34. *Reflexion und Refraktion der seismischen Wellen durch eine kontinuierlich verändernde Schicht. I. SH Welle.*

Von Takeo MATUZAWA,

Geophysikalisches Institut.

(Vorgelegt den 19. Juli 1955.—Eingegangen den 20. Sept. 1955.)

1. Einleitung.

Die Sprengseismik zeigt uns viele Eigentümlichkeiten der Wellenfortpflanzung in der komplizierten Schichten der Erdkruste. Besonders interessiert uns die Abhängigkeit der Stärke der reflektierten Wellen von der Wellenperiode[1]. Bei der Reflektion an einer Unstetigkeitsfläche im strengen Sinne des Wortes können wir nicht solches Verfahren erwarten.

In Wirklichkeit ist die Schichtgrenze nicht immer eben sondern gerunzelt. Manchmal muss die Übergang kontinuierlich sein, wenn auch er sehr stark veränderlich sei. Der letzte Fall wird hier untersucht.

2. Rechenmethode.

Im allgemeinen ist die strenge Lösung der Wellengleichung in unhomogenen Medien schwierig. Hier ist eine horizontale allmählich veränderliche Schicht vorausgesetzt. Diese Schicht wird durch Überlagerung von vielen parallelen homogenen Schichten ersetzt und nach der Rechnung wird die Grenzübergang gemacht.

3. Eine linear veränderliche Schicht, die von einer homogenen Schicht zur anderen kontinuierlich übergeht.

Der Fall ist in Fig. 1 veranschaulicht.

Wenn ein kohärenter Zug Sinuswellen in die Schichten eintritt, dann finden unendlichmaligen Refraktionen und Reflektionen an jeden Unstetigkeitsflächen statt. Wir beobachten die überlagerten Wirkungen dieser Wellen. Im folgenden bedeutet die erste Nachsilbe die Nummer

1) *Z. B.*, G. B. LOPERT and R. R. PITTMAN, *Geophysics*, **19** (1954), 104–115.

der Schicht, die zweite Nachsilbe „1“ die Welle in der Richtung des Eintrittes und die zweite „2“ die Welle in der Richtung der Zurückkehrung.

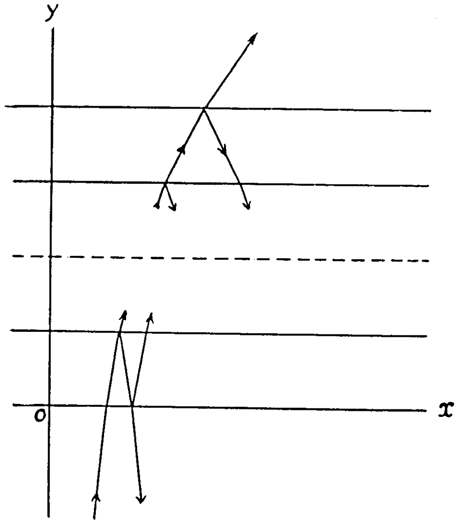

Fig. 1.

Nun

$$w_{01}=A_{01}\exp\{jk_0(l_0x+m_0y-v_0t)\}\ ,$$
$$w_{02}=A_{02}\exp\{jk_0(l_0x-m_0y-v_0t)\}\ ,$$
$$w_{11}=A_{11}\exp\{jk_1(l_1x+m_1y-v_1t)\}\ ,$$
$$w_{12}=A_{12}\exp\{jk_1(l_1x-m_1y-v_1t)\}\ ,$$
$$w_{21}=A_{21}\exp\{jk_2(l_2x+m_2y-v_2t)\}\ ,$$
$$w_{22}=A_{22}\exp\{jk_2(l_2x-m_2y-v_2t)\}\ ,$$
$u.s.w.$,

mit den Bedingungen

$$k_il_i=k_0l_0\ ,\qquad k_iv_i=p\ .$$

Es sei

d, die Dicke der unhomogenen Schicht,

n, die Zahl der geteilten Schichten,

und

$H=\varDelta d=d/n$, die Dicke der einzelnen Schicht.

Die Bedingungen an den Unstetigkeitsflächen sind wie folgt,

$$A_{01}+A_{02}=A_{11}+A_{12}\ ,$$
$$\mu_0k_0m_0(A_{01}-A_{02})=\mu_1k_1m_1(A_{11}-A_{12})\ ,$$
$$A_{11}\exp(jk_1m_1H)+A_{12}\exp(-jk_1m_1H)=A_{21}\exp(jk_2m_2H)$$
$$+A_{22}\exp(-jk_2m_2H)\ ,$$
$$\mu_1k_1m_1\{A_{11}\exp(jk_1m_1H)-A_{12}\exp(-jk_1m_1H)\}$$
$$=\mu_2k_2m_2\{A_{21}\exp(jk_2m_2H)-A_{22}\exp(-jk_2m_2H)\}\ ,$$
$$\cdots\cdots$$
$$A_{i1}\exp\{jk_im_i(iH)\}+A_{i2}\exp\{-jk_im_i(iH)\}$$
$$=A_{(i+1)1}\exp\{jk_{i+1}m_{i+1}(iH)\}+A_{(i+1)2}\exp\{-jk_{i+1}m_{i+1}(iH)\}\ ,$$
$$\mu_ik_im_i[A_{i1}\exp\{jk_im_i(iH)\}-A_{i2}\exp\{-jk_im_i(iH)\}]$$
$$=\mu_{i+1}k_{i+1}m_{i+1}[A_{(i+1)1}\exp\{jk_{i+1}m_{i+1}(iH)\}$$
$$-A_{(i+1)2}\exp\{-jk_{i+1}m_{i+1}(iH)\}]\ ,$$
$$\cdots\cdots$$

$$A_{n1}\exp\{jk_nm_n(nH)\}+A_{n2}\exp\{-jk_nm_n(nH)\}$$
$$=A_{(n+1)1}\exp\{jk_{n+1}m_{n+1}(nH)\}\ ,$$
$$\mu_nk_nm_n[A_{n1}\exp\{jk_nm_n(nH)\}-A_{n2}\exp\{-jk_nm_n(nH)\}]$$
$$=\mu_{n+1}k_{n+1}m_{n+1}A_{(n+1)1}\exp\{+jk_{n+1}m_{n+1}(nH)\}\ .$$

Die Linearität der Wellengeschwindigkeit v wird ersetzt durch

$$\frac{\varDelta v}{\varDelta d}=\frac{v_{n+1}-v_0}{d}\ ,\qquad n\varDelta d=d\ .$$

Folglich

$$\varDelta l_i=\frac{k_0l_0}{p}\varDelta v\ ,\qquad l_i-l_0=\frac{k_0l_0}{p}i\varDelta v\ ,\qquad v_i=v_0+i\varDelta v\ ,$$

$$l_{i+1}=l_i+\frac{l_0}{v_0}\varDelta v\ ,$$

$$\mu_i=\rho v_i^2=\rho_0(v_0+i\varDelta v)^2\ ,$$

unter der Voraussetzung der konstanten Dichte $\rho=\rho_0$.

Weiter

$$m_i^2=1-l_i^2=m_0^2-2\frac{k_0l_0^2}{p}(i\varDelta v)-\frac{k_0^2l_0^2}{p^2}(i\varDelta v)^2\ ,$$

$$m_{i+1}^2=m_i^2\left(1-2\frac{l_i\,l_0}{m_i^2}\frac{\varDelta v}{v_0}\right)\ ,$$

$$\mu_{i+1}=\rho_0v_{i+1}^2=\mu_i\left(1+2\frac{\varDelta v}{v_i}\right)\ ,$$

$$k_{i+1}=k_i\left(1-\frac{\varDelta v}{v_i}\right)\ .$$

Von diesen Beziehungen können wir jeden Wert am beliebigen Punkt ableiten.

Zum Beispiel, von

$$m_{i+1}-m_i=-\frac{l_il_0}{m_i}\frac{\varDelta v}{v}\ ,$$

durch den Grenzübergang bekommt man

$$m\,dm=-l_0^2\left(1+\frac{v}{v_0}\right)\frac{dv}{v_0}\ .$$

Integriert man mit der Bedingung $m=m_0$ für $v=0$, dann ergibt sich

$$m^2=m_0^2-2l_0^2\frac{v}{v_0}\left(1+\frac{v}{2v_0}\right)\ .$$

In ähnlicherweise bekommt man

$$km = k_0 m_0 \frac{v_0}{v_0+v} \exp\left\{-\left(\frac{l_0}{m_0}\right)^2 \frac{v}{v_0}\left(1+\frac{v}{2v_0}\right)\right\}.$$

4. Annäherung für kleinen Eintrittswinkel.

Nun wollen wir den Fall von kleinem l_0 behandeln, und zwar l_0^2 für 1 vernachlässigen. Noch dazu beschränken wir uns auf den Fall, dass l_t immer klein bleibt.

Dann $$m \doteqdot 1 .$$

Folglich

$$k = k_0 \frac{v_0}{v_0+v} .$$

Durch die nacheinander folgenden Iterationen bekommt man

$$A_{n1} = A_{01} - \frac{1}{2} A_{01} \left\{\sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{\varDelta v}{v_0+i\varDelta v} - \frac{\varDelta v}{v_0+i\varDelta v} 2jk_0 iH \frac{v_0}{v_0+i\varDelta v}\right)\right\}$$
$$+ \frac{1}{2} A_{02} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\varDelta v}{v_0+i\varDelta v} \exp\left(-2jiHk_0 \frac{v_0}{v_0+i\varDelta v}\right),$$

$$A_{n2} = \frac{1}{2} A_{01} \left\{\sum_{i=0}^{n-1} \frac{\varDelta v}{v_0+i\varDelta v} \exp\left(2jiHk_0 \frac{v_0}{v_0+i\varDelta v}\right)\right\} + A_{02} - \frac{1}{2} A_{02} \left(\sum_{i=0}^{n-1} \frac{\varDelta v}{v_0+i\varDelta v}\right),$$

wobei Glieder von zweiten Ordnung selbst oder Summen davon vernachlässigt sind.

Durch den Grenzübergang $n\to\infty$, d.h. $\varDelta v\to 0$ bekommt man

$$A_{\infty 1} = A_{01} + \frac{1}{2} A_{01} \left\{\int_0^{v_\infty - v_0} 2jk_0 v_0 \frac{v}{v_\infty - v_0} d \frac{dv}{(v_0+v)^2} - \int_0^{v_\infty - v_0} \frac{dv}{v_0+v}\right\}$$
$$+ \frac{1}{2} A_{02} \left\{\int_0^{v_\infty - v_0} \exp\left(-2jk_0 v_0 \frac{v}{v_\infty - v_0} \frac{d}{v_0+v}\right) \frac{dv}{v_0+v}\right\},$$

$$A_{\infty 2} = A_{02} - \frac{1}{2} A_{02} \left(\int_0^{v_\infty - v_0} \frac{dv}{v_0+v}\right)$$
$$+ \frac{1}{2} A_{01} \left\{\int_0^{v_\infty - v_0} \exp\left(2j \frac{v}{v_\infty - v_0} \frac{k_0 v_0}{v_0+v} d\right) \frac{dv}{v_0+v}\right\}.$$

Die letzte Randbedingung gibt

$$A_{\infty 2} = 0 .$$

Also

$$A_{02}\left(1-\frac{1}{2}\log\frac{v_\infty}{v_0}\right)+\frac{1}{2}A_{01}\left\{\int_0^{v_\infty-v_0}\exp\left(2j\frac{k_0v_0}{v_\infty-v_0}d\frac{v}{v_0+v}\right)\frac{dv}{v_0+v}\right\}=0\,.$$

Die reflektierte Welle A_{02} ergibt sich

$$A_{02}=-\frac{1}{2}I_1\frac{A_{01}}{1-\frac{1}{2}\log\frac{v_\infty}{v}}\,,$$

wo

$$I_1=\int_0^{v_\infty-v_0}\exp\left(2j\frac{k_0v_0}{v_\infty-v_0}d\frac{v}{v_0+v}\right)\frac{dv}{v_0+v}\,.$$

Hier sei es bemerkt, dass unsere Rechnung unter der Voraussetzung von kleinem $\log(v_\infty/v_0)$ ausgeführt wurde. Das ist gleichwertig, dass die Summen von Gliedern mit $(\Delta v)^2$ vernachlässigt wurden.

Die in die letzte homogene Schicht eintretende Welle ist

$$A_{\infty 1}=A_{01}+\frac{1}{2}A_{01}\left\{2jk_0v_0d\left(\log\frac{v_\infty}{v_0}-\frac{v_\infty-v_0}{v_\infty}\right)-\log\frac{v_\infty}{v_0}\right\}$$
$$+\frac{1}{2}A_{02}I_2$$

wo

$$I_2=\int_0^{v_\infty-v_0}\exp\left(-2j\frac{k_0v_0}{v_\infty-v_0}d\frac{v}{v_0+v}\right)\frac{dv}{v_0+v}\,.$$

Integrationen I_1 und I_2 enthalten

$$I_K=\int_0^{v_\infty-v_0}\cos\left(2\frac{k_0v_0}{v_\infty-v_0}d\frac{v}{v_0+v}\right)\frac{dv}{v_0+v}\,,$$

und

$$I_S=\int_0^{v_\infty-v_0}\sin\left(2\frac{k_0v_0}{v_\infty-v_0}d\frac{v}{v_0+v}\right)\frac{dv}{v_0+v}\,.$$

5. Zahlenbeispiel.

Zum Beispiel, sei

$$v_\infty=(1+0.2)v_0\,,$$

dann annäherungsweise ist das Kosinusintegral I_K gleich

$$I_K=0.1\times\frac{\sin 1.8k_0d}{k_0d}\,,$$

und das Sinusintegral I_S ist gleich

$$I_S = -0.1 \times \frac{\cos 1.8k_0 d - 1}{k_0 d}.$$

Nun hängt die Amplitude der reflektierten Welle ab von

$$\left\{\left(\frac{\sin 1.8k_0 d}{k_0 d}\right)^2 + \left(\frac{1-\cos 1.8\,k_0 d}{k_0 d}\right)^2\right\}^{1/2} = 2\frac{\sin 0.9k_0 d}{k_0 d}.$$

Darum können wir sehen, dass die Amplitude der reflektierten Welle von $k_0 d$, nämlich von (Schichtdicke/Wellenlänge) abhängt. Natürlich kommt der Maximumwert vor, wenn $k_0 d = 0$.

Die refraktierte Welle in der letzten homogenen Schicht mag ohne weiteres ganz anschaulich sein.

---

34. Renzokuteki ni kawaru Tisô ni yoru Zisin-Nami no Hansya oyobi Kussetu.

Tikyû-Buturigaku Kyôsitu, MATUZAWA Takeo.

Renzokuteki ni Seisitu no kawaru Tisô wo itiyô na usui Sô no Kasanari ni okikaete Hansya oyobi Kussetu no Nami wo keisan si, sono Kyokugen to site renzoku no Baai wo dasu.

Omona Kekka wa Hansya oyobi Kussetu no Nami no Tuyosa ga (Sô no Atusa/Hatyô) no Kansû to naru koto de aru.
