10. 地殼潮汐及び緯度變化について*

地球物理學教室　竹　内　均

（昭和19年3月14日發表——昭和19年6月26日受理）

§ 序　論

地球內部における地震波傳播速度の研究は地球の內部構造を知る上にこの上ない手がかりである．この方向に沿つての研究の中 K. Bullen が 1936 年におこなつた地球の內部の密度分布に關する研究[1]は極めて重要なものであつた．

それは 1935 年の B. Gutenberg によつて定められた地球內部の地震波速度分布[2]を利用して密度分布に關する最も信頼するに足る數値を與へた．この密度分布に關してはその後 F. Birch[3] が有限變位の彈性理論からその物理的根據とも言ふべきものを與へた．

筆者のこの論文もまたこの線に沿つたものである．Bullen の密度分布と Gutenberg の S波の速度分布を組合せれば吾々は地球內部における剛性率分布に關する手がかりを得るわけであるが，この剛性率分布と Bullen の密度分布を持つた地球の模型に潮汐力が働いた場合の緯度變化地殼潮汐を計算して見ようと言ふのである．從來地球の剛性に關する研究はこの二つの方面からの研究と地震波速度の方面からの研究とが全く無關係に行はれてきたのであつた．即ち地震波速度の研究から核中における剛性率が零である事が結論されるとしてもこれが果して緯度變化の週期や地殼潮汐力の縮小率（Diminishing factor）に關する吾人の知識と相融合するものであるかどうかと言ふ事も A. Prey の近似的な計算[4]を除いては嘗て行はれなかつたのである．

とに角上に述べた緯度變化の週期や地殼潮汐の縮小率に關する計算結果が實測と一致するとすれば吾々は Bullen の密度分布を再び確め得る一方，地球內部における剛性率分布に關してもかなり信頼出來る知識を得る事にならう．そして結論を先に言へば實際その通りの事が計算出來たのである．

§ 數　學

地球に働く潮汐力のポテンシャルを W とする．この潮汐力のために元來 V_0 であ

---

* 坪井所員紹介

1） K. Bullen, *Mon. Not. Roy. Astro. Soc. Geophys. Suppl.*, **3** (1936), 395－401

2） B. Gutenberg, *Gerl. Beitr. z. Geophysik*, **45** (1935), 280－360.

3） F. Birch, *Bull. Seis. Soc. Amer.*, **29** (1939), 463－479.

4） A. Prey, *Gerl. Beitr. z. Geophysik*, **23** (1929), 379－429.

つた地球自身のポテンシヤルが V だけ變化して V_0+V になり，また半徑方向に U の變位も行つたとする．結局全體のポテンシヤルは

$$R=V_0+U\frac{\partial V_0}{\partial r}+V+W$$

になる．通常行ふ樣に

$$U=h\frac{W}{g}, \quad V=kW \qquad \cdots\cdots\cdots(1)$$

によつて2量，h, k を導入すれば

$$R=V_0+W(1+k-h)$$

になる．

$$\gamma=1+k-h \qquad \cdots\cdots\cdots(1')$$

が所謂縮小率である．

さて Schweyder によつて地球は縮まない完全彈性球であり密度及び剛性率が中心からの距離のみの函數であると言ふ假定の下に次の樣な微分方程式が導かれた[5]．それは今 P_n を n 位の體球函數とし

$$W=\Sigma W_nP_n, \quad U\gamma=\Sigma k_nP_n, \quad V=\Sigma k_nP_n \qquad \cdots\cdots\cdots(2)$$

とするとき

$$D\left[\frac{a}{\rho'}\left\{D[\mu D(h_n)]\right\}\right]-2D\left[\frac{\mu'}{\rho'}D(h_n)\right]$$
$$-2D\left\{\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{\mu'}{a}\right)\frac{an^2}{\rho'}\frac{\partial}{\partial a}\left(a^{1-n^2}h_n\right)\right\}$$
$$=n(n+1)r_0^4D\left(\frac{aFh_n}{\rho'}\right)-4\pi k^2n(n+1)r_0^2\frac{\rho'}{a}h_n \qquad \cdots\cdot(3)$$

なる式である．こゝに $a=\frac{r}{r_0}$，r_0 は地球の半徑，r はある點の地球の中心からの距離，k^2 は萬有引力常數，ρ μ は夫々點 (r) における密度，剛性率であり

$$\rho'=\frac{\partial\rho}{\partial a}, \qquad \mu'=\frac{\partial\mu}{\partial a}$$

F は

$$F=-\frac{1}{r^2}\frac{\partial\rho}{\rho r}\frac{\partial V_0}{\partial r}$$

D は

$$D=\frac{\partial^2}{\partial a^2}+\frac{21n+11}{a}\frac{\partial}{\partial a}$$

なる二階の微分演算子である．上の微分方程式は h_n に關する六階の微分方程式であ

5）例へば B. Gutenberg, *Handbuch der Geophysik; Bd* II. *P* 484.

る．上の微分方程式は數値的になら一般の剛性率密度分布に關して解く事が出來るがこゝでは次の方法によつた．先づ地球を深さ 2900 km の層によつて二つの部分に分つ．Bullen の密度分布及びそれから計算された剛性率分布をみると(6) この二つの部分において各々の分布が殆んど拋物線的であるから

$$\begin{aligned}\rho&=\rho_0\,(1-\theta a^2)\\ \mu&=\mu_0\,(1-\eta a^2)\end{aligned}\qquad\cdots\cdots\cdots(4)$$

と置いて上の微分方程式を整理すると

$$DD\Big[(1-\eta a^2)\;D(h_n)+4\eta h_n\Big]$$

$$=\frac{2\rho_0\beta n(n+1)r_0^4}{\mu_0}D\,(Fh_n)-16k^2\frac{n(n+1)r_0^2\beta^2\rho_0^2}{\mu_0}h_n\ \cdots\cdots(5)$$

$D(Fh_n)$ の形ももう少し變形出來るがそれは核內及び核外に對して違つた形を取るからこゝではこのまゝにして置く．たゞ D なる微分演算子の定義により

$$D(Fh_n)=h_nDF+FDh_n+2\frac{dF}{da}\;\frac{dh_n}{da}$$

なる形になる事に注意して置く．また以下に問題になるのは $n=2$ の場合であるから以下 $n=2$ として進んで行く．

以上で基本の微分方程式は出來たのであるが境界條件を考へる必要上變位及び壓力に關する式を導いておかねばならぬ．空間に固定した x, y, z 座標系における變位及び壓力の成分を夫々 u, v, w : s_x, s_y, s_z とすると

$$\begin{matrix}u\\ v\\ w\end{matrix}=u_2(a)\begin{matrix}x\\ y\\ z\end{matrix}P_2+\overline{u_2(a)}\begin{matrix}\frac{\partial}{\partial x}\\ \frac{\partial}{\partial y}\\ \frac{\partial}{\partial z}\end{matrix}P_2\qquad\cdots\cdots\cdots(6)$$

$$\begin{matrix}s_x\\ s_y\\ s_z\end{matrix}=\frac{s_2(a)}{r_0a}\begin{matrix}x\\ y\\ z\end{matrix}P_2+\frac{\overline{s_2(a)}}{6}\begin{matrix}\frac{\partial}{\partial x}\\ \frac{\partial}{\partial y}\\ \frac{\partial}{\partial z}\end{matrix}P_2\qquad\cdots\cdots\cdots(7)$$

の形で表す事が出來る．こゝに P_2 は體球函數で $u_2(a)$, $\overline{u_2(a)}$, $s_2(a)$, $\overline{s_2(a)}$ が新しく導入された函數である．長い計算の後それ等の各々次の形を取る事が證明出來る

6） 例へば坪井忠二　地球物理學(下)（岩波講座）P 148 及び P 154.

$$u_2(a) = -\frac{1}{3r_0^2 a}\frac{dh_2}{da} \qquad \cdots\cdots\cdots(8)$$

$$\overline{u_2(a)} = \frac{h_2}{2} + \frac{a}{6}\frac{dh_2}{da} \qquad \cdots\cdots\cdots(9)$$

$$s_2(a) = \frac{\rho g}{r_0 a}h_2 - p_2(a) + \frac{\mu}{3r_0^2}\left(\frac{2}{a}\frac{dh_2}{da} - \frac{d^2h_2}{da^2}\right) \cdots\cdots\cdots(10)$$

$$\overline{s_2(a)} = 6h_2 + 4a\frac{dh_2}{da} + a^2\frac{d^2h_2}{da^2} \qquad \cdots\cdots\cdots(11)$$

こゝに $p_2(a)$ は體球函數 P_2 とは違つて次の樣な函數である．

$$6r_0^2 p_2 = 6r_0^2\rho(k_2+\omega_2) + a^{-2}\frac{d}{da}(a^3\mu Dh_2) - 2\mu' a^3\frac{d}{da}(a^{-3}h_2) \qquad \cdots\cdots\cdots(12)$$

こゝにあらはれた k_2, ω_2 は (2) によつて定義された函數で ω_2 は所與のもの，k_2 は今の場合次の樣に h_2 で表す事が出來る．

$$k_2 = \frac{4\pi k^2}{5}\left\{\frac{1}{r^5}\int_o^r \rho d(r^5 q_2) + \int_r^{r_o}\rho dh_2\right\} \qquad \cdots\cdots\cdots(13)$$

(3) の k_2 を (12) に代入してその (12) の p_2 を (10) に代入すれば u_2, $\overline{u_2}$, s_2, $\overline{s_2}$ が h_2 のみで表される．從つて (6) (7) により變位及び壓力がすべてで表される事になる．

上の結果を用ひて境界條件を考へてみる．先づ核との境でその内外の變位及び壓力が連續でなければならぬ．そのためにはそこでの u_2, $\overline{u_2}$, s_2, $\overline{s_2}$ が連續であればよい更に (8) (9) (11) の式を見れば u_2, $\overline{u_2}$, $\overline{s_2}$ が連續なるためには h_2, $\frac{dh_2}{da}$, $\frac{d^2h_2}{da^2}$ が連續であればよい事になる．故に結局核との境では h_2, $\frac{dh_2}{da}$, $\frac{d^2h_2}{da^2}$; s_2 が連續であればよい事になる．表面は自由であるからそこでの s_2, $\overline{s_2}$ は零でなければならぬ．

結局問題は (5) の微分方程式を上の樣な條件の下で解く事に歸したのであるが，例へば表面で $s_2=0$ なる條件をみると (12) (13) からも分る通り之は未知函數を含む積分になる．この樣な複雜な境界條件であるから到底普通の方法では解けさうにない．この困難は次の樣に數値積分の方法によつて容易に切り拔ける事が出來る．この場合用ひた數學的手段は他の同樣な問題にも使用出來ると思ふので以下少しく詳細に書いて行かう，

§ 數値計算 (一)

先づ Bullen の密度分布剛性率分布の 100km 毎の値に最小自乘法を施して次の値を得る．

核内の密度分布

$$\rho=\rho_{0\cdot k}(1-\theta_k a^2)$$
$$\rho_{0\cdot k}=12.284 \qquad \theta_k=0.64061 \qquad \cdots\cdots(14)$$

核内の剛性率は零である.

核外の密度分布

$$\rho=\rho_{0\cdot m}(1-\theta_m a^2)$$
$$\rho_{0\cdot m}=6.3659 \qquad \theta_m=0.48424 \qquad \cdots\cdots(15)$$

核外の剛性分布

$$\mu=\mu_{0\cdot m}(1-\eta_m a^2)$$
$$\mu_{0\cdot m}=4.4919\times10^{12} \qquad \eta_m=0.89134 \qquad \cdots\cdots(16)$$

核内においては剛性率が零であるので微分方程式は次の様な二階の形になる.

$$a(a-\alpha a^2)\frac{d^2h_2}{da^2}+(6-10\alpha a_2)\frac{dh_2}{da}-4\alpha a h_2=0 \qquad \cdots\cdots(17)$$

但し $\alpha=\frac{3}{5}\theta$.

この h_2 の解を $h_2=a^m(A_0+A_1a+A_2a^2+\cdots\cdot)$ の形の羃級数で求めるとして mの決定方程式(7)を作ると $m=0$, $m=-5$ を得る. 今の場合 h_2 は $a=0$ で無限大にはならぬから $m=-5$ を捨てゝ

$$h_2=A_0+A_1a+A_2a^2+\cdots\cdots$$

の形になる.

之を (17) に代入すると A_0, $A_1\cdots\cdot$の間の關係を得る. 結果は割合に收斂の早い級數で核との境 $a=0.54474$ における h_2 の値を 1 とする 第I表の h_2 の値を得る. $a=0.54474$ における h_2 の値を β とすると表の値は全部 β 倍になり, それが (17) 式の一般解になるわけである.

第 I 表

a	h_2
0	0.96566
0.13619	0.97793
0.27237	0.98222
0.40856	0.98945
0.54474	1

尙この解析によつて $a=0.54474$ における h_2 の値を 1 とするとそこにおける $\frac{dh_2}{da}$, $\frac{d^2h_2}{da^2}$ の値は夫々 0.137773, 0.348158 である事が分る, さて前にも述べた様に $a=0.54474$ においては核の内外の h_2, h_2', h_2'' が連續であるから核外での h_2, h_2', h_2'' の $a=0.54474$ における値も同様の比をなすはずである. 數値的にこの様に選べば h_2 に課せられた 6 つの條件の中 3 つは自動的に充されるわけである. 後の 3 つすなはち $a=0.54474$ においての連續あるひは s_2 の核内の値から核外の値を減じたものを Δs_2 とすると

$$a=0.54474 \quad \text{において} \quad \Delta s_2=0$$

7） 福原滿洲男　常微分方程式の解法 II（特型の部）　P 40.

$$\alpha=1 \quad \text{において} \quad s_2=\overline{s_2}=0$$

の條件は次の如くして充させる事が出來る.

核外における h_2 の一般解は (5) の微分方程式を充して $\alpha=0.54474$ における h_2, h_2', h_2'' の比が上の比をなす様な互に線型獨立な解 I_1, I_2, I_3 の重ね合せとして表す事が出來るはずである. 例へば I_1, I_2, I_3 として次の様な函數を考へる.

$\alpha=0.54474$ において

$$h_2=1, \quad h_2'=0.137773, \quad h_2''=0.348158$$

は I_1, I_2, I_3 に共通であるが尚その他に

$$I_1 \text{ では } h_2'''=1 \quad h_2''''=h_2'''''=0$$

$$I_2 \text{ では } h_2'''=0 \quad h_2''''=1, \quad h_2'''''=0$$

$$I_3 \text{ では } h_2'''=h_2''''=0 \quad h_2'''''=1$$

核外の h_2 の一般解は之を用ひて

$$h_2=AI_1+BI_2+CI_3$$

の形に表される. こゝに A, B, C は未知常數でそれは上の三つの條件を充す如く選ぶのである.

§ 數値計算 (二)

上の様な I_1 I_2 I_3 を求める事は普通の數値積分の手續きであつてこゝでは Runge-Kutta の方法[8]によつた結果は次の如くである.

表中, $\alpha=1$ において k_2 とあるのは (13) にあらはれた函數で後の解析に必要であるのであはせしるした. この積分の計算は表中の h_2 の値を用ひて數値的に行ふ事が出來る. こゝでは Simpson の方法[9]を用ひた.

第 II 表

α	I_1	I_2	I_3
	$h_2=$		
0.54474	1	1	1
0.65856	1.01215	1.01191	1.01190
0.77237	1.02867	1.02622	1.02659
0.88619	1.05207	1.04376	1.04412
1	1.08880	1.06560	1.06478
	$k_2=$		
1	0.88011×10^{-6}	0.86754×10^{-6}	0.86720×10^{-6}

この解が出來れば之を用ひて

$$\alpha=0.54474 \quad \text{で} \quad \Delta s_2=0$$

8) 日高孝次　數値積分法 (上) P 82～97.
9) 日高孝次　數値積分法 (上) P 42～45.

$$a=1 \quad \text{で} \quad s_2=\overline{s}_2=0$$

第 III 表

Δs_2	at	$a=0.54474$	$43.931\times10^{-6}-4.46\ \omega_2$
			$43.333\times10^{-6}-4.46\ \omega_2$
			$43.334\times10^{-6}-4.46\ \omega_2$
s_2	at	$a=1$	$21.708\times10^{-6}-2.7\ \omega_2$
			$24.605\times10^{-6}-2.7\ \omega_2$
			$25.248\times10^{-6}-2.7\ \omega_2$
$\overline{s}_2$	at	$a=1$	$11.584\ \times10^{-6}$
			7.9288×10^{-6}
			7.5106×10^{-6}

を充させるには次の如くすればよい．各解に對して $a=0.54474$ における Δs_2, $a=1$ における s_2, $\overline{s}_2$ を作ると第III表の如くなる．この際 (13) 式の如き積分を必要とするのであるがこれは前にも述べた様に Simpson の方法を用ひて數値的に行つた．第III表中最初のものが I_1, 次が I_2 に最後が I_3 に對するものである．

$h_2=AI_1+BI_2+CI_3$ とした時

$$a=0.54474 \quad \text{で} \quad \Delta s_2=0$$

$$a=1 \quad \text{で} \quad s_2=\overline{s}_2=0$$

なるためには第III表より A, B, C は次の關係を充さねばならぬ,

$$43.931A+43.333B+43.334C=13.38\omega_2\times10^6$$

$$21.708A+24.605B+25.248C=8.1\omega_2\times10^6$$

$$11.584A+7.9288B+7.5106C=0$$

之から

$$A=-2.1035\times10^6\ \omega_2$$

$$B=\ 12.2657\times10^6\ \omega_2$$

$$C=-9.8239\times10^6\ \omega_2$$

を得る．

之から表面における h_2, k_2 を出すには第II表の h_2, k_2 の値に夫々 A, B, C を乘じて加へればよく結局

$$h_2=0.3197\ \omega_2\times10^6$$

$$k_2=0.2704\ \omega_2$$

となる．之から式 (1) によつて導入した h, k, γ は (1) (2) より

$$h=\frac{gh_2}{\gamma_0\omega_2} \qquad k=\frac{k_2}{\omega_2} \qquad \gamma=1+k-h$$

となるから之から

h 計算$=0.492$	k 計算$=0.270$	γ 計算$=0.778$

となる.

§ 議　論

我々の地球の模型では上の如き結果に到達したのであるが，緯度變化，地殼潮汐の實測結果からはどの様な事が期待されるであらうか．第一緯度變化の方からはその Euler 週期 $T_E=303$ 日 Chandler 週期 $T_C=428$ 日 地球の扁平率 $\varepsilon=\frac{1}{297}$ 自轉角速度 ω の二乘と半徑 r_0 の積を重力の加速度 g で除した $\frac{\omega^2 r_0}{g}=\frac{1}{289}$ として

$$k=\left(1-\frac{T_E}{T_C}\right)\left(\frac{2\varepsilon g}{\omega^2 r_0}-1\right)$$

から k を出すと

$$\boxed{k\text{ 觀測 } = 0.276}$$

となる．上の計算値の之との一致は十分である．

第二地殼潮汐に關しては海水の二次的影響を除くために志田博士の取られた方法すなはち本邦附近の同時潮圖によつて補正を加へた結果が最も信頼に値するであらう．志田博士は博士の京都における觀測値にこの補正を加へて結局純粋の地殼潮汐の縮小率に對して

$$\boxed{\gamma\text{ 觀測 } = 0.79}$$

を得られた(10)．尙最近佐々教授(11)の京都における觀測も西村氏(11)の阿蘇山における觀測も志田博士の上の値と全く一致した値を示してゐる．

そしてこの場合にも計算値の之との一致は十分である．なほ之等がやゝくひ違ふ理由については色々の原因が考へ得るが，それはもつと確實な資料を得た後の機會にゆずらう．

§ 結論及び覺書き

Bullen の密度分布及び Gutenberg の地震波速度分布から知られる內部構造を持つた地球に潮汐力が働く場合の緯度變化の週期地殼潮汐の縮小率を計算した．そして之と實測値との一致が十分なる事が見出された．かくて地震波速度分布，緯度變化，地殼潮汐の三つの方面からの研究が融合して一つの地球內部構造を暗示するにいたつたのである．この地球模型に尙幾多の力學的試験を加へる事を筆者は機會ある毎に試みてみようと思ふ．この論文は言はゞその第一章に過ぎないのである．

最後に筆者は心からの感謝を坪井忠二先生に捧げたいと思ふ．先生の絶えざる御指

(10) J. Shida, *Mem. Coll. Sci. Kyoto. I. U.*, 4 (1912). 1.
(11) 西村英一 日本學術協會報告 14 (1939) No. 3, pp. 383～384.

導御鞭韃の下にこの研究は遂行されたのである．地球物理學科の學生吉田耕造君には色々の議論の對手になつていたゞいた．坪井研究室の諸孃には計算の驗算の一節をお願ひした．あはせて感謝の意を表しておく．

---

10. *Some Problems concerning the Earth Tide and Latitude Variation.*

By Kin TAKEUTI,

Geophysical Institute.

Although the density and the rigidity distributions within the earth have been deduced from three different sources of data, —— latitude variation, earth tide and earthquake waves, —— few attempt has so far been made to see whether or not these separate results agree with each other.

In this paper, the writer has calculated what would be the latitude variation and the earth tide of that model earth whose internal constitution is such as suggested by seismic data.

Both K. Bullen's density distribution and B. Gutenberg's velocity distribution of the earthquake waves were resorted to.

The period of the latitude variation and the diminishing factor were numerically calculated for this model earth with the following results ;

period factor $k=0.270$

diminishing factor $\gamma=0.778$

which are in a satisfactory agreement with the observed facts.
