17. *Feldtheorie der Erdbeben: Elliptisches Quellengebiet.*

Von Takeo MATUZAWA und Hirosi HASEGAWA,

Geophysikalisches Institut.

(Vorgelegt den 22. Juni 1954.—Eingegangen den 28. Juni 1954.)

1. Spannung in einer elliptischen Platte, die am Rande befestigt ist und an einer Seite konstantem Druck unterliegt.

In der vorigen Mitteilung[1] untersuchten wir den Spannungszustand in einer Kreisplatte, die der oben gegebenen Bedingung genügt. Dort[2] wurde auch bemerkt, dass das K"eisplattenmodell grosse horizontale Verschiebung der Verwerfung nicht geben kann, aber elliptische oder rechteckige Quellengebiete beträchtliche horizontale Verschiebung geben können.

Hier wollen wir die Sache zahlenmässig beweisen. Die x and y Achsen werden in der Mittelfläche der Platte gelegt und die grosse Achse der Ellipse wird in der x Richtung genommen.

Die Dicke der Platte sei $2h$ und die Ellipse sei

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\,.$$

Die Randbedingungen sind

$$\left.\begin{aligned} &Z_z=X_z=Y_z=0\,, && \text{für} \quad z=-h\,, \\ &Z_z=-p\,,\quad X_z=Y_z=0\,, && \text{für} \quad z=h\,, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

$$u=v=w=0\,,\quad \frac{\partial w}{\partial \nu}=0\,,\quad \text{für}\quad z=0 \quad \text{und} \quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\,, \tag{2}$$

wo ν nach aussen gerichteter Normalvektor ist.

Wir folgen hier auch der Love'schen Methode wie folgt.

Die Gleichungen des elastischen Gleichgewichtes sind wie gewöhnlich

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial X_x}{\partial x}+\frac{\partial X_y}{\partial y}+\frac{\partial X_z}{\partial z}=0\,, \\ &\frac{\partial Y_x}{\partial x}+\frac{\partial Y_y}{\partial y}+\frac{\partial Y_z}{\partial z}=0\,, \\ &\frac{\partial Z_x}{\partial x}+\frac{\partial Z_y}{\partial y}+\frac{\partial Z_z}{\partial z}=0\,. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

1) T. MATUZAWA, *Bull. Earthq. Res. Inst.*, **31** (1953), 189.
2) *ibid.*, 200.

Mit der Hilfe von den Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} &X_x=\lambda\Delta+2\mu\frac{\partial u}{\partial x}, \quad && Y_y=\lambda\Delta+2\mu\frac{\partial v}{\partial y}, \quad && Z_z=\lambda\Delta+2\mu\frac{\partial w}{\partial z}, \\ &Y_z=\mu\left(\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\right), \quad && Z_x=\mu\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right), \quad && X_y=\mu\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right), \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

wo

$$\Delta=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z},$$

bekommen wir

$$\Theta=X_x+Y_y+Z_z=(3\lambda+2\mu)\Delta, \tag{5}$$

$$\nabla^2 X_x=2\mu\nabla^2\frac{\partial u}{\partial x}=-2(\lambda+\mu)\frac{\partial^2\Delta}{\partial x^2}, \quad \text{u.s.w.} \tag{6}$$

Nämlich

$$\left.\begin{aligned} &\nabla^2 X_x=-\frac{1}{1+\sigma}\frac{\partial^2\Theta}{\partial x^2}, \quad && \nabla^2 Y_y=-\frac{1}{1+\sigma}\frac{\partial^2\Theta}{\partial y^2}, \quad && \nabla^2 Z_z=-\frac{1}{1+\sigma}\frac{\partial^2\Theta}{\partial z^2}, \\ &\nabla^2 Y_z=-\frac{1}{1+\sigma}\frac{\partial^2\Theta}{\partial y\partial z}, \quad && \nabla^2 X_z=-\frac{1}{1+\sigma}\frac{\partial^2\Theta}{\partial z\partial x}, \quad && \nabla^2 X_y=-\frac{1}{1+\sigma}\frac{\partial^2\Theta}{\partial x\partial y}, \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

zusammen mit

$$\nabla^2\Delta=\nabla^2\Theta=0, \quad \text{und} \quad \frac{2(\lambda+\mu)}{3\lambda+2\mu}=\frac{1}{1+\sigma},$$

wo σ die Poissonsche Konstante ist.

Also sehen wir ohne weiteres

$$\nabla^4 Z_z=0. \tag{8}$$

Aus (1) und (3) haben wir

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial Z_z}{\partial z}=0, \quad && Z_z=-p, \quad && \text{für} \quad z=h, \\ &\frac{\partial Z_z}{\partial z}=0, \quad && Z_z=0, \quad && \text{für} \quad z=-h. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Eine Lösung von Z_z, die den Bedingungen (8) und (9) genügt, lautet,

$$Z_z=\frac{1}{4}h^{-3}p(z^3-3h^2z-2h^3).$$

Daher aus (7) bekommt man,

$$\frac{\partial^2\Theta}{\partial z^2}=-\frac{3}{2}(1+\sigma)h^{-3}pz\ .$$

Mit $\nabla^2\Theta=0$, können wir setzen

$$\Theta=-\frac{1}{4}(1+\sigma)h^{-3}pz^3+\frac{3}{4}(1+\sigma)h^{-3}pz\left(\frac{\alpha^2\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}\right)\left(\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}\right)\ , \tag{10}$$

wo α und β Parameter sind, die nachher bestimmt werden.

Um X_z und Y_z zu bestimmen, aus (3) und (7) mit (10), haben wir

$$\frac{\partial X_z}{\partial x}+\frac{\partial Y_z}{\partial y}+\frac{3p}{4h}(z^2-h^2)=0\ ,$$

$$\nabla^2X_z=-\frac{3}{2}h^{-3}p\frac{\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}x\ ,$$

$$\nabla^2Y_z=-\frac{3}{2}h^{-3}p\frac{\alpha^2}{\alpha^2+\beta^2}y\ .$$

Die den Randbedingungen $X_z=Y_z=0$ für $z=\pm h$ genügenden Lösungen sind

$$\left.\begin{aligned} X_z&=\frac{3}{4}h^{-3}p\frac{\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}(h^2-z^2)x\ ,\\ Y_z&=\frac{3}{4}h^{-3}p\frac{\alpha^2}{\alpha^2+\beta^2}(h^2-z^2)y\ .\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Daher aus (3)

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial X_x}{\partial x}+\frac{\partial X_y}{\partial y}&=\frac{3}{2}h^{-3}p\frac{\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}xz\ ,\\ \frac{\partial X_y}{\partial x}+\frac{\partial Y_y}{\partial y}&=\frac{3}{2}h^{-3}p\frac{\alpha^2}{\alpha^2+\beta^2}yz\ .\end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Aus (7)

$$\left.\begin{aligned} \nabla^2X_x&=-\frac{3}{2}h^{-3}pz\frac{\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}\ ,\\ \nabla^2Y_y&=-\frac{3}{2}h^{-3}pz\frac{\alpha^2}{\alpha^2+\beta^2}\ ,\\ \nabla^2X_y&=0\ .\end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Aus (5) und (10)

$$\begin{aligned} X_x+Y_y&=\Theta-Z_z\\ &=-\frac{1}{4}(2+\sigma)h^{-3}pz^3+\frac{3}{4}h^{-1}pz+\frac{2}{4}p+\frac{3}{4}(1+\sigma)h^{-3}pz\left(\frac{\alpha^2\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}\right)\left(\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}\right)\ .\end{aligned} \tag{14}$$

Man führe eine Funktion χ ein, so dass

$$\left.\begin{aligned} X_x &= \frac{3}{2} h^{-3} pz \left(\frac{\alpha\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}\right)^2 \left(\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}\right) + \frac{\partial^2\chi}{\partial y^2}\,, \\ Y_y &= \frac{3}{2} h^{-3} pz \left(\frac{\alpha^2\beta}{\alpha^2+\beta^2}\right)^2 \left(\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}\right) + \frac{\partial^2\chi}{\partial x^2}\,, \\ X_y &= -\frac{\partial^2\chi}{\partial x\partial y}\,, \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

wo

$$\frac{\partial^2\chi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\chi}{\partial y^2} = -\frac{1}{4}(2+\sigma)h^{-3}pz^3 + \frac{3}{4}h^{-1}pz + \frac{1}{2}p + \frac{3}{4}(-1+\sigma)h^{-3}pz\left(\frac{\alpha^2\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}\right)\left(\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}\right).$$

(13) und (15) geben uns

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2}(\nabla^2\chi) &= -\frac{9}{2}h^{-3}pz\frac{\alpha^2}{\alpha^2+\beta^2}\,, \\ \frac{\partial^2}{\partial y^2}(\nabla^2\chi) &= -\frac{9}{2}h^{-3}pz\frac{\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}\,, \\ \frac{\partial^2}{\partial x\partial y}(\nabla^2\chi) &= 0\,. \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

Daher sehen wir, dass die folgende Gleichung

$$\nabla^2\chi + \frac{9}{4}h^{-3}pz\left(\frac{\alpha^2\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}\right)\left(\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}\right)$$

lineär von x und y sein muss.

Als die Lösung bekommt man

$$\chi = \frac{2+\sigma}{8}\frac{pz^3}{h^3}\left\{\frac{z^2}{10} - \frac{\alpha^2\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}\left(\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}\right)\right\} - \frac{1}{8}\frac{pz^3}{h} - \frac{1}{4}pz^2 + z\chi_1'' + \chi_0''\,,$$

mit

$$\chi_1'' = -\frac{3}{4}(1-\sigma)\frac{p}{h^3}\frac{\alpha^2\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^2 + \frac{3p}{8h}\frac{\alpha^2\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}\left(\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}\right),$$

und

$$\chi_0'' = \frac{1}{4}p\frac{\alpha^2\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}\left(\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}\right),$$

mit den Bedingungen

$$\left.\begin{aligned}\frac{3}{a^4}+\frac{1}{a^2b^2}=\frac{1}{4\alpha^2}\,,\\ \frac{3}{b^4}+\frac{1}{a^2b^2}=\frac{1}{4\beta^2}\,.\end{aligned}\right\}\tag{17}$$

Man bekommt also,

$$\left.\begin{aligned}X_x=&\frac{3}{2}h^{-3}pz\left(\frac{\alpha\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}\right)^2\left(\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}\right)-\frac{2+\sigma}{4}\frac{pz^3}{h^3}\frac{\alpha^2}{\alpha^2+\beta^2}\\ &-3(1-\sigma)\frac{pz}{h^3b^2}\frac{\alpha^2\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}\left(\frac{x^2}{a^2}+3\frac{y^2}{b^2}\right)+\frac{\alpha^2}{\alpha^2+\beta^2}p\left(\frac{3}{4}\frac{z}{h}+\frac{1}{2}\right)\,,\\ Y_y=&\frac{3}{2}h^{-3}pz\left(\frac{\alpha^2\beta}{\alpha^2+\beta^2}\right)^2\left(\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}\right)-\frac{2+\sigma}{4}\frac{pz^3}{h^3}\frac{\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}\\ &-3(1-\sigma)\frac{pz}{h^3a^2}\frac{\alpha^2\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}\left(3\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)+\frac{\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}p\left(\frac{3}{4}\frac{z}{h}+\frac{1}{2}\right)\,,\\ X_y=&6(1-\sigma)\frac{pz}{h^3}\frac{\alpha^2\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}\frac{xy}{a^2b^2}\,.\end{aligned}\right\}\tag{18}$$

Die entsprechenden Komponenten u, v, und w der Verschiebung werden wie folgt gegeben.

Aus

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{E}\{X_x-\sigma(Y_y+Z_z)\}\,,\qquad \text{u.s.w.,}$$

$$\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}=2\frac{(1+\sigma)}{E}Y_z\,,\qquad \text{u.s.w.,}$$

bekommt man

$$\begin{aligned}u=&-\frac{1+\sigma}{E}\frac{px}{4h^3}\frac{1}{\alpha^2+\beta^2}\{(2\alpha^2-\sigma\beta^2)z^3-3\alpha^2h^2z-2\alpha^2h^3\}\\ &+\frac{3}{2}\frac{pzx}{Eh^3}\frac{\alpha^2\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}\left[\frac{1}{\alpha^2+\beta^2}\left(\frac{x^2}{3\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}\right)(\beta^2-\sigma\alpha^2)-2(1-\sigma)\right.\\ &\left.\times\left\{\frac{1}{b^2}\left(\frac{x^2}{3a^2}+3\frac{y^2}{b^2}\right)-\frac{\sigma}{a^2}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)\right\}\right]\,,\\ v=&-\frac{1+\sigma}{E}\frac{py}{4h^3}\frac{1}{\alpha^2+\beta^2}\{(2\beta^2-\sigma\alpha^2)z^3-3\beta^2h^2z-2\beta^2h^3\}\\ &+\frac{3}{2}\frac{pzy}{Eh^3}\frac{\alpha^2\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}\left[\frac{1}{\alpha^2+\beta^2}\left(\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{3\beta^2}\right)(\alpha^2-\sigma\beta^2)-2(1-\sigma)\right.\end{aligned}$$

$$\times\left\{\frac{1}{a^2}\left(\frac{y^2}{3b^2}+3\frac{x^2}{a^2}\right)-\frac{\sigma}{b^2}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)\right\}\Bigg],$$

$$w=\frac{1+\sigma}{E}\frac{p}{16h^3}\left[(1+\sigma)z^4-6h^2z^2-8h^3z+6\frac{\alpha^2\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}(h^2-\sigma z^2)\left(\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}\right)\right.$$
$$\left.-12(1-\sigma)\frac{\alpha^2\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^2\right]. \tag{19}$$

An der Zentralebene, nämlich für $z=0$, haben wir

$$W=-\frac{1}{4}\frac{p}{D}\frac{\alpha^2\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}\left\{2\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^2-\frac{h^2}{1-\sigma}\left(\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}\right)\right\},$$

$$\left(\frac{\partial^4}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4}{\partial y^4}\right)W=-\frac{p}{D},$$

wo

$$D=\frac{2}{3}\frac{Eh^3}{1-\sigma^2}.$$

Die bisherigen Lösungen genügen den Bedingungen an beiden Seiten der Platte aber nicht am Rande der Platte. Dafür müssen wir geeigneten Druck und Drehmoment an den Rand hizufügen.

Erstens wollen wir die Zusatzlösung für $u=0$, $v=0$ an $z=0$ finden. Dafür muss man geeigneten Druck an den Rand ausüben. Dann ist der Spannungszustand in der Platte zweidimensional.

Nämlich

$$X'_z=Y'_z=Z'_z=0.$$

Aus (7)

$$\frac{\partial\Theta'}{\partial z}=\kappa \qquad (\text{konst.})$$

Also

$$\Theta'=\Theta'_0+\kappa z, \tag{20}$$

wo Θ'_0 eine Funktion von x und y allein ist.

Daher

$$\frac{\partial^2\Theta'_0}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Theta'_0}{\partial y^2}=0. \tag{21}$$

X'_x, Y'_y und X'_y werden von Spannungsfunktion $\chi(x,y,z)$ abgeleitet.

Weil $\left(\frac{\partial^4}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4}{\partial y^4}\right)\chi=0$ ist, ist $\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\chi=\Theta_0'+\kappa z$.

Aus (7), (20) und (21) haben wir

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{\partial^2\chi}{\partial z^2}+\frac{\sigma}{1+\sigma}\Theta_0'\right)&=0\ ,\\ \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial^2\chi}{\partial z^2}+\frac{\sigma}{1+\sigma}\Theta_0'\right)&=0\ ,\\ \frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\left(\frac{\partial^2\chi}{\partial z^2}+\frac{\sigma}{1+\sigma}\Theta_0'\right)&=0\ .\end{aligned}\right\}\tag{22}$$

Daher ist der Klammerausdruck in (22) eine lineäre Funktion von x und y. Wir können sie null setzen, ohne Einfluss auf Ableitung von X_x', Y_y' und X_y' auszuüben.

Darum

$$\chi=\chi_0+\chi_1 z-\frac{1}{2}\frac{\sigma}{1+\sigma}\Theta_0' z^2\ ,\tag{23}$$

wo

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\chi=\Theta_0'\ ,\qquad \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\chi_1=\kappa\ .$$

Wenn man Θ_0', χ_0 und χ_1 so wählen, dass

$$\Theta_0'=-\frac{1}{2}\frac{1+\sigma}{1-\sigma}p\ ,$$

$$\chi_0=-\frac{1}{4}\frac{p}{1-\sigma}\frac{1}{\alpha^2+\beta^2}\{(\sigma\alpha^2+\beta^2)x^2+(\alpha^2+\sigma\beta^2)y^2\}\ ,$$

und

$$\chi_1=0\ ,$$

dann

$$\left.\begin{aligned}X_x'&=\frac{\partial^2\chi}{\partial y^2}=-\frac{1}{2}\frac{p}{1-\sigma}\frac{\alpha^2+\sigma\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}\ ,\\ Y_y'&=\frac{\partial^2\chi}{\partial x^2}=-\frac{1}{2}\frac{p}{1-\sigma}\frac{\sigma\alpha^2+\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}\ ,\\ X_y'&=-\frac{\partial^2\chi}{\partial x\partial y}=0\ .\end{aligned}\right\}\tag{24}$$

$$\left.\begin{aligned}u'&=\frac{1}{E}\left\{\Theta_0'x-(1+\sigma)\frac{\partial\chi_0}{\partial x}+\frac{1}{2}(1+\sigma)p\frac{\alpha^2}{\alpha^2+\beta^2}x\right\}=-\frac{1}{2}\frac{1+\sigma}{E}p\frac{\alpha^2}{\alpha^2+\beta^2}x\ ,\\ v'&=\frac{1}{E}\left\{\Theta_0'y-(1+\sigma)\frac{\partial\chi_0}{\partial y}+\frac{1}{2}(1+\sigma)p\frac{\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}y\right\}=-\frac{1}{2}\frac{1+\sigma}{E}p\frac{\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}y\ ,\\ w'&=\frac{p\sigma}{2E}\frac{1+\sigma}{1-\sigma}pz\ .\end{aligned}\right\}\tag{25}$$

Wenn man diese Lösung hinzufügt, dann bekommt man

$$u=0\,,\qquad v=0\,,\qquad \text{für}\qquad z=0\,.$$

Zweitens wollen wir die Zusatzlösung finden, so dass

$$w=0\,,\qquad \frac{\partial w}{\partial \nu}=0\,,\qquad \text{für}\quad z=0\quad \text{und}\qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\,.$$

Um diese Bedingung zu erfüllen, muss man geeigneten Drehmoment an den Rand ausüben, so dass die Mittelfläche die folgende Form nimmt, nämlich

$$W=C\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1\right)^2.$$

In diesem Falle können X_z'' und Y_z'' nicht null sein, aber $X_z''=Y_z''=Z_z''=0$ für $z=\pm h$. Z_z'' muss überall gleich null sein, weil

$$\nabla^4 Z_z''=0\qquad \text{und}\qquad \frac{\partial Z_z''}{\partial z}=0\qquad \text{an}\qquad z=\pm h\,,$$

was aus (9) ganz klar ist.

Aus

$$\nabla^2\Theta=0\qquad \text{und}\qquad \nabla^2 Z_z''=-(1+\sigma)^{-1}\frac{\partial^2\Theta}{\partial z^2}\,,$$

hat Θ eine Form wie $\Theta_0''+z\Theta_1''$, wo Θ_0'' und Θ_1'' harmonische Funktion von x und y sind.

Was Θ_0'' betrifft, wird es in Θ_0' eingeschlossen.

Aus (7) und

$$X_z''=Y_z''=0\ \text{ an }\ z=\pm h\,,$$

bekommen wir

$$X_z''=\frac{1}{2}\frac{1}{1+\sigma}(h^2-z^2)\frac{\partial\Theta_1''}{\partial x}\,,$$

$$Y_z''=\frac{1}{2}\frac{1}{1+\sigma}(h^2-z^2)\frac{\partial\Theta_1''}{\partial y}\,.$$

(3) und (7) geben uns

$$\frac{\partial X_x''}{\partial x}+\frac{\partial X_y''}{\partial y}-\frac{z}{1+\sigma}\frac{\partial\Theta_1''}{\partial x}=0\,,\qquad \frac{\partial X_y''}{\partial x}+\frac{\partial Y_y''}{\partial y}-\frac{z}{1+\sigma}\frac{\partial\Theta_1''}{\partial y}=0\,,$$

$$\nabla^2 X_x''+\frac{z}{1+\sigma}\frac{\partial^2\Theta_1''}{\partial x^2}=0\,,\qquad \nabla^2 Y_y''+\frac{z}{1+\sigma}\frac{\partial^2\Theta_1''}{\partial y^2}=0\,,$$

$$\nabla^2 X_y'' + \frac{z}{1+\sigma}\frac{\partial^2 \Theta_1''}{\partial x \partial y} = 0\,, \qquad X_x'' + Y_y'' = z\Theta_1''\,.$$

Daraus bekommt man

$$\left.\begin{aligned} X_x'' &= \frac{z}{1+\sigma}\,\Theta_1'' + \frac{\partial^2 \chi''}{\partial y^2}\,, \qquad Y_y'' = \frac{z}{1+\sigma}\,\Theta_1'' + \frac{\partial^2 \chi''}{\partial x^2}\,, \\ X_y'' &= -\frac{\partial^2 \chi''}{\partial x \partial y}\,, \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

wo

$$\nabla^2 \chi'' = -\frac{1-\sigma}{1+\sigma} z\Theta_1''\,.$$

Auch aus

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{\partial^2 \chi''}{\partial z^2} - \frac{2-\sigma}{1+\sigma} z\Theta_1''\right) = 0\,, \qquad \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial^2 \chi''}{\partial z^2} - \frac{2-\sigma}{1+\sigma} z\Theta_1''\right) = 0\,,$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\left(\frac{\partial^2 \chi''}{\partial z^2} - \frac{2-\sigma}{1+\sigma} z\Theta_1''\right) = 0\,,$$

ergibt sich, dass der Klammerausdruck lineär von x und y sein muss, was man gleich null setzen kann, weil das keinen Einfluss auf Spannungskomponente hat.

Daher

$$\chi'' = z\chi_1'' + \frac{2-\sigma}{6(1+\sigma)} z^3 \Theta_1''\,,$$

wo

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\chi_1'' = -\frac{1-\sigma}{1+\sigma}\Theta_1''\,.$$

Also

$$\left.\begin{aligned} u'' &= -\frac{1}{E}\left[(1+\sigma)2\frac{\partial \chi_1''}{\partial x} + \frac{1}{6}(2-\sigma)z^3 \frac{\partial \Theta_1''}{\partial x}\right], \\ v'' &= -\frac{1}{E}\left[(1+\sigma)2\frac{\partial \chi_1''}{\partial y} + \frac{1}{6}(2-\sigma)z^3 \frac{\partial \Theta_1''}{\partial y}\right], \\ w'' &= \frac{1}{E}\left[(1+\sigma)\chi_1'' + \left(h^2 - \frac{1}{2}\sigma z^2\right)\Theta_1''\right]. \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

Zusammenfassend bekommen wir die vertikale Verschiebung der Mittelfläche $W = (w + w' + w'')_{z=0}$ wie folgt.

$$W=\frac{1}{E}\{(1+\sigma)\chi_1''+h^2\Theta_1''\}-\frac{1}{4}\frac{p}{D}\frac{\alpha^2\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}\left\{2\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^2-\frac{h^2}{1-\sigma}\left(\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}\right)\right\}. \tag{28}$$

Am Rande der Ellipse, nämlich, an $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ müssen $W=0$ und $\frac{\partial W}{\partial \nu}=0$ sein.

Nämlich

$$(1+\sigma)\chi_1''+h^2\Theta_1''-\frac{1}{4}\frac{pE}{D}\frac{\alpha^2\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}\left\{2-\frac{h^2}{1-\sigma}\left(\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}\right)\right\}=0\,,$$

und

$$\left(\frac{x}{a^2}\frac{\partial}{\partial x}+\frac{y}{b^2}\frac{\partial}{\partial y}\right)\{(1+\sigma)\chi_1''+h^2\Theta_1''\}-8\frac{pE}{D}\frac{\alpha^2\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}\left\{\frac{1}{a^4}\left(1-\frac{3h^2}{1-\sigma}\frac{1}{\alpha^2}\right)x^2\right.$$
$$\left.+\frac{1}{b^4}\left(1-\frac{3h^2}{1-\sigma}\frac{1}{\beta^2}\right)y^2-\frac{h^2}{4(1-\sigma)}\frac{1}{a^2b^2}\right\}=0\,.$$

Daraus bekommt man

$$\chi_1''=\frac{E}{1+\sigma}\frac{p}{D}\frac{\alpha^2\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}\left[\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{h^2}{4(1-\sigma)}\left(\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}\right)\right.$$
$$\left.+\frac{2h^2}{1-\sigma}\left\{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}-\frac{h^2}{4(1-\sigma)}\left(\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}\right)\right\}-\frac{1}{2}\right],$$

$$\Theta_1''=-\frac{2E}{1-\sigma}\frac{p}{D}\frac{\alpha^2\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}\left\{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}-\frac{h^2}{4(1-\sigma)}\left(\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}\right)\right\}.$$

Wenn man diese Ausdrücke in (26), (27) und (28) einsetzt, dann

$$W=-\frac{1}{2}\frac{p}{D}\frac{\alpha^2\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1\right)^2, \tag{29}$$

$$\left.\begin{aligned}
u''&=-\frac{2p}{D}\frac{\alpha^2\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}\left(\frac{1}{a^2}-\frac{h^2}{4(1-\sigma)}\frac{1}{\alpha^2}\right)zx\,,\\
v''&=-\frac{2p}{D}\frac{\alpha^2\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}\left(\frac{1}{b^2}-\frac{h^2}{4(1-\sigma)}\frac{1}{\beta^2}\right)zy\,,\\
w''&=\frac{p}{D}\frac{\alpha^2\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}\left[\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{h^2}{4(1-\sigma)}\left(\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}\right)-\frac{1}{2}\right]\\
&\quad+\frac{\sigma}{1-\sigma}\frac{p}{D}\frac{\alpha^2\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}z^2\left\{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}-\frac{h^2}{4(1-\sigma)}\left(\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}\right)\right\}.
\end{aligned}\right\} \tag{30}$$

$$\left.\begin{aligned} X_x'' &= -\frac{2E}{1-\sigma^2}\frac{p}{D}\frac{\alpha^2\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}z\left[\frac{1}{a^2}+\frac{\sigma}{b^2}-\frac{h^2}{4(1-\sigma)}\left(\frac{1}{\alpha^2}+\frac{\sigma}{\beta^2}\right)\right], \\ Y_y'' &= -\frac{2E}{1-\sigma^2}\frac{p}{D}\frac{\alpha^2\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}z\left[\frac{\sigma}{a^2}+\frac{1}{b^2}-\frac{h^2}{4(1-\sigma)}\left(\frac{\sigma}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}\right)\right], \\ X_y'' &= 0\,, \qquad X_z''=Y_z''=Z_z''=0\,. \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

Alles zusammenfassend bekommen wir die endliche Lösung des Problems, nämlich, $u+u'+u''$, $v+v'+v''$, $w+w'+w''$, $X_x+X_x'+X_x''$, $Y_y+Y_y'+Y_y''$, Z_z, X_y, Y_z und Z_x.

Wir enthalten uns des Niederschreibens im Ganzen.

2. Horizontale Schubspannung an der Oberfläche.

Die Spannung $X'_{y'}$ in der vertikalen Ebene mit Richtungskosinussen $l=\cos\theta$, $m=\sin\theta$ und $n=0$ ergibt sich

$$X'_{y'}=\tfrac{1}{2}(Y_y-X_x)\sin 2\theta+X_y\cos 2\theta\,.$$

Die Richtung der maximalen Schubspannung wird gegeben durch

$$\tan 2\theta=\frac{Y_y-X_x}{2X_y}\,,$$

und die entsprechende maximale Schubspannung τ_m ist

$$\tau_m=\tfrac{1}{2}\sqrt{(Y_y-X_x)^2+4X_y^2}\,,$$

Nun

$$\begin{aligned} Y_y-X_x=\frac{3}{h^3}\frac{\alpha^2\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}pz\Bigg[&(1-\sigma)\left\{\left(\frac{1}{b^2}-\frac{3}{a^2}\right)\frac{x^2}{a^2}+\left(\frac{3}{b^2}-\frac{1}{a^2}\right)\frac{y^2}{b^2}\right\} \\ &+\frac{1}{2}\frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}\left(\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}\right)+(1-\sigma)\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)+\frac{2+\sigma}{12}\frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha^2\beta^2}z^2\Bigg], \end{aligned}$$

$$X_y=6(1-\sigma)\frac{pz}{h^3}\frac{\alpha^2\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}\frac{xy}{a^2b^2}\,.$$

Beim Kreisplattenmodell ist $\alpha=\beta$ und $a=b$.

Mit der Hilfe von (17) können wir diese Ausdrücke wie folgt umschreiben.

$$Y_y-Y_x=\frac{3}{h^3}\frac{pzab}{4\left\{3\left(\frac{b^2}{a^2}+\frac{a^2}{b^2}\right)+2\right\}}\left[(1-\sigma)\left\{\left(\frac{a}{b}-\frac{3b}{a}\right)\frac{x^2}{a^2}+\left(\frac{3a}{b}-\frac{b}{a}\right)\frac{y^2}{b^2}\right\}\right.$$

$$+\frac{1}{2}\frac{3\left(\frac{a^2}{b^2}-\frac{b^2}{a^2}\right)}{3\left(\frac{b^2}{a^2}+\frac{a^2}{b^2}\right)+2}\left\{4\left(\frac{3b}{a}+\frac{a}{b}\right)\frac{x^2}{a^2}+4\left(\frac{3a}{b}+\frac{b}{a}\right)\frac{y^2}{b^2}\right\}$$

$$+(1-\sigma)\left(\frac{b}{a}-\frac{a}{b}\right)+(2+\sigma)\left(\frac{a}{b^3}-\frac{b}{a^3}\right)z^2\Big],$$

$$X_y=6(1-\sigma)\frac{pzxy}{h^3}\frac{1}{4\left\{3\left(\frac{b^2}{a^2}+\frac{a^2}{b^2}\right)+2\right\}}. \tag{32}$$

3. Zahlenmässige Rechnung eines besonderen Falles.

Im Allgemeinen ist der Spannungszustand ziemlich kompliziert. Also wollen wir einen besonderen Fall zeigen.

Es sei $b=2h$, $a=4h$, $\sigma=1/4$ und $z=-h$.

Dann

$$Y_y-X_x=-\frac{9}{59}p\left\{\frac{1}{4}\left(\frac{x^2}{4h^2}+11\frac{y^2}{h^2}\right)+\frac{30}{59}\left(\frac{7}{4}\frac{x^2}{h^2}+13\frac{y^2}{h^2}\right)-3\times\frac{1}{16}\right\},$$

$$=-p\left(0.1453\frac{x^2}{h^2}+1.427\frac{y^2}{h^2}-0.02860\right). \tag{33}$$

$$X_y=-\frac{9}{118}p\frac{xy}{h^2}=-0.07630p\frac{xy}{h^2}. \tag{34}$$

$$\tan 2\theta=0.952\frac{x^2}{h^2}+9.350\frac{y^2}{h^2}-0.1875. \tag{35}$$

$$\frac{\tau_m}{p}=\frac{1}{2}\sqrt{\left(0.1453\frac{x^2}{h^2}+1.427\frac{y^2}{h^2}-0.02860\right)^2+4\times0.0763^2\frac{x^2y^2}{h^4}}, \tag{36}$$

Durch die Transformation $\xi=\frac{x}{h}$, $\eta=\frac{y}{h}$,

$$\frac{\tau_m}{p}=\sqrt{0.00528\xi^4+0.5100\eta^4+0.1096\xi^2\eta^2-0.00208\xi^2-0.02040\eta^2+0.0002045}. \tag{36'}$$

4. Annäherungsform der Iso-$\left(\frac{\tau_m}{p}\right)$ Kurve.

Aus (36)

$$f=\left(\frac{\tau_m}{p}\right)^2=A'\xi^4+B'\eta^4+C'\xi^2\eta^2-D'\xi^2-E'\eta^2+F' ,$$

$$\frac{\partial f}{\partial \xi}=2\xi(2A'\xi^2+C'\eta^2-D') ,$$

$$\frac{\partial f}{\partial \eta}=2\eta(2B'\eta^2+C'\xi^2-E') ,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2}=12A'\xi^2+2C'\eta^2-2D' ,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2}=12B'\eta^2+2C'\xi^2-2E' ,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \xi\partial \eta}=4C'\xi\eta ,$$

wo

$$A'=.00528 , \quad B'=.5100 , \quad C'=.1096 , \quad D'=.00208 , \quad E'=.02040$$

und

$$F'=.0002045 .$$

Am Maximum- oder Minimum-Punkt muss es notwendig sein, dass

$$\frac{\partial f}{\partial \xi}=\frac{\partial f}{\partial \eta}=0 ,$$

nämlich

$$(\xi=0 , \quad \eta=0) , \qquad \left(\xi=0 , \quad \eta=\sqrt{\frac{E'}{2B'}}=.1414\right) ,$$

$$\left(\xi=\sqrt{\frac{D'}{2A'}}=.444 , \quad \eta=0\right) ,$$

oder

$$\left(\xi=\sqrt{\frac{2B'D'-C'E'}{4A'B'-C'^2}}=.302 , \quad \eta=\sqrt{\frac{2A'E'-C'D'}{4A'B'-C'^2}}=.098\right) .$$

Die Indikatrix am ($\xi=0$, $\eta=0$) ist

$$\delta f=\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2}\delta\xi^2+\frac{\partial^2 f}{\partial \xi\partial \eta}\delta\xi\delta\eta+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2}\delta\eta^2=-.00208\delta\xi^2-.02040\delta\eta^2 .$$

Daher ist ($\xi=0$, $\eta=0$) ein Maximum-Punkt und

$$f_{\max}=.0002045\ .$$

Nämlich $\tau_m/p=.0143$.

Die Indikatrix am ($\xi=0$, $\eta=.1414$) ist

$$\delta f=.00011\delta\xi^2+.0408\delta\eta^2\ .$$

Daher ist dieser Punkt ein Minimum-Punkt und $f_{\min.}=0$, was aus (36) direkt klar zu sehen ist.

In gleicher Weise am ($\xi=.444$, $\eta=0$) auch $f_{\min.}=0$.

Am ($\xi_0=.302$, $\eta_0=.098$) sind

$$\frac{\partial^2 f}{\partial\xi^2}=2\times 4A'\xi_0^2=2\times.001924\ ,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial\xi^2}=2\times 4B'\eta_0^2=2\times.01973\ ,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial\xi\partial\eta}=.01296\ .$$

Daher ist die Indikatrix

$$\delta f=.00192\delta\xi^2+.01296\delta\xi\delta\eta+.01973\delta\eta^2=.01973(\delta\eta+.430\delta\xi)(\delta\eta+.226\delta\xi)\ .$$

Also ist dieser Punkt ein Sattelpunkt, und in dem schmalen Gebiet zwischen den Linien $\delta\eta+.430\delta\xi=0$ und $\delta\eta+.226\delta\xi=0$ nimmt δf ab, vice versa.

$$f_{\min.\text{-}\max}=.000005\ .$$

In diesem Bereich aber ist (τ_m/p) ganz klein und es interessiert uns nicht viel. Ausserhalb dieses Gebietes nimmt (τ_m/p) nach aussen immer zu.

Nun, in der Nähe von ($\xi=0$, $\eta=2$), wenn man setzt $\xi=\delta\xi$, $\eta=2-\delta\eta$, dann, $f=8.09-16.15\delta\eta$.

Nämlich $(\tau_m/p)\doteqdot 2.85(1-\delta\eta)\ .$ (37)

Wir sehen also, dass Iso-(τ_m/p) Linie parallel zu dem Rande läuft, und τ_m ungefähr gleich 3 mal p ist.

Ähnlicherweise in der Nähe von ($\xi=4$, $\eta=0$) ,

$$f\doteqdot 1.320(1-\delta\xi)\ .$$

Also

$$\tau_m/p\doteqdot 1.15(1-0.5\delta\xi)\ .$$

Daher ist die Schubspannung am Rande in der langen Achse erheblich kleiner als die in der kurzen Achse.

Am Rande der Ellipse, nämlich an der Linie $(\xi^2/4^2)+(\eta^2/2^2)=1$, haben wir

$$f = .0098\xi^4 - .579\xi^2 + 8.90 \; .$$

Funktion f hat weder Maximum noch Minimum im Bereich $0 \leqq \xi \leqq 4$. Nämlich, nimmt die Maximum-Schubspannung am Rande von der kleinen Achse nach der langen allmählich ab.

5. Hauptspannungen am unteren Rande.

An der beiden Seiten der Platte sind die Hauptspannungen natürlich Z_z und der horizontale Zug (oder Druck). Besonders in der x-Achse oder y-Achse sind sie einfach $\sum X_x$, $\sum Y_y$ und Z_z.

Nun, am Punkte $x=0$, $y=2h$, $z=h$,

$$\sum X_x = X_x + X_x' + X_x'' = -1.455p \; ,$$
$$\sum Y_y = Y_y + Y_y' + Y_y'' = 4.35p \; ,$$
$$Z_z = -p \; .$$

Also ergibt sich die Maximum-Schubspannung in der horizontalen Richtung zu

$$\tau_m/p = 2.90 \; ,$$

und die Maximum-Schubspannung, derer Richtung in der (y, z) Ebene liegt, ergibt sich zu

$$\tau_m/p = 2.68 \; .$$

Am Punkte $x=4h$, $y=0$, $z=h$ haben wir

$$\sum X_x = -.541p \; ,$$
$$\sum Y_y = 19.1p \; ,$$
$$Z_z = -p \; .$$

Also ist die Maximum-Schubspannung erheblich kleiner hier als am Punkte $x=0$, $y=2h$, $z=h$.

An der freien Oberfläche, am Punkte $x=0$, $y=2h$, $z=-h$, haben wir

$$\sum X_x = 1.14p \; ,$$
$$\sum Y_y = -4.69p \; ,$$
$$Z_z = 0 \; .$$

Die Maximum-Schubspannung in der horizontalen Richtung ist,

$$\frac{\sum Y_y - \sum X_x}{2} = -2.90p \; ,$$

was natürlich mit (37) übereinstimmt.

Die Maximum-Schubspannung in der (y, z) Ebene ist

$$\frac{\sum Y_y - Z_z}{2} = -2.35p \; .$$

Wir sehen also, dass die Maximum-Horizontalschubspannung grösser als die überschiebende Spannung ist. Aber die beiden Werte sind nicht viel verschieden. Daher können wir ruhig vermuten, dass die beiden Verwerfungen gleichzeitig auftreten können, was manchmal der Fall ist.

Am Punkte $x=4h$, $y=0$, $z=-h$ haben wir

$$\sum X_x = 0.233p\,,$$
$$\sum Y_y = -.055p\,,$$
$$Z_z = 0\,.$$

Also sehen wir wieder, dass die Spannungen in der nähe von diesem Punkt erheblich kleiner als die in der Nähe von $x=0$, $y=2h$, $z=-h$.

Alles zusammenfassend können wir natürlicherweise erklären, dass beim elliptischen Quellengebiet oder im allgemeinen beim etwas verlängerten Quellengebiet nicht nur Überschiebungen sondern auch horizontale Verwerfungen vorkommen können.

Wir sind der Meinung, dass das Nachbebengebiet ungefähr mit dem Quellengebiet des Hauptbebens übereinstimmt. Mehrere Nachbebengebiete sind wirklich elliptisch in Form, wie man in vielen Beispielen von Grossbeben deutlich sehen kann, die S. Homma[3] u.a. gegeben hatten.

Die Richtung der maximalen Schubspannung stimmt im allgemeinen nicht mit der der Iso-τ_m/p Linie überein. Andererseits kommt das System der horizontalen Verwerfungen beim Grossbeben im allgemeinen in Echelon Form vor[4]. Unser Rechenresultat erklärt wenigstens qualitativ diese Tatsache.

---

17. Zisin no Ba no Ron: Daenkei no Ba.

Tikyû Buturigaku Kyôsitu Matuzawa-Takeo to Hasegawa-Hirosi.

Matuzawa ga mae ni Zisin no Ba wo ronzita toki niwa Aturyoku no okoru Kuiki wo Enkei to site Kangae wo susumeta. Kono Toki niwa yokosuberi no Dansô wo setumeisuru Koto wa Muri de atta.

Kono Ronbun dewa Daenkei no Aturyoku no Ba ni yotte zyûbun ôkii yoko no Zuri-Hariai no okoru koto wo simesita.

Zisin no Ba no Ron dewa Yosin no okoru Kuiki wa Tikara no Hassei no Ba to daitai itti suru Mono to Kangaeru ga, zissai no Yosin-Kuiki mo Daenkei no Baai ga ôi.

Yoko no Zuri-Hariai no Kyokudai no Hôkô to sono Kyokudai no Atae no hitosii Sen towa ippan niwa itti sinai. Kono Koto wa Yokosuberi-Danso no iwayuru 'Gankô' wo setumei suru to omowareru.

---

3) S. Homma und A. Seki, *Zisin* [ii], **2** (1949), 37–40; **3** (1951), 44–48.

4) S. Fujiwhara und T. Takayama, *Bull. Earthq. Rest. Inst.*, **9** (1931), 50–79.