13. Über die Bewegung eines Punktsystems

von

Takeo MATUZAWA,

Institut für Erdbebenforschung.

(Vorgelegt den 6. Juli 1943.—Eingegangen den 3. Juni 1944.)

(1) *Einleitung.* Man kann die Fortpflanzung der Erdbebenwellen von vielerlei Standpunkten aus betrachten, z. B. als elastische wellen im gewöhnlichen Sinne, als Diffusion der Beweguug in zerstückelten Erdkruste,[1] oder als Übertragung der Bewegung der eingebetteten Massenpunkte durch die dazwischen liegenden Medien.[2] Es hängt natürlich von der Bedingung der betreffenden Erdkruste ab, welchen Faktor betont zu betrachten. Hier möchte ich den letzten Fall näher betrachten, und zwar ganz idealisiert.

(2) *Bewegung des n-punktsystems in einer Dimension.* Es sei, n Massenpunkte von der Masse m werden durch massenlose elastische Faden von der Länge l stuckweise verbunden, und die beiden Enden festgebunden. Setzt man die längsweise Verschiebung des i-ten Punktes gleich ξ_i, ist die Ziehungskraft des Fadens gleich

$$k\frac{\xi_{i+1}-\xi_i}{l} \quad \text{wo } k \text{ eine Konstante ist.}$$

Dann ist die kinetische Energie des Systems gleich

$$T=\frac{1}{2}m\sum_1^n \dot{\xi}_i^2,$$

und die potentielle Energie

$$U=-\frac{k}{l}\sum_1^n\int_0^{\xi_i}(\xi_{i+1}-2\xi_i+\xi_{i-1})d\xi_i=-\frac{k}{l}\sum_1^n\left(-\xi_i^2+\xi_i\xi_{i+1}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\frac{k}{l}\sum_0^n\left(\xi_{i+1}-\xi_i\right)^2, \qquad \xi_0=0, \qquad \xi_{n+1}=0.$$

Also lautet die Bewegungsgleichung des i-ten Punktes wie folgt,

$$m\frac{d^2\xi_i}{dt^2}=\frac{k}{l}(\xi_{i+1}-2\xi_i+\xi_{i-1}), \quad i=1,\ 2,\cdots\cdots\cdots n.$$

Setzt man $\xi_i=e^{ipt}A_i$ bekommt man

1) S. T. Nakamura, *Bull. Cent. Meteor. Obs. Japan* **3** (1919): M. Ishimoto, *Bull. Earth. Res. Inst.* **13** (1935), 130: K. Takahashi, *Geophys. Mag.* **11** (1938), 117.

2) K. Iida, *Bull. Earth. Res. Inst.* **17** (1939), 783.

$$A_{i+1}+(a^2-2)A_i+A_{i-1}=0, \quad i=1, 2, \cdots\cdots n, \quad A_0=0. \quad A_{n+1}=0$$

wo $\quad a^2=\dfrac{ml}{k}p^2.$

Eliminiert man die n Unbekannten A_i, dann folgt die n-reihige Determinantengleichung von $x=a^2-2$,

$$\varDelta_n=\begin{vmatrix} x & 1 & 0 & \cdots\cdots \\ 1 & x & 1 & \\ 0 & 1 & x & \\ \vdots & & & \end{vmatrix}=0$$

(3) *Die gezwungene Bewegung.* Wenn der $(n+1)$-e Punkt der Bewegung $\xi_{n+1}=A \sin\omega t$ unterliegt, dann bekommt man leicht die folgende Beziehung.

$$A_2=(2-a_0^2)A_1, \qquad A_3=\{(2-a_0^2)-1\}A_1, \quad \cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$A_i=\varDelta_{i-1}(-x_0)A_1, \quad \cdots\cdot \quad A_{n+1}=\varDelta_n(-x_0)A_1.$$

Also

$$A_1=\frac{A}{\varDelta_n(-x_0)}, \quad A_2=\frac{\varDelta_1(-x_0)}{\varDelta_n(-x_0)}A, \quad \cdots\cdot \quad A_i=\frac{\varDelta_{i-1}(-x_0)}{\varDelta_n(-x_0)}A$$

wo $\quad a_0^2=\dfrac{ml}{k}\omega^2, \qquad x_0=a_0^2-2.$

(4) *Mathematisches über $\varDelta_n$.* Diese Gleichung, ebenso wie A_i, genügt der gleichförmigen Rekursionsformel wie folgt,

$$\varDelta_n=x\varDelta_{n-1}-\varDelta_{n-2}.$$

Nach wenigen Veränderungen erhält man eine Funktion $\varDelta'_n$ mit einer Rekursionsformel $\varDelta_n'-x\varDelta'_{n-1}+\dfrac{1}{4}\varDelta_{n-2}=0$, die mit dem Tschebyscheff'schen Polynom übereinstimmt. Aber für $n\leqq 2$ fehlt die Übereinstimmung.

$\varDelta_n$ in Potenzen von x lautet

$$\varDelta_n=x^n-(n-1)x^{n-2}+\frac{(n-2)(n-3)}{1.2}x^{n-4}-\frac{(n-3)(n-4)(n-5)}{1.2.3}x^{n-6}+\cdots$$
$$+(-1)^i\binom{n-i}{i}x^{n-2i}+\cdots\cdots\cdots, \quad n\geqq 2i,$$

oder in steigenden Potenzen

$$\varDelta_{2p}=(-1)^p\Big\{1-\frac{p(p+1)}{1.2}x^2+\frac{(p-1)p(p+1)(p+2)}{1.2.3.4}x^4-\cdots\cdots$$
$$+(-1)^i\binom{p+i}{2i}x^{2i}+\cdots\cdot\Big\}, \quad i\leqq p,$$

$$\varDelta_{2p+1}=(-1)^p\Big\{(p+1)x-\frac{p(p+1)(p+2)}{1.2.3}x^3+\frac{(p-1)p(p+1)(p+2)(p+3)}{1.2.3.4.5}x^5$$
$$-\cdots\cdot+(-1)^i\binom{p+i+1}{2i+1}x^{2i+1}\cdots\cdot\Big\}, \quad i\leqq p.$$

Nach ν-maligen Iteration der Gleichung von A_i, ergibt sich

$$A_i=\Delta_\nu\ A_{i-\nu}-\Delta_{\nu-1}\ A_{i-\nu-1}$$

Für Δ_n erhält man ganz ähnlich

$$\Delta_n=\Delta_\nu\ \Delta_{n-\nu}-\Delta_{\nu-1}\ \Delta_{n-\nu-1}$$

Besonders

$$\Delta_{2\nu-1}=\Delta_\nu\Delta_{\nu-1}-\Delta_{\nu-1}\Delta_{\nu-2}=(\Delta_\nu-\Delta_{\nu-2})\Delta_{\nu-1},$$

$$\Delta_{2\nu}=\Delta_\nu\Delta_\nu-\Delta_{\nu-1}\Delta_{\nu-1}=(\Delta_\nu+\Delta_{\nu-1})(\Delta_\nu-\Delta_{\nu-1})$$

(5) *Lösung der Gleichung* $\Delta_n=0$.[1] Diese Gleichung ist eine Säkulargleichung. Der Wurzel von α^2 ist nicht anders als der Eigenwert bei der Hauptachsentransformation der Bilinear-formel

$$K(x,x)=2\sum_1^n x_i^2-2\sum_1^{n-1}x_ix_{i+1}=\sum_1^{n-1}(x_i-x_{i+1})^2+x_1^2+x_n^2.$$

Weil $K(x,x)$ positiv definit ist, sind bekanntlich die allen Eigenwerte reell.

Durch Anwendung der Maximum-minimum Eigenschaft der Eigenwerte kann man sie leicht berechnen.

Der erste Eigenwert κ_1 ist das Minimum (od. Maximum) von $K(x,x)$ unter der Nebenbedingung $\sum_1^n x_i^2=1$.

Dann lautet die Bedingung $\frac{\partial\kappa}{\partial x_i}=0$ bei der Nebenbedingung wie folgt,

$$-\frac{x_{i+1}+x_{i-1}}{x_i}+\frac{x_{\nu+1}+x_{\nu-1}}{x_\nu}=0,\quad i=1,\cdots\cdots n.$$

wo x_ν als eine unwillkürliche Veränderliche betrachtet ist.

Setzt man $x_i=a_1\sin\frac{\pi}{n+1}i$, dann

$$\sum_1^n x_i^2=\frac{a_1^2}{2}n=1.$$

Alle diese x_i genügen der Maximum-minimum Bedingung. Nach weniger Berechnung ergibt sich

$$\sum_1^{n-1}x_ix_{i+1}=\cos\frac{\pi}{n+1}$$

Also
$$\kappa_1=2\left(1-\cos\frac{\pi}{n+1}\right)$$

Der zweite Eigenwert κ_2 ist das Minimum $K(x,x)$ unter der Nebenbedingung

1) *Die Wurzel dieser Gleichung sind im „Sound Vol. 1" von Lord Rayleigh gegeben und zwar ohne Hinweis auf die Methode der Lösung.*

$$\sum_1^n x_i^2=1$$

und
$$\sum_1^n l_{1i}\, x_i=0,$$

wo
$$l_{1i}=\sin\frac{\pi}{n+1}i,$$

Die Maximum-minimum Bedingung mit der Nebenbedingung lautet

$$\begin{vmatrix} l_{1i} & l_{1\nu} & l_{1(\nu+1)} \\ x_i & x_\nu & x_{\nu+1} \\ -x_{i-1}-x_{i+1}- & x_{\nu-1}-x_{\nu+1} & -x_\nu-x_{\nu+2} \end{vmatrix}=0,\quad i=1,\ 2\cdots n,$$

$x_i=a_2\sin 2\frac{\pi}{n+1}i$ mit $\frac{a_2^2}{2}n=1$ genügt den Bedingungen. Dann bekommt man den zweiten Eigenwert wie folgt, nämlich

$$\kappa_2=2\left(1-\cos 2\frac{\pi}{n+1}\right)$$

Ähnlich kann man weiterkommen und im allgemeinen ergibt sich der ν-te Eigenwert

$$\kappa_\nu=2\left(1-\cos \nu\frac{\pi}{n+1}\right),\qquad \nu=1,\ 2,\cdots\cdots n.$$

Zu κ_ν entsprechende Eigenfunktion ist

$$\eta_{\nu i}=a_\nu\ \sin \nu\frac{\pi}{n+1}i,\qquad i=0,\ 1,\ 2,\cdots\cdots n+1.$$

Wurzel x_ν von $\varDelta_n=0$ ist natürlich gleich $-2\cos\frac{\pi}{n+1}\nu$.

Einige funktionentheoretische Überlegungen führen uns zum folgenden Resultat, das leicht verifiziert wird, nämlich

$$\varDelta_n=\prod_{\nu=1}^{n}\left(x+2\cos\frac{\pi}{n+1}\nu\right)=\frac{\sin\left\{(n+1)\cos^{-1}\frac{x}{2}\right\}}{\sin\left(\cos^{-1}\frac{x}{2}\right)}$$

Wenn man eine Funktion $M_n=\frac{\varDelta_n}{2^n}=\frac{\sin\{(n+1)\cos^{-1}y\}}{\sin(\cos^{-1}y)}$ mit $\frac{x}{2}=y$ einführt, bekommt man ein System von orthogonalen Funktionen zwischen -1 und +1 mit der Belegfunktion $\sqrt{1-y^2}$, nämlich

$$\frac{2}{\pi}\int_{-1}^{+1}\sqrt{1-y^2}\ M_n^2dy=1,\quad \int_{-1}^{+1}\sqrt{1-y^2}\ M_nM_mdy=0.$$

Nächst wollen wir den zweiten Fall der Randbedingung batrachten. Wenn an beiden Enden die Mitte des Fadens fest gehalten wird, dann ist die Potentielle Energie

$$U=\frac{k}{l}\left\{\frac{3}{2}\xi_1^2+\sum_2^{n-1}\xi_i^2+\frac{3}{2}\xi_n^2-\sum_1^{n-1}\xi_i\ \xi_{i+1}\right\}.$$

Die Gleichung der Bewegung lautet

$$m\frac{d^2\xi_1}{dt^2}=-\frac{k}{l}(3\xi_1-\xi_2),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$m\frac{d^2\xi_i}{dt^2}=-\frac{k}{l}(2\xi_i-\xi_{i+1}-\xi_{i-1}),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$m\frac{d^2\xi_n}{dt^2}=-\frac{k}{l}(3\xi_n-\xi_{n-1}).$$

Wie in § 2. gelangt man zur Säkulargleichung

$$\Delta_n=\begin{vmatrix} a^2-3 & 1 & 0\cdots\cdots & & & \\ 1 & a^2-2 & 1 & & & \\ 0 & 1 & a^2-2 & & & \vdots \\ \vdots & & & & & 0 \\ \vdots & & & & a^2-2 & 1 \\ & & \cdots 0 & & 1 & a^2-3 \end{vmatrix}=0$$

Die entsprechende Bilinearform ist dann

$$K(x,\ x)=3x_1^2+2\sum_2^{n-1}x_i^2+3x_n^2-2\sum_1^{n-1}x_i\,x_{i+1}$$

Die Minimum Bedingung von $K(x,\ x)$ bei $\sum\limits_1^n x_i^2=1$ lautet

$$\frac{x_1-x_2}{x_1}+\frac{x_{\nu-1}+x_{\nu+1}}{x_\nu}=0.$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$-\frac{x_{i+1}+x_{i-1}}{x_i}+\frac{x_{\nu+1}+x_{\nu-1}}{x_\nu}=0.$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{x_n-x_{n-1}}{x_n}+\frac{x_{\nu+1}+x_{\nu-1}}{x_\nu}=0,$$

$x_i=\alpha_1\sin\frac{\pi}{n}\left(i-\frac{1}{2}\right)$ mit $\frac{\alpha_1^2}{2}n=1$ genügt den Bedingungen.

Ebenso wie früher gelangt man zum ersten Eigenwert

$$\kappa_1=2\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right),$$

und im allgemeinen

$$\kappa_\nu=2\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\nu\right),\quad \nu=1,\ 2,\cdots\cdots n.$$

Die κ_ν entsprechende Eigenfunktion ist

$$\eta_{\nu i}=\alpha_\nu\sin\nu\frac{\pi}{n}\left(i-\frac{1}{2}\right),\qquad i=1,\cdots\cdots n.$$

Setzt man $x=a^2-2$, dann

$$\Delta_n=\prod_{\nu=1}^{n}\left(x+2\cos\frac{\pi}{n}\nu\right)=\frac{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}{\sqrt{1+\frac{x}{2}}}\sin\left(n\cos^{-1}\frac{x}{2}\right)$$

An einem Ende wird ein Punkt festgehalten und an dem anderen Ende wird die Mitte der zweier Punkte gehalten, dann lautet die Gleichung der Bewegung und der Potentielle Energie

$$m\frac{d^2\xi_i}{dt^2}=\frac{k}{l}(\xi_{i+1}-2\xi_i+\xi_{i-1}),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$m\frac{d^2\xi_n}{dt^2}=\frac{k}{l}(-3\xi_n+\xi_{n-1}).$$

und

$$U=\frac{k}{l}\left(\sum_1^{n-1}\xi_i^2+\frac{3}{2}\xi_n^2-\sum_1^{n-1}\xi_i\xi_{i+1}\right)$$

Die entsprechende Säkulargleichung ist

$$\Delta_n=\begin{vmatrix} a^2-2 & 1 & 0\cdots\cdots & & \\ 1 & a^2-2 & 1 & & \\ 0 & 1 & a^2-2 & & \vdots \\ \vdots & & & & \\ & & & a^2-2 & 1 \\ & & & \cdots 1 & a^2-3 \end{vmatrix}=0$$

Die Eigenwerte lauten

$$\kappa_\nu=2\left(1-\cos\frac{\pi}{n+\frac{1}{2}}\nu\right),\quad \nu=1,\ 2,\cdots\cdots n$$

Und die entsprechenden Eigenfunktionen sind

$$\eta_{\nu i}=a_\nu\ \sin\ \nu\frac{\pi}{n+\frac{1}{2}}i.$$

(6) *Spezielle Fälle.* Nun wollen wir die Fortpflanzung der Wellenform in fast unendlichen Reihen solches Punktsystems betrachten.

Fall i. Zwei Punkte formen eine Welle.

In $A_{i+1}+(a^2-2)A_i+A_{i-1}=0$, Kann man setzen

$$A_{i+\nu}=(-1)^\nu A,\qquad \text{mit } a^2=4.$$

Dieser Fall entspricht dem Eigenwert $\kappa_1=2(1-\cos\pi)=4$ für einen Punkt in § 5. Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit ist dann

$$V=\frac{2l}{T}=\frac{2}{\pi}\sqrt{\frac{kl}{m}}$$

Fall ii. Vier Punkte formen eine Welle.

Hier genügen $A_i=(\sqrt{-1})^i A$ mit $\alpha^2=2$ der Gleichung. Dieser Fall entspricht dem Eigenwert $\kappa_1=2\left(1-\cos\frac{\pi}{2}\right)=2.$

Die Geschwindigkeit ist dann

$$V=\frac{4l}{T}=\frac{2\sqrt{2}}{\pi}\sqrt{\frac{kl}{m}}.$$

Fall iii. Acht Punkte bilden eine Welle.

Vom § 3

$$A_{i+8}=\varDelta_8 A_i-\varDelta_7 A_{i-1},$$
$$A_{i+4}=\varDelta_4 A_i-\varDelta_3 A_{i-1}.$$

Hier muss man setzen $A_{i+8}=A_i$, $A_{i+4}=-A_i$.

Diese Bedingungen werden immer befriedigt mit $x=\sqrt{2}$ bezw.

$$\alpha^2=2-\sqrt{2}.$$

Dieser Fall entspricht dem Eigenwert $\kappa_1=2\left(1-\cos\frac{\pi}{4}\right)=2-\sqrt{2}.$

Die Geschwindigkeit ist

$$V=\frac{8l}{T}=\frac{4\sqrt{2-\sqrt{2}}}{\pi}\sqrt{\frac{kl}{m}}=\frac{3.063}{\pi}\sqrt{\frac{kl}{m}}$$

Fall iv. Sechzehn Punkte bilden eine Welle.

In

$$A_{i+16}=\varDelta_{16} A_i-\varDelta_{15} A_{i-1},$$
$$A_{i+8}=\varDelta_8 A_i-\varDelta_7 A_{i-1},$$

muss man setzen $A_{i+16}=A_i$, $A_{i+8}=-A_i$.

Diese Bedingungen werden immer befriedigt mit $x^2=2+\sqrt{2}$ bezw.

$$\alpha^2=2-\sqrt{2+\sqrt{2}}$$

Dieser Fall entspricht dem Eigenwert $\kappa_1=2\left(1-\cos\frac{\pi}{8}\right).$

Die Geschwindigkeit ist

$$V=\frac{16l}{T}=\frac{8\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{\pi}\sqrt{\frac{kl}{m}}=\frac{3.13}{\pi}\sqrt{\frac{kl}{m}}$$

Es scheint also, dass sich die Geschwindigkeit immer näher an den Wert $\sqrt{\frac{kl}{m}}$ schmiegt, je mehr Punkte in einer Welle teilnehmen, d. h. je länger die Wellenlänge zum Vergleich mit l wird.

Im allgemeinen wenn eine halbe Wellenlänge $l(n+\varepsilon)$, $0\leqq\varepsilon\leqq1$ ist, werden die Gleichungen der Bewegung durch

$$\xi=A\sin\frac{\pi}{n+\varepsilon}i \text{ od. } B\cos\frac{\pi}{n+\varepsilon}i \text{ mit } \alpha^2=2\left(1-\cos\frac{\pi}{n+\varepsilon}\right)$$

befriedigt. Dann ist die Fortpflanzung von einer Wellenform mit der halben

Wellenlänge $(n+\varepsilon)l$ auch möglich.

Die Geschwindigkeit ist

$$V=\frac{2(n+\varepsilon)l}{T}=\frac{(n+\varepsilon)l}{\pi}\sqrt{2\left(1-\cos\frac{\pi}{n+\varepsilon}\right)}\sqrt{\frac{k}{ml}}\doteqdot\sqrt{\frac{kl}{m}}$$

(7) *Übergang zum Kontinuum.* Dividiert man die beiden Seiten der Bewegungsgleichung durch 1, dann

$$\frac{m}{l}\frac{d^2\xi_i}{dt^2}=\frac{k}{l^2}\left\{(\xi_{i+1}-\xi_i)-(\xi_i-\xi_{i-1})\right\}$$

Wenn man m in l gleichmässig verteilt denkt, dann ist m/1 die Langendichte des Fadens σ. Bei den grossen Wellenlängen nämlich bei immer grossen Werte von n werden die erste Eigenfunktion

$$\eta_i=a_1\sin\frac{\pi}{n+\varepsilon}i$$

immer wieder kontinuierlich für 1.

Also kann man setzen

$$\lim_{l\to 0}\frac{(\xi_{i+1}-\xi_i)-(\xi_i-\xi_{i-1})}{l^2}=\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}$$

Demzufolge wird die Gleichung der Bewegung

$$\sigma\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}=k\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}$$

und die Fortpflanzungsgeschwindigkeit ist $V=\sqrt{\frac{k}{a}}$,

was wir schon gesehen hat, nämlich $V\doteqdot\sqrt{\frac{kl}{m}}$

(8) *Anwendung zur Erdkruste.* In der Erdkruste wie den Konglomeraten- oder Sand-Schichten kann man die Fortpflanzung der Wellen in ähnlicher Weise wie oben betrachten. Dabei kann man ruhig die effektive Dichte und elastische Konstante denken, ebenso wie in kontinuierlichen Medien.

(9) *Anwendung auf das Diffusionproblem.* Wenn viele sehr gute Wärmeleiter durch sehr schlechten Leiter nebeneinander verbunden werden, dann kann man angenähert die folgende Gleichung annehmen,

$$Cm\frac{\partial T_i}{\partial t}=\frac{sk}{l}\left\{(T_{i+1}-T_i)-(T_i-T_{i-1})\right\},$$

wo T_i Temperatur des i-ten Wärmeleiters,

c Wärmekapazität,

m Masse des Teiles,

k Wärmeleitvermögen des schlechten Leiters,

l Entfernung zwischen den nebeneinander stehenden Leitern,

s Areal der berührenden Fläche,

Setzt man

$$T_i = e^{-pt} T_i, \quad \text{und} \quad a^2 = cm - \frac{l}{sk} p,$$

so kann man ganz ähnlich wie oben behandeln.

Hier wollen wir einige Bemerkungen über die Idee der Diffusion der Erdbebenwellen machen.[1] Der zweite Hauptsatz der Wärmetheorie lautet, dass die Wärme von der höheren Temperatur zur tieferen fliesst. Aber die Energie der elastischen Schwingungen behält sich nicht immer so. Das hängt von dem Phasenverhältnis ab.

Nun wollen wir viele zerstückelte Bodenteile betrachten, in welchen Extinktion der Schwingung sehr klein ist und sie werden nebeneinander ganz schwach gekoppelt.

u_i sei die Amplitude der Schwingung des i-ten Teils. Ein wahrscheinlicher Fall der Koppelung kann so sein, dass die Verschiebung an einem Rande proportional der relativen Verschiebung ist, nämlich

$$u = k^1 (u_{i+1} - u_1)$$

Nun kann man die Gleichung der elastischen Bewegung wie folgt setzen,

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + a \frac{\partial}{\partial x}\right) \left(\frac{\partial}{\partial t} - a \frac{\partial}{\partial x}\right) u = 0$$

Also ist

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial u}{\partial x}$$

auch ein möglicher Fall.

Dadurch, kann man auch wie folgt setzen, wenn die Wellenlänge genug gross ist.

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = k^2 (u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1})$$

Nämlich, wenn das Phasenverhältnis günstig ist, so kann man die Diffusion der Schwingung voraussetzen, was bei Fortpflanzung der Erdbebenwellen durch die zerstückelten Erdkruste ziemlich wahrscheinlich der Fall sein möge.

Nach dem Schluss dieser Arbeit sind mir die Arbeiten von Lord Rayleigh on the Propagation of Waves along Connected Syetems of Similar Bodies" (Phil. Mag. XLIV pp. 356-362, 1897) und " Chapt. VI, Sound Vol. I (1894)" bekannt geworden. Aber einige Methoden und Ideen meiner Arbeir stehen nicht in den oben genannten Arbeiten. Darum hoffentlich würde die Veröffentlichung dieser kleinen Arbeit wenigstens in gewissem Grade von Bedeutung sein und recht genehmigt.

(1) S. T. Nakamura, *Bull. Cent. Meteor. Obs. Japan*, **3** (1919); M. Ishimto, *Bull. Earthq. Res. Inst.*, **13** (1935) 130; K. Takahasi, *Geophys. Mag.*, **11** (1938) 117

13. Sitten-Kumiai ni tutawaru Nami.

Matuzawa-Takeo.

Tikyû no Hyômen ni tikai Tikaku wa komiitta Kôzô wo motte iru kara Zisin no Nami no Tutawarikata ni tuitemo iro iro na Mikata ga dekiru. Tatoeba renzoku na Danseitai no Naka de hutu no Undohoteisiki ni sitagau Nami to site, matawa Undo no Kakusan no Baai to site, aruiwa Rekigan ya Sagan nado no yona mono wo Sitten no Tunagari to mite sono Naka no Nami wo kangaeru Baai nado de aru.

Koko dewa kono saigo no Baai wo yaya tatiitte kangae, Kakusan no Baai ni tuitemo Kangae wo susumeta.