

1. 異周期異振幅の単弦振動の重ね合せによつて生ずる見かけ上の周期について

地震研究所 萩原尊禮

(昭和18年3月18日, 同年6月15日發表—昭和20年12月20日受理)

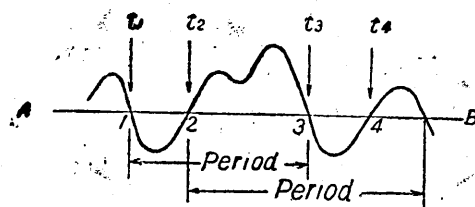
緒言

曾て石本博士¹⁾は加速度地震記象に現れる振動の周期について其の頻度圖を作り、頻度の最も多い周期を“卓越周期”と呼び、これを土地の固有振動による周期であるとした。この方法は其後色々の人によつて用ひられて來たが、これについては當時から色々と問題となつたのであつて、この頻度極大を與へる周期は果して實在してゐる振動を與へるものかどうか、例へば幾種類かの單純な振動の合成の結果實在しない周期が見かけ上頻度極大となつて現れ、我々の知りたい肝腎のものは隠蔽されてしまつてはゐないか、と云ふ懸念があつた。然し、この問題は深く議論されることなく今日に至つた。この種の問題は、複雑な振動波形の中に、どのような周期の振動が主要な部分として含まれてゐるかを見出すことであつて、一般振動學の立場からも亦重要なことである。

本文は上の問題に關聯した primitive な研究であつて、幾つかの周期振幅を異にした單弦振動を重ね合せた結果、どのような見かけ上の周期が現れ、又それがどのような頻度で現れるかを、數理的に調べたものである。

§ 1 2種類の單弦振動の重ね合せによつて生ずる見かけ上の周期

本文では或る振動波形が零線を相次いで同一方向に過ぎる點の間の時間的間隔を以て、見かけ上の周期と定義する。例へば第1圖において、ABを零線とすると、時間的間隔 1-3, 2-4, ……等が其處に現れた見かけ上



第 1 圖

1) 石本巳四雄 震研彙報 10 (1932), 171.

の周期である。いま、振幅及び周期を異にした2箇の単弦振動、 $a_1 \sin \omega_1 t$ 及び $a_2 \sin \omega_2 t$ を重ね合せた場合を考へる。こゝに a_1, a_2 は振幅、 ω_1, ω_2 は角速度、 t は時間である。各個の周期は夫々 $T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1}, T_2 = \frac{2\pi}{\omega_2}$ である。合成波形が零線（時間軸）を過ぎるときには、

$$a_1 \sin \omega_1 t + a_2 \sin \omega_2 t = 0 \quad (1)$$

である。いま、(1) を満す t の系列を

$$t_1, t_2, t_3, t_4, \dots, t_n, \dots$$

とすると、

$$t_3 - t_1, t_4 - t_2, t_5 - t_3, \dots, t_{n+2} - t_n, \dots$$

が合成波形に現れる周期 T の系列である。このやうにして T をきめることにすると、波形が零線を1回過ぎることに對して1箇の T が對應して存在することになる。次に上のやうな方法で極めて澤山の T を測つて行つたとき、どのやうな T がどのやうな頻度で現れるかを調べることにする、(1) から數値計算で T を求めることは困難であるから、次のやうな圖的解法を考へてゆく。即ち、

$$\left. \begin{aligned} \omega_1 t &= \theta_1, \\ \omega_2 t &= \theta_2 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

と置くと(1)は

$$a_1 \sin \theta_1 + a_2 \sin \theta_2 = 0 \quad (3)$$

となる。こゝで便宜上、

$$a_2 \geq a_1, \text{ 即ち, } \frac{a_1}{a_2} \leq 1 \quad (4)$$

と考へても一般性は失はない。(3) より

$$\theta_2 = n\pi + (-1)^n \text{Sin}^{-1} \left(-\frac{a_1}{a_2} \sin \theta_1 \right) \quad (5)$$

が得られる。こゝに n は0を含む正負の整数である。 Sin^{-1} は主値であつて、 $n=0$ のとき $-\frac{\pi}{2} \leq \theta_2 \leq \frac{\pi}{2}$ の制限のもとに(3)を満す値をとるものとする。(5)において勝手な θ_1 を與へれば、これに對して θ_2 が容易に計算される。(4)の條件により勝手な θ_1 に對應する θ_2 の値は必ず存在する。そこで横軸に θ_1 を、縦軸に θ_2 を取ると第2圖のやうな連続な曲線が得られる。 $\frac{a_1}{a_2}$ の値が小さい程曲線は平坦になり、 $\frac{a_1}{a_2}$ の値が1に近づくと曲線の山と谷は尖る。第3圖は色々の $\frac{a_1}{a_2}$ の値に對する

parts 1~4.] 異周期異振幅の単振動の重ね合せによつて生ずる見かけ上の周期について 3

曲線であつて、主値だけについて示してある。 $\frac{a_1}{a_2} = 1$ の場合は (5) は、

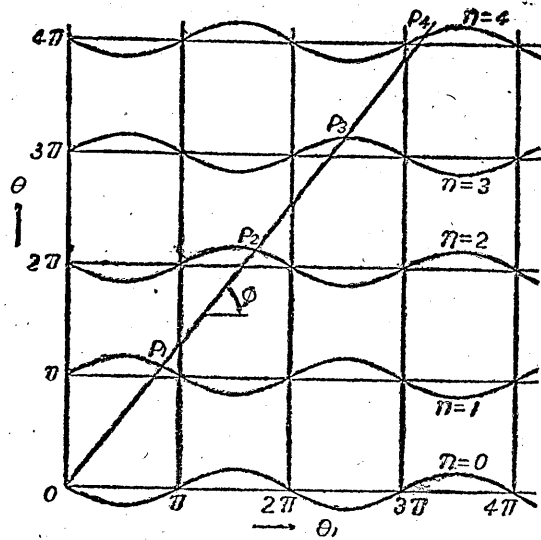
$$\theta_2 = n\pi + (-1)^n \theta_1 \quad (6)$$

となるから曲線は直線となり、山と谷は三角形を形成する。

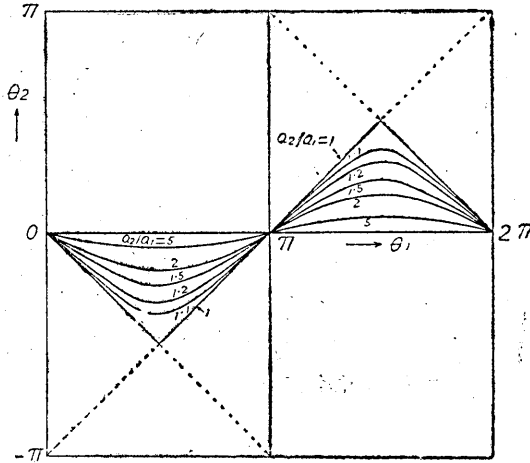
変数 θ_1, θ_2 は $\theta_1 = \theta_2 = 0$ より出發して t が増すにつれて増してゆくが、

$$\frac{d\theta_2}{d\theta_1} = \frac{\frac{d\theta_2}{dt}}{\frac{d\theta_1}{dt}} = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \text{一定}$$

であるから、 $\theta_1 - \theta_2$ 座標において、これは原点を通り勾配 $\frac{\omega_2}{\omega_1}$ なる一つの直線軌道の上を進むことになる。この軌道が曲線を切るところでは、(5)



第 2 圖



第 3 圖

従つて(3)の関係が成立つのであるから、このとき合成波形が零線を過ぎる。第2圖で、軌道がOから出發して $P_1, P_2, P_3 \dots$ において順次に曲線を切つてゆくとすると、軌道が或一つの曲線を切つてから、次の曲線を切り、更にその次の曲線に到達するまでの時間、例へば、Oから P_2 、或は P_1 から P_3 に達するに要する時間が T に他ならぬ。従つて、圖で線分 OP_2 、

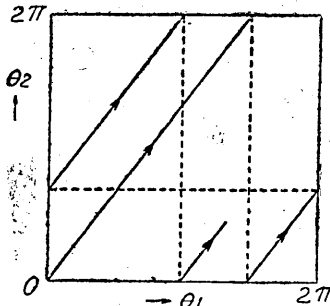
P_1P_3 等を縦軸に投影してその長さを縦軸の尺度で讀んだ値を τ とすれば、

$$T = \frac{T_1}{2\pi} \times \tau = \text{常数} \times \tau$$

で與へられる。こゝに T_1 は $a_1 \sin \omega_1 t$ の周期 ($2\pi/\omega_1$) である。或は、線分の長さを縦軸の尺度で測つた値を x とし、軌道の横軸に對する傾きの角を ϕ とすれば、 $\tau = x \sin \phi$ であるから、

$$T = \frac{T_1 \sin \phi}{2\pi} \times x = \text{常數} \times x$$

となる。従つて、相次ぐ T の値を求めることは、軌道に沿つて上のやうな線分の長さ x を、次ぎ次ぎに測つてゆくことに歸着する。この軌道は時間と共に無限に延びてゆくから、このまゝでは取扱ひに困るが、これは第4圖のやうな、 $\theta_1=0$, $\theta_1=2\pi$,



第 4 圖

$\theta_2=0$, $\theta_2=2\pi$ の仕切りで囲まれた正方形の中の軌道群に置代へることができる、即ち、0 から出發して或る仕切りに突當つたら、その對應邊に垂線を下して其處から又同じ方向に出發してゆき、このやうなことを繰返すのである。 θ_1 , θ_2 は 2π の周期を持つてゐるから、軌道をこのやうに對應邊に移しても、軌道をそのまゝ延長したのと事柄は全く同等である。このやうにすれば、時間の経過に相當して、正方形内に平行な直線軌道が何本も得られる。このとき軌道の勾配

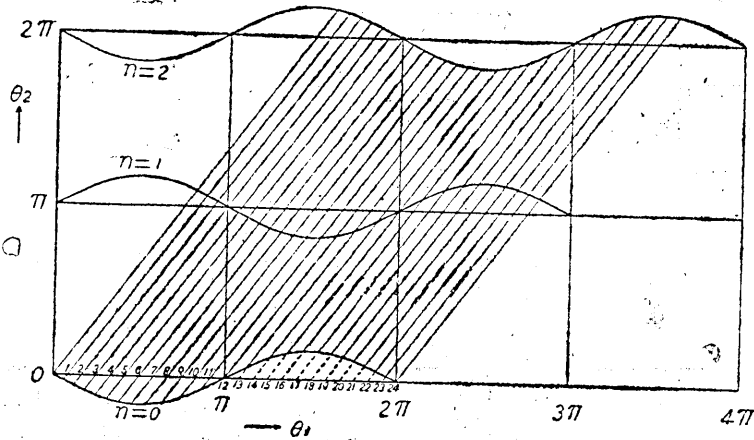
$\tan \phi = \frac{\omega_2}{\omega_1}$ の値が有理數であれば、軌道は正方形内に有限箇畫かれた後また元の軌道に復歸し、一定の周期で同じことを繰返してゆく。これに反して $\frac{\omega_2}{\omega_1}$ の値が無理數であるときは、いつまで軌道を延長して行つても再び同じ軌道に立戻ることとはなく、終に正方形内は一様な密度で隅なく軌道が畫かれることになる。この軌道の一様分布性は Weyl の撞球の問題として知られ、統計力學における Ergode の問題とも關聯してゐるので、既に其の方面で詳しく吟味されてゐる。ところで、軌道が一様分布性を持つためには勾配が無理數であることを必要とするが、いま勾配を勝手に選んだ場合にそれが有理數である確率を考へてみると、有理數と無理數とは集合論の立場から見て密度が異なるから、それは零であるとする外はない。従つて軌道は、統計力學の言葉を借りれば“殆ど常に、正方形内において一様分布性を持つと云へるのである。従つて、現在の場合の實際問題としては、正方形内に等密度に軌道を畫き、その軌道が曲線をどのやうに切るかを調べれば、時間を限りなく大きくとつた時の起り得べき T の分布を知ることができることになる。

實際の作圖は、正方形内に軌道を畫いたのでは、曲線間の線分の長さを測るのに不便であるから次のやうにする。即ち、第5圖のやうに、横軸の $0 \sim 2\pi$ の間を等間隔に $0, 1, 2, \dots$ のやうに分け、この點を過ぎり勾配が $\frac{\omega_2}{\omega_1}$ なる平行直線を幾つも引く、そしてこの直線が $n=0$ の曲線を切る點と $n=2$ を切る點の間の長さを測ることにす

1) 伏見康治 エルゴードの問題 (岩波物理學講座 VI, B), 14.

Parts 1~4.] 異周期異振幅の単弦振動の重ね合せによつて生ずる見かけ上の周期について5

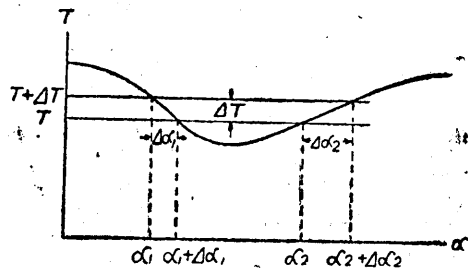
る。 θ_1, θ_2 が 2π の周期を持つことを考へれば、これ等の直線群は $\theta_1=0, \theta_1=2\pi, \theta_2=0, \theta_2=2\pi$ の仕切りで圍まれた正方形内の軌道群と全く同等である。これ等の直線群が横軸を過ぎる點の値を α とすれば、 α の値によつて、直線がどの直線である



第 5 圖

かを指定することができる。正方形内の軌道は等密度に分布されるのであるから、現在の作圖における直線群もやはり等密度で畫かれるべきである。従つて、どの直線も α の値には無關係に同等の確率を持つて現れ、ある特定の α の直線が特に現れ易いといふことはない。いま、 α の値を横軸

にとり、それに対応する直線が與へる T の値を縦軸にとると第6圖のやうな圖が得られる。即ち、 T は α の函數として與へられる。或る特定の T の現れる確率を $P(T)$ とすれば、 T と $T+\Delta T$ の間にあるやうな周期が

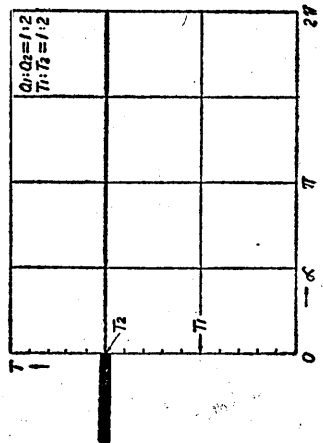
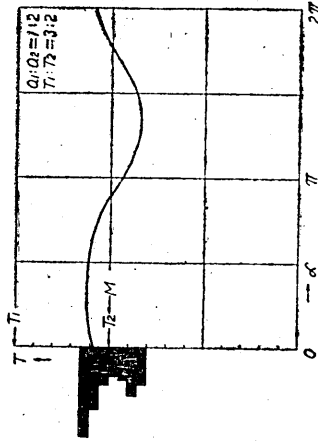
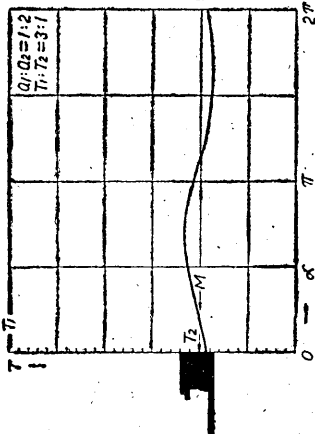
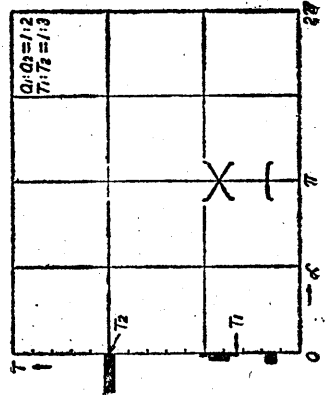
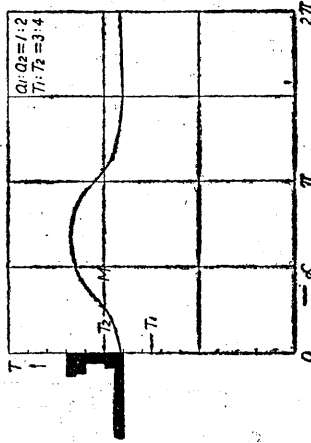
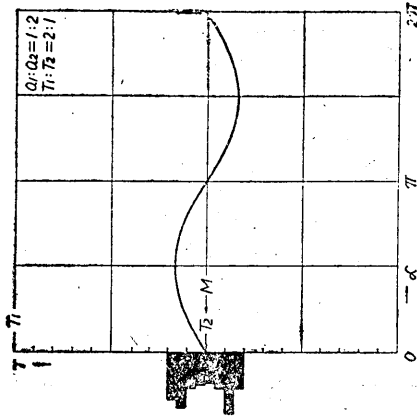
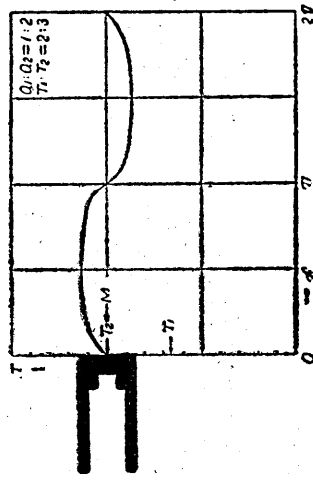
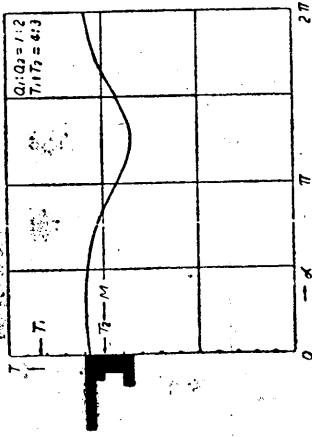


第 6 圖

現れる確率は $P(T)\Delta T$ である。 $T, T+\Delta T$ に対応する α の値を $\alpha_i, \alpha_i+\Delta\alpha_i$ とすれば、第6圖から明かなやうに、 $\Sigma\Delta\alpha_i$ は T と $T+\Delta T$ の間にある周期を與へる軌道の密度に比例する。即ち、

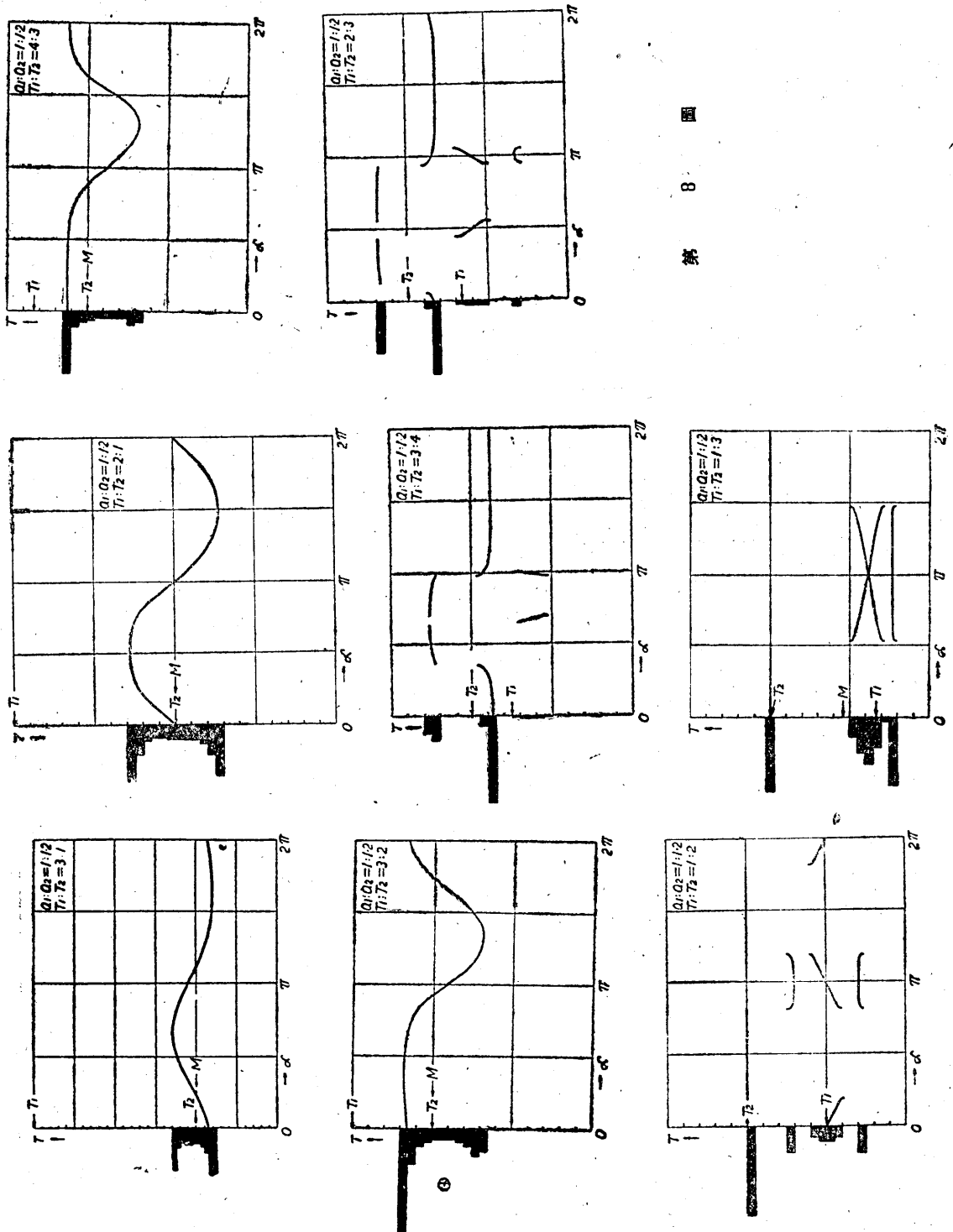
$$P(T)\Delta T \propto \Sigma\Delta\alpha_i$$

である。第6圖の曲線の傾きが緩やかなところ程、同じ ΔT に對して $\Delta\alpha$ の値は大きくなるから、その T の起る確率は大きくなる。 T 軸を適當な等間隔 ΔT に分ち、その間に含まれる ΔT に相當する $\Delta\alpha_i$ の値を測り、今度は横軸に T を、縦軸にそ

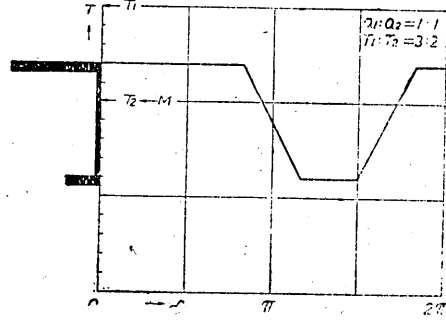
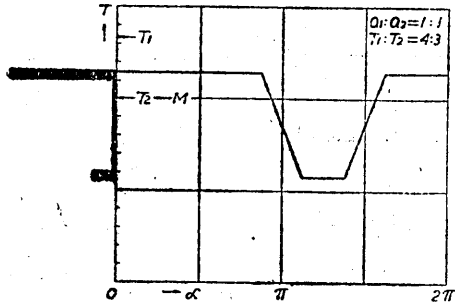
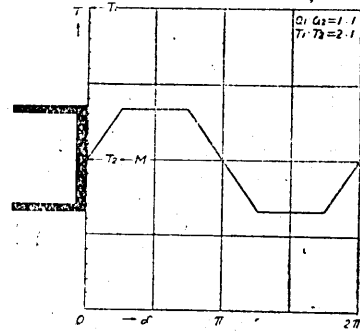
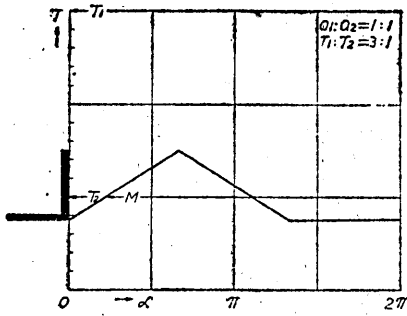


第 7 圖

Parts 1~4.] 異周期異振幅の単弦振動の重ね合せによつて生ずる見かけ上の周期について 7



第 8 圖

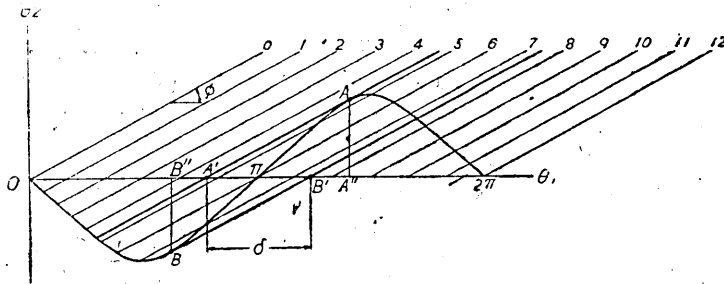


第 9 圖

Parts 1~4.] 異周期異振幅の単弦振動の重ね合せによつて生ずる見かけ上の周期について 9
 れに相當する $\sum \Delta a_i$ の値を記入すれば、起り得べき T の頻度分布圖が得られる。第
 7~9 圖は色々の $\omega_2 : \omega_1$, $a_2 : a_1$ の値につき上の作圖法によつて求めた T - α 曲線
 及び T の頻度分布圖である。 ΔT をどのような大きさに選ぶかによつて頻度圖の形は
 多少異なるが、圖では T 軸の尺度を T_1 を單位として、 $\Delta T = 0.1$ にとつてある。

上に述べた作圖は $n=0$ の曲線を軌道が切つた後に生ずる T の値を求めたのであ
 るが、この他にも $n=1$ の曲線を切つた後に生ずる T が存在する。然し、これは第
 5 圖を見れば明かなやうに、 $n=1$ の曲線に着目して同様の作圖を行つたとしても、
 全く $n=0$ の曲線について行つたと全く同じ T の分布が得られるから、 $n=0$ の曲線
 についてのみ作圖を行へば、 T の相對的頻度分布を知る限りにおいて差支へないこと
 が判る。

こゝで問題となることは、 ω_2/ω_1 の値が小さく、軌道の勾配が緩かな場合、或は
 a_1/a_2 の値が 1 に近くて曲線の山が尖つた場合には、第 10 圖のやうに、直線が $n=0$
 の曲線を何回も切ることが起る。圖で 0~4 及び 8~12 の直線は 1 回だけしか $n=0$
 の曲線を切らぬが、5, 6, 7 の直線は 3 回曲線を切つてゐる。この場合は一つの α
 の値に値して 2 つ以上の T の値を得る。即ち、 T は α の多價函數となる。第 8 圖の
 $T_1 : T_2 = 3 : 4$, $2 : 3$, $1 : 2$, $1 : 3$ 等の場合がこれに相等する。



第 10 圖

次に、軌道の延長によつて次ぎ次ぎに現れる T の系列を T としたとき平均周期
 $\frac{\sum_{i=1,2,\dots,N} T_i}{N}$ がどうなるかといふと、これは前に戻つて第 2 圖を見れば明かな通り、軌
 道が一つの曲線を 1 回のみ切る場合は軌道が $n=0$ の曲線を切つてから $n=N$ の曲
 線を切るまでに合計 $N+1$ 回の曲線を切つたことになる。その間の縦軸の値は
 $N\pi + \epsilon$ ($|\epsilon| \leq \pi$) であるから、縦軸の尺度で測つた平均周期 M は N が充分大き
 ければ、

$$M = \frac{N\pi + \epsilon}{(N+1)\pi - 1} \rightarrow 2\pi$$

従つて平均周期は N を大きくすると限りなく T_1 に近づくことが判る。直線が同じ曲線を何回も切る場合は平均周期は明かに T_1 より小さくなる。

次に、軌道が一つの曲線を1回のみしか切らぬ条件を求めてみる。曲線の切線のうち、最大の傾き ϕ を與へるものは $\theta_1 = \pi$ における切線である。軌道が何處でも同じ曲線を1回のみしか切らぬためには、第10圖を見れば明かな通り、軌道の傾きの角 ϕ が ψ よりも大であればよい。従つて、

$$\tan \phi \geq \tan \psi, \text{ 従つて, } \frac{\omega_2}{\omega_1} \geq \tan \psi$$

然るに、

$$\tan \psi = \left(\frac{d\theta_2}{d\theta_1} \right)_{\theta_1=\pi} = \left(\frac{-\frac{a_1}{a_2} \cos \theta_1}{\sqrt{1 - \left(\frac{a_1}{a_2} \right)^2 \sin^2 \theta}} \right)_{\theta_1=\pi} = \frac{a_1}{a_2}$$

であるから、

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} \geq \frac{a_1}{a_2} \quad (7)$$

即ち、

$$a_2 \omega_2 \geq a_1 \omega_1$$

即ち、軌道が同じ曲線を1回のみしか切らぬためには振幅が大きい方の振動の速度振幅も亦大である必要がある。従つて、二つの単弦振動を重ねさせたとき、一方の振動の振幅及び速度振幅が共に他のものより大であれば、合成振動の周期の平均値はこの振幅が大きい方の周期と一致すると云へる。

次に、 $\phi < \psi$ になると軌道は同じ曲線を或る所では1回、ある所では3回切ることに成り、 ϕ が更に小さくなつて或る値に達すると總ての所で同じ曲線を3回づつ切りこれより ϕ が小さくなると同じ曲線を3回又は5回切る場合を生じ、順次にこのやうにして ϕ が小さくなる程同じ曲線を切る回数が増してゆく。

このやうな場合に平均周期がどうなるかといふに、先づ軌道が同じ曲線を1回又は3回切る場合について考へると、第10圖のやうに、曲線に軌道に平行な切線 $A'A$ 、 $B'B$ を引くと、この二つの切線に挟まれた區域にある軌道5, 6, 7等は何れも3回曲線を切り、この區域外の軌道0~4, 及び8~12は何れも1回だけ曲線を切ることが判る。従つて、軌道を追跡して行つた場合に、 $\frac{\delta}{2\pi}$ の割合で3回曲線を切り、 $1 - \frac{\delta}{2\pi}$ の割合で1回曲線を切つてゆくことになる。こゝに δ は二つの切線が軸を切る點 A 及び B' の間の距離である。

従つて、軌道が0より出發して $n=N$ の曲線に至るまでに、 N 箇のうち $N \times \frac{\delta}{2\pi}$

Parts 1~4.] 異周期異振幅の単弦振動の重ね合せによつて生ずる見かけ上の周期についてII

箇の曲線を3回づつ切り, $N \times \left(1 - \frac{\pi}{2\delta}\right)$ 箇の曲線を1回だけ切る 即ち, 總計

$$3N \times \frac{\delta}{2\pi} + N \times \left(1 - \frac{\delta}{2\pi}\right) = N \left(1 + \frac{\delta}{\pi}\right)$$

回だけ曲線を切る. 故に平均周期は, θ_2 軸の尺度で測つて,

$$M = \frac{N\pi}{N \left(1 + \frac{\delta}{\pi}\right) \times \frac{1}{2}} = 2\pi \times \frac{1}{1 + \frac{\delta}{\pi}}$$

となる. 或は T_2 を標準にすれば,

$$M = T_2 \times \frac{1}{1 + \frac{\delta}{\pi}}$$

となる.

ところで切點 A の座標を (θ_1', θ_2') とすると,

$$\tan \phi = \left(\frac{d\theta_2}{d\theta_1} \right)_{\theta_1=\theta_1'}$$

従つて,

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{-\frac{a_1}{a_2} \cos \theta_1'}{\sqrt{1 - \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^2 \sin^2 \theta_1'}}$$

である. これより

$$\theta_1' = \pi + \sin^{-1} \sqrt{\frac{\left(\frac{a_1 \omega_1}{a_2 \omega_2}\right)^2 - 1}{\left(\frac{a_1 \omega_1}{a_2 \omega_2}\right)^2 - \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^2}}$$

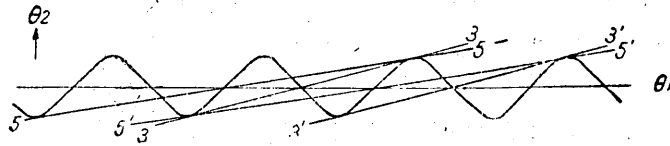
$$\theta_2' = \sin^{-1} \frac{a_1}{a_2} \sqrt{\frac{\left(\frac{a_1 \omega_1}{a_2 \omega_2}\right)^2 - 1}{\left(\frac{a_1 \omega_1}{a_2 \omega_2}\right)^2 - \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^2}}$$

を得る. そして, $\frac{\delta}{2} = \pi - \overline{OA'} = \pi - (\overline{OA''} - \overline{A'A''}) = \pi - \left(\theta_1' - \frac{\omega_1}{\omega_2} \theta_2'\right)$ であるから,

$$\frac{\delta}{2} = \frac{\omega_1}{\omega_2} \sin^{-1} \frac{a_1}{a_2} \sqrt{\frac{\left(\frac{a_1 \omega_1}{a_2 \omega_2}\right)^2 - 1}{\left(\frac{a_1 \omega_1}{a_2 \omega_2}\right)^2 - \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^2}} - \sin^{-1} \sqrt{\frac{\left(\frac{a_1 \omega_1}{a_2 \omega_2}\right)^2 - 1}{\left(\frac{a_1 \omega_1}{a_2 \omega_2}\right)^2 - \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^2}}$$

となる

$\delta = 2\pi$ になれば, 總ての所で軌道が同じ曲線を3回づつ切ることになり $M = \frac{T_2}{3}$



第 11 圖

となるが、この場合は第 11 圖のやうに、軌道 3-3, 3'-3' は曲線の 2 箇所で切することになる。このときの軌道の勾配は、圖から明かなやうに、近似的に曲線の山の高さを $\frac{3}{2}\pi$ で除したものと見做される。従つて、

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{\text{Sin}^{-1} \frac{a_1}{a_2}}{\frac{3}{2}\pi}$$

となる。總ての所で軌道が同じ曲線を 5 回づつ切る場合は、圖の 5-5, 5'-5' のやうに軌道は 2 箇所で曲線に切する。従つて、前と同様に軌道の勾配は近似的に

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{\text{Sin}^{-1} \frac{a_1}{a_2}}{\frac{5}{2}\pi}$$

となる。このとき $M = \frac{T_2}{5}$ である。全く同様にして、總ての所で軌道が同じ曲線を m 回づつ切る場合は、

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{\text{Sin}^{-1} \frac{a_1}{a_2}}{\frac{m}{2}\pi} \quad (m \text{ は奇數})$$

となる。 m が大きい程この近似は正しくなる。このとき、

$$M = \frac{T_2}{m}$$

である。然るに $T_2 = T_1 \times \frac{\omega_1}{\omega_2}$ であるから M を T_1 を標準にして表すと、

$$M = T_1 \times \frac{\frac{\pi}{2}}{\text{Sin}^{-1} \frac{a_1}{a_2}}$$

となつて、 M は m に無關係になる。このことは軌道の傾きが或る程度緩かになれば M の値は速かに

$$T_1 \times \frac{\frac{\pi}{2}}{\sin^{-1} \frac{a_1}{a_2}}$$

に近づくことを示す。

上に述べた事は、或る振動波形が零線を相次いで同一方向に過ぎる時間的間隔を以て見かけ上の周期 T とすると云ふ定義から出發した。然し、周期のとり方は必ずしもこれに限られてゐない。屢々用ひられる定義としては、相次ぐ山と山、又は谷と谷の間隔を以てするものがある。これは或る振動曲線を $y(t)=0$ で表すと山又は谷はこの曲線の極大又は極小値のところであるから、そこでは $\frac{dy}{dt}=0$ である。即ち、そこでは振動曲線を微分したものが零線を過ぎることになる。従つて、山又は谷の間の間隔を測つて T とすることは、その曲線を微分したものについて、前に述べた定義に従ひ T をきめることに他ならぬ。

§ 2 3種類の単弦振動の重ね合せによつて生ずる見かけ上の周期

3種類の単弦振動を $a_1 \sin \omega_1 t$, $a_2 \sin \omega_2 t$, $a_3 \sin \omega_3 t$ で表せば、その合成波形が零線を過ぎるときには、

$$a_1 \sin \omega_1 t + a_2 \sin \omega_2 t + a_3 \sin \omega_3 t = 0 \quad (8)$$

である。前と同様に、

$$\left. \begin{aligned} \omega_1 t &= \theta_1, \\ \omega_2 t &= \theta_2, \\ \omega_3 t &= \theta_3 \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

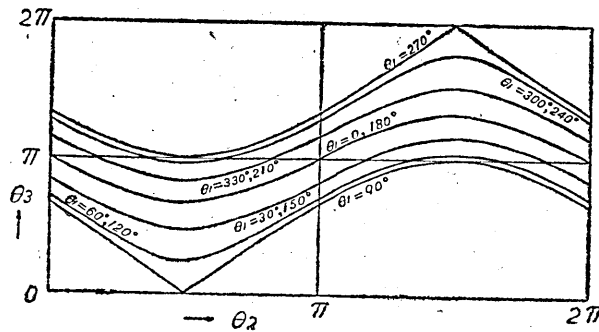
と置くと(8)は

$$a_1 \sin \theta_1 + a_2 \sin \theta_2 + a_3 \sin \theta_3 = 0 \quad (10)$$

となる。これより

$$\theta_3 = n\pi + (-1)^n \sin^{-1} \left[-\left(\frac{a_1}{a_3} \sin \theta_1 + \frac{a_2}{a_3} \sin \theta_2 \right) \right] \quad (11)$$

が得られる。こゝに n は 0 を含む正負の整数である。 \sin^{-1} は主値であつて、 $n=0$ のとき $-\frac{\pi}{2} \leq \theta_3 \leq \frac{\pi}{2}$ の制限のもとに(10)を満す値をとるものとする。(11)において、勝手な θ_1, θ_2 を與へれば θ_3 の値が定まる。一例として第12圖に、 $a_1 : a_2 : a_3 = 1 : 1 : 2$ の場合につき、 θ_1 をパラメーターとした θ_2 と θ_3 (主値) の關係を示す。いま、直角座標 $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ を考へると、(11)を満す軌跡は或る曲面を以て與へられることになる。この曲面の形は振幅の比 $a_1 : a_2 : a_3$ が與へられれば定まる。一例として、第13圖に $n=0$ に對し、 $a_1 : a_2 : a_3 = 1 : 1 : 1, 1 : 1 : 2, 1 : 1 : 3, 1 : 2 : 2$



第 12 圖

1:2:3 の場合について求めた面を示す。圖は θ_1, θ_2 平面に透影したこの面の等高線である。 $n=1$ の場合は $\theta_3=\pi$ 主値であるから、 $\theta_3=\pi$ の平面に對して $n=0$ の場合とは丁度正負符號を逆にした等高線が畫かれる。従つて、 $n=0$ と $n=1$ の面は $\theta_3=\frac{\pi}{2}$ の面に對し對稱である。 $n=2, 4, \dots$ に相等する面は $n=0$ の面と同形であり、ただ高さが異なる、同様に、 $n=3, 5, \dots$ の面は $n=1$ の面と同形で、ただ高さが異なる。このやうに2種類の面が交互に階狀に配列する。第14圖は $a_1; a_2; a_3=1:2:3$ の場合について、曲面を見取圖式に畫いたものである。

變數 $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ は t が増すにつれて増してゆくが、これはこの直角座標において一つの直線軌道を畫くことになる。この軌道の方向餘弦を λ, μ, ν とすれば、

$$\lambda:\mu:\nu = \frac{d\theta_1}{dt} : \frac{d\theta_2}{dt} : \frac{d\theta_3}{dt} = \omega_1:\omega_2:\omega_3$$

である。この軌道が(11)の面を切る時が、合成波形が零線を通るときに他ならぬ。従つて、軌道が或る一つの面を切つてから、次の面を切り、更にその次の面を切るまでの時間がこの場合の T である。即ち、一つの面から一つ置いた次の面までに至る軌道の長さを、 θ_3 に投影してその長さを θ_3 の尺度で測つた値を τ とすれば、

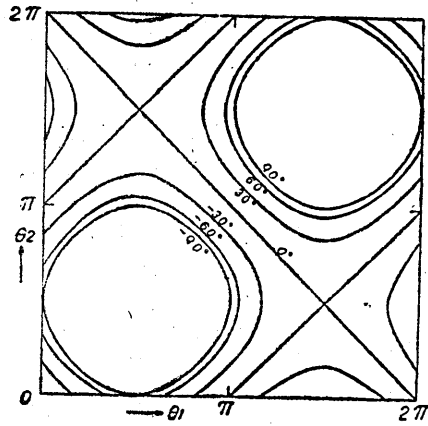
$$T = T_3 \times \frac{\tau}{2\pi}$$

である。こゝに T_3 は $a_3 \sin \omega_3 t$ の周期である。或はこの軌道の長さを直接 θ_3 の尺度で測つた値を x とすれば $\tau = x \cos \mu$ であるから

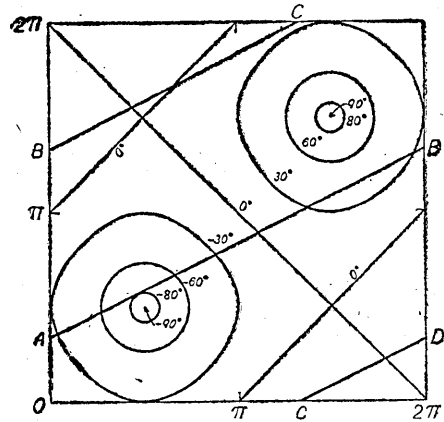
$$T = T_3 \times \frac{x \cos \mu}{2\pi}$$

である。 T の系列を求めることは、軌道に沿つて次ぎ次ぎにこの様な長さを測つてゆくことである。この軌道は時間と共に無限に延びてゆくからこのまゝでは取扱に不便であるから、前節と同様に、 $\theta_1=0, 2\pi; \theta_2=0, 2\pi; \theta_3=0, 2\pi$ の8箇の壁で圍れた

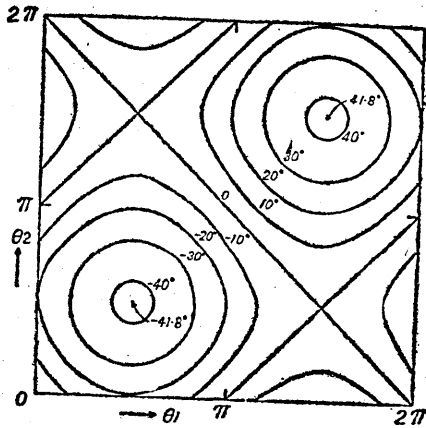
Parts 1~4.] 異周期異振幅の単弦振動の重ね合せによつて生ずる見かけ上の周期について15



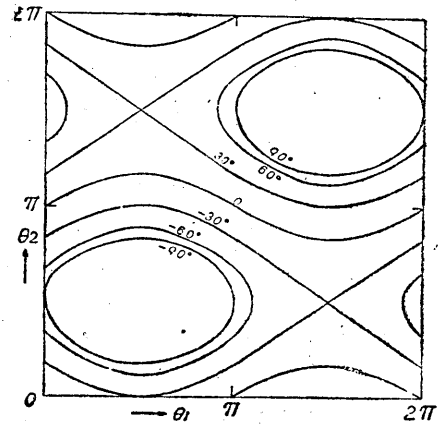
(a) $a_1 : a_2 : a_3 = 1 : 1 : 1$



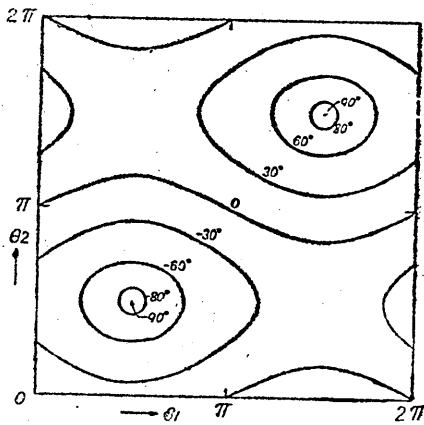
(b) $a_1 : a_2 : a_3 = 1 : 1 : 2$



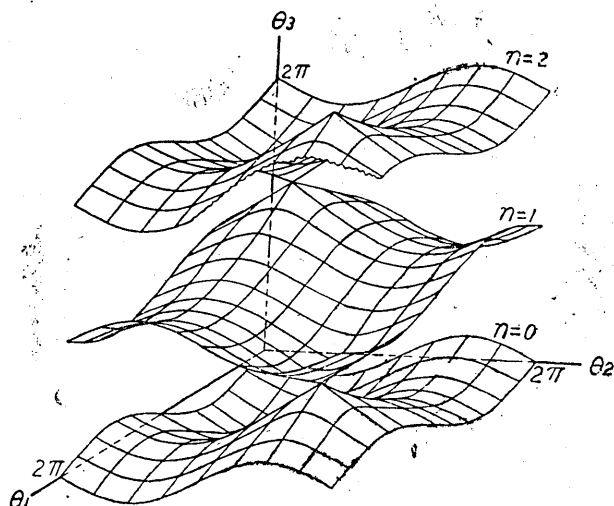
(c) $a_1 : a_2 : a_3 = 1 : 1 : 3$



(d) $a_1 : a_2 : a_3 = 1 : 2 : 2$



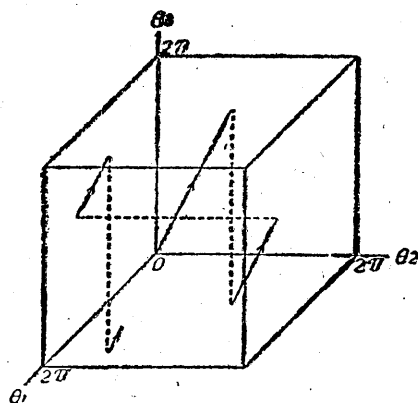
(e) $a_1 : a_2 : a_3 = 1 : 2 : 3$



第 14 圖

立方體の中の軌道群に置代へる。即ち、第 15 圖のやうに 0 より出發して或る壁に突當つたら、その向ひ側の壁に垂線を下し、そこから再び同じ方向に出發してゆくと云ふ方法を繰してゆくのである。 $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ は各 2π の周期性を持つてゐるから、このやうに軌道に向ひ側の壁に移しても、軌道をそのまま延長したと

事柄は變らない。結局、時間の経過に相當して立方體内に平行な直線軌道が何本も畫かれることになる。この場合にも、前節の平面内の軌道について述べたと同様のことが通用する。即ち、軌道の方向餘弦の比 $(\omega_1 : \omega_2 : \omega_3)$ が有理數であれば、軌道は立方體内に有限箇畫かれた後また元の軌道に立戻り、同じことを一定の周期で繰返してゆく。然し、方向餘弦の比が無理數であるときは、軌道は永久に同じ軌道に立歸ることはなく、終に軌道は立方體内の隅々まで行渡りこの中を等密度で埋盡するに至る。このやうに、軌道が一様分布性を持つためには、方向餘弦の比が無理數であるこ

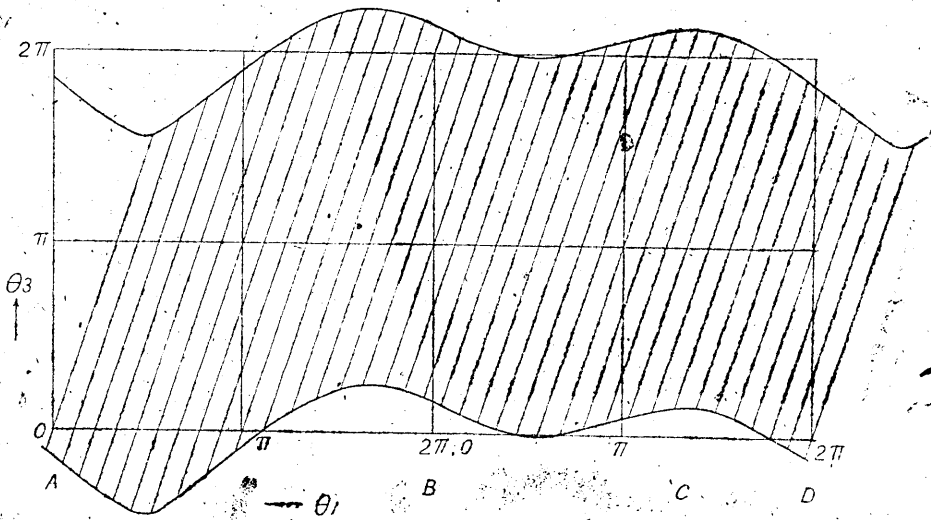


第 15 圖

とを必要とするが、或る軌道の勾配を勝手に選んだとき、その方向餘弦の比が有理數である確率は零と見做されるから、軌道の勾配が如何なる場合でも時間さへ大きくとれば一様分布性を持つと云つて差支へないのである。従つて、現在の場合は立方體内に適當な間隔で等密度に軌道を畫き、その軌道が曲面を切る模様を調べれば、時間を限りなく大きく取つたときの T の分布を知ることができる。これは一つの立體圖學

の問題に歸する。

實際の作圖は例へば、 $a_1 : a_2 : a_3 = 1 : 1 : 2$, $\omega_1 : \omega_2 : \omega_3 = 2 : 1 : 6$ の場合について説明すると次のやうになる。一つの軌道を含む立平面 (θ_3 軸に平行な面) によつて立方體を切つたと考へると、その水平面 (θ_1, θ_2 平面) における切口は第 13 圖(b)の A-B の如くなる。この圖で A-B の θ_1 軸に對する勾配は ω_2/ω_1 である。A-B の延長は B-C, C-D である。この立平面による曲面の切口を $\theta_1-\theta_3$ 平面に投影したものは、第 16 圖のやうな曲線になる。この圖は第 13 圖より容易に求めることができる。即ち、



第 16 圖

第 13 圖において A-B と曲面の或る等高線との交點に着目し、その θ_1 の値と標高とを讀取り、これを横軸に θ_1 、縦軸に標高を取つてプロットすればよい。(立平面による曲面の切口そのものを作つてもよいが、上のやうにした方が作圖の手数が少ない。) ところで、立平面 A-B, B-C, C-D 内に含まれる軌道を、同じくこの $\theta_1-\theta_3$ 平面へ投影すると平行な直線群となつて現れ、その θ_1 軸に對する勾配は ω_3/ω_1 である。この投影された曲面の切口と軌道について、前章の第 5 圖で行つたと同じ同じやうな方法を行へば、これだけの軌道に關する T の分布を知ることができる。即ち、軌道が $n=0$ の曲面の切口を示す曲線を切つてから、 $n=2$ の曲面の切口を示す曲線に到るまでの長さを θ_3 の尺度で測つた長さを τ とすれば、

$$T = T_3 \times \frac{\tau \cos \alpha}{2\pi}$$

である。こゝに α は投影された軌道と θ_3 軸との間の角であつて、 $\tan \alpha = \omega_1/\omega_3$ である。以上は立方體を軌道を含む一つの立平面で切つた場合であるから、このやうな立平面を適當な等間隔に何枚も考へ、總ての軌道を含ませ、各の立平面について前と同じことを行へば、結局軌道を無限に延長したときの T の分布が求められる。こゝで立方體内の軌道が θ_1, θ_2 平面を過ぎる點の座標を (θ_1, θ_2) とすれば、 (θ_1, θ_2) によつてどの軌道であるかを指定することができる。即ち、 $\theta_1=0, 2\pi$; $\theta_2=0, 2\pi$ の直線で圍まれる正方形内の點と立方體内の軌道とは1對1に對應する。そして、軌道が同一曲面を引續いて1回以上切ることがなければ、一つの軌道に對應して一つの T が存在することになる。第17圖はこのやうな作圖によつて求めた T の分布を θ_1, θ_2 平面に記入し、その等値線を畫いたものである。

軌道を無限に延長したときに、或る特別の T と云ふ周期が現れる確率を $P(T)$ とすれば、 T と $T+\Delta T$ との間にある周期が現れる確率は $P(T)\Delta T$ である。いま、上の圖で T を示す等値線と $T+\Delta T$ を示す等値線との間に圍まれた面積を測り、これを ΔS とすれば、

$$P(T)\Delta T \propto \Delta S$$

である。實際には、等値線間の面積をプランメーターで、又は紙に形を畫いて切抜きその目方を測る方法で測定する。このやうにすれば起り得べき T の頻度を知ることができる。第18圖は T_3 を標準にして $\Delta T = 0.05 \times T_3$ とした場合の T の頻度分布圖である。

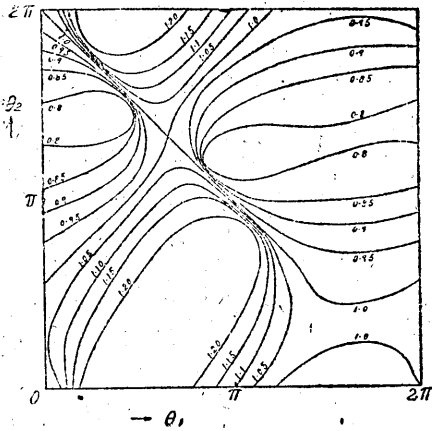
以上は、軌道を追跡して行つたときに、同一曲面を必ず1回切り且つそれ以上は切らぬ場合を考へた。然し、曲面の凹凸が比較的急である場合、軌道の傾きが比較緩かである場合には軌道が同一曲面を3回切る場合が起る。更に甚だしい場合は同一曲面を切る回数が5回、7回と云ふ場合も起り得る。そして例へば、或る部分で同一曲面を3回切るやうな場合は、立方體内の1箇の軌道に對應して3箇の T が存在することになる。即ち、軌道を座標 (θ_1, θ_2) にて指定すると、 $\theta_1-\theta_2$ 平面の或る領域において T は θ_1, θ_2 の3價函数になる。第17圖 d は $a_1:a_2:a_3=1:1:2$, $\omega_1:\omega_2:\omega_3=3:2:1$ の場合につき T の分布を $\theta_1-\theta_2$ 平面に記入したもので、平面のある領域では T の値が3種ある。圖で数字に *, ** の印をつけて3種の値を區別してある。この場合の T の頻度分布圖は第18圖 d に示してある。

軌道を無限に追跡したとき、何處でも同一曲面を必ず1回切り、それ以上は切らぬ場合は、 $n=1$ の面を切つてから $n=N$ の面を切るまでに丁度 N 回だけ曲面を切ることになるから、平均周期 M は

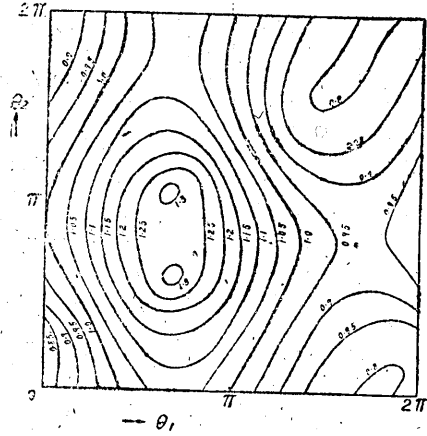
Parts 1~4.] 異周期異振幅の単振動の重ね合せによつて生ずる見かけ上の周期について19

$$M = \frac{N\pi}{N} \times \frac{T_3}{2\pi} = T_3$$

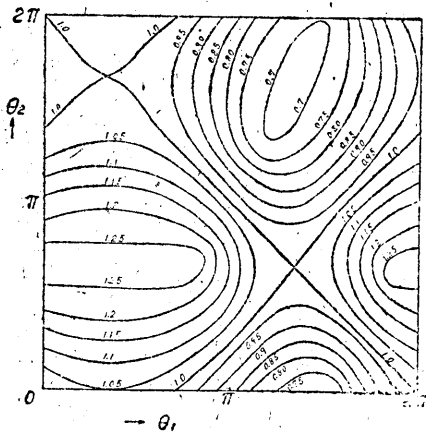
となる。



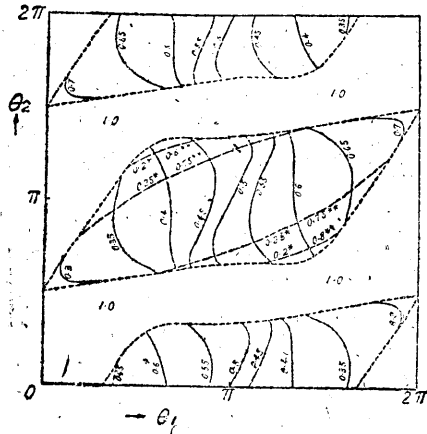
(a) $a_1 : a_2 : a_3 = 1 : 1 : 2$
 $\omega_1 : \omega_2 : \omega_3 = 4 : 2 : 3$
 $T_1 : T_2 : T_3 = 3 : 6 : 4$



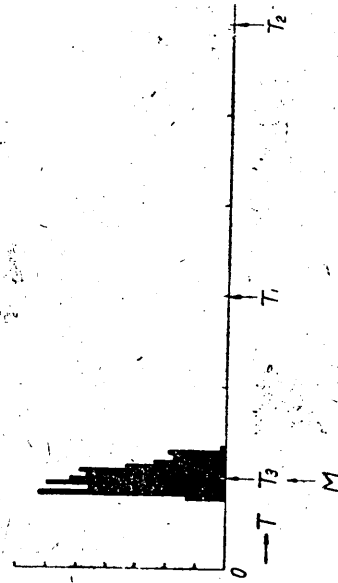
(b) $a_1 : a_2 : a_3 = 1 : 1 : 2$
 $\omega_1 : \omega_2 : \omega_3 = 2 : 1 : 6$
 $T_1 : T_2 : T_3 = 3 : 6 : 1$



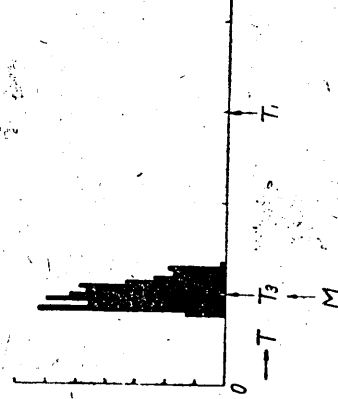
(c) $a_1 : a_2 : a_3 = 1 : 1 : 2$
 $\omega_1 : \omega_2 : \omega_3 = 2 : 1 : 3$
 $T_1 : T_2 : T_3 = 3 : 6 : 2$



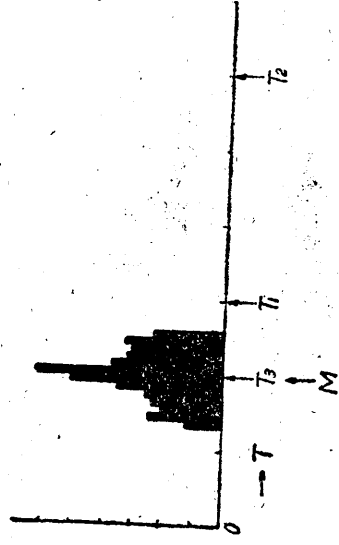
(d) $a_1 : a_2 : a_3 = 1 : 1 : 2$
 $\omega_1 : \omega_2 : \omega_3 = 3 : 2 : 1$
 $T_1 : T_2 : T_3 = 2 : 3 : 6$



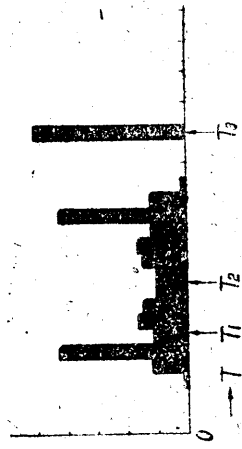
(a)
 $a_1 : a_2 : a_3 = 1 : 1 : 2$
 $\omega_1 : \omega_2 : \omega_3 = 4 : 2 : 3$
 $T_1 : T_2 : T_3 = 3 : 6 : 4$



(b)
 $a_1 : a_2 : a_3 = 4 : 1 : 2$
 $\omega_1 : \omega_2 : \omega_3 = 2 : 1 : 6$
 $T_1 : T_2 : T_3 = 3 : 6 : 1$



(c)
 $a_1 : a_2 : a_3 = 1 : 1 : 2$
 $\omega_1 : \omega_2 : \omega_3 = 2 : 1 : 3$
 $T_1 : T_2 : T_3 = 3 : 6 : 2$



(d)
 $a_1 : a_2 : a_3 = 1 : 1 : 2$
 $\omega_1 : \omega_2 : \omega_3 = 3 : 2 : 1$
 $T_1 : T_2 : T_3 = 2 : 3 : 6$

軌道が同一曲面を必ず 1 回切るためには、曲面が水平方向に連続的に擴つてゐる必要がある。これには如何なる θ_1, θ_2 の値に對しても (11) の θ_3 の値が存在すれば良い。このためには、

$$\frac{a_1}{a_3} + \frac{a_2}{a_3} \leq 1, \text{ 即ち } a_1 + a_2 \leq a_3 \quad (12)$$

ならばよい。また、同一曲面を 1 回以上切らぬためには、軌道を含む立平面内において曲面に引いた切線の傾き ($\theta_1-\theta_2$ 平面に對する傾き) を ψ , 軌道の傾きを ϕ としたとき、至るところで、 $\phi \geq \psi$ であればよい。いま、曲面上に一點 ($\theta_1, \theta_2, \theta_3$) を考へ、この點を通る軌道に沿つて dt 時間だけ進むと、座標の變化は

$$\left. \begin{aligned} d\theta_1 &= \omega_1 dt \\ d\theta_2 &= \omega_2 dt \\ d\theta_3 &= \omega_3 dt \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

である。一方、この點を通る軌道を含む立平面で曲面を切りこの切口に沿つて進むと水平面における座標變化 $d\theta_1, d\theta_2$ に對する θ_3 の座標變化 $d\theta_3'$ は

$$\begin{aligned} d\theta_3' &= \frac{\partial \theta_3}{\partial \theta_1} d\theta_1 + \frac{\partial \theta_3}{\partial \theta_2} d\theta_2 \\ &= \frac{-\left(\frac{a_1}{a_3} \cos \theta_1 d\theta_1 + \frac{a_2}{a_3} \cos \theta_2 d\theta_2\right)}{\sqrt{1 - \left(\frac{a_1}{a_3} \sin \theta_1 + \frac{a_2}{a_3} \sin \theta_2\right)^2}} \\ &= \frac{-\left(\frac{a_1}{a_3} \omega_1 \cos \theta_1 + \frac{a_2}{a_3} \omega_2 \cos \theta_2\right) dt}{\sqrt{1 - \left(\frac{a_1}{a_3} \sin \theta_1 + \frac{a_2}{a_3} \sin \theta_2\right)^2}} \end{aligned} \quad (14)$$

となる。 $\phi \geq \psi$ であるためには、 θ_1, θ_2 の如何なる値に對しても、

$$d\theta_3 \geq d\theta_3'$$

即ち、

$$\omega_3 \geq \frac{-\left(\frac{a_1}{a_3} \omega_1 \cos \theta_1 + \frac{a_2}{a_3} \omega_2 \cos \theta_2\right)}{\sqrt{1 - \left(\frac{a_1}{a_3} \sin \theta_1 + \frac{a_2}{a_3} \sin \theta_2\right)^2}}$$

即ち、

$$\frac{-\left(\frac{a_1 \omega_1}{a_3 \omega_3} \cos \theta_1 + \frac{a_2 \omega_2}{a_3 \omega_3} \cos \theta_2\right)}{\sqrt{1 - \left(\frac{a_1}{a_3} \sin \theta_1 + \frac{a_2}{a_3} \sin \theta_2\right)^2}} \leq 1 \quad (15)$$

であればよい。即ち、3種の振動の振幅及び速度振幅の關係が(12)及び(15)を滿せば平均周期は T_0 となる。(15)はこれ以上簡単な形に表すことは出来ないので實際には數値計算できめる他はないやうである。

結 語

以上のやうに、2種類又は3種類の單弦振動の重ね合せの結果から見ると、所謂卓越周期と云ふものは特別な場合を除いては存在周期を與へない。合成振動の周期の頻度圖を作つた場合に、實際には存在しない思ひがけない周期の所に相當大きな頻度が現れることがある。

本文は實在する周期の檢出に頻度圖の方法を用ひることの危險性を示すものであるが、然らばこれに代つて如何なる方法をとるべきかには觸れてゐない。この方法についてはなほ將來に問題が残されてゐる。

I. On the Periods of the Vibration that is produced by Superposing Several Simple Harmonic Vibrations of Different Period and Amplitude.

By

Takahiro HAGIWARA,

Earthquake Research Institute.

The theoretical investigation was done for the periods that appear when two or three simple harmonic motions were superposed.

The calculations were made with a graphical method, and the frequencies of occurrence of the periods were found thereby.