

32. 海底の變動に因つて生ずる 津浪について

地震研究所 高橋 龍太郎

(昭和17年6月18日發表——昭和17年9月20日受理)

1. 緒言. 海の表面に衝撃或は海水の堆積等の攪亂が與へられた場合に發生すべき波の問題は、前世紀の初頭 Cauchy 及び Poisson¹⁾ が深い海について研究して以來、W. Thomson²⁾, W. Burnside³⁾, H. Havelock⁴⁾, G. Green⁵⁾, H. Lamb⁶⁾, F. B. Pidduck⁷⁾ 其他多數の學者によつて考究され、有限の深さを持つた場合、或は海水の壓縮率を考慮した場合などが解かれてゐる。又水中爆發の衝撃によつて生成される波については寺澤⁸⁾, 妹澤⁹⁾等の研究がある。此等の研究は夫々津浪の問題と密接な關係を持つてゐるが、本當に海底が隆起、沈降等の地形變動を行つた場合に生ずべき波の研究を爲したものは比較的少數である。古くは佐野・長谷川¹⁰⁾が、海底の變動が一瞬の内に生じた場合につき數値計算を行つた。此の計算は變動が原點附近に集中してゐるものと考へて行はれたが、正野¹¹⁾は變動が或る有限の廣がりを持つた場合を取扱つた。然し海が中庸の深さを持つた場合は取扱つて居ない。海の深さが中庸である場合は數學的に困難であるが、最近妹澤¹²⁾は一次元の問題につき此の様な場合の波の問題を計算して注目すべき結果を得た。然し此の計算に於ては最初に水面に攪亂が與へられてゐる。従つて海が極く淺く、又變動が極く短時間に完了した場合の外は、海底の變動と、海面上に最初に置かる可き水の堆積の形との間に如何なる關係があるかを別に研究しなければならない。

2. 一般的計算. 海は一樣な深さ H を有し、海水は非壓縮流體と考へる。圓筒坐

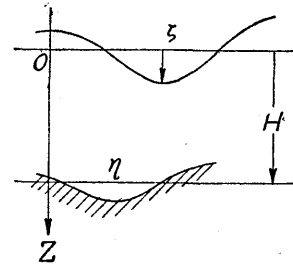
- 1) Cauchy, *Mém. de l'Acad. Roy. des Sciences*, i (1827), *Oeuvres Complètes*, 1^{er} Ser. i, 38.
- 2) *Proc. Roy. Soc.*, **42** (1887), 80.
- 3) *Proc. London Math. Soc.*, **20** (1888), 22.
- 4) *Proc. Roy. Soc.*, A, **81** (1908), 398.
- 5) *Proc. Roy. Soc. Edin.*, **30** (1909), 242.
- 6) *Proc. Intern. Congress of Math.*, II, p. 279, (1912).
- 7) *Proc. Roy. Soc.*, A, **83** (1910), 347; **84** (1912), 396.
- 8) *Proc. Roy. Soc.*, A, **42** (1915), 57.
- 9) *Bull. Earthq. Res. Inst.*, **6** (1928), 19; **7** (1929), 15.
- 10) *Bull. Cent. Met. Obs. Japan*, **2** (1915).
- 11) *Geophys. Mag.*, **10** (1936), 21.
- 12) 地震研究所彙報, **20** (1942), 254.

標の原点を擾亂される前の海面に、 z -軸を下向に取る。海面の凹みを ζ で、又海底の陥没速度を η で表す事にする。 ϕ を速度ポテンシャルとすると連続の方程式は

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad \dots\dots (1)$$

となる。海面に於ける壓力は一定であるから運動の方程式を

$$\left[\frac{\partial \phi}{\partial t} + 2\mu \phi \right]_{z=\zeta} = g\zeta \quad \dots\dots (2)$$



第 1 圖

と書く事が出来る。 μ は假想的摩擦係数である。又境界の条件として

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)_{z=H} = \eta(r, \theta, t) = f(r) \cos n\theta \cdot \chi(t) \quad \dots\dots (3)$$

と置く。即ち海底は何處も相似な時間的變化をするものと考へる。又初期条件として $t = \lim (0 - \varepsilon)$ のときに

$$\left. \begin{aligned} \eta &= 0, & \int \eta dt &= 0, & \zeta &= 0, \\ \frac{\partial \zeta}{\partial t} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots (4)$$

であるとする。

(2) の式は充分な近似を以て

$$\left[\frac{\partial \phi}{\partial t} + 2\mu \phi \right]_{z=0} = g\zeta \quad \dots\dots (5)$$

とする事が出来るから

$$\zeta = \frac{1}{g} \left[\frac{\partial \phi}{\partial t} + 2\mu \phi \right]_{z=0} \quad \dots\dots (6)$$

又は $z=0$ で

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + 2\mu \frac{\partial \phi}{\partial t} - g \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \quad \dots\dots (7)$$

である。

(1) の解として

$$\phi = \cos n\theta \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha t} d\alpha \int_0^{\infty} (A \cosh kz + B \sinh kz) J_n(kr) dk \quad \dots\dots (8)$$

なる形を探る。 A, B は k 及び α の函数であるが、(7) から

$$(-\alpha^2 + 2\mu\alpha i)A = gkB \quad \dots\dots (9)$$

でなければならぬ。一方に於て吾々は $\eta(r, \theta, t)$ を Fourier 及び Bessel の積分で表して

$$\eta(r, \theta, t) = \frac{\cos n\theta}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha \int_{-\infty}^{\infty} \chi(\tau) e^{i\alpha(t-\tau)} d\tau \int_0^{\infty} J_n(kr) k dk \int_0^{\infty} f(\lambda) J_n(k\lambda) \lambda d\lambda \dots (10)$$

と書く事が出来る。従つて此れは (8) から得られる所の

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial z}\right)_{z=H} = \cos n\theta \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha t} d\alpha \int_0^{\infty} (A \sinh kH + B \cosh kH) \cdot J_n(kr) k dk \dots (11)$$

と等しくなければならぬ。故に

$$A \sinh kH + B \cosh kH = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} f(\lambda) J_n(k\lambda) \lambda d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} \chi(\tau) e^{-i\alpha\tau} d\tau \dots (12)$$

が得られる。従つて (9) 及び (12) より

$$\begin{aligned} & A \cosh kz + B \sinh kz \\ &= \frac{(\alpha^2 - 2\mu\alpha i) \sinh kz - gk \cosh kz}{(\alpha^2 - 2\mu\alpha i) \cosh kH - gk \sinh kH} \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} f(\lambda) J_n(k\lambda) \lambda d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} \chi(\tau) e^{-i\alpha\tau} d\tau \end{aligned} \dots (13)$$

となり、従つて

$$\phi = \frac{\cos n\theta}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha \int_{-\infty}^{\infty} \chi(\tau) e^{i\alpha(t-\tau)} d\tau \int_0^{\infty} J_n(kr) k dk \int_0^{\infty} J_n(k\lambda) f(\lambda) \cdot F \cdot \lambda d\lambda,$$

$$\text{但し} \quad F = \frac{(\alpha^2 - 2\mu\alpha i) \sinh kz - gk \cosh kz}{(\alpha^2 - 2\mu\alpha i) \cosh kH - gk \sinh kH} \dots (14)$$

が得られ、更に又 (6) より

$$\zeta = \frac{\cos n\theta}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha \int_{-\infty}^{\infty} \chi(\tau) e^{i\alpha(t-\tau)} d\tau \int_0^{\infty} G \cdot J_n(kr) k dk \int_0^{\infty} f(\lambda) J_n(k\lambda) \lambda d\lambda$$

$$\text{但し} \quad G = \frac{-(\alpha i + 2\mu)}{(\alpha^2 - 2\mu\alpha i) \cosh kH - gk \sinh kH} \dots (15)$$

が得られる。

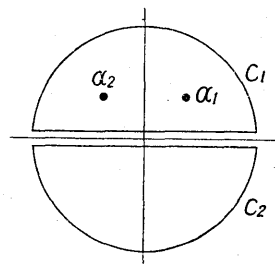
此の積分は順序を変更し得るから、先づ α に就いて積分する事とし、 $(t-\tau) > 0$ なる時第 2 圖 C_1 につき

$$\int_{(C_1)} G e^{i\alpha(t-\tau)} d\alpha \dots (16)$$

なる積分を考へる。 G は (15) より判る通り

$$\alpha_{1,2} = \mu i \pm \sqrt{gk \tanh kH - \mu^2} \equiv \mu i \pm \gamma \dots (17)$$

なる所に二つの極を持つてゐる。 C_1 の圆弧上に於いては



第 2 圖

$$\begin{aligned}
\left| \int \frac{(\alpha i + 2\mu)e^{i\alpha(t-\tau)}}{(\alpha - \alpha_1)(\alpha - \alpha_2)} d\alpha \right| &< \int \frac{(R + 2\mu)e^{-(t-\tau)R \sin \theta}}{(R - |\alpha_1|)(R - |\alpha_2|)} R d\theta \\
&\rightarrow \int_0^\pi e^{-(t-\tau)R \sin \theta} d\theta < 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{\pi}{2}(t-\tau)R \sin \theta} d\theta \\
&= \frac{\pi}{(t-\tau)R} (1 - e^{-(t-\tau)R}) \rightarrow 0
\end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} G e^{i\alpha(t-\tau)} d\alpha &= \frac{2\pi i}{\cosh kH} [R_{\alpha_1} + R_{\alpha_2}] = -\frac{2\pi i}{\cosh kH} \left[\frac{\alpha_1 i + 2\mu}{\alpha_1 - \alpha_2} e^{i\alpha_1(t-\tau)} \right. \\
&\quad \left. + \frac{\alpha_2 i + 2\mu}{\alpha_1 - \alpha_2} e^{i\alpha_2(t-\tau)} \right] \\
&= \frac{2\pi}{\gamma \cosh kH} [\mu \sin \gamma(t-\tau) + \gamma \cos \gamma(t-\tau)] e^{-\mu(t-\tau)}, \\
&\quad t - \tau > 0 \quad \dots\dots(18)
\end{aligned}$$

又 $(t-\tau) < 0$ の場合には第 2 圖 C_2 の積分路を考へれば上と同様に圆弧上の積分は 0 に近づくから

$$\int_{-\infty}^{\infty} G e^{i\alpha(t-\tau)} d\alpha = 0, \quad (t-\tau) < 0 \quad \dots\dots(19)$$

である事は明かである。従つて (15) より

$$\begin{aligned}
\zeta &= \cos n\theta \cdot \lim_{\mu \rightarrow 0} \int_0^\infty \frac{J_n(kr) k dk}{\gamma \cosh kH} \int_{-\infty}^t \chi(\tau) e^{-\mu(t-\tau)} \\
&\quad [\gamma \cos \gamma(t-\tau) + \mu \sin \gamma(t-\tau)] dt \int_0^\infty f(\lambda) J_n(k\lambda) \lambda d\lambda \\
&= \cos n\theta \int_0^\infty \frac{J_n(kr) k dk}{\gamma \cosh kH} \int_{-\infty}^t \chi(\tau) \gamma \cos \gamma(t-\tau) dt \int_0^\infty f(\lambda) J_n(k\lambda) \lambda d\lambda \dots\dots(20)
\end{aligned}$$

となる。次に吾々は τ に就いての積分を實行するに當つて

$$\left. \begin{aligned} \chi(t) &= 0 & t < 0 \text{ 及び } t > T \\ &= \frac{1}{T} & 0 < t < T \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots(21)$$

であると假定する。即ち地變は T の間一様な割合で進行し、其の總量は $f(r) \cdot \cos n\theta$ であると考へる。然る時は

$$\left. \begin{aligned} \int_{-\infty}^t \chi(\tau) \gamma \cos \gamma(t-\tau) d\tau &= -\frac{1}{T} \sin \gamma(t-\tau) \Big|_0^T & t > T \\ &= -\frac{1}{T} \sin \gamma(t-\tau) \Big|_0^t & t < T \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots(22)$$

となる。故に若し

$$\xi(t) = \int_0^\infty \frac{\sin \gamma t}{\gamma \cosh kH} J_n(kr) k dk \int_0^\infty f(\lambda) J_n(k\lambda) \lambda d\lambda \quad \dots\dots(23)$$

と書くならば

$$\zeta = \begin{cases} \frac{\cos n\theta}{T'} [\xi(t) - \xi(t-T')] & t > T' \\ \frac{\cos n\theta}{T'} [\xi(t) - \xi(0)] & t < T' \end{cases} \quad \dots\dots(24)$$

となる。従つて吾々は $\xi(t)$ を求め得るならば任意の時間を要して行はれた地變に因つて生ずる津浪を直ちに求める事が出来るのである。又地變が一瞬時に行はれた場合には (24) に於て $T' \rightarrow 0$ として

$$\zeta = \cos n\theta \frac{\partial \xi}{\partial t} \quad \dots\dots(25)$$

となるから、此れに (23) を代入する事により

$$\zeta = \cos n\theta \int_0^\infty \frac{\cos \gamma t}{\cosh kH} J_n(kr) k dk \int_0^\infty f(\lambda) J_n(k\lambda) \lambda d\lambda \quad \dots\dots(26)$$

即ち佐野、長谷川によつて得られたと同式に到達する。

次に λ に關する積分を行ふに當り、簡單の爲

$$f(r) = \begin{cases} \frac{V}{\pi a^2} & r < a \\ 0 & r > a \end{cases} \quad \dots\dots(27)$$

且つ $n=0$ と假定する。即ち半徑 a なる圓形區域が一様なる地變を行つたと考へる。

従つて V は地變の體積を示す。然る時は

$$\int_0^\infty f(\lambda) J_n(k\lambda) \lambda d\lambda = \frac{V}{\pi a^2} \int_0^a J_0(k\lambda) \lambda d\lambda = \frac{V}{\pi} \int_0^1 J_0(ms) s ds = \frac{V}{\pi} \frac{J_1(m)}{m} \quad \dots\dots(28)$$

$$m = ka, \quad s = \frac{\lambda}{a},$$

であるから

$$\xi(t) = \frac{V}{\pi a^2} \int_0^\infty \frac{\sin \gamma t}{\gamma \cosh m \frac{H}{a}} J_0\left(m \frac{r}{a}\right) J_1(m) dm \quad \dots\dots(29)$$

$$\gamma = \sqrt{\frac{gm}{a} \tanh m \frac{H}{a}} \quad \dots\dots(29')$$

となる。

3. 浅い海の場合. 地盤区域の半径に比して海が非常に浅く, 即ち $H/a \ll 1$ であつて, 一般に

$$\cosh m \frac{H}{a} \doteq 1, \quad \tanh m \frac{H}{a} \doteq m \frac{H}{a} \quad \dots\dots(30)$$

と見做しうる場合には, 換言すれば, 短い波長の波を省略した場合には, 前節 (28) 及 (29) より

$$\xi(t) = \frac{V}{\pi a c} \int_0^{\infty} \sin \frac{m}{a} c t \cdot J_0\left(m \frac{r}{a}\right) d m \int_0^1 J_0(m s) s d s \quad \dots\dots(31)$$

$$\text{但し} \quad c = \sqrt{g H}$$

然るに

$$J_0\left(m \frac{r}{a}\right) J_0(m s) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} J_0(m \Omega) d \omega$$

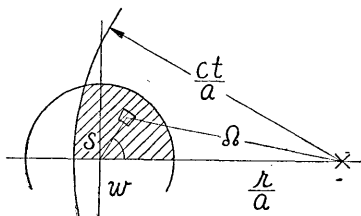
$$\Omega = \sqrt{\left(\frac{r}{a}\right)^2 + s^2 - 2\left(\frac{r}{a}\right) s \cos \omega} \quad \dots\dots(32)$$

並に

$$\left. \begin{aligned} \int_0^{\infty} \sin \frac{m}{a} c t J_0(m \Omega) d m &= \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{c t}{a}\right)^2 - \Omega^2}} & \left(\frac{c t}{a}\right)^2 > \Omega^2 \\ &= 0 & \left(\frac{c t}{a}\right)^2 < \Omega^2 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots(33)$$

であるから (31) は結局

$$\xi(t) = \frac{V}{\pi^2 a c} \int d \omega \int \frac{s}{\sqrt{\left(\frac{c t}{a}\right)^2 - \Omega^2}} d s \quad \dots\dots(34)$$



第 3 圖

となる. 但し積分は $s < 1$ で且つ $\Omega < \frac{ct}{a}$ なる範囲, 即ち第 3 圖斜線の面積について行ふべきである. (34) から容易に判る通り, $\xi(t)$ は $t = \frac{r-a}{c}$ なる時まで 0 で, 其時から $t = \frac{r+a}{c}$ まで増加し, 其の後は大凡 t に逆比例して減少する. 従つて波の前先端の傳播速度は長波の速度

c で一定である. (34) を圖式積分によつて求めるのに便利な様に, 變數 s, ω から變數 Ω, φ に轉換すると

$$\begin{aligned} \xi(t) &= \frac{V}{\pi^2 a c} \iint \frac{\Omega d \Omega d \varphi}{\sqrt{\left(\frac{c t}{a}\right)^2 - \Omega^2}} \\ &= \frac{V}{\pi^2 a c} \int \frac{\cos^{-1} \nu}{\sqrt{\left(\frac{c t}{a}\right)^2 - \Omega^2}} \Omega d \Omega \quad \dots\dots(35) \end{aligned}$$

$$\text{但し } v = \frac{\Omega^2 + \left(\frac{r}{a}\right)^2 - 1}{2\frac{r}{a}\Omega} \quad \dots\dots(35')$$

となる。積分区域は $\frac{r}{a} \geq 1$ 及び $\frac{ct}{a}$ と $1 + \frac{r}{a}$, 並に $\pm 1 \mp \frac{r}{a}$ との大小關係によつて色々の場合を生ずるが, 第 3 圖より容易に知る事が出来るから省略して置く。此處に於て更に變數を Ω から

$$R = \sqrt{\left(\frac{ct}{a}\right)^2 - \Omega^2}$$

に變換すると圖式積分に都合がよい。即ち其の結果は

$$\text{i) } \frac{r}{a} > 1$$

$$\begin{aligned} \xi(t) &= \frac{V}{\pi^2 ac} \int_{\sqrt{\left(\frac{ct}{a}\right)^2 - \left(\frac{r}{a}-1\right)^2}}^{\sqrt{\left(\frac{ct}{a}\right)^2 - \left(\frac{r}{a}+1\right)^2}} \cos^{-1} v \, dR, & \frac{ct}{a} > \frac{r}{a} + 1 \\ &= \frac{V}{\pi^2 ac} \int_0^{\sqrt{\left(\frac{ct}{a}\right)^2 - \left(\frac{r}{a}-1\right)^2}} \cos^{-1} v \, dR, & \frac{r}{a} + 1 > \frac{ct}{a} > \frac{r}{a} - 1 \\ &= 0, & \frac{ct}{a} < \frac{r}{a} - 1 \end{aligned}$$

$$\text{ii) } \frac{r}{a} < 1$$

$$\begin{aligned} \xi(t) &= \frac{V}{\pi a^2} t = \frac{V}{\pi ac} \frac{ct}{a}, & \frac{ct}{a} < 1 - \frac{r}{a} \\ &= \frac{V}{\pi ac} \left[\frac{ct}{a} - \sqrt{\left(\frac{ct}{a}\right)^2 - \left(1 - \frac{r}{a}\right)^2} \right] & \\ &\quad + \frac{V}{\pi^2 ac} \int_0^{\sqrt{\left(\frac{ct}{a}\right)^2 - \left(1 - \frac{r}{a}\right)^2}} \cos^{-1} v \, dR, & 1 - \frac{r}{a} < \frac{ct}{a} < 1 + \frac{r}{a} \\ &= \frac{V}{\pi ac} \left[\frac{ct}{a} - \sqrt{\left(\frac{ct}{a}\right)^2 - \left(1 - \frac{r}{a}\right)^2} \right] & \\ &\quad + \frac{V}{\pi^2 ac} \int_{\sqrt{\left(\frac{ct}{a}\right)^2 - \left(1 - \frac{r}{a}\right)^2}}^{\sqrt{\left(\frac{ct}{a}\right)^2 - \left(1 + \frac{r}{a}\right)^2}} \cos^{-1} v \, dR. & \frac{ct}{a} > 1 + \frac{r}{a} \end{aligned}$$

$$\text{但し } v = \frac{\left(\frac{ct}{a}\right)^2 + \left(\frac{r}{a}\right)^2 - R^2 - 1}{2\frac{r}{a}\sqrt{\left(\frac{ct}{a}\right)^2 - R^2}} \quad \dots\dots(36)$$

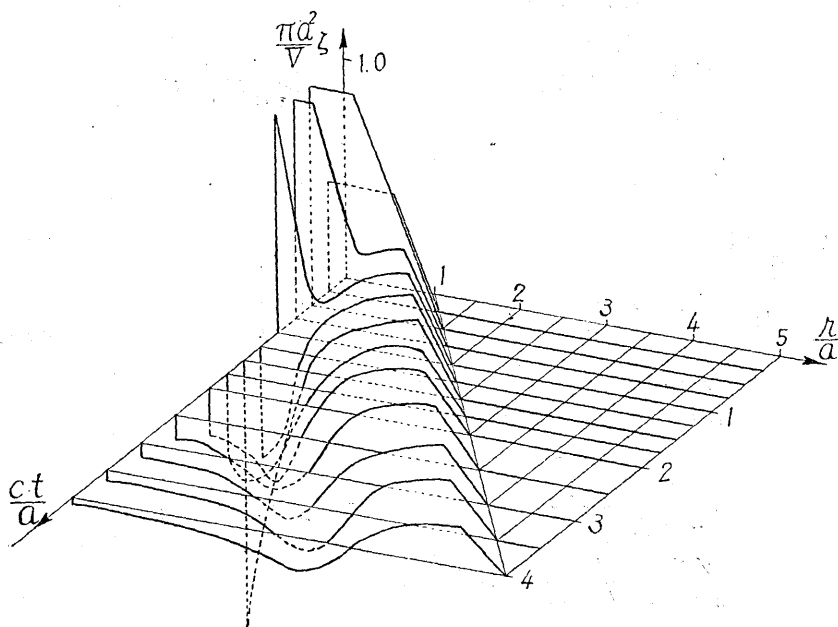
以上の諸式は図解法とパラメーターとの並用によつて容易に数値計算を行ひ得られる。特に圓形區域の中心直上に於ける値は (36) より直接に

$$\xi(t) = \begin{cases} \frac{V}{\pi a c} \cdot \frac{ct}{a}, & t < \frac{a}{c} \\ \frac{V}{\pi a c} \left[\frac{ct}{a} - \sqrt{\left(\frac{ct}{a}\right)^2 - 1} \right], & t > \frac{a}{c} \end{cases} \quad \dots (37)$$

と求められる。これから任意の T に對する ζ を求め得るが、特に $T \rightarrow 0$ の場合には (37) は

$$\zeta(t) = \begin{cases} \frac{d\xi}{dt} = \frac{V}{\pi a^2} & t < \frac{a}{c} \\ \frac{V}{\pi a^2} \left[1 - \frac{t}{\sqrt{t^2 - \left(\frac{a}{c}\right)^2}} \right], & t > \frac{a}{c} \end{cases} \quad \dots (37)$$

となる。(36) の諸式の数値計算の結果は第 I 表に示した。



第 4 圖

第 4 圖には一例として $T = \frac{1}{2} \frac{a}{c}$ の時の ζ の變化の有様を距離と時間とに對して圖示した。同圖から明かに看取出来る通り、海底が隆起すると水面には最初截頭圓錐形の山が生長して来るが、其の内、斜面の下部は外方へ c の速度で傳はつて行くのに反し、斜面の上部は次第に崩れて後退してゆくので、其の中間に環狀の凹所が出

第 I 表 $\frac{\pi a c}{V} \xi$ の値

$\frac{ct}{a}$	r/a								
	0	0.25	0.50	0.75	1.0	1.5	2.0	3.0	4.0
0.0	0.000	0.000	0.000	0.000	0	0	0	0	0
0.25	0.250	0.250	0.250	0.250	0.115	0	0	0	0
0.50	0.500	0.500	0.500	0.347	0.219	0	0	0	0
0.75	0.750	0.750	0.560	0.420	0.300	0.096	0	0	0
1.00	1.000	0.712	0.581	0.472	0.373	0.186	0	0	0
1.25	0.500	0.558	0.575	0.500	0.430	0.255	0.082	0	0
1.50	0.382	0.394	0.453	0.496	0.453	0.313	0.158	0	0
2.00	0.268	0.275	0.304	0.309	0.360	0.377	0.270	0	0
2.50	0.209	0.214	0.218	0.223	0.230	0.307	0.328	0.126	0
3.00	0.172	0.175	0.174	0.179	0.183	0.207	0.273	0.220	0
3.50	0.146	0.144	0.148	0.154	0.154	0.166	0.186	0.263	0.115
4.00	0.127	0.127	0.129	0.130	0.134	0.137	0.153	0.224	0.195

來て來る。此の凹みは次第に深くなると共に徐々に内方に後退してゆくので、 ct/a が 1.0 位の時には變動區域の外側に環狀の水の土手が出來、其の山は大凡 c の速度で外方へ擴がつてゆく。其の間に中心の圓錐は次第に瘦せて尖塔狀になり遂に消失して、中心には洋鐘を逆にした様な形の凹みを生ずる。中心は更に陥没して喇叭狀となる。次には中心は次第に持上つて來る。此の盛上つた場所は段々に其の面積と高さとを増して、時間が経過すると中心附近は殆んど平水の狀況にまで回復する。然し其の周圍には環狀の凹所が外へ外へと擴がつて居る。即ち相當の時間が経過した後は一山及び一谷より成る圓形波が外方へと傳播してゆくのである。

此等の波の狀態は筆者が會つて行つた模型實驗¹³⁾の結果に酷似してゐる。

4. 遠方に於ける波の形. $\frac{r}{a}$ が極めて大きい場合には $s^2 a^2 / r^2$ 及び高次の項を省略出来るから

$$\tau = \frac{ct}{a} - \frac{r}{a}, \quad \Omega = \frac{r}{a} - s \cos \omega \quad \dots\dots(38)$$

とする事が出来る。従つて波の先端附近、即ち τ が小さい所では

$$\sqrt{\left(\frac{ct}{a}\right)^2 - \Omega^2} = \sqrt{2 \frac{r}{a}} \sqrt{\tau + s \cos \omega} \quad \dots\dots(38')$$

であり、(34) から

13) 地震研究所彙報別刷 1 (1934), 152.

$$\frac{\pi ac}{V} \xi = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{a}{2r}} \int d\omega \int \frac{s ds}{\sqrt{\tau + s \cos \omega}} \quad \dots\dots(39)$$

となる。積分区域は第 3 圖と同様であるが、此の場合には $\frac{ct}{a}$ の圓は縦の直線となる。此の直線と原点との距離が τ を表す。従つて座標を直角座標に轉換して

$$\left. \begin{aligned} \frac{\pi ac}{V} \xi &= \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{a}{2r}} \int_0^{1+\tau} \frac{dx}{\sqrt{x}} \int_0^{\sqrt{1-(\tau-x)^2}} dy \\ &= \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{a}{2r}} \int_0^{1+\tau} \frac{\sqrt{1-(\tau-x)^2}}{\sqrt{x}} dx & -1 < \tau < 1 \\ &= \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{a}{2r}} \int_{\tau-1}^{\tau+1} \frac{\sqrt{1-(\tau-x)^2}}{\sqrt{x}} dx & \tau > 1 \end{aligned} \right\} \dots\dots(40)$$

となる。上式より判明する通り

$$\frac{1}{\sqrt{2} \cdot \pi} \int_{0, \tau-1}^{1+\tau} \frac{\sqrt{1-(\tau-x)^2}}{\sqrt{x}} dx \equiv K(\tau) \quad \dots\dots(41)$$

は τ のみの函数であるから、 ξ は距離の平方根に逆比例して減少するが、波の形は變らない。(41) は次の様に變換した後、(36) と同様に容易に數値が求められる。

$$K(\tau) = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \int_{0 \text{ 又ハ } \sqrt{\tau-1}}^{\sqrt{\tau+1}} \frac{du}{\sqrt{1-(\tau-u^2)^2}}$$

此の値は第 II 表に示した。

第 II 表 $K(\tau)$ の値

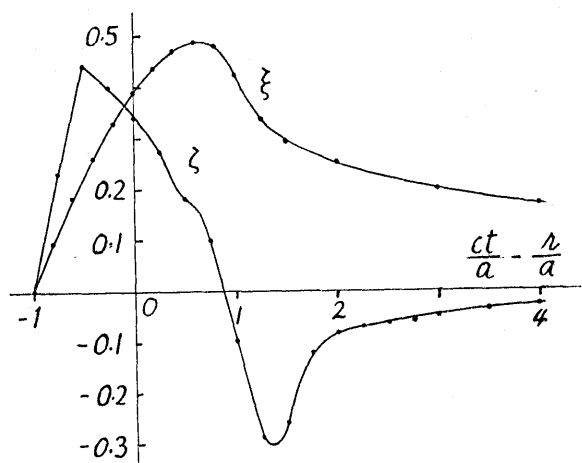
τ	$K(\tau)$	τ	$K(\tau)$	τ	$K(\tau)$
-1.0	0.000	0	0.3921	1.0	0.424
-0.8	0.0945	0.2	0.4365	1.25	0.338
-0.6	0.1833	0.4	0.4720	1.50	0.298
-0.4	0.2620	0.6	0.4920	2.0	0.254
-0.2	0.3320	0.8	0.4815	4.0	0.172
+0	0.3921	1.0	0.4240		

従つて

$$\zeta = \frac{V}{\pi ac} \sqrt{\frac{a}{r}} \cdot \frac{1}{T} \left\{ K(\tau) - K\left(\tau - \frac{cT}{a}\right) \right\} \quad \dots\dots(42)$$

$$\tau = \frac{ct}{a} - \frac{r}{a}$$

で與へられる。\$at\$ は波頭より内側に測つた距離に當る。此の時の波形は第 5 圖に示してある。



第 5 圖

5. 深い海の場合。地變區域の半徑に比して海が非常に深く、即ち $H/a \gg 1$ である場合には、(29) は

$$\begin{aligned} \frac{\pi a^2}{V} \xi &= 2 \int_0^\infty \frac{e^{-\frac{mH}{a}} \sin \sqrt{\frac{gm}{a}} \cdot t}{\sqrt{\frac{gm}{a}}} J_0\left(m \frac{r}{a}\right) m dm \int_0^1 J_0(ms) s ds \\ &= \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{a}{g}} \int_0^\pi d\omega \int_0^1 s ds \int_0^\infty e^{-mh} \sin \sqrt{\frac{gm}{a}} t J_0(m\Omega) \sqrt{m} dm \quad \dots\dots(43) \\ &\text{但し} \quad h \equiv \frac{H}{a} \end{aligned}$$

となる。今原點から相當遠い所のみを取る事とすれば、 $J_0(m\Omega)$ を漸近式を以て置換へ、且つ

$$\int_0^\pi d\omega \int_0^1 s ds = \frac{\pi}{2}$$

と置き得るから、(43) は、 $m = \zeta^2$ と書き換へて

$$\begin{aligned} \frac{\pi a^2}{V} \xi &= \sqrt{\frac{a}{g}} \sqrt{\frac{2}{\pi\Omega}} \Re \frac{e^{-\frac{\pi}{4}i}}{i} [I_1 - I_2] \\ &\text{但し} \quad I_1 = \int_0^\infty e^{-h\zeta^2 + i(\zeta^2\Omega + \zeta t')} \cdot \zeta d\zeta \\ &\quad I_2 = \int_0^\infty e^{-h\zeta^2 + i(\zeta^2\Omega - \zeta t')} \cdot \zeta d\zeta \quad \dots\dots(44) \end{aligned}$$

此處に $t' = \sqrt{\frac{g}{a}}t$, 又 \Re は其の後に書かれた部分の實部を表すものとする.

(44) の積分の近似値を求めるに鞍點法を用ひて見る. 即ち此等積分の integrand は ζ の有限域には不正則點を持たないから, ζ を複素数と見て積分路を適當に連續的に變形させ, 積分が最も早く收斂する様にする.

$\sqrt{\frac{g}{a}}t$ 並びに Ω が h に比し更に大きく $h < t' \approx \Omega$ である場合には (44) を

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= \int_0^\infty \phi(\zeta) e^{t' \zeta} d\zeta \\ I_2 &= \int_0^\infty \phi(\zeta) e^{t' \zeta^2} d\zeta \\ \text{但し } \phi(\zeta) &= \zeta e^{-h\zeta^2} \\ L_1(\zeta) &= i(\zeta^2 \Omega + \zeta t') \\ L_2(\zeta) &= i(\zeta^2 \Omega - \zeta t') \end{aligned} \right\} \dots\dots(45)$$

と書く. $\phi(\zeta)$ は $e^{t' \zeta}$ に比し變化が極めて遅い. 鞍點の位置は $L'(\zeta) = 0$ で與へられる. 即ち

$$\left. \begin{aligned} \zeta_{1s} &= -\frac{t'}{2\Omega} \\ \zeta_{2s} &= +\frac{t'}{2\Omega} \end{aligned} \right\} \dots\dots(46)$$

今 $\zeta = \xi + i\eta$ と書けば

$$\left. \begin{aligned} L_1(\zeta) &= -\{2\xi\eta\Omega + \eta t'\} + i\{(\xi^2 - \eta^2)\Omega + \xi t'\} = R_1 + iI_1 \\ L_2(\zeta) &= -\{2\xi\eta\Omega - \eta t'\} + i\{(\xi^2 - \eta^2)\Omega - \xi t'\} = R_2 + iI_2 \end{aligned} \right\} \dots\dots(47)$$

従つて鞍點 ζ_{1s}, ζ_{2s} に於いては

$$\left. \begin{aligned} R &= 0, \\ I &= \frac{t'^2}{4\Omega^2}, \end{aligned} \right\} \dots\dots(48)$$

である. 又原點に於いては $R = 0, I = 0$. 従つて I_1 に對する積分路は原點より

$$(\xi^2 - \eta^2)\Omega + \xi t' = 0 \quad \dots\dots(49)$$

即ち

$$\left(\xi + \frac{t'}{2\Omega}\right)^2 - \eta^2 = \frac{t'^2}{4\Omega^2} \quad \dots\dots(49')$$

なる双曲線上を $e^{t' \zeta} \infty$ に至るものである. 此の双曲線は $\xi + \frac{t'}{2\Omega} = \eta$ なる漸近線を持

つもので、第 6 圖 C_1 で示してある。同圖斜線の部分は $R_1 > 0$ の部分を示す。

次に I_2 積分の積分路は前と同様に原点より

$$\left(\xi - \frac{t'}{2\Omega}\right)^2 - \eta^2 = \frac{t'^2}{4\Omega^2} \quad \dots\dots(50)$$

なる双曲線上を $-e^{i\frac{\pi}{4}}\infty$ に至り、更に其處より $I_2 = I_2$ で與へられる二直線の一つに沿ひ、鞍點を通過して $e^{i\frac{\pi}{4}}\infty$ に至るものである事は明かである。此等は第 7 圖に C_2, C_3 で示した。然るに C_1 と C_2 とは原点に對し對稱であり、又

$$\phi(-\zeta) = -\phi(\zeta), \quad L_1(-\zeta) = L_2(\zeta)$$

であるので C_1 上の積分は C_2 上の積分と等しい。従つて $I_1 - I_2$ に於て相殺するから、吾々は唯 C_3 上の積分のみを計算すればよい。

C_3 上の積分は主として鞍點附近のみが効いて來るから、今 $\zeta = \zeta_{2s} + \varepsilon e^{i\frac{\pi}{4}}$ と置けば

$$\begin{aligned} \int_{C_3} \phi(\zeta) e^{i\Omega\zeta} d\zeta &= \phi(\zeta_{2s}) e^{i\Omega\zeta_{2s}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\varepsilon^2 2\Omega} d\varepsilon \cdot e^{i\frac{\pi}{4}} \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{\Omega}} \phi(\zeta_{2s}) e^{i\Omega\zeta_{2s}} e^{i\frac{\pi}{4}} \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{\Omega}} \frac{t'}{2\Omega} e^{-h\left(\frac{t'}{2\Omega}\right)^2} e^{-\frac{t'^2}{4\Omega}} e^{i\frac{\pi}{4}} \end{aligned} \quad \dots\dots(51)$$

となる。従つて此れを (44) に代入し、 Ω を其の近似値 r/a で置換へれば

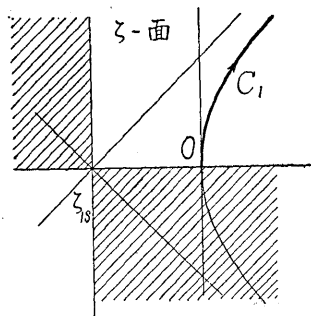
$$\frac{\pi a^2}{V} \xi = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{a^2 t}{r^2} e^{-\frac{gH^2}{4r^2}} \sin \frac{gt^2}{4r} \quad \dots\dots(52)$$

となる。此式は波は一定の加速度を以て傳播する事を示してゐる。波の先端に於ては波長は無限に長いから、其の速度も無限に大きく、無限遠の場所でも、地變と同時に動き出す事になる。而して波長は波の後部になる程、又は時間の経過する程少くなる。然し

$$\frac{a^2 t}{r} e^{-\frac{gH^2}{4r^2}} \quad \dots\dots(53)$$

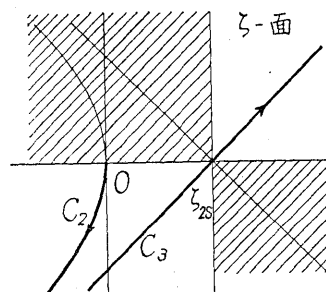
なる項は $\sqrt{gH}t = \sqrt{2}r$ の所に極大を有するから、波の最初の山から數へて

$$\frac{r}{4H\pi} + \frac{3}{4} \quad \dots\dots(54)$$



第 6 圖

斜線は $R > 0$ の部分を示す



第 7 圖

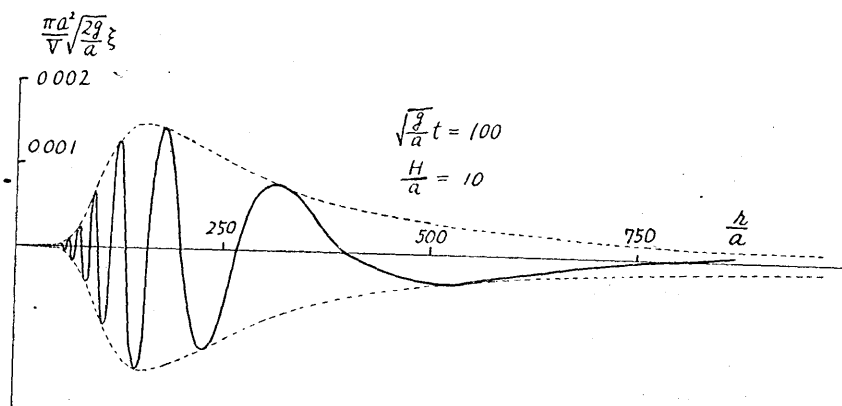
斜線は $R > 0$ の部分を示す

に最も近い整数番目の山が最大の波高を持つてゐる。然し (53) の極大値が

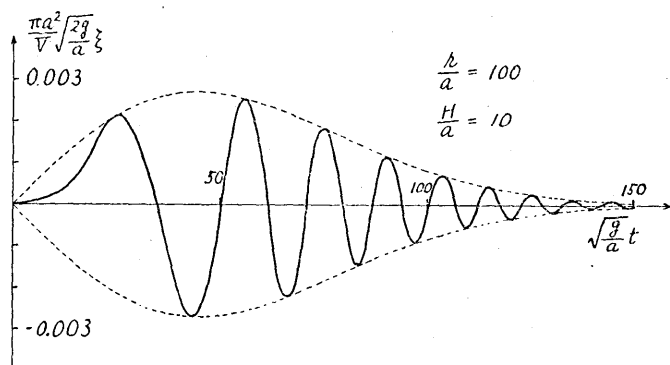
$$\frac{\sqrt{2}e^{-2}}{\sqrt{gH}} \cdot \frac{a}{r} \quad \dots\dots(55)$$

であるから、 r/a と \sqrt{H} と逆比例し、浅い海の場合に比し一般に波高は極く小さい。

第 8 圖、第 9 圖に深海津浪の一例として $r/a=100$, $H/a=10$ の場合を示してある。



第 8 圖



第 9 圖

次に ν や Ω がそれ程大きくない場合、即ち $h \approx \nu \approx \Omega$ の場合には (45) は

$$\left. \begin{aligned} \phi(\zeta) &= \zeta \\ L_1(\zeta) &= -h\zeta^2 + i(\zeta^2\Omega + \zeta\nu) \\ L_2(\zeta) &= -h\zeta^2 + i(\zeta^2\Omega - \zeta\nu) \end{aligned} \right\} \dots\dots(56)$$

と書かれねばならぬ。従つて

$$\zeta_{1s} = \frac{-\Omega\nu}{2(h^2 + \Omega^2)} + i \frac{h\nu}{2(h^2 + \Omega^2)} \equiv \xi_{1s} + i\eta_{1s} \quad \dots\dots(57)$$

次に $\zeta = \xi + i\eta$ と書けば

$$\begin{aligned} L_1(\zeta) &= [-h(\xi^2 - \eta^2) - \eta t' - 2\Omega \xi \eta] + i[-2h\xi\eta + \xi t' + \Omega(\xi^2 - \eta^2)] \\ &\equiv R_1 + iI_1 \end{aligned} \quad \dots\dots(58)$$

$$I_1(\zeta_{1s}) = \frac{-\Omega t'^2}{4(h^2 + \Omega^2)} \quad \dots\dots(59)$$

$$I_1(0) = 0 \quad \dots\dots(60)$$

従つて $I_1 = 0$ 及び $I_1 - I_1(\zeta_{1s}) = 0$ が積分路を與へる。今座標を移動回転して

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \xi_{1s} + X \cos \alpha + Y \sin \alpha \\ \eta &= \eta_{1s} - X \sin \alpha + Y \cos \alpha \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots(61)$$

とすれば $I_1 - I_1(\zeta_{1s}) = 0$ は

$$(h \sin 2\alpha + \Omega \cos 2\alpha)(X^2 - Y^2) + 2(\Omega \sin 2\alpha - h \cos 2\alpha)XY = 0 \quad \dots\dots(62)$$

となる。故に若し α を

$$\tan 2\alpha = \frac{-\Omega}{h} = \frac{\xi_{1s}}{\eta_{1s}} \quad \dots\dots(62)$$

なる様に撰ぶならば $X=0$, 又は $Y=0$ が ζ 面の谷筋を與へる。其の何れでれるかを判定する爲に $R_1 - R_1(\zeta_{1s})$ を求めれば

$$\begin{aligned} R_1 - R_1(\zeta_{1s}) &= (h \cos 2\alpha - \Omega \sin 2\alpha)(Y^2 - X^2) \\ &= \sqrt{h^2 + \Omega^2}(Y^2 - X^2) \end{aligned} \quad \dots\dots(64)$$

従つて Y 軸は尾根筋であり, X 軸が谷筋である。又原点より出發する積分路は (62) により

$$2(\Omega \sin 2\alpha - h \cos 2\alpha)XY + I_1(\zeta_{1s}) = 0$$

即ち

$$XY = -\frac{\Omega t'^2}{8(\sqrt{h^2 + \Omega^2})^3} \quad \dots\dots(65)$$

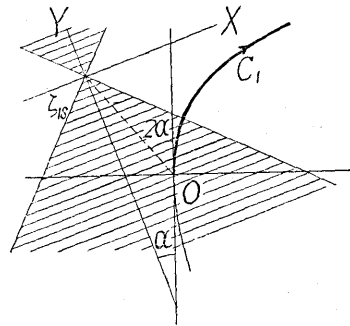
なる双曲線である。従つて (45) I_1 の積分路は第 10 圖 C_1 でなければならぬ。

積分 I_2 に関しては

$$\begin{aligned} \zeta_{2s} = \xi_{2s} + i\eta_{2s} &= \frac{\Omega t'}{2(h^2 + \Omega^2)} + i \frac{-ht'}{2(h^2 + \Omega^2)} \\ &\dots\dots(66) \end{aligned}$$

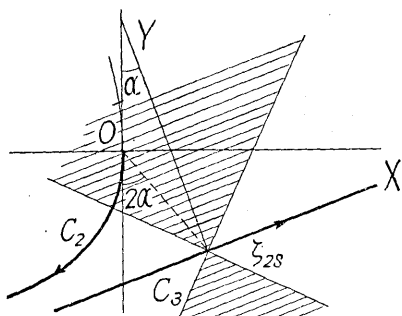
$$\begin{aligned} L_2(\zeta) &= [-h(\xi^2 - \eta^2) + \eta t' - 2\Omega \xi \eta] + i[-2h\xi\eta - \xi t' + \Omega(\xi^2 - \eta^2)] \\ &\equiv R_2 + iI_2 \end{aligned} \quad \dots\dots(67)$$

$$I_2(\zeta_{2s}) = \frac{-\Omega t'^2}{4(h^2 + \Omega^2)}, \quad I_2(0) = 0, \quad R_2(\zeta_{2s}) = \frac{-ht'}{4(h^2 + \Omega^2)} \quad \dots\dots(68)$$



第 10 圖
斜線は $R > R_s$ の部分を示す

$$R_2 - R_2(\zeta_2) = \sqrt{h^2 + Q^2} (Y^2 - X^2) \quad \dots\dots(69)$$



第 11 圖

斜線は $R > R_s$ の部分を示す

として

$$\begin{aligned} \int_{(C_3)} \phi(\zeta) e^{i2(\zeta)} d\zeta &= \phi(\zeta_2) e^{i2(\zeta_2)} \cdot e^{-i\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-s^2 \sqrt{Q^2 + h^2}} \cdot d\varepsilon \\ &= -\frac{it'}{2p} e^{-\frac{h'^2}{4p^2}} \cdot e^{-\left(\frac{Q'^2}{4p^2} + 3\alpha\right)i} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{p}} \quad \dots\dots(70) \end{aligned}$$

$$\text{但し } p^2 = Q^2 + h^2$$

となるから、此れを (44) に代入すれば

$$\frac{\pi\alpha^2}{V} \xi = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{t}{\sqrt{Qp^3}} e^{-\frac{gHh^2}{4p^2a^2}} \cdot \cos\left(\frac{Q \cdot gt^2}{4p^2a} + \frac{\pi}{4} + 3\alpha\right)$$

又は $\alpha Q \approx r$, $\alpha^2 p^2 = \alpha^2 Q^2 + H^2 = r^2 + H^2$, 及び

$$2\beta = \tan^{-1} \frac{r}{H} = -2\alpha$$

を代入すれば

$$\begin{aligned} \frac{\pi\alpha^2}{V} \xi &= \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{a^2 t}{\sqrt{r(H^2 + r^2)}} e^{-\frac{gHh^2}{4(H^2 + r^2)}} \sin\left(\frac{rgt^2}{4(H^2 + r^2)} + \frac{3}{4}\pi - 3\beta\right) \\ \beta &= \frac{1}{2} \tan^{-1} \frac{r}{H} \quad \dots\dots(71) \end{aligned}$$

を得る。此の式は $\frac{H}{r} \rightarrow 0$ のとき前の (52) 式と一致する。

6. 中庸の深さの海の場合。今までと同様に

$$\left. \begin{aligned} ka &= m, & \lambda/a &= s, & H/a &= h, & r/a &= \rho \\ \sqrt{h^2 + \rho^2} &= p, & \sqrt{\rho^2 - 2\rho s \cos \omega + s^2} &= Q \end{aligned} \right\} \dots\dots(72)$$

と書けば (29) 式は

$$\frac{\pi a^2}{V} \xi(t) = \int_0^\infty \frac{\sin \gamma t}{\gamma \cosh mh} J_0(m\rho) m dm \int_0^1 J_0(ms) s ds$$

$$\gamma = \sqrt{\frac{g}{a} m \tanh mh} \quad \dots\dots(73)$$

今 $mh=z$ と書き、且つ原点から遠い所のみを取扱ふ事として、 $J_0(mQ)$ の漸近式を用ひ、且つ Q を ρ で置換へれば結局 (73) は

$$\frac{\pi a^2}{V} \xi(t) = \sqrt{\frac{a}{4gh^3}} \int_0^\infty \frac{\sin \gamma t J_0\left(\frac{Q}{h} z\right)}{\sqrt{z \tanh z} \cdot \cosh z} z dz$$

$$= \sqrt{\frac{a}{\pi g h^2 Q}} \int_0^\infty \frac{\sin \gamma t \cos\left(\frac{Q}{h} z - \frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{\sinh 2z}} dz$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{a}{\pi g h^2 Q}} \Re \frac{e^{-\frac{\pi}{4} i}}{i} [I_1 - I_2] \quad \dots\dots(74)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{但し } I_1 &= \int_0^\infty \frac{e^{i\left(\frac{Q}{h} z + \gamma t\right)}}{\sqrt{\sinh 2z}} dz \\ I_2 &= \int_0^\infty \frac{e^{i\left(\frac{Q}{h} z - \gamma t\right)}}{\sqrt{\sinh 2z}} dz \end{aligned} \right\} \dots\dots(75)$$

(75) の値を求めるのに、吾々は所謂定常位相法を用ふる事とする。 I_1, I_2 の integrand の定常點は夫々

$$\left. \begin{aligned} \frac{Q}{h} + \frac{d\gamma}{dz} t &= 0 \\ \frac{Q}{h} - \frac{d\gamma}{dz} t &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots(76)$$

で定められる。然るに γ は z と共に單調に増加する奇函數であるから $\frac{d\gamma}{dz}$ は正の偶函數である。従つて I_1 の integrand は實軸上に定常點を持たない。従つて I_2 の ξ への寄與は極く小さい¹⁴⁾。今 (76) 第 2 式の根を z_0 とすると、(75) から判る通り

$$V_0 \equiv \frac{H\gamma_0}{z_0} \quad \dots\dots(77)$$

は明かに、 z_0 で定められる波長を持つ波の位相速度を示すものであるから、此波の群速度 U_0 は

$$U_0 = \frac{\partial}{\partial z_0} (z_0 V_0) = H\gamma_0' \quad \dots\dots(78)$$

14) 此れは内方へ進む波を示すものと見らる。従つて原点より遠い所では殆んど零である事は明かである。

で、此れは (76) により $r_0' = \Omega/h t$ (79)

でなければならない。然るに z の小さい所では

$$r_0' = \sqrt{\frac{g}{H}} \left(1 - \frac{1}{2} z_0^2 \dots \right) \quad \dots\dots(80)$$

であり、 $z_0 \rightarrow \infty$ の時は r_0' は單調に 0 に近づく。従つて \sqrt{gH} より大きな群速度はない。

故に若し $a\Omega > \sqrt{gH} \cdot t$ ならば實軸上には定常點なく、 $a\Omega = \sqrt{gH} \cdot t$ のときは $z_0 = 0$ が唯一の定常點、又 $a\Omega < \sqrt{gH} \cdot t$ ならば一般に z_0 及び $-z_0$ の二つの定常點がある¹⁵⁾。

次に $\Omega/h - \gamma t$ を z_0 の近傍で展開して

$$\frac{\Omega}{h} z - \gamma t = \left(\frac{\Omega}{h} z_0 - \gamma_0 t \right) - \frac{1}{2} \gamma_0'' t (z - z_0)^2 - \frac{1}{6} \gamma_0''' t (z - z_0)^3 \quad \dots\dots(81)$$

と書く事が出来る。 γ_0'' は常に $\gamma_0'' \leq 0$ であるが $z_0 = 0$ で $\gamma_0'' = 0$ となる。之に反し γ_0''' は $z_0 = 0$ で正、 $z_0 \rightarrow \infty$ で負、其の中間で 0 になる。従つて中庸の z_0 、即ち $a\Omega < \sqrt{gH} t$ で此の差が相當なる場合には、更に換言すれば中庸の群速度については、 t 、 $(z - z_0)$ の大きさを適當に取り

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2} \gamma_0'' t (z - z_0)^2 &\gg 1 \\ \frac{1}{6} \gamma_0''' t (z - z_0)^3 &\ll 1 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots(82)$$

なるものと考へる事が出来る。例へば $0(\gamma_0''/\gamma_0') = 1$ の時、 $(z - z_0) = t^{-\frac{5}{12}}$ 。

従つて

$$I_2 = \frac{e^{i\left(\frac{\Omega}{h} z_0 - \gamma_0 t\right)}}{\sqrt{\sinh 2z_0}} \int_{z_0 - \varepsilon}^{z_0 + \varepsilon} e^{-\frac{i}{2} \gamma_0'' t (z - z_0)^2} dz = \frac{e^{i\left(\frac{\Omega}{h} z_0 - \gamma_0 t\right)}}{\sqrt{\sinh 2z_0}} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} e^{-\frac{i}{2} \gamma_0'' t \tau^2} d\tau \quad \dots\dots(83)$$

$$\text{今} \quad \sigma^2 = -\frac{1}{2} \gamma_0'' t \tau^2 = \frac{1}{2} |\gamma_0''| t \tau^2 \quad \dots\dots(84)$$

と書けば

$$I_2 = \frac{e^{i\left(\frac{\Omega}{h} z_0 - \gamma_0 t\right)}}{\sqrt{\sinh 2z_0}} \left(\frac{2}{|\gamma_0''| t} \right)^{\frac{1}{2}} \int_{-\left(\frac{|\gamma_0''| t}{2}\right)^{\frac{1}{2}}}^{\left(\frac{|\gamma_0''| t}{2}\right)^{\frac{1}{2}}} e^{i\sigma^2} d\sigma \quad \dots\dots(85)$$

然るに (82) により $\frac{1}{2} \gamma_0'' t \varepsilon^2 \gg 1$ であるから $t \rightarrow \infty$ と共に $\left(\frac{|\gamma_0''| t}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \varepsilon \rightarrow \infty$ 、よつて

15) $\frac{\Omega}{h} z - \gamma t = 0$ の鞍點は $\pm \infty$ より次第に 0 に近づき、 $a\Omega = \sqrt{gH} \cdot t$ のとき 0 と一致し、 $a\Omega > \sqrt{gH} \cdot t$ のとき虚軸上を 0 から $\pm \frac{\pi}{2} i$ まで移動する。

$$I_2 = \frac{e^{i\left(\frac{\Omega}{h}z_0 - \gamma_0 t\right)}}{\sqrt{\sinh z_0}} \left(\frac{2}{|\gamma_0''|t} \right)^{\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\sigma^2} d\sigma = \left(\frac{2\pi}{|\gamma_0''|t} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{e^{i\left(\frac{\Omega}{h}z_0 - \gamma_0 t + \frac{\pi}{4}\right)}}{\sqrt{\sinh 2z_0}} \quad \dots\dots(86)$$

従つて (74) より

$$\frac{\pi a^2}{V} \xi = \left(\frac{a}{2gh^2 \Omega t |\gamma_0''|} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{\sin\left(\gamma_0 t - \frac{\Omega}{h}z_0\right)}{\sqrt{\sinh 2z_0}} \quad \dots\dots(87)$$

以上の結果は $z_0 \rightarrow 0$ 即ち群速度が \sqrt{gH} に近づくに従つて、換言すれば津浪の先端に近づくに従つて、近似度が落ちて来る。それは $\gamma_0'' \rightarrow 0$ であるからである。

特に $a\Omega = \sqrt{gH} \cdot t$ の時は $z_0 = 0$, 従つて

$$\gamma_0 = 0, \quad \gamma_0' = \sqrt{g/H}, \quad \gamma_0'' = 0, \quad \gamma_0''' = \sqrt{g/H} \quad \dots\dots(88)$$

となる。従つて (81) は

$$\begin{aligned} \left(\frac{\Omega}{h}z - \gamma t \right) &= \left(\frac{\Omega}{h}z_0 - \gamma_0 t \right) - \frac{1}{6} \gamma_0''' t (z - z_0)^3 - \frac{1}{24} \gamma_0^{(4)} t (z - z_0)^4 \\ &= \frac{1}{6} \sqrt{\frac{g}{H}} \cdot t \cdot z^3 - \dots\dots \end{aligned} \quad \dots\dots(88')$$

となる。従つて前と同様の議論によつて次式を得。但し此の場合には $\sinh 2z$ も同時に 0 に近づく事を注意せねばならぬ。

$$I_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \int_0^z e^{\frac{i}{6} \sqrt{\frac{g}{H}} \cdot t \cdot z^3} \frac{dz}{\sqrt{z}} \quad \dots\dots(89)$$

$$\begin{aligned} &= \left(\frac{3}{4} \frac{h}{\Omega} \right)^{\frac{1}{6}} \int_0^{\infty} e^{i\sigma^3} \frac{d\sigma}{\sqrt{\sigma}} \\ &= 2 \left(\frac{3}{4} \frac{h}{\Omega} \right)^{\frac{1}{6}} \int_0^{\infty} e^{iu^3} \cdot du \end{aligned} \quad \dots\dots(90)$$

従つて $u = \sqrt[6]{\frac{\pi}{12}} \cdot t$ と置き

$$\int_0^{\infty} e^{-x^p} dx = \Pi\left(\frac{1}{p}\right), \quad p > 0 \quad \dots\dots(91)$$

なる公式を用ふれば

$$I_2 = 2 \left(\frac{3}{4} \frac{h}{\Omega} \right)^{\frac{1}{6}} e^{\frac{\pi}{12} i} \Pi\left(\frac{1}{6}\right)$$

従つて (74) より

$$\begin{aligned} \frac{\pi a^2}{V} \xi &= \sqrt{\frac{a}{\pi g h^2 \Omega}} \left(\frac{3}{4} \frac{h}{\Omega} \right)^{\frac{1}{6}} \Pi\left(\frac{1}{6}\right) \sin \frac{\pi}{6} \\ &= 0.464 \sqrt{\frac{a}{\pi g h^2 \Omega}} \left(\frac{3}{4} \frac{h}{\Omega} \right)^{\frac{1}{6}} \end{aligned} \quad \dots\dots(92)$$

此れは津浪の先端丁度 $a\Omega = \sqrt{gH} \cdot t$ なる一點の ξ を與へるものである。(92) から判る通りこれは $\Omega^{-\frac{2}{3}}$ の様に減少してゆく。

扱て前に戻つて、前述の如く波の先端附近に於ては (81) の第 2 項も第 3 項も同じ Order であり得るから、吾々は其の兩方を保存して計算せねばならぬ。即ち

$$I_2 = e^{i\left(\frac{\Omega}{h}z_0 - \gamma_0 t\right)} \int_{-z}^z \frac{e^{-i\frac{1}{2}\gamma_0 \tau^2 - \frac{i}{6}\gamma_0'' \tau^3}}{\sqrt{\sinh 2z}} d\tau \quad \dots\dots(95)$$

$$\tau = z - z_0$$

此れは前同様の法方でも積分出来るであらうが、此處では、 $\left(\frac{\Omega}{h}z - \gamma t\right)$ を $z=0$ の周囲に展開する。然し吾々の場合には被積分函数が分母に $\sqrt{\sinh 2z}$ を持つから Hogner¹⁴⁾ の様に Airy の積分を利用するわけにはゆかぬ。

(88) により

$$\left(\frac{\Omega}{h}z - \gamma t\right) = \left(\frac{\Omega}{h} - \sqrt{\frac{g}{H}}t\right)z + \frac{1}{6}\sqrt{\frac{g}{H}}t \cdot z^3 + \dots\dots \quad \dots\dots(88'')$$

今

$$v = \left(\frac{1}{6}\sqrt{\frac{g}{H}}t\right)^{\frac{1}{3}} \cdot z \quad \dots\dots(94)$$

$$m = \frac{\sqrt{gH} \cdot t - a\Omega}{\left(\frac{H^2}{6}\sqrt{gH} \cdot t\right)^{\frac{1}{3}}} \quad \dots\dots(95)$$

とすれば

$$I_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{6}\sqrt{\frac{g}{H}}t\right)^{-\frac{1}{6}} \int_0^\infty \frac{e^{i(v^3 - mv)}}{\sqrt{v}} dv$$

$$= 2 \left(\frac{3}{4} \frac{H^{\frac{1}{2}}}{g^{\frac{1}{2}}t}\right)^{\frac{1}{6}} \int_0^\infty e^{i(u^3 - mu^2)} du \quad \dots\dots(96)$$

$$= 2 \left(\frac{3}{4} \frac{H^{\frac{1}{2}}}{g^{\frac{1}{2}}t}\right)^{\frac{1}{6}} [C(m) + iS(m)] \quad \dots\dots(97)$$

但し

$$\left. \begin{aligned} C(m) &= \int_0^\infty \cos(u^3 - mu^2) du \\ S(m) &= \int_0^\infty \sin(u^3 - mu^2) du \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots(98)$$

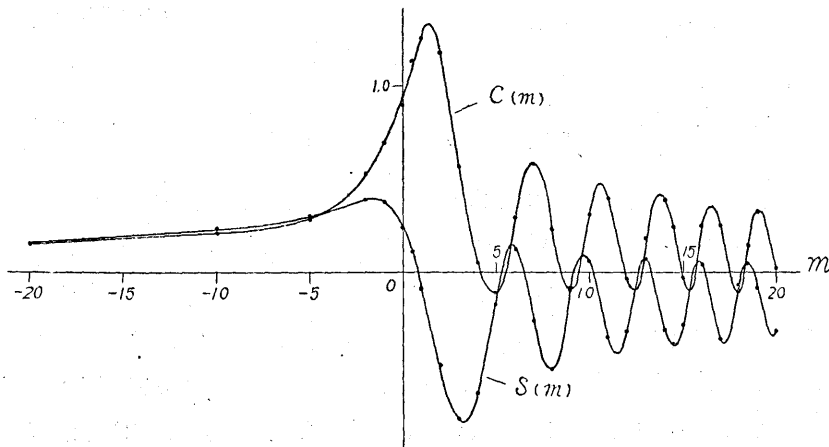
(98) の積分は既知函数で表す事は六ケしいが、其の数は数値計算により容易に求める事が出来る。其の概略値は次の如くである。

16) Arkiv. f. Math. Astr. och. Phys., 17 (1923), 1.

第 III 表 $C(m)$ 及 $S(m)$

m	$C(m)$	$S(m)$	$C(m)-S(m)$	m	$C(m)$	$S(m)$	$C(m)-S(m)$
-20	+0.144	+0.140	+0.004	9	-0.086	-0.178	+0.092
-10	+0.226	+0.208	+0.018	10	+0.316	+0.058	+0.258
-5	+0.274	+0.296	-0.022	11	+0.410	-0.340	+0.750
-2	+0.516	+0.378	+0.138	12	-0.032	-0.328	+0.296
-1	+0.690	+0.376	+0.314	13	+0.174	+0.064	+0.110
0	+0.880	+0.230	+0.650	14	+0.384	-0.318	+0.702
0.5	+0.936	+0.098	+0.838	14.5	+0.142	-0.396	+0.538
1	+0.050	-0.086	+1.136	15	-0.032	-0.298	+0.266
2	+0.968	-0.496	+1.464	16	+0.244	+0.040	+0.204
3	+0.566	-0.780	+1.356	17	+0.244	-0.370	+0.614
4	+0.058	-0.648	+0.706	18	-0.114	-0.090	-0.024
5	-0.106	-0.180	+0.074	18.5	+0.108	+0.040	+0.068
6	+0.288	+0.120	+0.148	19	+0.332	-0.092	+0.424
7	+0.574	-0.246	+0.820	20	+0.016	-0.330	+0.346
8	+0.228	-0.526	+0.754				

第 12, 13 圖は $S(m)$, $C(m)$ 及び $C(m)-S(m)$ を示してゐる.



第 12 圖

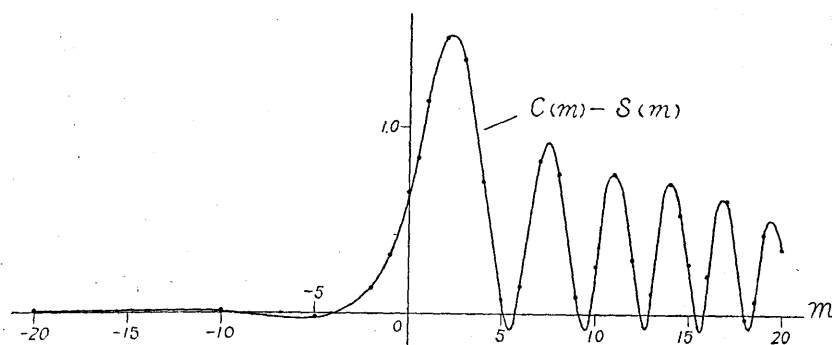
扨て (97) を (74) に代入する時は

$$\frac{\pi a^2}{V} \xi = \sqrt{\frac{a}{\pi g h^2 \Omega}} \left(\frac{3}{4} \frac{H^{\frac{1}{2}}}{g^{\frac{1}{2}} t} \right)^{\frac{1}{6}} \frac{1}{\sqrt{2}} [C(m) - S(m)] \quad \dots\dots(99)$$

となり, $a\Omega = \sqrt{gH} \cdot t$ の場合には完全に (92) と一致する.

(95) から判明する通り, t が一定の時, m は波の先端 $\sqrt{gH}t$ の場所から後方へ測つた距離に比例してゐるから, 前掲第 12 圖の $C(m)-S(m)$ の曲線は其のまゝ或る時刻に於ける波の ξ に比例したものを示すのである.

又此の場合は Ω が非常に大きく、従つて t が非常に大きい場合であるから、 T が可成の大きさでも $T/t \ll 1$ である。従つて (99) の t に $t-T$ と入れた場合、



第 13 圖

$\left(\frac{1}{t}\right)^{\frac{1}{6}}$ は殆んど變化しないし、又 m の値も極く少しく減少するだけである。故に ζ の値は (99) を t で微分したものに殆んど等しい。即ち

$$\begin{aligned} \frac{\pi a^2}{V} \zeta &\approx \sqrt{\frac{a^4}{\pi g H^2 r}} \left(\frac{3}{4} \frac{H}{\sqrt{g H} \cdot t} \right)^{\frac{1}{6}} \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{g H}}{\left(\frac{H^2}{6} \sqrt{g H} \cdot t \right)^{\frac{1}{3}}} \frac{d}{dm} [C(m) - S(m)] \\ &= \left(\frac{27}{2} \right)^{\frac{1}{6}} \frac{a^2}{\pi^{\frac{1}{2}} r^{\frac{1}{2}} t^{\frac{1}{2}} g^{\frac{1}{2}} H^{\frac{5}{4}}} \cdot \frac{d}{dm} [C(m) - S(m)] \quad \dots\dots (100) \end{aligned}$$

従つて波高は距離の平方根並に時間の平方根に逆比例する。然し此れは r, t の一方を固定した時の事で、波の先端附近に於いては大體 $\sqrt{g H} t \approx a \Omega$ が成立つから、波が傳播するに随つて波高が減少する割合は距離に逆比例する事になる。此れは勢力の考へから一見奇異であるが、此の時波長も同時に長くなるのであるからであらう。

次に z_0 が非常に大きい場合を考へて見やう。 z_0 が大きい事は群速度が小さい事を意味する。即ち $a \Omega / \sqrt{g H} \cdot t \ll 1$ の場合で、非常に深い海の場合、或は波群の尾部、即ち浪原に近い所に當るのである。此の時には

$$r'_0 = \sqrt{\frac{g}{H}} \frac{d}{dz_0} \sqrt{z_0 \tanh z_0} \rightarrow \sqrt{\frac{g}{H z_0}} = \frac{a \Omega}{H t} \quad \dots\dots (101)$$

から

$$\left. \begin{aligned} z_0 &= \frac{g H t^2}{4 a^2 \Omega^2}, & r_0 &= \frac{g t}{2 a \Omega} \\ r_0'' &= -\frac{1}{4} \sqrt{\frac{g}{H}} \left(\frac{g H t^2}{4 a^2 \Omega^2} \right)^{-\frac{3}{2}} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots (102)$$

となる。此の場合には r_0''' 及高次の微分係數も 0 に近づくが、(82) の條件は満足されるから、上記 (102) を (87) に代入し $a\Omega$ を r で置換へれば

$$\frac{\pi a^2}{V} \xi = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{a^2 t}{r^2} e^{-\frac{g H t^2}{4 r^2}} \sin \frac{g t^2}{4 r} \quad \dots (103)$$

を得る。此式は前に深い海の時に得た (52) と全然同じものである。此の事から前に取扱つた深い海の場合は、中庸の深さを有する海の場合の波群の尾部、或は浪源の近くの場所の有様をも示すものである事が判る。

7. 結語。以上によつて、種々の深さの海に發生する津浪の大體の有様を知り得たと思ふ。即ち海が極く浅くて、發生する波が皆長波の性質を具へてゐると考へられる様な場合には津浪の形は (34) で與へられる。此の式は浪源直上に於いても成立つ。浪源から少し離れると浪の形や波長は殆んど一定して来る。此の場合には (34) よりも其の近似式 (42) が便利である。即ち波高は距離の平方根に逆比例して減少してゆく。

海の深さが多少深くなつた場合には浪源から遠へ離れた場所では (99) で表はされる浪が傳はつてゆく。此の場合には多少の分散があるから浪の先端の形は段々に扁平になつてゆくのである。浪頭附近の波長も次第に延びてゆく。此の式は浪頭附近と其の後方若干の所に對して成立つものである事は式の導き方から明かである。波群の中程の部分、即ち波頭と浪源との中央あたりでは (87) の式が成立つ。浪の尾部になると (103) の式、更に後方では (71) の式が成立つものと思はれる。此等の式で注意すべき事は t の小さい部分、並に餘り浪源に近い所では成立たぬ事である。第 8, 9 圖には此の様な部分まで書き過ぎてあるが大凡極大の邊から左方は近似が非常に悪いものと思はねばならぬ。

海が非常に深い場合には (52) 及 (71) の式が當はまる。海が非常に深いといふ事は分散が非常に大きい事であり、又長波の速度が非常に大きい事を意味するから、海底の地變と同時に遠方が動き出す事もあり得ると考へられる。然し此の場合でも勢力の移動の割合は \sqrt{gH} を越える事はない。

又一方海が深い事は、考へて居る場所が浪源に近い事と同價であるから、此の場合の式と前の場合の波の尾部と同じ式になる事も首肯される。

以上の何れの場合に於ても浪源から遠い所では、波高は地變の體積 V には比例するが、地變地域の半径には關係がなくなつて来る事は面白い。

此の研究は文部省科學研究費を以て爲された事を記し當局各位に深謝の意を表する次第である。又數値計算の勞を取られた相田勇君に謝意を表す。

32. *On Seismic Sea Waves caused by Deformations of the Sea Bottom. (Abstract).*

By Ryūtarō TAKAHASHI,

Earthquake Research Institute,

Tsunami, or seismic sea waves, are largely the result of deformations of the sea bottom, which in turn are caused by great earthquakes. This paper is a theoretical study of such sea waves.

The sea is supposed to have uniform depth H , and the sea water to be incompressible. A circular portion of radius a of the sea bottom was assumed to have depressed during a time interval T by the amount $V/\pi a^2$, so that the total volume of the depression is V . The velocity of the depression was assumed uniform during interval T .

The depression ζ of the water surface at a distance r from the centre of the depressed area, is then given by the expression

$$\begin{aligned}\zeta(t) &= \frac{1}{T} [\xi(t) - \xi(t-T)], & \text{when } t > T, \\ &= \frac{1}{T} \xi(t), & \text{when } t < T.\end{aligned}$$

When the depression takes place quite suddenly, we have, putting $T \rightarrow 0$ in the above expression,

$$\zeta(t) = \frac{\partial}{\partial t} \xi(t).$$

The function $\xi(t)$ for different cases is as follows:

When $H \ll a$, that is, when the sea is very shallow compared with the radius of the depressed area,

$$\frac{\pi a c}{V} \xi = \int d\omega \int \frac{s ds}{\sqrt{\left(\frac{ct}{a}\right)^2 - \Omega^2}},$$

where $c = \sqrt{gH}$, $\Omega = \sqrt{\left(\frac{r}{a}\right)^2 + s^2 - 2s\left(\frac{r}{a}\right) \cos \omega}$, and the integration ought to be performed over the area $s < 1$, $\Omega < \frac{ct}{a}$. As an example, the wave form on and near the disturbed area for the case $T = a/2c$ is given in Fig. 4 in the text.

When $r \gg a$, we have

$$\frac{\pi a c}{V} \xi = \sqrt{\frac{a}{r}} K(\tau), \quad \text{where } \tau = (ct - r)/a.$$

The function $K(\tau)$ and the wave form for this case are given in Fig. 6. The wave front is propagated with the velocity of long waves, decreasing in wave height like $r^{-\frac{1}{2}}$.

When $H \gg a$, that is, when the sea is very deep compared with the radius of the depressed area, we have the approximation

$$\frac{\pi a^2}{V} \xi = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{at^2}{\sqrt{r(H^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}}} e^{-\frac{gHt^2}{4(H^2 + r^2)}} \sin \left(\frac{rgt^2}{4(H^2 + r^2)} + \frac{3}{4}\pi - 3\beta \right),$$

$$\beta = \frac{1}{2} \tan^{-1} r/H$$

or, when $r \gg H$,

$$\frac{\pi a^2}{V} \xi = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{at^2}{r^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{gHt^2}{4r^2}} \sin \frac{gt^2}{4r}.$$

In the text, Figs. 8 and 9 show the wave form for this case.

When $H \approx a$, that is, the sea is moderately deep, we have

$$\frac{\pi a^2}{V} \xi = \sqrt{\frac{a^4}{2\pi g H^2 r}} \left(\frac{3}{4} \frac{H}{\sqrt{gH} \cdot t} \right)^{\frac{1}{6}} [C(m) - S(m)],$$

where

$$C(m) = \int_0^\infty \cos(u^6 - mu^2) du$$

$$S(m) = \int_0^\infty \sin(u^6 - mu^2) du$$

and

$$m = (\sqrt{gH}t - r) \left/ \left(\frac{H^2}{6} \sqrt{gH} \cdot t \right)^{\frac{1}{3}} \right.$$

$C(m)$, $S(m)$ and $C(m) - S(m)$, as calculated by the method of numerical integration, are given in Figs. 12, 13. As will be seen from the above expression, for a given t , m is proportional to the distance measured backwards from the wave front, so that $d[C(m) - S(m)]/dm$ approximately represents the wave form near the wave front.

For the middle part of the wave train, we have

$$\frac{\pi a^2}{V} \xi = \sqrt{\frac{a^4}{2g\pi H^2 r}} \frac{\sin \left(\gamma_0 t - \frac{r}{H} z_0 \right)}{|\gamma_0''| t} \frac{1}{\sqrt{\sinh 2z_0}}$$

where $\gamma = \sqrt{\frac{g}{H}} \sqrt{z \tanh z}$ and z_0 is the root of $\frac{a\Omega}{H} z - \gamma' t = 0$.

For the rear part of the wave train, or when $r \ll \sqrt{gH} \cdot t$, we have

$$\frac{\pi a^2}{V} \xi = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{a^2 t}{r^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{gHt^2}{4r^2}} \sin \frac{gt^2}{4r},$$

which is the same expression as for the case $H \gg \alpha$. Since a large H means a large velocity \sqrt{gH} of the long wave, it is only logical that we have the same expression for the two cases.

It is remarkable that at a great distance from the disturbed area ξ , and consequently ζ as well, depends on V , but not on the radius α of the disturbed area.
