

## 5. Elastische Wellen in einem anisotropen Medium.

Von Takeo MATUZAWA,

Institut für Erdbebenforschung.

(Vorgelegt den 18. Juni 1942.-Eingegangen den 19. Dez. 1942.)

Unter der Wirkung der Schwere mag die Erdkruste wahrscheinlich einigermassen anisotrop sein, und zwar in der horizontalen Richtung isotrop. Elastische Wellen in krystallinischen Medien im allgemeinen sind von Z. Sakadi<sup>1)</sup> untersucht worden. Wir wollen vom praktischen Standpunkt die Art und Weise der Wellenfortpflanzung im obengenannten Falle anschaulich machen.

In einem solchen Falle sind die Koeffizienten von Spannungstensoren in Bezug auf die krystallographischen Axen, ebenso wie beim hexagonalen Krystalle, wie folgt dargestellt. Nämlich

$$\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{13} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{C_{11}-C_{12}}{2} \end{pmatrix}$$

Die Spannungskomponenten sind also

$$X_x = C_{11}e_{xx} + C_{12}e_{yy} + C_{13}e_{zz},$$

$$Y_y = C_{12}e_{xx} + C_{11}e_{yy} + C_{13}e_{zz},$$

$$Z_z = C_{13}e_{xx} + C_{13}e_{yy} + C_{33}e_{zz},$$

$$Y_z = C_{44}e_{yz},$$

$$Z_x = C_{44}e_{xz},$$

$$X_y = \frac{C_{11}-C_{12}}{2}e_{xy}.$$

1) Z. SAKADI, N.S.B.K. Physico-Mathem. Soc. Jap., 23 (1941), 539.

Die Gleichungen der Bewegungen sind also,

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= C_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{C_{11} - C_{12}}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + C_{44} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \\ &\quad + \frac{C_{11} + C_{12}}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + (C_{13} + C_{44}) \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial x}, \\ \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= \frac{C_{11} - C_{12}}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + C_{11} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + C_{44} \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \\ &\quad + \frac{C_{11} + C_{12}}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + (C_{13} + C_{44}) \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial y}, \\ \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= (C_{13} + C_{44}) \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} + (C_{13} + C_{44}) \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial z} \\ &\quad + C_{44} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + C_{33} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}. \end{aligned}$$

Von der Symmetrie um die vertikale Axe kann man die Sache dadurch genug darstellen, dass man nur die Vorgänge in der  $y$ - $z$  Ebene betrachtet. Wenn man ebene Wellen in der Richtung  $(0, m, n)$  betrachtet, dann können wir die folgenden Fälle unterscheiden.

I.  $u = f(my + nz - pt)$ ,  $v = 0$ ,  $w = 0$ .

In diesem Falle lautet die Lösung

$$u = f \left( my + nz - \sqrt{\frac{C_{11} - C_{12}m^2 + C_{44}n^2}{2\rho}} t \right).$$

Diese Well ist also vom Charakter der Scherungswellen, und kann selbständig sich fortpflanzen. Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit ist

$$v = \sqrt{\frac{C_{11} - C_{12}m^2 + C_{44}n^2}{2\rho}}.$$

II.  $u = 0$ ,  $v = f(my + nz - pt)$ ,  $w = \phi(my + nz - pt)$ .

Von der Gleichungen der Bewegung bekommt man

$$\left. \begin{aligned} \rho p^2 f'' &= (C_{11}m^2 + C_{44}n^2)f'' + (C_{13} + C_{44})mn\phi'', \\ \rho p^2 \phi'' &= (C_{13} + C_{44})mnf'' + (C_{44}m^2 + C_{33}n^2)\phi''. \end{aligned} \right\}$$

Den Strich über  $f$  oder  $\phi$  versteht man als die Differenzierung nach dem Argument  $my+nz-pt$ . Wenn man  $f$  und  $\phi$  eliminiert, dann

$$\rho^2 p^4 - B\rho p^2 + A = 0,$$

wo

$$A = -(C_{13} + C_{44})m^2 n^2 + (C_{11}m^2 + C_{44}n^2)(C_{44}m^2 + C_{33}n^2),$$

$$B = C_{11}m^2 + C_{33}n^2 + C_{44}.$$

Daraus bekommt man

$$\rho p_1^2 = \frac{B + \sqrt{B^2 - 4A}}{2},$$

$$\rho p_2^2 = \frac{B - \sqrt{B^2 - 4A}}{2}.$$

$p_1$  und  $p_2$  stellen die entsprechenden Fortpflanzungsgeschwindigkeiten der Wellen dar. Die Amplituden der Wellen sind

$$f_i = \frac{\rho p_i^2 - (C_{44}m^2 + C_{33}n^2)}{(C_{13} + C_{44})mn} \phi_i, \quad i=1, 2.$$

Die Wellen ( $u=0, v_1, w_1$ ) und ( $u=0, v_2, w_2$ ) können sich selbständig fortpflanzen. Die Richtung der Schwingung von der Welle ( $u=0, v_1, w_1$ ) ist natürlich senkrecht zu der von der Welle ( $u=0, v_2, w_2$ ), nämlich

$$\phi_1 \phi_2 + f_1 f_2 = 0.$$

Wenn man die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Dilatationswellen  $\sqrt{\frac{C_{11}}{\rho}}$  in der Äquatorebene als Einheit nimmt, dann bekommt man die Geschwindigkeit von ( $u=0, v_1, w_1$ ) bzw. ( $u=0, v_2, w_2$ ) wie folgt,

$$2V_1^2 = m^2 + \frac{C_{33}}{C_{11}}n^2 + \frac{C_{44}}{C_{11}} + \sqrt{\left\{m^2 + \frac{C_{44}}{C_{11}}(n^2 - m^2) - \frac{C_{33}}{C_{11}}n^2\right\}^2 + 4\left(\frac{C_{13}}{C_{11}} + \frac{C_{44}}{C_{11}}\right)^2 m^2 n^2},$$

$$2V_2^2 = m^2 + \frac{C_{33}}{C_{11}}n^2 + \frac{C_{44}}{C_{11}} - \sqrt{\left\{m^2 + \frac{C_{33}}{C_{11}}(n^2 - m^2) - \frac{C_{33}}{C_{11}}n^2\right\}^2 + 4\left(\frac{C_{13}}{C_{11}} + \frac{C_{44}}{C_{11}}\right)^2 m^2 n^2}.$$

Alles zusammen haben wir also drei Arten Wellen, die je einzelt sich selbständig fortpflanzen kann; nämlich ( $u, v=0, w=0$ ), ( $u=0,$

$v_1, w_1$ ) und  $(u=0, v_2, w_2)$ . Die Richtung der Schwingung steht senkrecht zu einander.

Wenn man zum Beispiel die elastischen Konstanten von Beryll annimmt, der kristallographisch hexagonal ist, dann haben wir

$$\frac{C_{33}}{C_{11}}=0.8775, \quad \frac{C_{44}}{C_{11}}=0.2404, \quad \frac{C_{13}}{C_{11}}=0.2455, \quad \frac{C_{11}-C_{12}}{2C_{11}}=0.3116.$$

Mit diesen Konstanten ergeben sich  $V_1, V_2, V_3, \frac{f_1}{\phi_1}$ , und  $\frac{f_2}{\phi_2}$  für mehrere Richtungen wie folgt.

$\theta$	$m$	$n$	$\frac{f_1}{\phi_1}$	$\frac{f_2}{\phi_2}$	$V_1$	$V_2$	$V_3$
0	1.0000	0.0000	$\infty$	0.000	1.000	0.491	0.558
15	0.9659	0.2588	5.690	-0.176	0.985	0.512	0.554
30	0.8660	0.5000	2.373	-0.421	0.948	0.558	0.542
45	0.7071	0.7071	1.134	-0.882	0.913	0.587	0.525
60	0.5000	0.8660	0.5295	-1.907	0.910	0.565	0.508
75	0.2588	0.9659	0.0213	-4.686	0.927	0.515	0.495
90	0.0000	1.0000	0.0000	$-\infty$	0.936	0.490	0.490

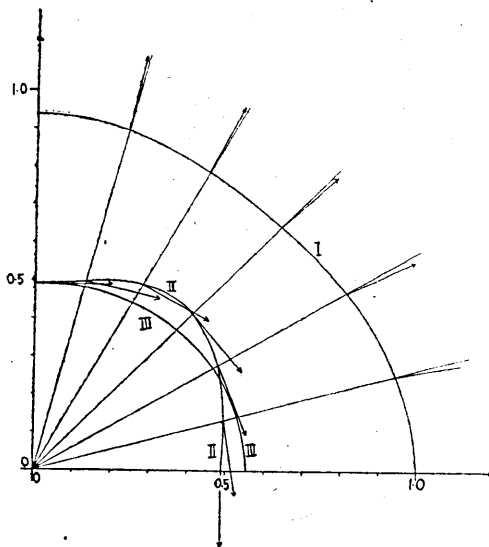


Fig. 1. Kurve, I, II, III; Wellenfront. Pfeil; Richtung der Schwingung.

Das Rechenresultat ist in Fig. 1 anschaulich eingetragen. Kurve I, Kurve II, und Kurve III stellen die Wellenfront für jede der drei Wellen dar. Die zusammengestellten Vektoren zeigen die Schwingungsrichtung der Wellen. Natürlich gilt auch die umgekehrte Richtung. Wir sehen also, dass die Welle  $(u=0, v_1, w_1)$  hauptsächlich vom Charakter der Dilatationswellen ist, und die Wellen  $(u=0, v_2, w_2)$  und  $(u, v=0, w=0)$  hauptsächlich vom Charakter der Scherungswellen sind. Streng genommen ist es natürlich nicht der Fall.

5. *Ihōsei-tai no nakano Dansei-nami no Rei.*

Von Takeo MATUZAWA,

Zisin-Kenkyūsyō.

Tikaku no yō na Zyūryoku no Ba ni aru Baisitu dewa Entyoku-hōkō to Suihei-hōkō to dewa Kotogara ga tigua kara Ihōsei wo simesu de arō koto ga kangaerareru. Kono yōna Baai no Ihōsei wa Dansei-keisū ni taisite wa Roppōsyōkei no Kessyō no Baai ni naru to kangaerareru.

Ippan no Kessyōtai no Naka dewa mitōri no dokuritu ni tutawaru koto no dekiru Nami ga atte sono Sindō-hōkō wa tagai ni suityoku de aru koto wa wakatte iru ga, ima kari ni Roppōsyōtai de aru Beryll no Rei wo totte miru to sono Naka no Nami no Arisama wa Fig. 1 ni simesu yō ni naru.

Kyokusen I, II, III wa soresore mitōri no Nami no Hamen wo arawasite ori Yazirusi no Hōkō wa sindō no Hōkō wo arawasite iru. I de arawasareru Nami wa Somitu-ha ni tikai Seisitu no mono de ari, II oyobi III de arawasareru Nami wa Yozire-Nami no Seisitu ni tikai mono de aru.