

30. 架構の立體的振動 (第2報)

地震研究所 金 井 清

(昭和17年5月21日發表—昭和17年6月20日受理)

1. 前 書

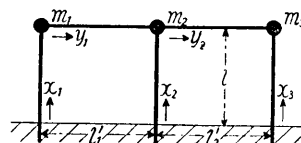
實在の構造物はそれを構成する各部材の剛度分布が不均一であるため、又は床面の荷重が偏在して居るために、一般にその振動の現象は三次元となる。尙、たとへ對稱的構造の平面的架構であつても、架構面に直角な方向に振動するときにはその振動は立體的となる。

故に架構の振動問題を研究するためには是非共その立體的振動を取り扱はねば満足なものとは言へない譯であるが、この問題は數理的に可なり複雑なために、今迄僅かに2, 3の研究があつたに過ぎない。即ち、棚橋教授¹⁾、武藤教授²⁾、筆者³⁾の研究が此の問題に關係して居る。

ここでは極めて簡単な平面的架構即ち2張間1層架構に架構面に直角な方向の強制振動をあたへた場合の立體的振動を取り扱つた。尙構造内部の減衰力、例へば固體粘性のある場合について研究し、柱の剛度分布を色々變へて、夫々の場合について架構の振動周期と共に各柱の振幅、屈曲モーメントをも同時にしらべた。

2. 平面的架構が架構面に直角な方向に強制振動する場合の解式

第1圖の如き平面的架構が架構面に直角な方向の振動をするとき、柱及び梁の状態如何により、たとへ對稱的であつてもその架構は立體的振動をする。



第 1 圖

今、柱の屈曲剛度、振り剛度を夫々 $E_1 I_1$; $G_1 J_1$; $E_2 I_2$; $G_2 J_2$; $E_3 I_3$; $G_3 J_3$ とし梁の屈曲剛度、振り剛度を夫々 $E_1' I_1'$; $G_1' J_1'$; $E_2' I_2'$; $G_2' J_2'$ とする。問題を簡単にするために質量はすべて各節點に集中し、その集中質量を夫々 m_1 , m_2 , m_3 とする。尙、柱高は l 、張間の長さは l_1' , l_2' である。

- 1) 棚橋 諒 建築雜誌 48 (1934), 333~349.
- 2) 武藤 清・高橋正充 建築學會論文集 21 (1941), 234~237, 238~245.
武藤 清・高橋正充 建築學會論文集 23 (1941), 67~74, 75~78.
武藤 清・高橋正充 建築學會論文集 24 (1942), 81~85.
- 3) 金井 清 地震研究所彙報 16 (1938), 256~272, 538~549.

各部材の屈曲及び振り振動方程式は次式で表はされる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^4 u_s}{\partial x_s^4} = 0, \quad \frac{\partial^2 \theta_s}{\partial x_s^2} = 0, \quad [s=1, 2, 3] \\ \frac{\partial^4 w_s}{\partial y_s^4} = 0, \quad \frac{\partial^2 \varphi_s}{\partial y_s^2} = 0, \quad [s=1, 2] \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

茲に u_s, w_s は夫々柱、梁の架構面に直角な方向の変位、 θ_s, φ_s は夫々柱、梁の振り角である。

(1) の解式は次の如くなる。

$$\left. \begin{aligned} u_s &= (A_s + B_s x_s + C_s x_s^2 + D_s x_s^3) e^{i p t}, \\ \theta_s &= (\alpha_s + \beta_s x_s) e^{i p t}, \\ w_s &= (P_s + Q_s y_s + R_s y_s^2 + S_s y_s^3) e^{i p t}, \\ \varphi_s &= (\lambda_s + \mu_s y_s) e^{i p t}, \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} [s=1, 2, 3] \\ [s=1, 2] \end{array} \quad (2)$$

只今の場合の境界条件は次の如く考へられる。

$$x_s = 0; \quad u_s = c e^{i p t}, \quad \theta_s = 0, \quad \frac{d u_s}{d x_s} = 0, \quad [s=1, 2, 3] \quad (3), (4), (5)$$

$$x_1 = l, \quad y_1 = 0; \quad u_1 = w_1, \quad \frac{d u_1}{d x_1} = \varphi_1, \quad \frac{d w_1}{d y_1} = -\theta_1, \quad (6), (7), (8)$$

$$-E_1 I_1 \left(1 + \tau_1 \frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{d^2 u_1}{d x_1^2} + G_1' J_1' \left(1 + \kappa_1' \frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{d \varphi_1}{d y_1} = 0, \quad (9)$$

$$E_1' J_1' \left(1 + \tau_1' \frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{d^2 w_1}{d y_1^2} + G_1 J_1 \left(1 + \kappa_1 \frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{d \theta_1}{d x_1} = 0, \quad (10)$$

$$-E_1 I_1 \left(1 + \tau_1 \frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{d^3 u_1}{d x_1^3} + E_1' J_1' \left(1 + \tau_1' \frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{d^3 w_1}{d y_1^3} = m_1 p^2 u_1, \quad (11)$$

$$x_2 = l, \quad y_1 = l', \quad y_2 = 0;$$

$$u_2 = w_1 = w_2, \quad \frac{d u_2}{d x_2} = \varphi_1 = \varphi_2, \quad \frac{d w_1}{d y_1} = \frac{d w_2}{d y_2} = -\theta_2, \quad (12), (13), (14)$$

$$\begin{aligned} -E_2 I_2 \left(1 + \tau_2 \frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{d^2 u_2}{d x_2^2} - G_1' J_1' \left(1 + \kappa_1' \frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{d \varphi_1}{d y_1} \\ + G_2' J_2' \left(1 + \kappa_2' \frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{d \varphi_2}{d y_2} = 0, \quad (15) \end{aligned}$$

$$-E_1' I_1' \left(1 + \tau_1' \frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{d^2 w_1}{d y_1^2} + E_2' I_2' \left(1 + \tau_2' \frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{d^2 w_2}{d y_2^2}$$

$$+ G_2 J_2 \left(1 + \kappa_2 \frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{d\theta_2}{dx_2} = 0, \quad (16)$$

$$\begin{aligned} -E_2 I_2 \left(1 + \tau_2 \frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{d^3 u_2}{dx_2^3} - E_1' I_1' \left(1 + \tau_1' \frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{d^3 w_1}{dy_1^3} \\ + E_2' I_2' \left(1 + \tau_2' \frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{d^3 w_2}{dy_2^3} = m_2 p^2 u_2, \quad (17) \end{aligned}$$

$$x_3 = l, \quad y_2 = l'; \quad u_3 = w_2, \quad \frac{du_3}{dx_3} = \varphi_2, \quad \frac{dw_2}{dy_2} = -\theta_3, \quad (18), (19), (20)$$

$$-E_3 I_3 \left(1 + \tau_3 \frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{d^3 u_3}{dx_3^3} - G_2' J_2' \left(1 + \kappa_2' \frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{d\varphi_2}{dy_2} = 0, \quad (21)$$

$$-E_2' I_2' \left(1 + \tau_2' \frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{d^2 w_2}{dy_2^2} + G_3 J_3 \left(1 + \kappa_3 \frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{d\theta_3}{dx_3} = 0, \quad (22)$$

$$-E_3 I_3 \left(1 + \tau_3 \frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{d^3 u_3}{dx_3^3} - E_2' I_2' \left(1 + \tau_2' \frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{d^3 w_2}{dy_2^3} = m_3 p^2 u_3. \quad (23)$$

茲に $\tau_1, \tau_2, \tau_3; \tau_1', \tau_2'; \kappa_1, \kappa_2, \kappa_3; \kappa_1', \kappa_2'$ は夫々柱, 梁の屈曲減衰係數及び振り減衰係數を表はす。

(2) に出してある解式を (3)~(23) の条件の中に入れると, 30 元の聯立方程式を得る。これから解式 (2) にある 30 個の常數を決定でき, 従つて各部材の變位を知ることができる譯である。しかし, 只今のやうに常數が多い場合に行列式をそのまま直ちに解くことは極めて繁雜になる恐れがある。ここでは常數を次々に消去して最後に 3 個の常數を残し, 3 元の行列式を解き, 次に消去したときと逆に決まつた常數を次々に條件式に入れて残りのすべての常數を決定する方法を使つた。

即ち最後に残した 3 元の聯立方程式を記すと次の如くなる。

$$\begin{aligned} C_1 \left\{ -\vartheta'^2 \xi^3 (\xi \vartheta + 4\eta) M r_1 + 4\eta \left[\vartheta' \left\{ 3\vartheta' N - 2(\vartheta' + \xi)(\xi \vartheta + \eta) M \right\} \right. \right. \\ \left. \left. + 3\eta (\xi \vartheta + 2\eta)^2 \left\{ 2\eta_0 (\vartheta' + \xi)(\vartheta' + 4\xi) + \vartheta'(5\vartheta' + 8\xi) \right\} \right] \right\} \\ + D_1 \left\{ -\vartheta'^2 \xi^3 (\xi \vartheta + 4\eta) M r_1 + 6 \left[\vartheta' \left\{ 2\vartheta' \eta N - 2\eta (\vartheta' + 2\xi)(\xi \vartheta + \eta) M \right. \right. \right. \\ \left. \left. - \vartheta' \xi^3 (\xi \vartheta + 4\eta) M \right\} + 6\eta^2 (\xi \vartheta + 2\eta)^2 \left\{ \eta_0 (\vartheta' + 2\xi)(\vartheta' + 4\xi) + \vartheta'(3\vartheta' + 8\xi) \right\} \right] \right\} \\ - C_2 4\eta \vartheta' \left\{ \vartheta' (\xi \vartheta + \eta) M + 3\eta_0 \eta (\xi \vartheta + 2\eta)^2 (\vartheta' + 4\xi) \right\} \end{aligned}$$

$$= \vartheta'^2 \xi^3 (\xi \vartheta + 4\eta) M \gamma_1 c; \quad (24)$$

$$\begin{aligned} C_1 & \left\{ 2\vartheta' \xi^3 (\vartheta' + \xi) (\xi \vartheta + 4\eta) r_2 + 12(\vartheta' + \xi) \left[4\vartheta' \eta (\xi \vartheta + \eta) + \eta_0 \left\{ \vartheta' \xi^3 (\xi \vartheta + 4\eta) \right. \right. \right. \\ & \quad \left. \left. \left. + 2\eta (\vartheta' + 4\xi) (\xi \vartheta + \eta) \right\} \right] \right\} \\ & + D_1 \left\{ 3\vartheta' \xi^3 (\vartheta' + 2\xi) (\xi \vartheta + 4\eta) r_2 + 18(\vartheta' + 2\xi) \left[4\vartheta' \eta (\xi \vartheta + \eta) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \eta_0 \left\{ \vartheta' \xi^3 (\xi \vartheta + 4\eta) + 2\eta (\vartheta' + 4\xi) (\xi \vartheta + \eta) \right\} \right] \right\} \\ & + C_2 \left\{ \vartheta'^2 \xi^3 (\xi \vartheta + 4\eta) r_2 - 12\vartheta' \left[2\vartheta' \eta (\xi \vartheta + \eta) + \eta_0 \left\{ \vartheta' \xi^3 (\xi \vartheta + 4\eta) \right. \right. \right. \\ & \quad \left. \left. \left. + \eta (\vartheta' + 4\xi) (\xi \vartheta + \eta) \right\} \right] \right\} = -3\vartheta'^2 \xi^3 (\xi \vartheta + 4\eta) r_2 c; \quad (25) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_1 & \left\{ -r_3 \xi^3 (\xi \vartheta + 4\eta) M \left\{ 2\eta_0 (\vartheta' + \xi) (\vartheta' + 4\xi) + \vartheta' (5\vartheta' + 8\xi) \right\} \right. \\ & \quad + 12 \left[9\vartheta'^2 \eta^2 (\xi \vartheta + 2\eta)^2 + 2M(\vartheta' + \xi) \left\{ \eta_0 \xi^3 (\vartheta' + \xi) (\xi \vartheta + 4\eta) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \vartheta' \xi^3 (\xi \vartheta + 4\eta) - \vartheta' \eta (\xi \vartheta + \eta) \right\} + \eta N \left\{ 2\eta_0 (\vartheta' + \xi) (\vartheta' + 4\xi) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \vartheta' (5\vartheta' + 8\xi) \right\} \right] \left. \right\} \\ & + D_1 \left\{ -3r_3 \xi^3 (\xi \vartheta + 4\eta) M \left\{ \eta_0 (\vartheta' + 2\xi) (\vartheta' + 4\xi) + \vartheta' (3\vartheta' + 8\xi) \right\} \right. \\ & \quad + 18 \left[6\vartheta'^2 \eta^2 (\xi \vartheta + 2\eta)^2 + M \left\{ 2\eta_0 \xi^3 (\vartheta' + \xi) (\vartheta' + 2\xi) (\xi \vartheta + 4\eta) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \vartheta' \xi^3 (3\vartheta' + 4\xi) (\xi \vartheta + 4\eta) - 2\vartheta' \eta (\vartheta' + 2\xi) (\xi \vartheta + \eta) \right\} \right. \\ & \quad \left. \left. + 2\eta N \left\{ \eta_0 (\vartheta' + 2\xi) (\vartheta' + 4\xi) + \vartheta' (3\vartheta' + 8\xi) \right\} \right] \right\} \\ & + C_2 \left\{ r_3 \eta_0 \vartheta' \xi^3 M (\vartheta' + 4\xi) (\xi \vartheta + 4\eta) - 12\vartheta' \left[M \left\{ \vartheta' \eta (\xi \vartheta + \eta) + \eta_0 \xi^3 (\vartheta' + \xi) \right. \right. \right. \\ & \quad \left. \left. \left. (\xi \vartheta + 4\eta) \right\} + \eta_0 \eta N (\vartheta' + 4\xi) \right] \right\} = 3\vartheta'^2 \xi^3 (\xi \vartheta + 4\eta) M \gamma_3 c; \quad (26) \end{aligned}$$

上式に新しく出た記號は次のやうな意味をもつ。

$$\left. \begin{aligned} M &= \xi \partial_0 (\xi \partial + 4\eta) + 8\eta (\xi \partial + 3\eta), \\ N &= \xi \partial_0 (\xi \partial + \eta) (\xi \partial + 4\eta) + \eta (5\xi^2 \partial^2 + 20\xi \partial \eta + 12\eta^2), \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

$$\left. \begin{aligned} \partial &= \frac{G_1 J_1 (1 + ip\kappa_1)}{E_1 I_1 (1 + ip\tau_1)}, & \partial' &= \frac{G_1' J_1' (1 + ip\kappa_1')}{E_1 I_1 (1 + ip\tau_1)} = \frac{G_2' J_2' (1 + ip\kappa_2')}{E_1 I_1 (1 + ip\tau_1)}, \\ \partial_0 &= \frac{G_2 J_2 (1 + ip\kappa_2)}{E_1 I_1 (1 + ip\tau_1)}, & \eta &= \frac{E_1' I_1' (1 + ip\tau_1')}{E_1 I_1 (1 + ip\tau_1)} = \frac{E_2' I_2' (1 + ip\tau_2')}{E_1 I_1 (1 + ip\tau_1)}, \\ \eta_0 &= \frac{E_2 I_2 (1 + ip\tau_2)}{E_1 I_1 (1 + ip\tau_1)}, & \xi &= \frac{l_1'}{l} = \frac{l_2'}{l}, & \frac{E_3 I_3 (1 + ip\tau_3)}{E_1 I_1 (1 + ip\tau_1)} &= \frac{G_3 J_3 (1 + ip\kappa_3)}{G_1 J_1 (1 + ip\kappa_1)} = 1, \\ \gamma_s &= \frac{m_s p^2 l^3}{E_1 I_1 (1 + ip\tau_1)}. \quad [s=1, 2, 3] \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

(28) を見れば明かな如く (24)~(26) には問題を簡単にするために、中央の柱を中心にして左右全く對稱といふ條件が加へてある。

以上は各部材の諸性質を比較的 generally に亘つて取り扱つたが、次に行ふ數値計算例は總べて下記の條件を入れた特別の場合である。即ち、

$$\left. \begin{aligned} \tau_1 = \tau_2 = \tau_1' = \tau_2' = \kappa_1 = \kappa_2 = \kappa_1' = \kappa_2' &= (\equiv \tau), & m_1 = m_2 = m_3 &= (\equiv m), \\ G_1 J_1 = E_1 I_1, & G_2 J_2 = E_2 I_2, & G_1' J_1' = G_2' J_2' = E_1' I_1' = E_2' I_2' &= (\equiv E' I') \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

である。尙數値計算例に於て ϕ , τ_0 は、

$$\phi = p \sqrt{m l^3 / E_1 I_1}, \quad \tau_0 = \tau \sqrt{E_1 I_1 / m l^3} \quad (30)$$

を示し、

$$\tau_0 = 0.01 \quad (31)$$

とした。

3. 横材と兩側の柱の剛度相等しく ($E' I' / E_1 I_1 = 1$) 中央の柱の剛度

は兩側の柱のその 1/10 倍 ($E_2 I_2 / E_1 I_1 = 1/10$) の場合の數値計算

(29)~(31) 及び $E' I' / E_1 I_1 = 1$, $E_2 I_2 / E_1 I_1 = 1/10$ の條件を (24)~(26) に入れて (2) の常數を決めると、内部抵抗のない場合の架構の振動數の式として次式が得られる。

$$\phi^3 - 24.3923 \phi^2 + 138.807 \phi - 187.496 = 0. \quad (32)$$

(32) から固有振動數を求めると $\phi = m p^2 l^3 / E_1 I_1 = 1.990, 5.612, 16.790$ となる。次に兩側柱及び中央柱の上端變位を表はす式を求めると、

$$\left. \begin{aligned} u_{1_{x_1=i}} &= c \sqrt{\frac{P_1^2 + Q_1^2}{R^2 + S^2}} \exp \left\{ i \left(pt - \tan^{-1} \frac{S}{R} + \tan^{-1} \frac{Q_1}{P_1} \right) \right\}, \\ u_{2_{x_2=i}} &= c \sqrt{\frac{P_2^2 + Q_2^2}{R^2 + S^2}} \exp \left\{ i \left(pt - \tan^{-1} \frac{S}{R} + \tan^{-1} \frac{Q_2}{P_2} \right) \right\}, \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

となる。茲に

$$\left. \begin{aligned} P_1 &= 187.50 - 50.30\phi^2 + 3.005\phi^4, \\ Q_1 &= 0.01\phi(562.5 - 100.51\phi^2 + 3\phi^4), \\ P_2 &= 187.50 - 35.148\phi^2 + 0.30351\phi^4, \\ Q_2 &= 0.01\phi(562.5 - 70.20\phi^2 + 0.3\phi^4), \\ R &= 187.50 - 138.87\phi^2 + 24.406\phi^4 - \phi^6, \\ S &= 0.01\phi(562.5 - 277.63\phi^2 + 24.392\phi^4), \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

である。

(33), (34) を使つて各柱の上端變位を計算したものを第 2 圖及び第 I 表に示した。

次に、柱に働く屈曲モーメントをしらべるために、各柱の上端及び下端の曲率を計算すると次の如くなる。

即ち各柱の上端の曲率は、

$$\frac{d^2u_2}{dx_2^2} \Big|_{x_2=l} \left[= 20 \frac{d^2u_1}{dx_1^2} \Big|_{x_1=l} \right] = \frac{c\phi^2}{l^2} \sqrt{\frac{P_1'^2 + Q_1'^2}{R^2 + S^2}} \exp. \left\{ i \left(pt - \tan^{-1} \frac{S}{R} + \tan^{-1} \frac{P_1'}{Q_1'} \right) \right\}, \quad (35)$$

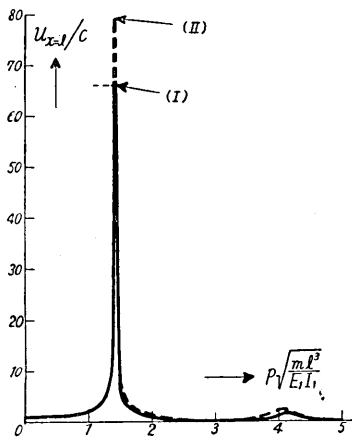
となり、茲に、

$$P' = 72.74 - 12.968\phi^2, \quad Q' = 0.01\phi(145.48 - 12.960\phi^2) \quad (36)$$

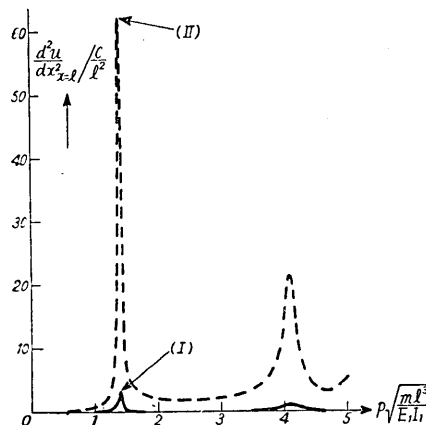
である。各柱の下端の曲率は

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2u_1}{dx_1^2} \Big|_{x_1=0} &= \frac{c\phi^2}{l^2} \sqrt{\frac{P_1'^2 + Q_1'^2}{R^2 + S^2}} \exp. \left\{ i \left(pt - \tan^{-1} \frac{S}{R} + \tan^{-1} \frac{Q_1'}{P_1'} \right) \right\}, \\ \frac{d^2u_2}{dx_2^2} \Big|_{x_2=0} &= \frac{c\phi^2}{l^2} \sqrt{\frac{P_2'^2 + Q_2'^2}{R^2 + S^2}} \exp. \left\{ i \left(pt - \tan^{-1} \frac{S}{R} + \tan^{-1} \frac{Q_2'}{P_2'} \right) \right\}, \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

となり、茲に



第 2 圖 柱上端の變位

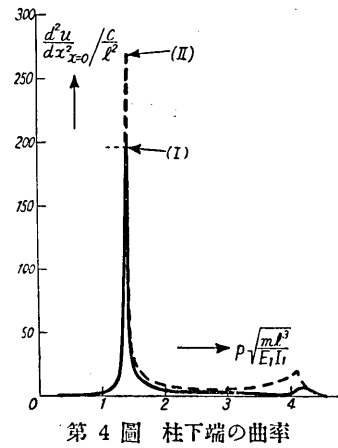


第 3 圖 柱上端の曲率

$$\left. \begin{aligned} P_1' &= 263.868 - 63.8793\phi^2 + 3\phi^4, & Q_1' &= 0.01\phi(527.736 - 63.8529\phi^2), \\ P_2' &= 347.514 - 78.7917\phi^2 + 3\phi^4, & Q_2' &= 0.01\phi(695.028 - 78.7569\phi^2), \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

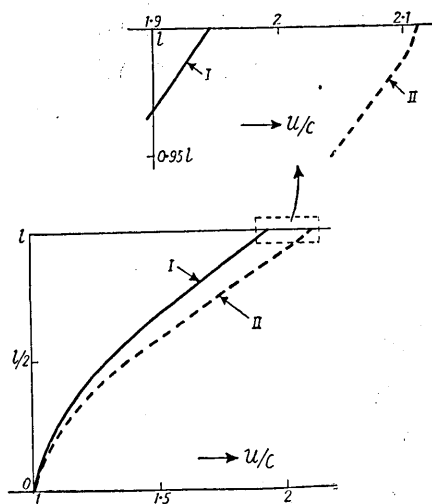
である。(35), (36) 及び (37), (38) を使つて計算した各柱の上, 下端の曲率を夫々第 3, 4 圖及び第 I 表に示してある。

之等の圖を見て直ちにわかることは, 上端の變位, 上, 下端の曲率は何れも中柱が側柱よりも大きいことである。但し, 上端の變位及び下端の曲率は中, 側柱について僅かな差違しかないが, 上端の曲率は中, 側柱の差異が極めて大きく, 此の場合には中柱の曲率は側柱のその20倍である。この事柄は一見不思議のやうであるが, よく考へ



第 I 表

$P\sqrt{\frac{ml^3}{E_1I_1}}$	$u_1_{x_1=l}$	$u_2_{x_2=l}$	$\frac{d^2u_1}{dx_1^2} x_1=l$	$\frac{d^2u_2}{dx_2^2} x_2=l$	$\frac{d^2u_1}{dx_1^2} x_1=0$	$\frac{d^2u_2}{dx_2^2} x_2=0$
0.6	1.208		0.009715	0.1943		
1.0	1.866	2.118	0.04146	0.829	2.816	3.770
1.2	3.445	3.904	0.1105	2.21	7.286	9.821
1.3	6.238		0.4076	8.15		
1.4	42.12	55.15	2.133	42.67	135.4	184.5
1.41	66.16	79.08	3.104	62.1	196.6	268.0
1.411	66.06					
1.42	49.05		2.343	46.87	148.2	202.0
1.5	6.212	7.632	0.3399	6.799	21.12	28.92
1.6	3.157	4.015	0.2033	4.07		
1.8	1.402	1.907	0.1242	2.484		
2.0	0.8324	1.253	0.1028	2.057	4.835	7.769
2.2	0.5575	0.9394	0.09230	1.845		
2.3	0.4637		0.09028	1.806		
2.36	0.4138					
2.365	0.4104					
2.37	0.4095	0.7828	0.08985	1.796	4.183	6.23
2.38	0.4012					
2.39	0.3945		0.08947	1.79		
2.4	0.3882		0.08953	1.79		
2.6	0.2757	0.6569	0.09182	1.836		5.930
3.0	0.03748	0.5618	0.1067	2.135	3.302	5.751
3.5	0.07528		0.1691	3.382		
4.0	0.9685	1.973	0.7466	14.93	2.346	15.57
4.1	1.676		1.068	21.36	6.454	19.76
4.11	1.667		1.054	21.08		
4.2	1.446	1.643	0.6691	13.38	6.414	9.649
4.5	0.4236	0.4232	0.2028	4.052		0.9371
5.0	0.06527	0.1369	0.2701	5.402		



第 5 圖 $mp^{2/3}/E_1I_1=1$ に於ける各柱の變位分布

ために $p\sqrt{ml^3}/E_1I_1=1$ に於ける中、側柱の變位分布を計算して第 5 圖に示した。此の圖で中柱の曲率は上端近くで急に大きくなることが明かにわかる。

4. 梁の剛度は側柱のそれの 10 倍、 $(E'I'/E_1I_1=10)$ 中柱の剛度は側柱の $1/10$ 倍 $(E_2I_2/E_1I_1=1/10)$ の場合の数値計算

前章と同様に (29)~(31) 及び $E'I'/E_1I_1=10$, $E_2I_2/E_1I_1=1/10$ の条件を (24)~(26) に入れて常数を定める。内部抵抗のない場合の架構の固有振動数を定める式は、

$$\phi^3 - 111.595\phi^2 + 1263.15\phi - 2156.22 = 0 \tag{39}$$

となり、(39) から固有振動数を求めると $\phi = mp^{2/3}/EI = 2.083, 10.45, 99.06$ となる。兩側柱及び中央柱の上端變位、上端曲率、下端曲率を表はす式は前章の (33), (35), (37) がそのまま使へる。但しその中の P_1, Q_1, \dots は次の如し。

$$\left. \begin{aligned} P_1 &= 2156.22 - 238.369\phi^2 + 7.02377\phi^4, \\ Q_1 &= 0.01\phi(6468.66 - 475.660\phi^2 + 7\phi^4), \\ P_2 &= 2156.22 - 210.160\phi^2 + 0.320951\phi^4, \\ Q_2 &= 0.01\phi(6468.66 - 419.242\phi^2 + 0.3\phi^4), \\ R &= 2156.22 - 1263.80\phi^2 + 115.721\phi^4 - \phi^6, \\ S &= 0.01\phi(6468.66 - 2526.51\phi^2 + 115.595\phi^4), \end{aligned} \right\} \tag{34'}$$

$$P' = 158.182 - 15.1560\phi^2, \quad Q' = 0.01\phi(316.364 - 15.1402\phi^2), \tag{36'}$$

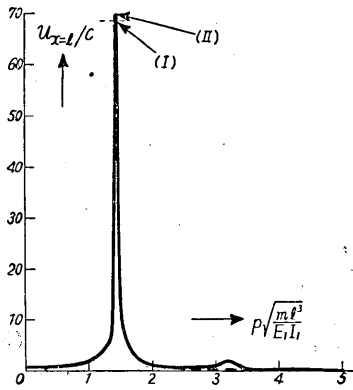
$$\left. \begin{aligned} P_1' &= 3072.324 - 325.7134\phi^2 + 3\phi^4, \quad Q_1' = 0.01\phi(6144.648 - 325.4062\phi^2), \\ P_2' &= 3239.996 - 341.7788\phi^2 + 3\phi^4, \quad Q_2' = 0.01\phi(6479.992 - 341.4548\phi^2), \end{aligned} \right\} \tag{38'}$$

(33), (35), (37) 及び (34'), (36'), (38') を使つて計算した各柱の上端變位、上

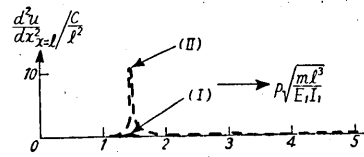
て見ると當然のことであつて、只今の計算例に於ては柱、梁の振りモーメントは柱、梁一本については至るところ一定である。それ故節點に於けるモーメントの条件により中柱上端の屈曲モーメントと側柱のそれの比は $2E_2I_2/E_1I_1$ となり、この場合には 20 倍になる譯である。此の事柄は最初の境界条件式 (9), (15), (21) がそのまま示してゐることになる。

更に第 3, 4 圖でわかることは各柱下端の曲率が上端のそれに比べて數倍も大きいことである。

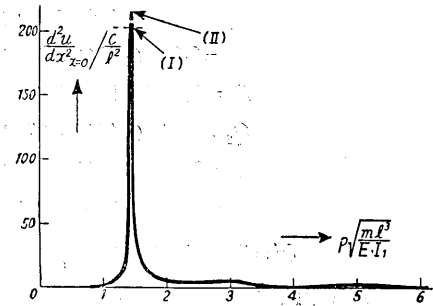
尚、柱の變位の状態を詳しくしらべるた



第6圖 柱上端の變位



第7圖 柱上端の曲率



第8圖 柱下端の曲率

下端曲率を夫々第6~8圖及び第II表に示してある。これ等の圖と前章の第2~4圖を比較して見ると、床面が剛構造に

なると、柱の上端の變位と下端の曲率は中柱と側柱との差異が殆んどなくなり、全體として床面が柔構造の場合よりも僅かに小さくなる。それに引きかへて上端の曲率は前章の場合、即ち比較的柔構造の場合よりも著しく小さくなる。中柱と側柱の上端の曲率の比及び各柱の上端下端の曲率の關係は前章に述べたことと全く同様である。

第 II 表

$P\sqrt{\frac{mI^3}{E_1I_1}}$	$u_1_{x_1=l}$	$u_2_{x_2=l}$	$\frac{d^2u_1}{dx_1^2} x_1=l$	$\frac{d^2u_2}{dx_2^2} x_2=l$	$\frac{d^2u_1}{dx_1^2} x_1=0$	$\frac{d^2u_2}{dx_2^2} x_2=0$
0.5	1.135		0.001045	0.02089		
1	1.911	1.932	0.00710	0.1420	2.729	2.879
1.3	5.106	5.187	0.03223	0.6446	12.3	12.99
1.443	68.69	69.86	0.535	10.70	203.5	214.76
1.5	14.42	14.68	0.1216	2.431	46.11	48.71
2	1.187	1.192	0.01758	0.3516	6.551	6.922
2.5	0.6395		0.01353	0.2706	4.922	5.209
3	0.9619	0.4967	0.02048	0.4096	5.863	6.206
3.233	1.869	0.2927	0.01139	0.2277	3.953	4.195
3.5	0.1337	0.1691	0.00774	0.1548	2.623	2.787
4	0.4630		0.00904	0.1808		
4.5	0.01339		0.00959	0.1917		
5	0.0216	0.1064	0.01012	0.2023	2.929	3.145
9.953	0.714	0.1677	0.07075	1.415	2.736	3.111

5. 梁及び中央の柱の剛度が側柱の剛度の10倍 ($E'I/E_1I_1 = E_2I_2/E_1I_1 = 10$) の場合の數値計算

先づ内部抵抗のない場合の架構の固有振動数を決める式は、

$$\phi^3 - 161.287\phi^2 + 3623.0\phi - 21520 = 0 \tag{40}$$

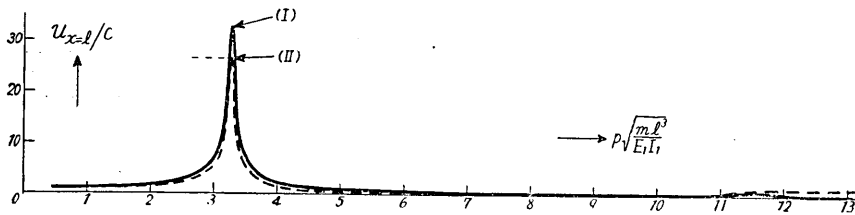
となり、固有振動数は $\phi = mp^2l^3/E_1I_1 = 10.69, 14.83, 135.8$ となる。

第4章と同様で (33), (35), (37) をそのまま使ふと、只今の場合の P_1, Q_1, \dots は下記の如し。但し (35) の [] の中は $1/5 d^2u_1/dx_1^2$ となる。

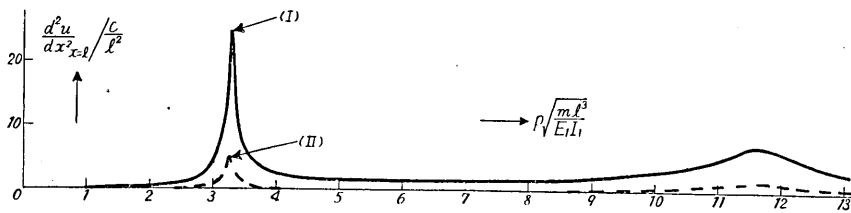
$$\left. \begin{aligned} P_1 &= 21520 - 1502.5\phi^2 + 3.150\phi^4, \\ Q_1 &= 0.01\phi(64560 - 2994.2\phi^2 + 3\phi^4), \\ P_2 &= 21520 - 1902.8\phi^2 + 30.190\phi^4, \\ Q_2 &= 0.01\phi(64560 - 3794.8\phi^2 + 30\phi^4), \\ R &= 21520 - 3629.5\phi^2 + 161.649\phi^4 - \phi^6, \\ S &= 0.01\phi(64560 - 7248.2\phi^2 + 161.287\phi^4), \end{aligned} \right\} \tag{34''}$$

$$P' = 300.34 - 20.280\phi^2, \quad Q' = 0.01\phi(600.68 - 20.250\phi^2) \tag{36''}$$

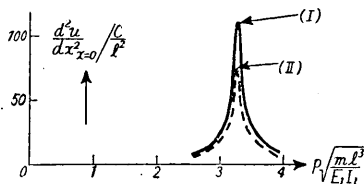
$$\left. \begin{aligned} P_1' &= 7131.66 - 526.199\phi^2 + 3\phi^4, & Q_1' &= 0.01\phi(14263.3 - 525.486\phi^2), \\ P_2' &= 5029.96 - 384.237\phi^2 + 3\phi^4, & Q_2' &= 0.01\phi(10059.9 - 383.734\phi^2), \end{aligned} \right\} \tag{38''}$$



第 9 圖 柱上端の變位



第 10 圖 柱上端の曲率



第 11 圖 柱下端の曲率

柱上端の變位、柱上下端の曲率の計算結果を圖に示したのが第9~11圖、及び第III表である。之等の圖を見れば明かな如く、上端の變位、上下端の曲率は何れも兩側柱が中柱よりも大である。即ち此の場合は前二章の場合と性質が全く逆である。

尙詳しくしらべると各柱の上端の變位は左程差異はないが、上端の曲率は側柱は中柱の 1/5 になる。又各柱下端の曲率は上端のそのの数倍である。

第 III 表

$P\sqrt{\frac{ml^3}{E_1 I_1}}$	$u_{1x_1=l}$	$u_{2x_2=l}$	$\frac{d^2 u_1}{dx_1^2} \quad x_1=l$	$\frac{d^2 u_2}{dx_2^2} \quad x_2=l$	$\frac{d^2 u_1}{dx_1^2} \quad x_1=0$	$\frac{d^2 u_2}{dx_2^2} \quad x_2=0$
0.5	1.025	0.9379				
1	1.109	1.089	0.07752	0.01550		
1.5	1.281	1.241				
2	1.631	1.508	0.4589	0.0918		
2.5	2.489	2.196	1.099	0.220		
3	6.564	5.443	4.193	0.838		
3.1	10.05					
3.2	19.99	16.07	14.58	2.92	64.86	44.43
3.27	32.47	25.89	24.76	4.97	109.9	75.17
3.4	11.8	9.550	10.1	2.02	44.45	30.33
3.5	7.084	5.441	6.198	1.240		
3.7	3.96					
3.85	2.793		2.973	0.595	12.82	8.66
4	2.185	1.503	2.516	0.503		
4.5	1.257	0.7649	1.851	0.370		
5	0.8695	0.4449	1.601	0.320		
7	0.3922		1.487	0.298		
9	0.3094		2.087	0.413		
10.5			3.853	0.771		
11	0.480					
11.4	0.5338	1.251	6.72	1.34		
11.6	0.555		7.07	1.41		
12	0.429		6.035	1.207		
12.5			4.135	0.827		
13	0.1631	1.391	2.896	0.577		

之等の説明はすべて前二章と同様にできる譯である。尙、各種の剛度が總べて等しく横材の剛度が柱のそのの 10 倍の場合について簡単な計算を試みると、

$$\left. \begin{aligned} \phi = mp^2 l^3 / E_1 I_1 = 3, \quad 10.904, \quad 107.53, \quad u_{x=l} = 57.79c, \\ \frac{d^2 u}{dx^2} \quad x=l = 0, \quad \frac{d^2 u}{dx^2} \quad x=0 = 370 \frac{c}{l^2} \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

となる。即ち中央に大きな柱のあることは構造全体の振動数を大にすると同時に、各柱の変位、屈曲モーメントを小さくする効果のあることが分つた譯である。

6. 數値計算結果の考察

以上 3~5 章の數値計算結果を考察するに當つて、構造が特別に簡単な條件の場合についての計算を附け加へることにした。先づ床面が極端に剛構造の場合の計算を行つて見ると、

中柱の剛度が側柱のその 1/10 倍の場合

$$u_{1x_1=l} = u_{2x_2=l} = 69.07c$$

$$\frac{d^2 u_1}{dx_1^2} \Big|_{x_1=0} = \frac{d^2 u_2}{dx_2^2} \Big|_{x_2=0} = 207.21 \frac{c}{l^2},$$

中柱の剛度が側柱のその 10 倍の場合

$$u = 28.87c, \quad \frac{d^2 u}{dx^2} \Big|_{x=0} = 86.60 \frac{c}{l^2},$$

(42)

となり、次に床面が極端に柔構造の場合、言ひ換へると各柱が單獨に振動する場合に
は、

側柱については

$$u_{1x_1=l} = 57.8c, \quad \frac{d^2 u_1}{dx_1^2} \Big|_{x_1=0} = 173.2 \frac{c}{l^2},$$

剛度が側柱の 1/10 倍の中柱については

$$u_{2x_2=l} = 182.5c, \quad \frac{d^2 u_2}{dx_2^2} \Big|_{x_2=0} = 548 \frac{c}{l^2},$$

剛度が側柱の 10 倍の中柱については

$$u_{1x_2=l} = 18.27c, \quad \frac{d^2 u_2}{dx_2^2} \Big|_{x_2=0} = 54.77 \frac{c}{l^2}$$

(43)

となる。以上の場合は柱の上端の曲率は無論總べて 0 である。

前章までの数値計算結果と只今の特別な場合とを比較すると、床面が柱の 10 倍位剛になると、最早床面が極端に剛な場合に非常に近いことがわかる。この性質は平面的振動の研究⁴⁾に於ては屢々述べたところであるが立體的振動の場合に於ても同様な事が言へた譯である。次に床面の剛度並びに中柱、兩側柱の剛度の關係如何によらず柱下端の曲率は上端のその數倍乃至それ以上であるといふ事が言へる。

又夫々の場合について一樣に言へることは各柱の剛度の關係によつて柱上端の變位は、各柱について餘り變らないが、上端の曲率は非常な差異がある。それにひきかへ下端の曲率は剛柱のそれが勿論大きいが上端の差異に比較すると極めて少い。この説明は第 2 章に於て詳しく述べた積りである。

7. 結 語

只今の研究によつて、細長い架構物に長さの方向に直角方向の振動を與へた場合に柱状部の剛度分布、床面の剛度が各柱状部の變位、屈曲モーメントに及ぼす影響に關する一つの目安を與へることができた譯である。

4) 例へば 妹澤克惟・金井 清 地震研究所彙報 14 (1936), 367~376.

昨年7月長野地震調査⁵⁾によると、家屋の中央部が兩側に比較して弱いために、先づ中央部が損傷し、そのために家屋全體の倒潰に至つたと考へられる例が極めて多かつたが、只今その計算結果をおし進めて行けばその説明も可成りできる譯である。次に大黒柱の如く局部的に剛構造部分があると、構造全體の周期は短くなるにしても、一部の柱の變位或は屈曲モーメントは反つて大きくなるのではないかといふ疑問もあつたが、此の計算によつて大黒柱の耐震的効果を十分に明かにすることができた。

但しここに効果と言ふのは、材料を経済的に考へた場合で全部の柱を大きくすれば尙更よいことは勿論である。尙今少し實際問題に近い場合の研究は數理的にも實驗的にも次々に行ふ豫定である。

最後にこの研究に於て始終御指導を給つた妹澤先生に深く感謝の意を表する。又計算上の助力を與へられた前田君、清水嬢にも厚く御禮を述べる。

30. *Three-dimensional Vibrations of a Framed Structure. II.*

By Kiyoshi KANAI.

Earthquake Research Institute,

When a framed structure that is apparently of two-dimensional form, oscillates in the direction normal to the plane of that structure, the vibration becomes a three-dimensional one for certain conditions of the columns and beams.

In the present case, we studied the forced vibration of a single-storied structure of two-spans with damping inner resistance.

From the results of the present investigation we found that when a broad house with weak columns in its middle part is subjected to destructive seismic disturbance transverse to the broad side, the same house is damaged mostly at the weak middle part in question.

On the other hand, from the present investigation, we have ascertained that if a damping inner resistance exists in a structure, the middle thick column is effective both in reducing the bending moment of every column and in increasing the natural frequency of the structure. The bending moment at the lower end of every column is, at least, a few times greater than that at the panel point of the same column.

5) 金井 清 地震研究所彙報 19 (1941), 647~660.