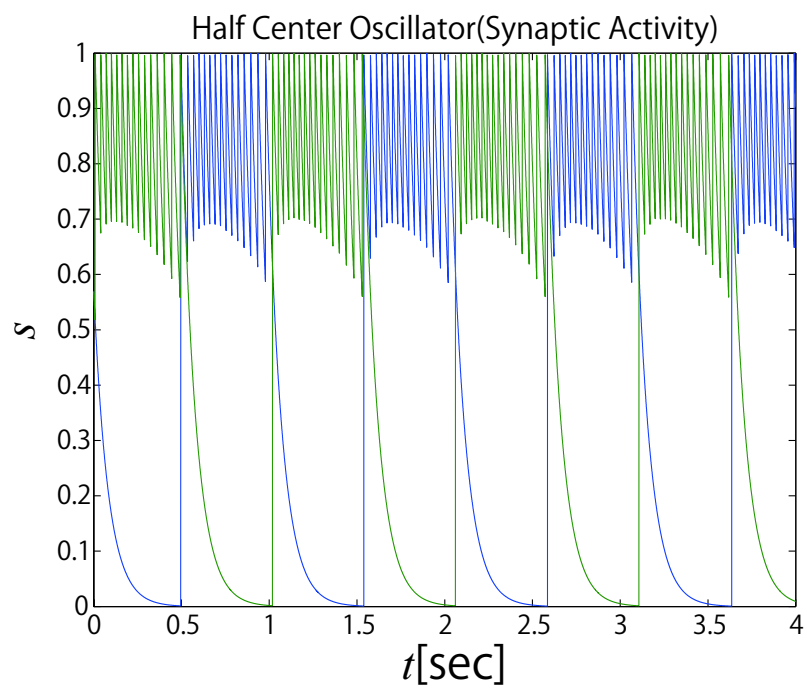


(b)  $\epsilon = 2^{-9}$  の時

図 5.11: 発火周波数順応性



(a)  $v$  の時系列例



(b) シナプス活動度  $s$  の時系列例

図 5.12: Silicon Half Center Oscillator のシミュレーション結果



## 第6章 結論

### 6.1 まとめ

本研究では、デジタル演算回路に最適化した3変数ニューロンモデルを数理的手法に基づいて設計した。最適化するために様々な単純化を施す一方でカオス的なバースト発火に代表されるようなニューロンモデルとしての複雑なダイナミクスを実現することに成功した。パラメータ  $v_0$  の変更により  $q$ -ナルクラインが変化して4種類の発火パターンが観測されたが、同様の発火パターンが3次元ニューロンモデルの Hindmarsh-Rose モデルでも見られことが Wang [23] によって示されている。数値シミュレーションでは持続的な刺激入力に対する発火周波数順応性も観測された。また、本研究のシリコンニューロンを抑制性のシリコンシナプスで結合することによって Half Center Oscillator と同様のリズムを生成することができた。

### 6.2 今後の展望

今後の課題は、FPGA からのデータの読み出しとより複雑なネットワークの構築である。本研究では VHDL シミュレーションでバースト発火等のダイナミクスを確認できたが、今後は FPGA の動作データを読み出し、ソフトウェア上のシミュレーション結果と比較することで再現されたニューロンモデルの特性を評価する。発火周波数順応性に関しては数値シミュレーションでのみ動作を確認できたが、今後は VHDL 記述し、FPGA への実装を目指す。

また、本研究では最も基本的なパターンジェネレータの一つである Half Center Oscillator をシリコン神経ネットワークで構築することができた。これをもとに心拍リズムを生成する神経ネットワーク [10] などより複雑なシリコン神経ネットワークモデルを構築することを目指す。Hill ら [10] の示した心拍リズムを生成する神経ネットワークは8つのニューロンから構成される。本研究では2つのシリコンニューロンでターゲットデバイス全体のおよそ 1/8 のリソースのみ使用したので8つのシリコンニューロンは現状の設計のまま構築可能である。より大規模なシリコン神経ネットワークを構築する際には、シリコンシナプスのビット数評価、パイプライン構造の設計などの工夫が必要となる。

# 謝辞

本研究の遂行から論文の作成まで丁寧なご指導を頂きました合原先生、河野先生に深く感謝いたします。また、研究に関して基礎的なものから様々なアドバイスをして下さった研究室の先輩、同期、後輩にもここに感謝の意を表します。そして、私が特殊な入学、卒業時期ということと、途中海外留学もしたことにより特にお世話になった合原研究室の秘書の皆さま、並びに、電気系事務室の皆様にも深く感謝いたします。

## 参考文献

- [1] T. Kohno and K. Aihara, "Digital Spiking Silicon Neuron: Concept and Behaviors in GJ-coupled Network," Proceedings of International Symposium on Artificial Life and Robotics 2007, pp. 3-6 (2007).
- [2] A. L. Hodgkin, "The local electric changes associated with repetitive action in a non-medulated axon," *J. Physiol.*, Vol. 107, pp. 165-181 (1948).
- [3] D. Thomas and W. Luk, "FPGA Accelerated Simulation of Biologically Plausible Spiking Neural Networks," 2009 17th IEEE Symposium on Field Programmable Custom Computing Machines, pp.45-52 (2009).
- [4] A. Cassidy and A. G. Andreou, "Dynamical Digital Silicon Neurons," Biomedical Circuits and Systems Conference, BioCAS 2008. IEEE, pp. 289-292 (2008).
- [5] D. Hammerstrom, "Digital VLSI for Neural Networks," in "*The Handbook of Brain Theory and Neural Networks second ed.*," ed. M. A. Arbib, MIT Press, pp. 349-353 (2003).
- [6] "*FPGA Implementations of Neural Networks*," ed. A. R. Omondi and J. C. Rajapakse, Springer (2006).
- [7] J. L. Hindmarsh and R. M. Rose, "A Model of Neuronal Bursting Using Three Coupled First Order Differential Equations," *Proc. R. Soc. Lond. B*, Vol. 221, No. 1222, pp. 87-102 (1984).
- [8] T. Kohno, "SIGNAL TRANSMISSION IN NEURONS," in 6.188. Mathematical Physiology, Unesco Encyclopedia of Life Support Systems, Submitted.
- [9] A. L. Hodgkin and A. F. Huxley, "A quantitative description of membrane current and its application to conduction and excitation in nerve," *J. Physiol.*, Vol. 117, pp. 500-544 (1952).
- [10] A.A.V. Hill, J. Lu, M.A. Masino, O.H. Olsen and R.L. Calabrese, "A Model of a Segmental Oscillator in the Leech Heartbeat Neuronal Network," *J. of Computational Neuroscience*, Vol. 10, No. 3, pp. 281-302 (2001).
- [11] 溝口伸幸, "Izhikevich モデルに基づいたシリコンニューロン回路の設計," 東京大学大学院工学系研究科電気系工学専攻修士論文 (2011).
- [12] R. K. Weinstein, and R. H. Lee, "Architectures for high-performance FPGA implementations of neural models," *J. of Neural Engineering*, Vol. 3, No. 21, pp. 21-34 (2006).
- [13] T. Kohno and K. Aihara, "A Design Method for Analog and Digital Silicon Neurons -Mathematical-Model-Based Method-," *Proc. of of BIOCOMP2007*, pp. 81-82 (2007).
- [14] G. Indiveri, "A low-power adaptive integrate-and-fire neuron circuit," *Proc. IEEE International Symposium on Circuits and Systems*, Vol. 4, pp.820-823 (2003).
- [15] J. Rinzel and B. Ermentrout, "Analysis of Neural Excitability and Oscillations," in "*Methods in Neural Modeling*," ed. C. Koch and I. Segev, MIT Press, pp. 251-291 (1998).

- [16] S. Strogatz, “Nonlinear dynamics and chaos : with applications to physics, biology, chemistry, and engineering.” Perseus Books (1994).
- [17] K. Aihara, G. Matsumoto and Y. Ikegaya, “Periodic and non-periodic responses of an periodically forced Hodgkin-Huxley oscillator,” *J. Theor. Biol.*, Vol. 109, No. 2, pp. 249-269 (1984).
- [18] H. Fujii and I. Tsuda, “Itinerant dynamics of class I\* neurons coupled by gap junctions,” *Computational Neuroscience: Cortical Dynamics Lecture Notes In Computer Science*, Vol. 3146, pp. 140-160 (2004).
- [19] X.-J. Wang and J. Rinzel, “*The Handbook of Brain Theory and Neural Networks second ed.*,” ed. M. A. Arbib, MIT Press (2003).
- [20] W. Gerstner and W. Kistler, “*Spiking Neuron Models*,” Cambridge University Press (2006).
- [21] T. R. Chay, “On the effect of the intracellular calcium-sensitive K<sup>+</sup> channel in the bursting pancreatic beta-cell,” *Biophysical Journal*, Vol.50, No. 5, pp. 765-777 (1986).
- [22] 合原一幸編, 池口徹, 山田泰司, 小室元政著, “カオス時系列解析の基礎と応用 (重版),” 産業図書 (2002).
- [23] X.-J. Wang, “Genesis of bursting oscillations in the Hindmarsh-Rose model and homoclinicity to a chaotic saddle,” *Physica D*, Vol. 62, No. 1-4, pp. 263-274 (1993).

## 発表文献

- [1] 小林航, 河野崇, 合原一幸, “デジタル演算回路での3変数シリコンニューロンの設計,” 第24回回路とシステムワークショップ (2011).
- [2] W. Kobayashi, M. Oku and K. Aihara, “Signal transmission in multilayer asynchronous neural networks,” The Sixteenth International Symposium of Artificial Life and Robotics (2011).
- [3] T. Kajiya, W. Kobayashi, T. Okuzono and M. Doi, “Controlling Profiles of Polymer Dots by Switching between Evaporation and Condensation,” *Langmuir*, Vol. 26, No. 13, pp. 10429-10432 (2010).
- [4] T. Kajiya, W. Kobayashi, T. Okuzono and M. Doi, “Controlling the Drying and Film Formation Processes of Polymer Solution Droplets with Addition of Small Amount of Surfactants,” *J. Phys. Chem. B*, Vol. 113, No. 47, pp 10429-10432 (2009).

# 付録

## A. デジタルシリコンニューロンのパラメータ

共通パラメータ		クラス別パラメータ	ClassI	ClassII	ClassI*
$a_n$	8.0	$k_n$	2.0	4.0	4.0
$a_p$	-8.0	$l_n$	-0.3	-0.55	-0.1
$b_n$	-0.25	$m_n$	-0.705	-1.295	-0.755
$b_p$	0.25	$\phi$	1.0	0.6	0.6
$c_n$	-0.5	$\tau$	0.003	0.003	0.002
$c_p$	0.5	$r$	-0.2	-0.1	-0.25
$k_p$	16.0	$I_0$	-0.205	-0.24	-0.25
$l_p$	-0.2125				
$m_p$	-0.6875				

表 1: 従来の 2 変数 DSSN のパラメータ

共通パラメータ		クラス別パラメータ	ClassI	ClassII	ClassI*
$a_n$	8.0	$k_n$	2.0	4.0	4.0
$a_p$	-8.0	$l_n$	<b>-0.3125</b> $=-2^{-2} \cdot 2^{-4}$	<b>-0.5625</b> $=-2^{-1} \cdot 2^{-4}$	<b>-0.09375</b> $=-2^2 + 2^{-5}$
$b_n$	-0.25	$m_n$	<b>-0.705795601</b>	<b>-1.317708517</b>	<b>-0.7708333</b>
$b_p$	0.25	$\phi$	1.0	<b>0.5</b>	<b>0.5</b>
$c_n$	-0.5	$\tau$	0.003	0.003	0.002
$c_p$	0.5	$r$	<b>-0.205357142</b>	<b>-0.104166</b>	<b>-0.26041666</b>
$k_p$	16.0	$I_0$	-0.205	<b>-0.23</b>	<b>-0.09</b>
$l_p$	<b>-0.21875</b> $=2^{-5} \cdot 2^{-2}$				
$m_p$	-0.6875				

表 2: 修正後の 2 変数 DSSN のパラメータ

$a_n$	8.0	$k_n$	4.0
$a_p$	-8.0	$l_n$	$-0.09375 = -2^2 + 2^{-5}$
$b_n$	-0.25	$m_n$	-0.7708333
$b_p$	0.25	$\phi$	<b>0.46875</b> $= 2^{-1} - 2^{-5}$
$c_n$	-0.5	$\tau$	$2^{-9}$
$c_p$	0.5	$\varepsilon$	$2^{-8}$
$k_p$	16.0	$I_0$	-0.09
$l_p$	$-0.21875 = 2^{-5} \cdot 2^{-2}$	$r$	-0.26041666
$m_p$	-0.6875	$\alpha$	0

表 3: 3 変数 DSSN のバースト発火パラメータ

$a_n$	8.0	$k_n$	4.0
$a_p$	-8.0	$l_n$	$-0.09375 = -2^2 + 2^{-5}$
$b_n$	-0.25	$m_n$	-0.7708333
$b_p$	0.25	$\phi$	<b>0.625</b> $= 2^{-1} + 2^{-3}$
$c_n$	-0.5	$\tau$	$2^{-9}$
$c_p$	0.5	$v_0$	-0.402
$k_p$	16.0	$I_0$	-0.09
$l_p$	$-0.21875 = 2^{-5} \cdot 2^{-2}$	$r$	-0.26041666
$m_p$	-0.6875	$\alpha$	0.5

表 4: 3 変数 DSSN の発火周波数順応性パラメータ

$a$	$\tau_s$	$w_{12}$	$w_{21}$
1	$2^{-4}$	$-2^{-3}$	$-2^{-3}$

表 5: シリコンシナプスのパラメータ

## B. リアプノフ指数解析

本節では本研究の 5.1.5 節で行った最大リアプノフ指数解析手法を説明する [22]。

まず、リアプノフ指数とは力学系の軌道不安定性を定量化する指標である。カオス力学系の特徴の一つに初期値に対する鋭敏な依存性がある。初期値鋭敏性とは、ある力学系にある初期値を与えたとき、その初期値に微小な誤差を持つもう一つの初期値を与えると、時間発展に従って、これら 2 通りの初期値に対する解の軌道が全く異なるものになるということである。

初期状態では微小な誤差だったものが決定論的な法則に従って運動しているにも関わらず、軌道間の差が大きくなっていく性質を軌道不安定性と呼ぶ。一般的には、図 1 に示すように軌道不安定性はリアプノフ指数  $\lambda$  によって定量化することができる。

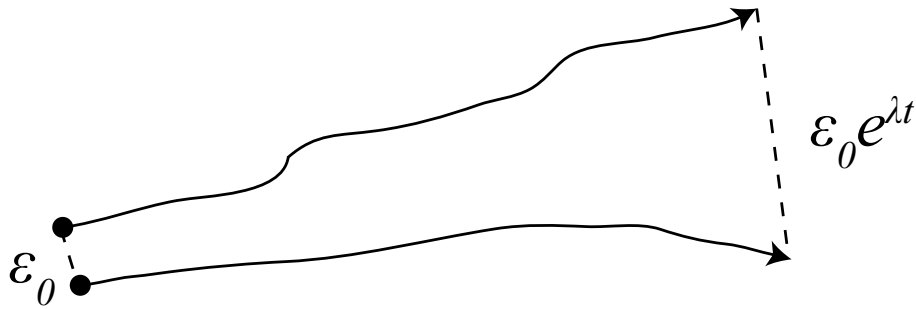


図 1: 軌道不安定性とリアプノフ指数  $\lambda$  の関係

ある時刻において、その差が  $\epsilon_0$  で会った時、時刻  $t$  後には、 $\epsilon_0 e^{\lambda t}$  に伸びる。この伸びを定量化するのがリアプノフ指数  $\lambda$  である。仮に  $\lambda < 0$  であれば、伸びではなく縮みになり、この場合の応答は軌道不安定ではないことになる。 $\lambda = 0$  の場合には平均的にみて軌道間の差が時間とともに変化しないことになる。一般的には  $k$  次元カオス力学系には、伸びる方向 (不安定多様体) と縮む方向 (安定多様体) があることが知られているが、正のリアプノフ指数は不安定多様体に、負のリアプノフ指数は安定多様体に対応する。本研究では 3 次元力学系を対象に解析を行ったのでリアプノフ指数は 3 つ持つことになる。また、リアプノフ指数のうち最大のものを最大リアプノフ指数と呼び、最大リアプノフ指数が 0 より大きい場合はその力学系はカオス、0 である場合はトーラスやリミットサイクルなどの周期的運動、0 より小さい場合は安定平衡点に収束するということが知られている。

リアプノフ指数の計算、推定には元の力学系が分かっている場合、時系列データしかない場合などに応じて様々な方法があるが本研究では直接軌道の伸びを計算する方法を用いた。図 2 に基本的な考え方を示す。

まず、図 2 中にある実線の軌道  $AD$  が基準軌道となる。基準軌道の始点、 $A$ (時刻  $t_0$ ) の近傍に適当な微小変位、 $L(t_0)$  を持った点  $A''$  を定める。 $A, A''$  は時刻  $t_1$  にはそれぞれ  $B, B'$  になるので初期微小変位  $L(t_0)$  は、 $L'(t_1)$  へと発展することになる。直感的に言えば、ベクトル  $\overrightarrow{AA''}$  は最も不安定な方向に向かって伸びていくので、時刻  $t_1$  における伸びの比  $\frac{L'(t_1)}{L(t_0)}$  から最大リアプノフ指数  $\lambda$  を求めることができる。 $t_1 - t_0$  が大きすぎると、初期微小変位はどんどん伸びて行き、最後には  $L'(t_1)$  がアトラクタのサイズにまで発展してしまう問題がある。そこで、ある適当な時刻  $t_1$  において  $L'(t_1)$  を正規化し、 $L'(t_1)$  における新たな微小変位  $\overrightarrow{BB''}$  を定義する必要がある。新たに  $B''$  を与えれば、 $\overrightarrow{BB''}$  から  $\overrightarrow{CC'}$  への変位の比を同様に求めることができる。これらの操作を次々と繰り返し、以下の量を計算することで、最大リアプノフ指数  $\lambda$  を推定することができる。

$$\lambda = \frac{1}{t_M - t_0} \sum_{k=1}^M \log \frac{L'(t_k)}{L(t_{k-1})} \quad (1)$$



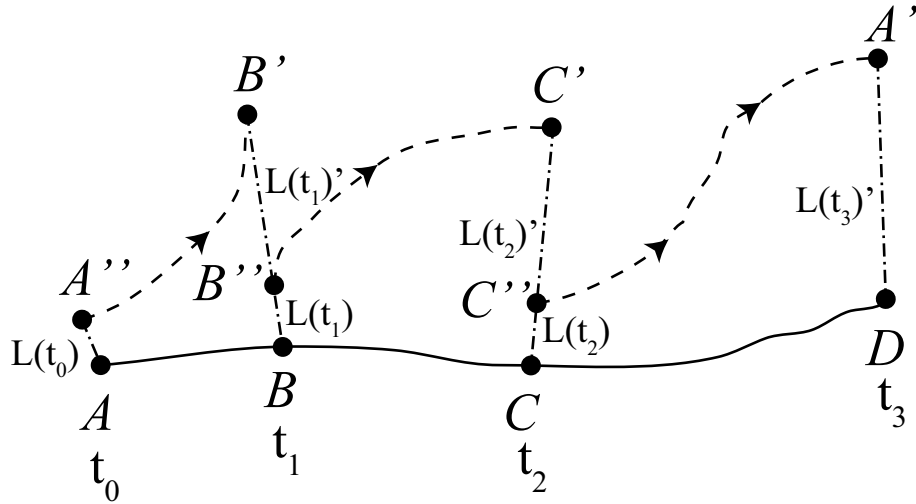


図 2: 直接軌道の伸びを計算する方法

ここで、 $M$  は繰り返しの回数である。リアプノフ指数の定義は、軌道間の伸びを指数  $\lambda$  で表したものであったので、式 (1) は軌道間の伸びの比の対数をとってそれを  $M$  回繰り返し、単位時間当たりの平均の伸びを計算した量となっている。

ここで、上述の方法で最大リアプノフ指数を計算する際に 3 つの適当なパラメータを決める必要があった。正規化する時間間隔  $t_k - t_{k-1}$ 、正規化する際の微小変位の大きさ  $|\overrightarrow{XX''}|$ 、繰り返しの回数  $M$  である。5.1.5 節の計算では、 $t_k - t_{k-1} = 2$ 、 $|\overrightarrow{XX''}| = 0.0001$ 、 $M = 64$  とした。さらにこの計算を各  $v_0$  に対して 5 回ずつ異なる初期状態で行いその平均をとったものが図 5.10 となっている。