22. Der Temperaturverlauf an der Bodenoberfläche und der Spannungszustand in der Erdkruste. II. Verzerrung in drei Dimensionen.

Von Takeo MATUZAWA,

Institut für Erdbebenforschung.

(Vorgelegt den 19. Feb. 1942.—Eingegangen den 20. März 1942)

1. Darstellung in den kartesischen Koordinaten. In der früheren Mitteilung[1] wurde die Verzerrung in zwei Dimensionen untersucht. Das Problem wird besser in die drei Dimensionen verallgemeinert, weil die Bodenerwärmung meistens lokalen Charakter haben soll z. B. der Temperaturverlauf in kleiner Insel.

Die Gleichung der Wärmeleitung lautet

$$\frac{\partial T}{\partial t}=k\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right).$$

Man nimmt die x- und y-Achse an der Oberfläche und die z-Achse nach unten gerichtet.

Wenn der Temperaturverlauf an der Oberfläche gleich

$$T=A\sin pt\sin lx\sin my\,,$$

ist, dann ist die Lösung wie folgt,

$$T=Ae^{-\alpha z}\sin(pt-\beta z)\sin lx\sin my\,,$$

wo

$$2\alpha^2=l^2+m^2+\sqrt{(l^2+m^2)^2+\frac{p^2}{k^2}}\,,$$

und

$$2\beta^2=-(l^2+m^2)+\sqrt{(l^2+m^2)^2+\frac{p^2}{k^2}}\,.$$

Die Gleichung des elastischen Gleichgewichtes lautet

$$(\lambda+\mu)\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)\Delta+\mu\nabla^2(u,\,v,\,w)=q\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)T\,,$$

wie in der früheren Mitteilung.

Die partikuläre Lösung ergibt sich wie folgt,

---

1) T. MATUZAWA, *Bull. Earthq. Res. Inst.*, 20 (1942), 20~29.

$$u_1=-\frac{l}{2\alpha\beta}\frac{q}{\lambda+2\mu}Ae^{-\alpha z}\cos(pt-\beta z)\cos lx\sin my\,,$$

$$v_1=-\frac{m}{2\alpha\beta}\frac{q}{\lambda+2\mu}Ae^{-\alpha z}\cos(pt-\beta z)\sin lx\cos my\,,$$

$$w_1=\frac{1}{2\beta}\frac{q}{\lambda+2\mu}Ae^{-\alpha z}\cos(pt-\beta z)\sin lx\sin my$$

$$-\frac{1}{2\alpha}\frac{q}{\lambda+2\mu}Ae^{-\alpha z}\sin(pt-\beta z)\sin lx\sin my\,.$$

Die Dilatation Δ_1 ist natürlich

$$\Delta_1=\frac{q}{\lambda+2\mu}T=\frac{q}{\lambda+2\mu}Ae^{-\alpha z}\sin(pt-\beta z)\sin lx\sin my\,.$$

Wir können die komplementare Lösung unter der Oberflächenbedingung

$$X_z=0\,,\quad Y_z=0\,,\quad Z_z=0 \text{ für } z=0$$

berechnen wie folgt, nämlich

$$u_2=-\frac{l}{\sqrt{l^2+m^2}}\frac{qA}{2\alpha(\lambda+\mu)}e^{-\sqrt{l^2+m^2}\,z}\sin pt\cos lx\sin my$$

$$+\frac{l}{\sqrt{l^2+m^2}}\frac{qA}{2(\lambda+\mu)(\lambda+2\mu)}\left\{\frac{\lambda+2\mu}{\beta}-\frac{\mu}{\sqrt{l^2+m^2}}\left(\frac{\alpha}{\beta}-\frac{\beta}{\alpha}\right)\right\}\times$$

$$e^{-\sqrt{l^2+m^2}\,z}\cos pt\cos lx\sin my\,,$$

$$v_2=-\frac{m}{\sqrt{l^2+m^2}}\frac{qA}{2\alpha(\lambda+\mu)}e^{-\sqrt{l^2+m^2}\,z}\sin pt\sin lx\cos my$$

$$+\frac{m}{\sqrt{l^2+m^2}}\frac{qA}{2(\lambda+\mu)(\lambda+2\mu)}\left\{\frac{\lambda+2\mu}{\beta}-\frac{\mu}{\sqrt{l^2+m^2}}\left(\frac{\alpha}{\beta}-\frac{\beta}{\alpha}\right)\right\}\times$$

$$e^{-\sqrt{l^2+m^2}\,z}\cos pt\sin lx\cos my\,,$$

$$w_2=\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\frac{qA}{2\alpha(\lambda+2\mu)}e^{-\sqrt{l^2+m^2}\,z}\sin pt\sin lx\sin my$$

$$-\frac{qA}{2(\lambda+\mu)(\lambda+2\mu)}\left\{\frac{\lambda}{\beta}+\frac{\mu}{\sqrt{l^2+m^2}}\left(\frac{\alpha}{\beta}-\frac{\beta}{\alpha}\right)\right\}\times$$

$$e^{-\sqrt{l^2+m^2}\,z}\cos pt\sin lx\sin my\,.$$

Daraus kann man die Spannungskomponenten leicht berechnen wie folgt,

$$Z_z=\frac{\mu}{\lambda+2\mu}\left(\frac{\alpha}{\beta}-\frac{\beta}{\alpha}\right)qA\sin lx\sin my\left\{e^{-\sqrt{l^2+m^2}\,z}\cos pt-e^{-\alpha z}\cos(pt-\beta z)\right\},$$

$$\begin{aligned}X_x=&-\frac{2\mu}{\lambda+2\mu}qAe^{-\alpha z}\sin(pt-\beta z)\sin lx\sin my\\&+\frac{l^2}{\alpha\beta}\frac{\mu}{\lambda+2\mu}qAe^{-\alpha z}\cos(pt-\beta z)\sin lx\sin my\\&+\frac{\sqrt{l^2+m^2}}{\alpha}\frac{\mu}{\lambda+\mu}qA\left(\frac{\lambda}{\lambda+2\mu}+\frac{l^2}{l^2+m^2}\right)e^{-\sqrt{l^2+m^2}\,z}\sin pt\sin lx\sin my\\&+\frac{\mu}{(\lambda+\mu)(\lambda+2\mu)}qA\left\{-\frac{\sqrt{l^2+m^2}}{\beta}\left(\lambda+\frac{l^2}{l^2+m^2}(\lambda+2\mu)\right)\right.\\&\left.+\left(\frac{\alpha}{\beta}-\frac{\beta}{\alpha}\right)\left(\lambda+\frac{l^2}{l^2+m^2}\mu\right)\right\}e^{-\sqrt{l^2+m^2}\,z}\cos pt\sin lx\sin my,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}Y_y=&-\frac{2\mu}{\lambda+2\mu}qAe^{-\alpha z}\sin(pt-\beta z)\sin lx\sin my\\&+\frac{m^2}{\alpha\beta}\frac{\mu}{\lambda+2\mu}qAe^{-\alpha z}\cos(pt-\beta z)\sin lx\sin my\\&+\frac{\sqrt{l^2+m^2}}{\alpha}\frac{\mu}{\lambda+\mu}qA\left(\frac{\lambda}{\lambda+2\mu}+\frac{m^2}{l^2+m^2}\right)e^{-\sqrt{l^2+m^2}\,z}\sin pt\sin lx\sin my\\&+\frac{\mu}{(\lambda+\mu)(\lambda+2\mu)}qA\left\{-\frac{\sqrt{l^2+m^2}}{\beta}\left(\lambda+\frac{m^2}{l^2+m^2}(\lambda+2\mu)\right)\right.\\&\left.+\left(\frac{\alpha}{\beta}-\frac{\beta}{\alpha}\right)\left(\lambda+\frac{m^2}{l^2+m^2}\mu\right)\right\}e^{-\sqrt{l^2+m^2}\,z}\cos pt\sin lx\sin my,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}X_z=&\frac{l}{\alpha}\frac{\mu}{\lambda+2\mu}qA\left\{-e^{-\alpha z}\sin(pt-\beta z)+e^{-\sqrt{l^2+m^2}\,z}\sin pt\right\}\cos lx\sin my\\&+\frac{l}{\beta}\frac{\mu}{\lambda+2\mu}qA\left\{e^{-\alpha z}\cos(pt-\beta z)-e^{-\sqrt{l^2+m^2}\,z}\cos pt\right\}\cos lx\sin my,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}Y_z=&\frac{m}{\alpha}\frac{\mu}{\lambda+2\mu}qA\left\{-e^{-\alpha z}\sin(pt-\beta z)+e^{-\sqrt{l^2+m^2}\,z}\sin pt\right\}\sin lx\cos my\\&+\frac{m}{\beta}\frac{\mu}{\lambda+2\mu}qA\left\{e^{-\alpha z}\cos(pt-\beta z)-e^{-\sqrt{l^2+m^2}\,z}\cos pt\right\}\sin lx\cos my.\end{aligned}$$

$$X_y = -\frac{lm}{\alpha\beta}\frac{\mu}{\lambda+2\mu}qAe^{-\alpha z}\cos(pt-\beta z)\cos lx\cos my$$

$$-\frac{lm}{\alpha\sqrt{l^2+m^2}}\frac{\mu}{\lambda+\mu}qAe^{-\sqrt{l^2+m^2}\,z}\sin pt\cos lx\cos my$$

$$+\frac{lm}{\sqrt{l^2+m^2}}\frac{\mu}{(\lambda+\mu)(\lambda+2\mu)}qA\left\{\frac{\lambda+2\mu}{\beta}-\frac{\mu}{\sqrt{l^2+m^2}}\left(\frac{\alpha}{\beta}-\frac{\beta}{\alpha}\right)\right\}\times$$

$$e^{-\sqrt{l^2+m^2}\,z}\cos pt\cos lx\cos my\,.$$

Von dem Tiefenverhältnisse der Spannungsgrösse kann man sehen fast dasselbe wie in der ersten Mitteilung.

Im gewöhnlichen Fall gelten hier auch die Beziehungen $\alpha \simeq \beta$ und $l^2+m^2 \ll \alpha^2$.

In allen Spannungskomponenten herrscht in der großen Tiefe das Glied von $e^{-\sqrt{l^2+m^2}\,z}$. Also ist die Tiefe der Wirkung vergleichbar mit der Wellenlänge der Temperaturänderung.

In Komponent Z_z hängt die Amplitude vom Glied $\frac{\alpha}{\beta}-\frac{\beta}{\alpha}=\frac{l^2+m^2}{\alpha\beta}$ ab, welches im allgemeinen sehr klein ist.

In Komponenten X_x und Y_y ist sie ziemlich groß in der Nähe von der Oberfläche, nämlich, gleich $\frac{2\mu}{\lambda+2\mu}qA$ ist. Aber in der großen Tiefe hängt sie von $\frac{\sqrt{l^2+m^2}}{\alpha}$ oder $\frac{\sqrt{l^2+m^2}}{\beta}$ ab, welches ziemlich klein ist. In Komponenten X_z, Y_z und X_y herrschen auch ähnliche Verhältnisse.

Zum Vergleich wird der Spannungszustand durch den Druckverlauf an der Oberfläche zugeschlagen.

Wenn der Druckverlauf an der Oberfläche gegeben ist, nämlich

$$Z_z = P = -A\sin pt\sin lx\sin my,\quad X_z=0,\quad Y_z=0,\quad \text{für } z=0,$$

dann bekommt man

$$u=\frac{l}{l^2+m^2}\frac{A}{2(\lambda+\mu)}\sin pt e^{-\sqrt{l^2+m^2}\,z}\cos lx\sin my\,,$$

$$v=\frac{m}{l^2+m^2}\frac{A}{2(\lambda+\mu)}\sin pt e^{-\sqrt{l^2+m^2}\,z}\sin lx\cos my\,,$$

$$w=\frac{A}{2\sqrt{l^2+m^2}(\lambda+\mu)}\sin pt e^{-\sqrt{l^2+m^2}\,z}\sin lx\sin my\,,$$

$$X_x=-\frac{A}{\lambda+\mu}\left(\lambda+\mu\frac{l^2}{l^2+m^2}\right)\sin pt e^{-\sqrt{l^2+m^2}\,z}\sin lx\sin my\,,$$

$$Y_y = -\frac{A}{\lambda+\mu}\left(\lambda+\mu\frac{m^2}{l^2+m^2}\right)\sin pte^{-\sqrt{l^2+m^2}\,z}\sin lx \sin my\,,$$

$$Z_z = -A \sin pte^{-\sqrt{l^2+m^2}\,z}\sin lx \sin my\,,$$

$$X_y = \frac{lm}{l^2+m^2}\,\frac{\mu}{\lambda+\mu}A \sin pte^{-\sqrt{l^2+m^2}\,z}\cos lx \cos my\,,$$

$$X_z = Y_z = 0\,.$$

In diesem Falle ist die Spannung nicht hydrostatisch.

Obgleich die Spannungsänderung durch die Temperaturänderung an der Oberfläche klein ist, kann sie auch die Erbebenauslösendekraft sein, wenn der Spannungszustand in der Erdkruste sich kritisch befindet. Dabei kann man die Art und Weise der Wirkung wenigstens zweierlei denken. Erstens kann man sie als Zusatz der elastischen Spannung zur schon existierenden Spannung ansehen. Dann muß die Grösse der Differenz der Hauptspannungen von Bedeutung sein.

Zweitens aber kann man auch die Spannungsänderung als die thermodynamische Zustandsgrösse z. B. Druckänderung in der Phasenregel ansehen. Nämlich wenn die Spannungsänderung irgendeine Zustandsänderung des Arbeitsmittels in der Erde verursachen könnte und dadurch grosse Spannungsänderung erzeugen sollte, dann könnte die Differenz der Hauptspannungen nicht immer von Bedeutung sein.

2. Darstellung in den zylindrischen Koordinaten. Wenn man die Erwärmung und Abkühlung eines rundlichen Bodengebietes, z. B. einer rundlichen Insel betrachtet, ist es natürlich bequem, die Verhältnisse in zylindrischen Koordinaten darzustellen. Man nimmt die z-Achse nach unten gerichtet. Die Gleichung der Wärmeleitung lautet

$$\frac{\partial T}{\partial t} = k\left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\,\frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right).$$

Einfachheit halber betrachtet man den Fall, wo T nicht von θ abhängt. Wenn die Oberflächentemperatur gegeben wird wie folgt, nämlich

$$T = A \sin ptJ_0(\omega r) \qquad \text{für } z=0,$$

dann ist die Lösung

$$T = A \sin (pt-\beta z)\, e^{-\alpha z} J_0(\omega r)$$

wo

$$\alpha^2 = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\omega^4 + \frac{p^2}{k^2}} + \omega^2\right),$$

$$\beta^2=\frac{1}{2}\left(\sqrt{\omega^4+\frac{p^2}{k^2}}-\omega^2\right).$$

Die Gleichung des elastischen Gleichgewichtes in Vektordarstellung lautet

$$(\lambda+2\mu)\ \mathrm{grad.div}\,\mathfrak{s}-\mu\,\mathrm{rot\ rot}\,\mathfrak{s}=q\,\mathrm{grad}\,T,$$

wo $\mathfrak{s}$ Verschiebung ist.

Setze man

$$\mathfrak{s}=\mathrm{grad}\,\phi,$$

dann bekommt man

$$\nabla^2\phi=\frac{q}{\lambda+2\mu}T.$$

Die partikuläre Lösung von ϕ ist

$$\phi=-\frac{qA}{2(\alpha\beta)(\lambda+2\mu)}\cos(pt-\beta z)\,e^{-\alpha z}J_0(\omega r).$$

Die (r,θ,z) Komponenten der Verschiebung $\mathfrak{s}$, nämlich u_1, v_1, w_1, sind

$$u_1=\frac{\partial\phi}{\partial r}=-\frac{qA}{2(\alpha\beta)(\lambda+2\mu)}\cos(pt-\beta z)\,e^{-\alpha z}\frac{dJ_0(\omega r)}{dr},$$

$$v_1=\frac{\partial\phi}{r\partial\theta}=0,$$

$$w_1=\frac{\partial\phi}{\partial z}=-\frac{qA}{2(\alpha\beta)(\lambda+2\mu)}e^{-\alpha z}J_0(\omega r)\left\{-\alpha\cos(pt-\beta z)+\beta\sin(pt-\beta z)\right\}.$$

Die komplementare Lösung mit den Oberflächenbedingungen

$$\widehat{zz}=0,\ \widehat{rz}=0,\ \widehat{\theta z}=0,\ \text{für } z=0,$$

ergibt sich wie folgt,

$$u=(P\sin pt+Q\cos pt)e^{-\omega z}\frac{dJ_0(\omega r)}{dr},$$

$$v=0,$$

$$w=(R\sin pt+S\cos pt)e^{-\omega z}J_0(\omega r),$$

wo

$$P=-\frac{qA}{2\mu\omega\alpha},$$

$$Q=-\frac{qA}{2\mu\alpha\beta}\left(\frac{\mu}{\lambda+2\mu}-\frac{\alpha}{\omega}\right),$$

$$R=-\frac{\lambda qA}{2\mu\alpha(\lambda+2\mu)},$$

$$S=-\frac{qA}{2\alpha\beta(\lambda+2\mu)}\left(\omega-\frac{\lambda}{\mu}\alpha\right).$$

Daraus bekommt man die Spannungskomponenten wie folgt,

$$\widehat{zz}=\frac{\mu}{\lambda+2\mu}\cdot\frac{\omega^2}{\alpha\beta}qA\left\{e^{-\omega z}\cos pt-e^{-\alpha z}\cos(pt-\beta z)\right\}J_0(\omega r),$$

$$\widehat{rr}=-\frac{2\mu}{\lambda+2\mu}qA\sin(pt-\beta z)\,e^{-\alpha z}J_0(\omega r)-\frac{\lambda\omega}{(\lambda+2\mu)\alpha}qA\sin pt\,e^{-\omega z}J_0(\omega r)$$

$$+\frac{\lambda\omega}{(\lambda+2\mu)\beta}qA\cos pt\,e^{-\omega z}J_0(\omega r)$$

$$-\left\{\frac{qA}{\omega\alpha}\sin pt+\frac{qA}{\alpha\beta}\left(\frac{\mu}{\lambda+2\mu}-\frac{\alpha}{\omega}\right)\cos pt\right\}e^{-\omega z}\frac{d^2J_0(\omega r)}{dr^2}$$

$$-\frac{\mu qA}{(\lambda+2\mu)\alpha\beta}\cos(pt-\beta z)\,e^{-\alpha z}\frac{d^2J_0(\omega r)}{dr^2},$$

$$\widehat{\theta\theta}=-\frac{2\mu}{\lambda+2\mu}qA\sin(pt-\beta z)\,e^{-\alpha z}J_0(\omega r)-\frac{\lambda\omega}{(\lambda+2\mu)\alpha}qA\sin pt\,e^{-\omega z}J_0(\omega r)$$

$$+\frac{\lambda\omega}{(\lambda+2\mu)\beta}qA\cos pt\,e^{-\omega z}J_0(\omega r)$$

$$-\frac{\mu qA}{(\lambda+2\mu)\alpha\beta}\cos(pt-\beta z)\,e^{-\alpha z}\frac{dJ_0(\omega r)}{rdr}$$

$$-\left\{\frac{qA}{\omega\alpha}\sin pt+\frac{qA}{\alpha\beta}\left(\frac{\mu}{\lambda+2\mu}-\frac{\alpha}{\omega}\right)\cos pt\right\}e^{-\omega z}\frac{dJ_0(\omega r)}{rdr},$$

$$\widehat{zr}=\frac{\mu}{\lambda+2\mu}qA\left[\frac{1}{\alpha}\left\{e^{-\omega z}\sin pt-e^{-\alpha z}\sin(pt-\beta z)\right\}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\beta}\left\{-e^{-\omega z}\cos pt+e^{-\alpha z}\cos(pt-\beta z)\right\}\right]\frac{dJ_0(\omega r)}{dr},$$

$$\widehat{r\theta}=0,\ \widehat{z\theta}=0,$$

Hier kann man leicht sehen, daß der wesentliche Charakter des Spannungszustandes ungefähr gleich dem vorigen Falle in kartesischen Koordinaten.

In den beiden Fällen können wir die Resultate in den Fall der willkürlichen Verteilung der Oberflächentemperatur verallgemeinern mit

Hilfe der Doppel- bezw. Quadrupel-Integraltheorie, nämlich

$$T=\sin ptT(x,y)=\frac{1}{4\pi^2}\sin pt\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}T(t_1,t_2)$$

$$\cdot\, e^{-i\{u_1(t_1-x)+u_2(t_2-y)\}}dt_1\,du_1\,dt_2\,du_2,$$

$$T=\sin ptf(r)=\sin pt\int_0^{\infty}J_0(\omega r)\,\omega d\omega\int_0^{\infty}f(\alpha)J_0(\omega\alpha)\,\alpha d\alpha\,.$$

Die Verallgemeinerung in den Fall der azimutalen Abhängigkeit d Temperaturverteilung, nämlich

$$T=A\sin ptJ_n(\omega r)\sin n\theta\,,$$

kann auch nicht schwer stattfinden.

Herr Dr. R. Ikegami hat mir die Rechnung verifiziert. Dafür möchte ich hier ihm danken.

---

22. *Timen no Ondo to Tikaku no Naka no Hariai. II. Sanzigen ni okeru Hizumi.*

MATUZAWA Takeo,

Zisin Kenkyûsyo.

Mae no Hôkoku dewa Hen'i ga nizigen ni okoru Baai wo keisan sita ga kokodewa sanzigen no Hen'i no Baai ni osihirometa. Sosite Tyokkaku-Zahyô no Baai to Entô-Zahyô no Baai ni tuite sirabeta.

Hariai ni tuite no omona Seisitu wa nizigen no Hen'i no Baai to daitai ni oitenite iru.
