

23. 低速層が介在する場合の 弾性波の傳播

地震研究所 那 須 信 治

(昭和17年3月19日發表—昭和17年3月20日受理)

緒 言

一般に地殻内部の地震波の傳播を論じ或は地震探査法によつて地層の構造を論じる場合、多くは弾性波の速度が深さと共に逐次増加するか又は下層程速度の大きな岩石層であると考へてゐる。地球の内核と外殻との不連続性、或は地下約 70 km 附近に於ける不連続性等を論じるときはこれとは反對に速度の小なる層が下に存在すると考へてゐるのであつてこれ等の問題は既によく知られてゐる所である。⁽¹⁾⁽²⁾

弾性波式地下探査法に於て取扱はれてゐる場合は前述の如く、下層ほど速度の大なる例であつて先づこの例が殆んど總てであると言つて差支ないやうである。然しながら極めて稀ではあるが速度の小さい層が却つて下にある場合に遭遇し、その解析には頗る不安を感じる場合がある。この例は相當厚い低速層が介在する場合に発見され、殊に建築・土木の設計・計畫等のために行ふ比較的淺い場所を探査する結果として時々出て來るのである。

低速層の問題の純數學的な取扱は既に二三の書籍⁽³⁾⁽⁴⁾に記載されてあるが探査法に於て實例を擧げてゐるものは餘りその例がないやうである。こゝでは低速層の一般的解析法及びその實例を擧げることにした。

走時曲線の不連続性

低速層が介在する場合地震波の走時曲線は不連続となることもよく知られてゐる。第1圖には此の場合の波動の経路を示してある。これによれば地表から Z_1 の深さに至る迄の第1層内では地震波の速度は深さと共に増加するがその下の部分即ち Z_1 Z_2

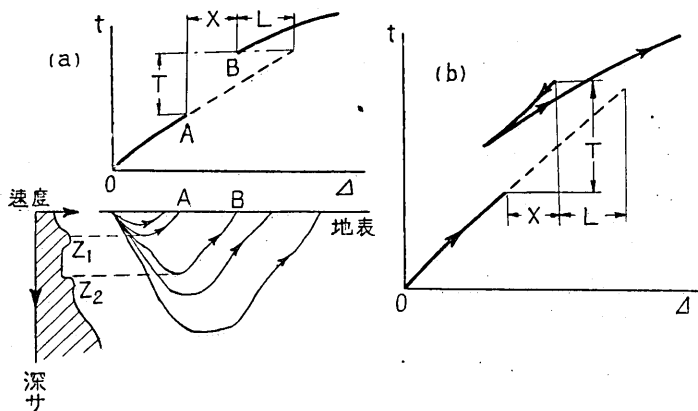
1) K. SEZAWA and K. KANAI, "Viscosity Distribution within the Earth II. On the Shadow Zone for Seismic Waves.", *Bull. Earthq. Res. Inst.*, **19** (1941), 14-25.

2) B. GUTENBERG and C. RICHTER, *Bull. Seism. Soc. Amer.*, **29** (1939), 531~537.

3) LOUIS SLICHTER; "The Theory of the Interpretation of Seismic Travel-Time Curves in Horizontal Structures," *Physics*, Vol. **3** (1932).

4) L. D. LEET, *Practical Seismology and Seismic Prospecting*. (1938).

に於ては寧ろ速度は小さくなり、 Z_2 より深くなると再び速度が増加するのである。斯様な場合には Z_1 の深度に達する迄の各波動についての走時曲線は座標原点から連続的に求められるが Z_1 より極めて僅か深く潜入するやうな入射角を持つ波動は第1層を貫き更に第2層たる低速層に入り再び上方に屈折して地表に到達するから曲線は不連続となる。低速層内で波動経路が上向きとなるのは層内の速度が第1層の最低部即ち Z_1 に於ける速度 (V) と同一値を取るときに初て起るのである。即ち低速層の上部、下部に於ける速度は同一であつて、その中間の速度が V より小さいのである。



第 1 圖 低速層の介在する場合の不連続なる走時曲線

さて第1層の低部 Z_1 に達した波動が地表に達する点 A とこれと僅かな差で第2層に潜入した波動の到達する点 B との中間区域では振動のエネルギーの全く到達しないところがあり、これを波動の蔭の部分と稱せられ、音波の場合にはこれに相當する部分では音が聞えないから不可聴区域 (Silent zone, dead zone) とも呼ばれてゐる。

一方走時曲線はこの部分に於て不連続的に上方に移行し段違ひを生じるのである。即ち低速層内を通過するため A 点の波動よりは多くの時間を要するために B 点是不連続的に上方に移るのである。この場合には周知の如く走時曲線からは低速層内の弾性波速度を単一的に決定することは不可能であり、走時曲線の解析からは單に極限值のみが得られるのである。この解析に當つては走時曲線が完全に出來上つてゐることが必要である。然し實際の場合不連続走時を有する曲線がこれで十分であると言ひ得ることは頗る難しいのであつて、何れの場合にも曲線上に於て不連続を生ずる點を確定することは困難であらう。但し數學的にこの問題を取扱ふ場合には完全に走時曲線が求められたものとして取扱ふのであつて、謂はば理想的な場合である。野外に於ける観測も成るべくこれに合致するやうに努力すべきであるが前述の如く、完全の程

度が頗る判定困難であり、此點に於て實際の作業が難しいのである。

不連続に對する一般的解析法 低速層の厚さの最大値

不連続走時曲線を解析するには一般に次の方法が用ひられる。即ち低速層内に於ては弾性波の速度が深さと共に任意な變化をすると考へる。勿論此層内の速度 v は第一層中の最大速度 V よりは小で、 $v < V$ である。又低速層内では假りに次のやうに假定が成立すると考へた方が都合がよい。即ち速度 v は深さと共に増加し、 $v = V$ になるまでは連続的增加を示すとして次の關係式が成立するとするのである。

今曲線の走時の不連続を T 、距離の不連続（蔭の部分の幅）を X 、低速層の上面及び底面の地表からの深さをそれぞれ Z_1 、 Z_2 とすれば

$$\frac{T}{2} = \int_{Z_1}^{Z_2} \frac{dz}{v \cos i} \quad (1)$$

$$\frac{X}{2} = \int_{Z_1}^{Z_2} \tan i \, dz \quad (2)$$

であり、 Z_1 は走時曲線の初めの部分を解析した結果から既知の量である。 i は波動の入射角である。

(1) 式は次の如く書き換へられる。

$$\frac{T}{2} = \int_{Z_1}^{Z_2} \frac{(\tan i + \cot i)}{V} dz = \frac{X}{2V} + \int_{Z_1}^{Z_2} \frac{\cot i}{V} dz \quad (3)$$

實際は T が観測の結果から得られ Z_2 を求めたいのであるが、 Z_2 を求めることは暫くおき Z_2 が與へられたものとして低速層内で速度が如何なる變化をした場合に與へられた X に對して T が最小になるかといふ條件を求めて見よう。

(3) 式は次の様にも書き更められる。

$$\frac{T}{2} = \frac{2V}{X} + \int_{v_1}^V \frac{\sqrt{1-(v/V)^2}}{v} \frac{dz}{dv} dv. \quad (4)$$

此式中の積分値が最小なる條件を變分法により求むれば

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{1-(v/V)^2}}{v} &= \text{一定} \\ &= \frac{1}{V} \cot i \end{aligned} \quad (5)$$

故に X の如何なる値に對しても最小走時を持つ波動の経路は $i = \text{一定}$ なる直線である。

(2) 式から i の有すべき必要な条件として

$$i = \tan^{-1} \frac{X}{2(Z_2 - Z_1)} \quad (6)$$

が得られる。

今 h を低速層の厚さ、最小走時を T_m とすれば (3) 式より

$$\begin{aligned} \frac{T_m}{2} &= \frac{h}{V} (\tan i + \cot i) \\ &= \frac{X}{2V} \left(1 + 4 \frac{h^2}{X^2} \right) \end{aligned} \quad (7)$$

を得。

それ故與へられた X に対して T_m は h によつて大きくなり又小さくもなる。そして T_m が既知であれば低速層の厚さ h の最大値は次式にて與へられる。

$$h_m = \sqrt{\frac{XV}{2} \left(\frac{T_m}{2} - \frac{X}{2V} \right)} = \frac{1}{2} \sqrt{XLT} \quad (8)$$

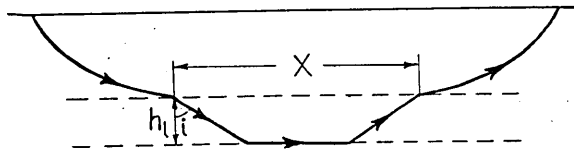
ここに $L = VT - X$ である(第1圖参照)。

以上の結果から厚さの最大値を與へる場合の弾性波の速度、 v_m は一定であり次式により求められる。

$$v_m = V \sin i = V \frac{X/2}{\sqrt{\frac{X^2L}{4} + \frac{X^2}{4}}} = \sqrt{\frac{VX}{T}} \quad (9)$$

低速層の厚さの最小値

低速層の厚さの最小値を求める場合は弾性波の速度を假定しなければならない。そしてこの速度は通常經驗により定められるもので、これ以下の値は取り得ないといふ値 v_0 を選ぶ。一方蔭の部分の長さ X に適合するやうにするためには低速層とその下



第2圖

の層との境界面に於ては v_0 は急速に V になると考へる。その場合の波動経路は第2圖の如くになり不連続走時 T' は

$$\frac{T'}{2} = \frac{2h}{V \sin 2i} + \frac{X/2 - h_i \tan i}{V} \quad (10)$$

である。

故に最小の厚さ h_c は

$$h_c = \frac{\tan i}{2} \{ TV - X \} = \frac{L}{2} \frac{v_r}{\sqrt{V^2 - v_r^2}} \quad (11)$$

により求められる。

以上述べ來つた方法により低速層の最大の厚さ及び最小の厚さ、速度の最大値及最小値を求めることが出来る。これ等の結果を用ひて走時曲線の第2部分（不連続點より右の部分）の解析を行ふのである。

不連続後の走時曲線の解析

不連続後の走時曲線（第2部分）の解析法として一般に用ひられてゐる方法は次の通りである。

先づ走時曲線の最初の部分の解析を行つてその結果から二種類の速度の變化を考へる。その一つは第1部分の結果と前述の低速層の最大厚さの場合の結果を組合せる。他の一つは同じく第1部分と低速層の最小厚さの場合の結果とを組合せるのである。そしてこの二つの組合せでは求められた深さと速度との關係を必ずしもその儘用ひるのではなくて、適當にこれ等を調節し、換言すれば速度と深さとの關係式を適宜に造り直して、とにかく低速層の低部に達するまでは速度が連続的に増加するやうな考へ方をするのである。これは曲線の第2部分を解析するための補助手段であつて、この様な速度分布は事實とは必ずしも一致してゐない。そしてこの補助手段を行つて曲線の第2部分のみを解析して差支ないといふ理由は次の通りである。

一般に波動がある深さ、例へば Z 以上に達するやうな場合、此波動に関する走時曲線の形は Z より上の部分で速度が如何様に變化しても常に同じ型である。

それ故解析に便利なやうに速度が低速層の低部に到るまで連続的に増加すると考へるのである。

曲線の第2部分は最上層や低速層によつて變化すべきものではなく、又これの一般的な形といふものもあるべき筈はない。又低速層より下に於いては速度の變化状態により波動経路が交叉することもあり又全然交叉しないこともある。これは次の關係によりきまるものである。

今波動経路の頂點で速度が v_m になつたやうな波動の水平到達距離を x_m とすれば

$$x_m = \int_{v_0}^{v_m} \frac{v(dz/dv)dv}{\sqrt{v_m^2 - v^2}} \quad (12)$$

であり頂點に於て波動が再び上方に向つて進むためには速度は深さと共に増加すべきであることは勿論である。それ故に $\frac{dx}{dz}$ は $\frac{dx}{dv_m}$ と同一符號をとり、波動交叉の有無は次の條件によつて定まる

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dv_m} < 0 & \quad \text{交叉す} \\ \frac{dx}{dv_m} > 0 & \quad \text{交叉せず} \end{aligned} \quad (13)$$

(12) 式より

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dv_m} &= v_m \left[\frac{\left(\frac{dz}{dv}\right)_0}{\sqrt{v_m^2 - v_0^2}} + \int_{v_0}^{v_m} \frac{\frac{d^2z}{dv^2}}{\sqrt{v_m^2 - v^2}} dv \right] \\ &= v_m J \end{aligned} \quad (14)$$

こゝで $\left(\frac{dz}{dv}\right)_0$ は地表に於ける微分係数の値であり、 J の値が負ならば交叉するのである。波動の交叉が起れば振動のエネルギーの到達しない蔭の部分が無くなることもあり（第1圖左方参照）この場合に於ける實際上の取扱はやゝ困難となる。何となれば記象上に於て後に来る位相を讀取らなければならないからである。

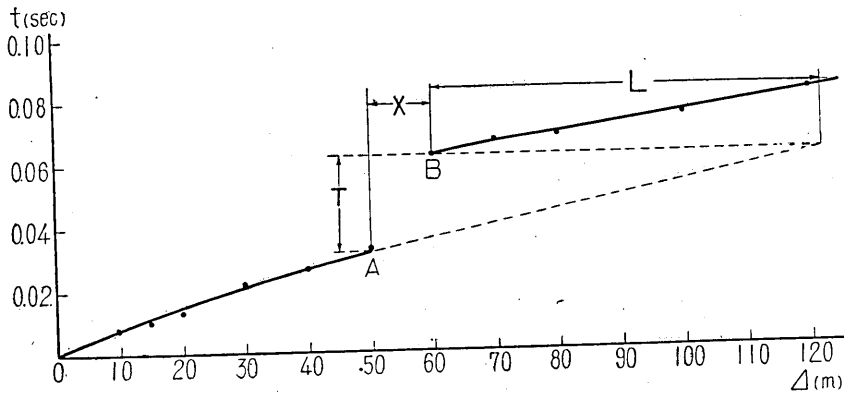
尚ほ極めて特別な場合として $d=r_0$ なる水平距離に總ての波動が收斂され恰もこの點が光の焦點の如き觀を呈する場合もあらう。この場合深さを z 、地表面に於ける速度を v_0 とすれば速度 v は $v=v_0 \cosh(\pi z/r_0)$ によつて與へられる。事實この様な場合の存在することは先づ皆無と言つてよい。

不連続走時の第2部分の解析は前述の通り二つの補助的な速度變化を想定して行はれるのであるがこれには通常圖式解法が用ひられる。

不連続走時曲線の實例

第3圖に示す走時曲線は某海岸附近の濕潤地に於て地下探査を行つたときに得たものである。こゝでは不連続走時を論じるに必要な範圍の走時曲線だけを示してあるが實際のものはまだ遠距離まで觀測されてゐる。

座標原點より 50 m 迄は連続的に走時を讀み得るが 60 m に於て曲線は不連続的に上方に移行し走時に於て 0.031 sec の差を生じた。最初から 50 m 迄の部分は彈性波の速度 v が深さ h と共に一次的に即ち $v=v_0+ah$ で表はされるやうな變化をすると假定して平均曲線を求めた。即ち走時 t が次式によつて與へられるとした。



第 3 圖 走時曲線

$$t = \frac{1}{a} \log_e \frac{r + \Delta/2}{r - \Delta/2} \quad (15)$$

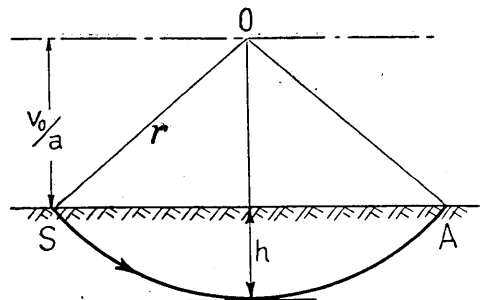
この場合波動経路は圆弧となり、水平距離 Δ に到達する波動に對する圆弧の半徑を r とすれば此圓の中心は地表に平行で高さ v_0/a の空間に存在する直線上にある。(第 4 圖参照)。

a 及び v_0 を求めるには二點 Δ_1, Δ_2 に於ける走時 t_1, t_2 を選び

$$\begin{aligned} t_1 &= \frac{1}{a} \log_e \frac{r_1 + \Delta_1/2}{r_1 - \Delta_1/2} \\ t_2 &= \frac{1}{a} \log_e \frac{r_2 + \Delta_2/2}{r_2 - \Delta_2/2} \end{aligned} \quad (16)$$

として t_2/t_1 によつて求めるのである。

$$\frac{t_2}{t_1} = \frac{\log_e \frac{r_2 + \Delta_2/2}{r_2 - \Delta_2/2}}{\log_e \frac{r_1 + \Delta_1/2}{r_1 - \Delta_1/2}} \quad (17)$$



第 4 圖

こゝに

$$\begin{aligned} \left(\frac{v_0}{a}\right)^2 + \left(\frac{\Delta_1}{2}\right)^2 &= r_1^2 \\ \left(\frac{v_0}{a}\right)^2 + \left(\frac{\Delta_2}{2}\right)^2 &= r_2^2 \end{aligned} \quad (18)$$

である。

v_0/a について (17) を解く。然る後 v_0 及び a を求める。

第3圖の走時曲線では t_2/t_1 の値を二箇選び、それぞれ v_0/a を求めその平均を取り

$$v_0/a = 17.65$$

$$v_0 = 1305.79 \text{ m/sec}$$

$$a = 73.96 \text{ m/sec per m.}$$

を得た。

圓弧の半徑 r は次の通りである

$\Delta(m)$	$r(m)$	頂點深度 $= h(m)$ $(r - \frac{v_0}{a} = h)$
10	18.33	0.69
20	20.29	2.64
30	23.16	5.51
40	26.67	9.02
50	30.60	12.95

即ち 50 m が第1層の底部に達した波動の水平到達距離とすれば底部の深さは 12.95 m である。而して此點に於ける速度は

$$V = 2263.6 \text{ m/sec}$$

となる。

次に不連続の點及び移行後の走時曲線を見ると先づ蔭の部分は大概 10 ... が適當と思はれる。走時曲線の初めの曲線の最終速度は上述の如く 2263.6 m/sec であり、移行後の曲線はこの値に相當する傾斜を以て始るべきである。それは低速層内に於て $v = V$ となつた波動が初めて蔭の部分を越して遠方に現はれるからである。

第2曲線の最初の部分が上述の値を正確に有すると斷定は出來ないが概略この値に近いといふ事は想像される。それ故こゝでは走時の不連続差 T 及び距離の不連続差 X を次のやうに選んだ

$$T = 0.031 \text{ sec}$$

$$X = 10 \text{ m}$$

尙ほ圖上に於て $L = 62 \text{ m}$ と取つた。

低速層の最大厚さ h_m は前述の方法により

$$h_m = \frac{1}{2} \sqrt{XL} = \frac{1}{2} \sqrt{10 \times 62} = 12.45 \text{ m}$$

となり。これに對する速度 v_m は

$$v_m = \sqrt{\frac{VX}{T}} = \sqrt{\frac{2263.6 \times 10}{0.031}} = 854.6 \text{ m/sec}$$

となつた。

次に厚さの最小値を求める場合、前述の v_c を 500 m/sec と假定した。これは種々な方面を考慮して假定したに過ぎない。これに對して最小厚さ h_i を求めると

$$h_i = \frac{62}{2} \frac{500}{\sqrt{(2263.6)^2 - 500^2}} = 7.0 \text{ m}$$

となつた。

以上の結果により低速層の厚さは約 12.5 m より 7.0 m の間にあり、弾性波速度は 855 m 以下といふ事がわかつた。

さて移行後の曲線を解析するに幸にもこの部分は比較的順調な形を呈してゐるから前述の如き補助的な速度分布を考へるまでもないやうに思はれる。移行後僅かな距離(約 15 m 位)から先は大體速度 3250 m/sec の直線に點が乗つてゐると考へれば低速層からその下の岩盤までに達する間比較的急激に速度の變化があるものと考へてよい。こゝでは約 4m の區間を考へその區間に於て速度が 2263.6 m/sec より 3250 m/sec まで直線的に増加するとして差支ないやうである。

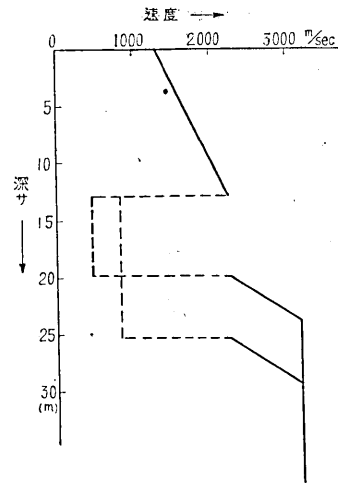
以上の如く解析を行つた結果二通りの解が得られたわけである。即ち第5圖に示す如く低速層に對する最大及び最小値に關聯して二通りの速度分布が得られたのである。これ等の解析の結果を實際用ふる場合は二つを平均したものとて差支ないであらう。

最後にこの結果と試錐の結果とを比較するに試錐は我々の慾する深さにまで達してゐないのは頗る遺憾であるが最上層及び低速層の一部を窺ひ知るには十分である。

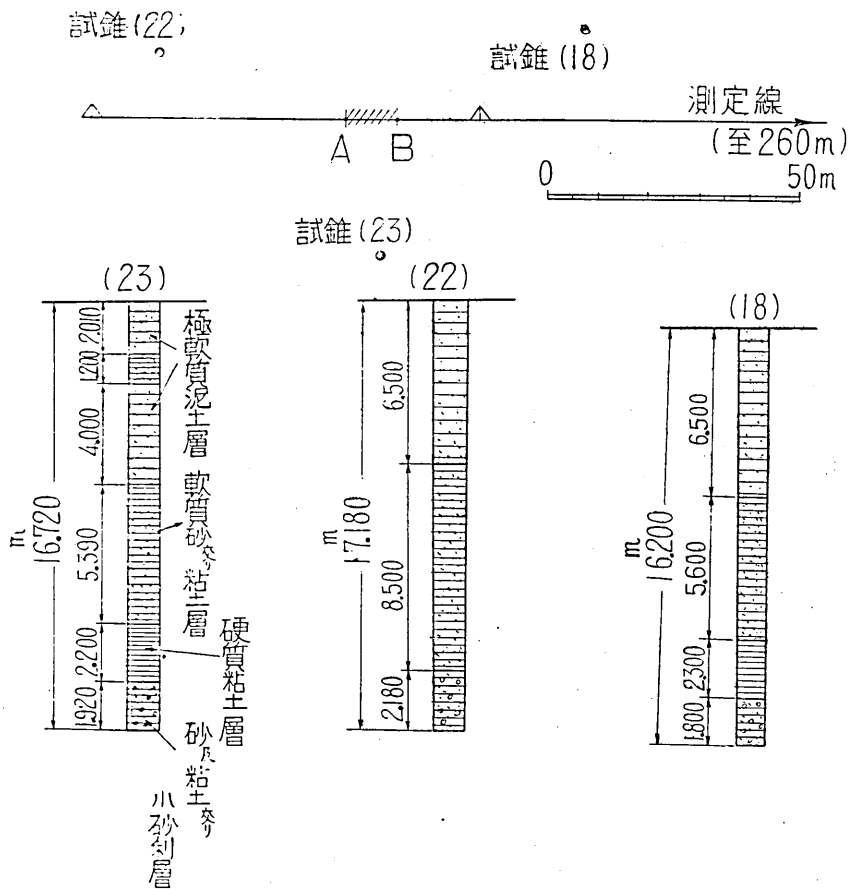
第6圖は試錐の結果から求められた地質柱狀圖を示す。最上層部は大體硬質粘土層より上の部分

に當りこゝでは含水量も相當多く却つてその下部よりも弾性波縦波速度が大きいのであらう。尚ほ此の地下探査によつて求める目的の岩盤は低速層下の 3250 m/sec なる速度を有するものであつてそれは附近の地質から砂岩層であることも略々想像されてゐた。

終りに臨み、上述の如き極めて稀らしい貴重な觀測資料を提供された鈴木武夫理學士に對して厚く感謝の意を表す。



第 5 圖



第 6 圖

23. *Propagation of Seismic Waves through an intervening Bed of Slow Speed.*

By Nobuji NASU,

In the presence of a slow-speed-bed the time-distance curve becomes discontinuous, as shown in Fig. 1. As is well known, it is impossible in such case to deduce from the travel-time curve unique values for seismic velocities at depth. In dealing with the theory of this case, the travel-time curve is, as usual, assumed to be completely known from field data. However, from the experimental point of

view, the required degree of completeness in a travel-time curve that contains a gap is not always certain, wherein lies the difficulty in actual practice.

Let T be the discontinuity in time, and X in distance. Then, for a given discontinuity T , the maximum thickness of the slower bed h_m is

$$h_m = \frac{1}{2} \sqrt{XL},$$

where L denotes $VT - X$, and is the distance marked in Fig. 1.

The velocity v_m , which insures this maximum thickness for the slower layer, becomes

$$v_m = \sqrt{\frac{VX}{T}},$$

where V denotes the highest value of the velocity in the uppermost layer.

The minimum thickness of a slow horizon is also easily found, in calculating which we may always fix a limiting value, below which the velocity cannot fall in any bed that may be present. Then, the minimum thickness becomes

$$h_l = \frac{L}{2} \frac{v_n}{\sqrt{V^2 - v_n^2}}.$$

The interpretation of the travel-time curve beyond the discontinuity involves three parts; (1) the interpretation gained from the initial segment of the travel-time curve in the normal way, (2) a maximum and minimum interpretation gained from the gap, and (3) the corresponding two interpretations gained from the second segment by using the two known, but artificial, velocity functions. In practice it will probably often be found that their mean may be used without risk of error that may be significant from the geological point of view.

An actual example of the travel-time curve containing a gap is shown in Fig. 3. The interpretation of the initial segment up to the gap was made under the assumption that the velocity increased linearly with depth, such as is expressible by the formula, $v = v_0 + ah$.

The maximum and minimum interpretations were gained from the gap, while the interpretations of the second segment were gained in the ordinary way. The results gave two velocity functions, such as shown in Fig. 5.

In Fig. 6, the results of borings are shown for comparison with the results of our interpretations.