

39. 不連続面が弾性波の傳播に及ぼす影響(其の6)

(表面層を有する弾性体内の體自由波の生成及び傳播機構. 兩彈性體が境界に於て通り得る場合)

地震研究所 { 西村源六郎
金井清

(昭和8年11月21日發表—昭和10年6月20日受理)

内容目次

	頁
緒言	519
第1章 表面層を有する半無限固体内を無限長の調和波型縦彈性波が傳播する時の一般解	520
第1節 一般解	520
第2節 地表層の厚さ H , 入射波の波長 L に就て $H/L=0$ なる場合の地表層の振動研究	523
第2章 表面層を有する半無限固体内を衝撃波型縦彈性波が傳播する時の一般解	526
第1節 一般解	526
第2節 兩彈性體の彈性力學的性質が全然相等しい場合, $\theta=30^\circ$ で入射する衝撃波によつて生ずる弾性体内の自由波問題	531

緒言

表面層と其の下にある半無限弾性體との境界に於て, 兩彈性體の垂直分應力と垂直分變位とが連続であつて, 接面變位及び剪斷分應力が不連続になつてゐる場合の弾性波動問題の研究は, 既に初入射波(縦彈性波)が圓函數的な無限長の場合に就て行つた.¹⁾ 殊に兩彈性體の密度, 彈性係數が全く相等しい場合にも表面層内には重複反射の現象が現はれ, 不連続面を境として波動現象に種々の特性のある事を見出した. 尙かゝる場合に於ける地表面に於ける初動の問題に就ては簡単な計算を行つた事がある.²⁾

1) 西村源六郎, 金井清 地震研究所彙報 11 (1934), 595.
2) 西村源六郎, 金井清 地震研究所彙報 11 (1934), 123.

本論文では第1章に於ては前論文と同じく境界面に於て兩彈性體の相互運動を許す場合、初入射波が圓函数的な無限長の縦彈性波である場合の研究を再び行ひ、第2章ではフーリエの2重積分公式を利用して第1章の結果を一般化し、衝撃波型の初入射波の場合、兩彈性體內に於ける波動問題を解決した。

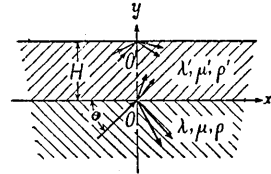
第1章 表面層を有する半無限固體內に無限長の調和波型縦彈性波が傳播入射する時の一般解

第1節 一般解

今厚さ H なる表面層、及びその下の媒體の密度、彈性係数を夫々 ρ', λ', μ' 及び ρ, λ, μ と考へる。直角坐標 (x, y) の原點 O は兩彈性體の境面上に置き、 x 軸はこの不連続面上に、 y 軸はこれに直角に採り、上向きを正とする。

今 $y < 0$ なる媒體に於ける初入射波 (縦彈性波)

$$\phi_0 = a e^{i(p't - f'x - r'y)} \quad (1)$$



第1圖

によつて誘起される兩彈性體内の波動問題を解決する

のであるが、 a は調和波の振動振幅を表はし、 f, r に就ては $r^2 = \rho p^2 / (\lambda + 2\mu) - f^2$ なる関係がある。尚 p に就てはこの入射波の振動週期を T_0 とすれば、 $p = 2\pi / T_0$ である。

(1) なる自由波の入射の爲め地表層及び其の下の媒體中には地表面及び兩彈性體の境界面に於ける彈性力學的條件を満足する様な強さを持つ種々の自由波が起されるのであるが、 $y < 0$ の媒體中には、 $y = 0$ で反射される縦、横兩彈性波 ϕ_1, ψ_1 、地表層内には、 $y = 0, y = H$ なる2面で反射或は屈折する縦、横兩彈性波 $\phi_1', \psi_1', \phi_2', \psi_2'$ を生じ、初入射波と釣合ふのである。即ち

$$\phi_1 = A' e^{i(p't - f'x + r'y)}, \quad \psi_2 = B' e^{i(p't - f'x + s'y)}, \quad (2)$$

$$\phi_1' = C e^{i(p't - f'x + r'y)}, \quad \psi_2' = E e^{i(p't - f'x + s'y)}, \quad (3)$$

$$\phi_1'' = D e^{i(p't - f'x - r'y)}, \quad \psi_2'' = F e^{i(p't - f'x - s'y)}. \quad (4)$$

勿論これ等調和波は彈性體波動方程式 $\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = \kappa \nabla^2 \phi, \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \kappa' \nabla^2 \psi$ を満足するものであつて、その強さを決定する A', B', C, D, E, F なる6個の常数は境界條件より決定されるものであり、 s, r', s' に就ては次の関係あり。

$$s^2 = \rho p^2 / \mu - f^2, \quad r'^2 = \rho' p^2 / (\lambda' + 2\mu') - f^2, \quad s'^2 = \rho' p^2 / \mu' - f^2.$$

勿論 ϕ , ϕ_1 の傳播速度は $\{(\lambda+2\mu)/\rho\}^{1/2}$, ϕ_1 の傳播速度は $(\mu/\rho)^{1/2}$ である. ϕ_1' , ϕ_2' の傳播速度は $\{(\lambda'+2\mu')/\rho'\}^{1/2}$, ϕ_1' , ϕ_2' は $(\mu'/\rho')^{1/2}$ なる傳播速度を有す.

今 x 軸, y 軸方向の變位 u , v を (1), (2), (3), 及び (4) より求める事は容易である. 一般に縦波 ϕ に就ては $u = \frac{\partial\phi}{\partial x}$, $v = \frac{\partial\phi}{\partial y}$, 横波に就ては, $u = \frac{\partial\phi}{\partial y}$, $v = -\frac{\partial\phi}{\partial x}$ なる關係で變位は表されるものである. この關係より, (1) に就ては

$$u_0 = -ifae^{i(\rho t - fx - ry)}, \quad v_0 = -ira e^{i(\rho t - fx - ry)}, \quad (5)$$

(2) なる ϕ_1 , ϕ_2 よりは

$$u_1 = -ifA'e^{i(\rho_1 t - fx + ry)}, \quad v_1 = ir'A'e^{i(\rho_1 t - fx + ry)}, \quad (6)$$

$$u_2 = isB'e^{i(\rho_2 t - fx + sy)}, \quad v_2 = ifB'e^{i(\rho_2 t - fx + sy)}, \quad (7)$$

(3) の ϕ_1' , ϕ_2' よりは

$$u_1' = -ifC'e^{i(\rho_1' t - fx + r'y)}, \quad v_1' = ir'C'e^{i(\rho_1' t - fx + r'y)}, \quad (8)$$

$$u_2' = is'E'e^{i(\rho_2' t - fx + s'y)}, \quad v_2' = ifE'e^{i(\rho_2' t - fx + s'y)}, \quad (9)$$

(4) の ϕ'' , ϕ_2'' よりは

$$u_1'' = -ifD'e^{i(\rho_1'' t - fx - r'y)}, \quad v_1'' = -ir'D'e^{i(\rho_1'' t - fx - r'y)}, \quad (10)$$

$$u_2'' = -is'F'e^{i(\rho_2'' t - fx - s'y)}, \quad v_2'' = ifF'e^{i(\rho_2'' t - fx - s'y)}. \quad (11)$$

扱て $y=0$ なる境に於て, 全然剪断應力が現はれない場合³⁾ 即ち τ を許す場合には,

$$\left. \begin{aligned} V = V', \quad \lambda \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} \right) + 2\mu \frac{\partial V}{\partial y} &= \lambda' \left(\frac{\partial U'}{\partial x} + \frac{\partial V'}{\partial y} \right) + 2\mu' \frac{\partial V'}{\partial y}, \\ \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial V'}{\partial x} + \frac{\partial U'}{\partial y} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

を $y=0$ なる面で満足し, $y=H$ なる表面に於ては

$$\frac{\partial V'}{\partial x} + \frac{\partial U'}{\partial y} = 0, \quad \lambda' \left(\frac{\partial U'}{\partial x} + \frac{\partial V'}{\partial y} \right) + 2\mu' \frac{\partial V'}{\partial y} = 0 \quad (13)$$

を満足する様に, (5)~(11) の A' , B' , C , D , E , F を調節するのである. (12), (13) に於て

$$\left. \begin{aligned} U &= u_0 + u_1 + u_2, & V &= v_0 + v_1 + v_2, \\ U &= u_1' + u_2' + u_1'' + u_2'', & V &= v_1' + v_2' + v_1'' + v_2'' \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

3) $y=0$ の面で τ を許すが, 摩擦抵抗のある場合の計算は次の機会に譲つて置く.

然る時は

$$\begin{aligned}
 A = & -\frac{r}{f}\left(1+\frac{s^2}{f^2}\right)\frac{\mu'}{\mu}\left[-32\frac{r's'}{f^2}\left(1+\frac{s'^2}{f^2}\right)^2\right. \\
 & +\left\{\left(1-\frac{s'^2}{f^2}\right)^2+4\frac{r's'}{f^2}\right\}^2\left\{e^{-i(r'+s')H}+e^{i(r'+s')H}\right\} \\
 & -\left\{\left(1-\frac{s'^2}{f^2}\right)^2-4\frac{r's'}{f^2}\right\}^2\left\{e^{-i(r'-s')H}+e^{i(r'-s')H}\right\}\left. \right] \\
 & -\frac{r'}{f}\left(1+\frac{s'^2}{f^2}\right)\left\{\left(1-\frac{s^2}{f^2}\right)^2+4\frac{rs}{f^2}\right\}\left[\left\{\left(1-\frac{s'^2}{f^2}\right)^2+4\frac{r's'}{f^2}\right\}\left\{e^{-i(r'+s')H}-e^{i(r'+s')H}\right\}\right. \\
 & \left. -\left\{\left(1-\frac{s'^2}{f^2}\right)^2-4\frac{r's'}{f^2}\right\}\left\{e^{i(r'-s')H}-e^{i(r'-s')H}\right\}\right] \quad (15)
 \end{aligned}$$

と置く時,

$$\begin{aligned}
 \frac{A}{a}A' = & -\frac{r}{f}\left(1-\frac{s^2}{f^2}\right)\left[-32\frac{r's'}{f^2}\left(1-\frac{s'^2}{f^2}\right)^2\right. \\
 & +\left\{\left(1-\frac{s'^2}{f^2}\right)^2+4\frac{r's'}{f^2}\right\}^2\left\{e^{-i(r'+s')H}+e^{i(r'+s')H}\right\} \\
 & -\left\{\left(1-\frac{s'^2}{f^2}\right)^2-4\frac{r's'}{f^2}\right\}^2\left\{e^{-i(r'-s')H}+e^{i(r'-s')H}\right\}\left. \right] \\
 & +\frac{r'}{f}\left(1+\frac{s'^2}{f^2}\right)\left\{\left(1-\frac{s^2}{f^2}\right)^2-4\frac{rs}{f^2}\right\}\left[\left\{\left(1-\frac{s'^2}{f^2}\right)^2+4\frac{r's'}{f^2}\right\}\left\{e^{-i(r'+s')H}-e^{i(r'+s')H}\right\}\right. \\
 & \left. -\left\{\left(1-\frac{s'^2}{f^2}\right)^2-4\frac{r's'}{f^2}\right\}\left\{e^{-i(r'-s')H}-e^{i(r'-s')H}\right\}\right], \quad (16)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{A}{a}B' = & 4\frac{r}{f}\left(1-\frac{s^2}{f^2}\right)\frac{r'}{f}\left(1+\frac{s'^2}{f^2}\right)\left[\left\{\left(1-\frac{s'^2}{f^2}\right)^2+4\frac{r's'}{f^2}\right\}\left\{e^{-i(r'+s')H}-e^{i(r'+s')H}\right\}\right. \\
 & \left. -\left\{\left(1-\frac{s'^2}{f^2}\right)^2-4\frac{r's'}{f^2}\right\}\left\{e^{-i(r'-s')H}-e^{i(r'-s')H}\right\}\right], \quad (17)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{A}{a}C = & 2\frac{r}{f}\left(1-\frac{s^2}{f^2}\right)\left(1+\frac{s^2}{f^2}\right)\left(1-\frac{s'^2}{f^2}\right)\left[8\frac{r's'}{f^2}-\left\{\left(1-\frac{s'^2}{f^2}\right)^2+4\frac{r's'}{f^2}\right\}e^{-i(r'+s')H}\right. \\
 & \left.+ \left\{\left(1-\frac{s'^2}{f^2}\right)^2-4\frac{r's'}{f^2}\right\}e^{-i(r'-s')H}\right], \quad (18)
 \end{aligned}$$

$$\frac{D}{a} = -2 \frac{r'}{f} \left(1 - \frac{s'^2}{f^2}\right) \left(1 + \frac{s^2}{f^2}\right) \left(1 - \frac{s'^2}{f^2}\right) \left[-8 \frac{r's'}{f^2} - \left\{ \left(1 - \frac{s'^2}{f^2}\right)^2 - 4 \frac{r's'}{f^2} \right\} e^{i(r'-s')H} \right. \\ \left. + \left\{ \left(1 - \frac{s'^2}{f^2}\right)^2 + 4 \frac{r's'}{f^2} \right\} e^{i(r'+s')H} \right], \quad (19)$$

$$\frac{E}{a} = 4 \frac{r'r'}{f^2} \left(1 - \frac{s^2}{f^2}\right) \left(1 + \frac{s^2}{f^2}\right) \left[-2 \left(1 - \frac{s'^2}{f^2}\right)^2 + \left\{ \left(1 - \frac{s'^2}{f^2}\right)^2 + 4 \frac{r's'}{f^2} \right\} e^{-i(r'+s')H} \right. \\ \left. + \left\{ \left(1 - \frac{s'^2}{f^2}\right)^2 - 4 \frac{r's'}{f^2} \right\} e^{i(r'-s')H} \right], \quad (20)$$

$$\frac{F}{a} = -4 \frac{r'r'}{f^2} \left(1 - \frac{s^2}{f^2}\right) \left(1 + \frac{s^2}{f^2}\right) \left[-2 \left(1 - \frac{s'^2}{f^2}\right)^2 + \left\{ \left(1 - \frac{s'^2}{f^2}\right)^2 - 4 \frac{r's'}{f^2} \right\} e^{-i(r'-s')H} \right. \\ \left. + \left\{ \left(1 - \frac{s'^2}{f^2}\right)^2 + 4 \frac{r's'}{f^2} \right\} e^{i(r'+s')H} \right] \quad (21)$$

によつて、常數従つて各自由波の強さは決定されるのであるが、これ等は縦横兩彈性波の傳播速度 $\sqrt{(\lambda+2\mu)/\rho}$, $\sqrt{\mu/\rho}$, $\sqrt{(\lambda'+2\mu')/\rho'}$, $\sqrt{\mu'/\rho'}$ 及び、入射角、層の厚さ H , 彈性係數、或は入射波の波長の超越函數として表されてゐるのである。(16)~(21)を(6)~(11)に夫々代入する時、初めて、(5)なる調和函數的な入射波による彈性體内の波動問題を解決し得るのである。これ等に關する數値計算的な研究は特殊な場合に就て既にその一部を報告しておいた⁴⁾。數値計算による詳細の報告は次の時機に譲つて置く。次に地表面の振動問題を解決して置く。

第2節 地表面の厚さ H , 入射波の波長 L に就て $H/L=0$ なる 場合の地表面の振動研究

第1節の解析結果を實際問題と關係づける場合には地震波の波長は層の厚さに比して非常に長いとするのがよい場合がある。層の厚さ H に比し入射波の波長 L が非常に大きくその極端の場合として $H/L=0$ なる時の波動問題を論じて置く。

扱て $r'H$ 及び $s'H$ は次の關係で與へられるものである。

$$r'H = 2\pi \cos \theta \left\{ \left(\frac{V_1}{V_1'} \right)^2 \sec^2 \theta - 1 \right\}^{1/2} \frac{H}{L}, \quad s'H = 2\pi \cos \theta \left\{ \left(\frac{V_1}{V_2'} \right)^2 \sec^2 \theta - 1 \right\}^{1/2} \frac{H}{L}. \quad (22)$$

4) 西村源六郎, 金井清 地震研究所彙報 11 (1933), 595~631.

但し θ は初射波の入射角であり, L はこの波の波長, V_1, V_1', V_2' は夫々縦横兩彈性波の地表層及びその下の媒体内での傳播速度であつて,

$$V_1 = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}, \quad V_1' = \sqrt{\frac{\lambda' + 2\mu'}{\rho}}, \quad V_2' = \sqrt{\frac{\mu'}{\rho}}$$

である。(22) の關係を利用し, $H/L=0$ の時には (15)~(21) より, 常數 A', B', C, D, E 及び F は次の様になる, ($H/L=0$ の時はこれ等常數は不定形の極限值として求める必要がある.)

$$\left. \begin{aligned} A' &= -\frac{\left\{ \left(1 - \frac{s^2}{f^2}\right)^2 - 4\frac{r's}{f^2} \right\}}{\left\{ \left(1 - \frac{s^2}{f^2}\right)^2 + 4\frac{r's}{f^2} \right\}} \alpha, & B' &= -4\frac{\frac{r'}{f}\left(1 - \frac{s^2}{f^2}\right)}{\left\{ \left(1 - \frac{s^2}{f^2}\right)^2 + 4\frac{r's}{f^2} \right\}} \alpha, \\ C = -D &= \frac{\frac{r'}{f}\left(1 - \frac{s^2}{f^2}\right)\left(1 + \frac{s^2}{f^2}\right)\left(1 - \frac{s'^2}{f'^2}\right)}{\frac{r'}{f}\left(1 + \frac{s'^2}{f'^2}\right)\left\{ \left(1 - \frac{s^2}{f^2}\right)^2 + 4\frac{r's}{f^2} \right\}} \alpha, \\ E = F &= -2\frac{\frac{r'}{f}\left(1 - \frac{s^2}{f^2}\right)\left(1 + \frac{s^2}{f^2}\right)}{\left(1 + \frac{s'^2}{f'^2}\right)\left\{ \left(1 - \frac{s^2}{f^2}\right)^2 + 4\frac{r's}{f^2} \right\}} \alpha. \end{aligned} \right\} (23)$$

(23) を (6), (7), (8), (9), (10) 及び (11) に代入する事によつて, 地表層の厚さ H に比して (5) なる入射波の波長が無限に長い場合の波動問題は (14) により解決せられる. 即ち $\frac{y}{L} \geq \frac{H}{L}$ である事を注意すれば (8), (9), (10), (11) より定状態になれば地表層には全然水平方向の運動は見られなくなり, 次式で與へられる垂直方向の運動のみが起される事が解かる.

$$V = i \frac{2\pi}{L} \mathfrak{A} \cos \theta \frac{\frac{r'}{f}\left(1 - \frac{s^2}{f^2}\right)\left(1 + \frac{s^2}{f^2}\right)}{\frac{r'}{f}\left(1 + \frac{s'^2}{f'^2}\right)\left\{ \left(1 - \frac{s^2}{f^2}\right)^2 + 4\frac{r's}{f^2} \right\}} \cdot \left[\left(1 - \frac{s'^2}{f'^2}\right)\left\{ \left(\frac{V_1}{V_1'}\right)^2 \sec^2 \theta - 1 \right\}^{1/2} - 4\frac{r'}{f} \right] e^{i(r't - fx)}. \quad (24)$$

尙地表層と下媒體との境では水平方向の運動は不連続であつて、地表層には水平運動はなく(24)で見る如き上下運動のみであるが、下の媒體の $y=0$ の面では次の如き運動が起つてゐるのである。

$$\left. \begin{aligned}
 U_{y=0} &= -i \frac{2\pi}{L} a \cos \theta \left[1 - \frac{\left\{ \left(1 - \frac{s^2}{f^2}\right)^2 - 4 \frac{rs}{f^2} \right\}}{\left\{ \left(1 - \frac{s^2}{f^2}\right)^2 + 4 \frac{rs}{f^2} \right\}} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{4 \frac{r}{f} \left(1 - \frac{s^2}{f^2}\right)}{\left\{ \left(1 - \frac{s^2}{f^2}\right)^2 + 4 \frac{rs}{f^2} \right\}} \left\{ \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^2 \sec^2 \theta - 1 \right\}^{1/2} \right] e^{i(\rho t - fx)}, \\
 V_{y=0} &= -i \frac{2\pi}{L} a \sin \theta \left[1 + \frac{\left\{ \left(1 - \frac{s^2}{f^2}\right)^2 - 4 \frac{rs}{f^2} \right\}}{\left\{ \left(1 - \frac{s^2}{f^2}\right)^2 + 4 \frac{rs}{f^2} \right\}} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{4 \frac{r}{f} \left(1 - \frac{s^2}{f^2}\right)}{\left\{ \left(1 - \frac{s^2}{f^2}\right)^2 + 4 \frac{rs}{f^2} \right\}} \cot \theta \right] e^{i(\rho t - tr)}
 \end{aligned} \right\} (25)$$

(25)より明かな様に境界面では、 $H/L=0$ の場合には分子運動の軌跡は直線的であつて、而もその軌跡の大きさを支配するものは、單に入射波の大きさ a 、入射角 θ 、そして、下の媒體の密度、弾性係數 (或は縦横の兩波の傳播速度 $\sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}}$ 、 $\sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$) のみであつて、表面層の厚さ、その密度 ρ' 、弾性係數 λ' 、 μ' は全然これには關係しないものであり、且つ入射波の波長 L も無關係である。尙 $H/L=0$ の時には下の媒體內何れの點の運動にも表面層の λ' 、 μ' 、及び ρ' 或は H が關係しない事は (23) に於て A' 、 B' の式を見れば明かな事であつて、 $y=0$ 面で反射されて生ずる縦横兩彈性波 ϕ_1 、 ϕ_2 の強さを支配するものは (23) の A' 、 B' のみであつて、地表層の λ' 、 μ' 、 ρ' が無關係である事は注意を要す。然るに地表層の運動の振幅は單に λ' 、 μ' 、 ρ' のみならず、下の媒體の λ 、 μ 及び ρ 、そして勿論入射波の入射角 θ 及びその強さ a 、波長 L の大きさによつて支配されるものである。

これ等の結果より見て、 $H/L=0$ の時には、定状態では表面層内には横波の形式をとつて、單に分子の上下運動のみが、下媒體内の縦波の速度 V_1 で水平方向に傳播する事が (24) より見られる。勿論その波長は入射波の波長 L に等しい。尙表面層内の

運動軌跡は直線で垂直方向のみであるが, 下の媒体内で $y \geq L$ の様な深さの所では一般には楕圓運動になり, $y \leq L$ の様な所即ち $y=0$ 面に近づくに従つて, 軌跡は直線運動となり, $y=0$ 面では (25) より

$$\left\{ 2 - \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^2 \sec^2 \theta \right\} U_{y=0} - 2 \tan \theta \left\{ \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^2 \sec^2 \theta - 1 \right\}^{1/2} V_{y=0} = 0 \quad (26)$$

なる軌跡を畫く事が容易に解かる. 尙水平軸 x とこの (26) なる振動軌跡のなす角即ちこの直線運動の水平軸に對する傾きを α とする時

$$\alpha = \tan^{-1} \frac{2 - \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^2 \sin^2 \theta}{2 \tan \theta \sqrt{\left(\frac{V_1}{V_2} \right)^2 \sec^2 \theta - 1}} \quad (27)$$

によつて決定される.

以上によつて $H/L=0$ の時の解析的研究は終へる. $H/L>0$ なる場合には地表層内の運動は可なり複雑で, 一般にその運動軌跡は楕圓形をとる様になり, 且つその短軸, 長軸の長さが入射角 θ , H/L , V_1 , V_2 , V_1' , V_2' の超越函數式で表されるのである. 既に $V_1=V_1'$, $V_2=V_2'$ の場合に就ては多少その研究結果を圖をもつて示して置いた²⁾.

第2章 表面層を有する半無限固体内を衝撃波型縦彈性波が傳播する時の一般解

第1節 一般解

前章第1節で求めた一般解をフーリエの積分公式を利用して, 任意の形をした波形が θ なる入射角で $y=0$ なる面に入射する場合の解を求める事とする. この初入射波 ϕ_0 が

$$\phi_0 = F(x, y) \quad (28)$$

なる波形を持つてゐるものとすれば,

$$\phi_0 = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i \frac{r_1 f}{\cos \theta}} df \int_{-\infty}^{\infty} dr \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} F(\xi, \eta) e^{-i((x-\xi)+r(y-\eta))} d\eta \quad (29)$$

によつて, 入射波は示めされる事は (1) より容易に解かる. 従つて第1章の結果を参照して,

5) 西村源六郎, 金井清 地震研究所彙報 11 (933), 595~631.

$$\phi_1 = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i \frac{V_1 t}{\cos \theta} f} \frac{A'}{a} df \int_{-\infty}^{\infty} dr \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} F(\xi, \eta) e^{-i\{f(x-\xi)-r(y+\eta)\}} d\eta, \quad (30)$$

$$\phi_2 = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i \frac{V_1 t}{\cos \theta} f} \frac{B'}{a} df \int_{-\infty}^{\infty} dr \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} F(\xi, \eta) e^{-i\left[f(x-\xi)-r \left\{1 - \frac{\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^2 - \cos^2 \theta}{\sin \theta} y + \eta\right\}\right]} d\eta, \quad (31)$$

$$\phi_1' = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i \frac{V_1 t}{\cos \theta} f} \frac{C}{a} df \int_{-\infty}^{\infty} dr \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} F(\xi, \eta) e^{-i\left[f(x-\xi)-r \left\{1 - \frac{\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^2 - \cos^2 \theta}{\sin \theta} y + \eta\right\}\right]} d\eta, \quad (32)$$

$$\phi_2' = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i \frac{V_1 t}{\cos \theta} f} \frac{E}{a} df \int_{-\infty}^{\infty} dr \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} F(\xi, \eta) e^{-i\left[f(x-\xi)-r \left\{1 - \frac{\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^2 - \cos^2 \theta}{\sin \theta} y + \eta\right\}\right]} d\eta, \quad (33)$$

$$\phi_1'' = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i \frac{V_1 t}{\cos \theta} f} \frac{D}{a} df \int_{-\infty}^{\infty} dr \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} F(\xi, \eta) e^{-i\left[f(x-\xi)+r \left\{1 - \frac{\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^2 - \cos^2 \theta}{\sin \theta} y - \eta\right\}\right]} d\eta, \quad (34)$$

$$\phi_2'' = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i \frac{V_1 t}{\cos \theta} f} \frac{F}{a} df \int_{-\infty}^{\infty} dr \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} F(\xi, \eta) e^{-i\left[f(x-\xi)+r \left\{1 - \frac{\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^2 - \cos^2 \theta}{\sin \theta} y - \eta\right\}\right]} d\eta. \quad (35)$$

(30)~(35) に於て, A'/a , B'/a , C/a , E/a , D/a 及び F/a は夫々入射角 θ , 傳播速度 $\sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}}$, $\sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$, $\sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho'}}$ 及び $\sqrt{\frac{\mu'}{\rho'}}$ の函数であつて,

$$\left. \begin{aligned} a &= \tan e, \quad b = \left\{ \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^2 \sec^2 e - 1 \right\}^{1/2}, \quad a' = \left\{ \left(\frac{V_1}{V_1'} \right)^2 \sec^2 e - 1 \right\}^{1/2}, \\ b' &= \left\{ \left(\frac{V_1}{V_2'} \right)^2 \sec^2 e - 1 \right\}^{1/2}, \quad c = \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^2 \sec^2 e, \quad d = 2 - \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^2 \sec^2 e, \\ c' &= \left(\frac{V_1}{V_2'} \right)^2 \sec^2 e, \quad d' = 2 - \left(\frac{V_1}{V_2'} \right)^2 \sec^2 e \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

と置けば,

$$\frac{A'}{a} = -\frac{ad}{d'} \left[-32 a' b' d'^2 e^{i(a'+b')fH} + (d'^2 + 4a'b')^2 \{1 + e^{i2(a'+b')fH}\} \right. \\ \left. - (d'^2 - 4a'b')^2 \{e^{i2b'fH} + e^{i2a'fH}\} \right]$$

$$+ \frac{a'c'(d^2 - 4ab)}{J} \left[(d'^2 + 4a'b') \{1 - e^{2i(\alpha' + b')fH}\} \right. \\ \left. - (d'^2 - 4a'b') \{e^{i2b'fH} - e^{i2a'fH}\} \right], \quad (37)$$

$$\frac{B'}{a} = \frac{4aa'de'}{J} \left[(d'^2 + 4a'b') \{1 - e^{i2(\alpha' + b')fH}\} \right. \\ \left. - (d'^2 - 4a'b') \{e^{i2b'fH} - e^{i2a'fH}\} \right], \quad (38)$$

$$\frac{C}{a} = \frac{2acd'd'}{J} \left[-(d'^2 + 4a'b')8a'b'e^{i(\alpha' + b')fH} \right. \\ \left. + (d'^2 - 4a'b')e^{i2b'fH} \right], \quad (39)$$

$$\frac{D}{a} = -\frac{2acd'd'}{J} \left[-8a'b'e^{i(\alpha' + b')fH} + (d'^2 + 4a'b')e^{i2(\alpha' + b')fH} \right. \\ \left. - (d'^2 - 4a'b')e^{i2a'fH} \right], \quad (40)$$

$$\frac{E}{a} = \frac{4aa'cd'}{J} \left[(d'^2 + 4a'b') - 2d'^2e^{i(\alpha' + b')fH} \right. \\ \left. + (d'^2 - 4a'b')e^{i2a'fH} \right] \quad (41)$$

$$\frac{F}{a} = -\frac{4aa'cd'}{J} \left[(d'^2 - 4a'b') + (d'^2 + 4a'b')e^{i2(\alpha' + b')fH} \right. \\ \left. - 2d'^2e^{i(\alpha' + b')fH} \right], \quad (42)$$

$$\text{但し} \quad \Delta = a + \beta e^{i(\alpha' + b')fH} + \gamma e^{i2(\alpha' + b')fH} + \delta e^{i2a'fH} + \epsilon e^{i2b'fH} \quad (43)$$

であつて,

$$\left. \begin{aligned} a &= -ac(d'^2 + 4a'b')^2 \frac{f'}{\mu} - a'c'(d^2 + 4ad)(d'^2 + 4a'b'), \\ \beta &= 32aa'b'cd' \frac{f'}{\mu}, \\ \gamma &= -ac(d'^2 + 4a'b')^2 \frac{f'}{\mu} + a'c'(d^2 + 4ab)(d'^2 + 4a'b'), \\ \delta &= ac(d'^2 - 4a'b')^2 \frac{f'}{\mu} + a'c'(d^2 + 4ab)(d'^2 - 4a'b'), \\ \epsilon &= ac(d'^2 - 4a'b')^2 \frac{f'}{\mu} - a'c'(d^2 + 4ab)(d'^2 - 4a'b'). \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

茲に於て (37)~(44) を見る時, (30)~(35) に於ける f に關する積分に於ては分母分子が f の圓函數より成る超越函數である事が理解される。(分母の形は (43) で與へられてゐる.) 従つて, この項を $e^{ia'fH}$, $e^{ib'fH}$ の冪級數に展開するのであるが, この爲めには (43) の逆式である $1/D$ を展開すれば充分である事がわかる. 即ち $1/D$ を展開すれば,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{D} &= \left\{ \alpha + \beta e^{i(\alpha' + b')fH} + \gamma e^{i2(\alpha' + b')fH} + \delta e^{i2\alpha'fH} + \varepsilon e^{i2b'fH} \right\}^{-1} \\
&= \left[\frac{1}{\alpha} - \left\{ \frac{\delta}{\alpha^2} e^{i2\alpha'fH} + \frac{\beta}{\alpha^2} e^{i(\alpha' + b')fH} + \frac{\varepsilon}{\alpha^2} e^{i2b'fH} \right\} \right. \\
&\quad + \left\{ \frac{\delta}{\alpha^3} e^{i4\alpha'fH} + 2\frac{\beta\delta}{\alpha^3} e^{i(3\alpha' + b')fH} + \left(\frac{\beta^2}{\alpha^3} + 2\frac{\delta\varepsilon}{\alpha^3} - \frac{\gamma}{\alpha^3} \right) e^{i2(\alpha' + b')fH} \right. \\
&\quad \quad \left. \left. + 2\frac{\beta\varepsilon}{\alpha^3} e^{i(\alpha' + 3b')fH} + \frac{\varepsilon^2}{\alpha^3} e^{i4b'fH} \right\} \right. \\
&\quad - \left\{ \frac{\delta^3}{\alpha^4} e^{i6\alpha'fH} + 3\frac{\beta\delta^2}{\alpha^4} e^{i(5\alpha' + b')fH} + \left(3\frac{\beta^2\delta}{\alpha^4} + 3\frac{\varepsilon\delta^2}{\alpha^4} - 2\frac{\gamma\delta}{\alpha^4} \right) e^{i(3\alpha' + 2b')fH} \right. \\
&\quad \left. + \left(6\frac{\beta\delta\varepsilon}{\alpha^4} + \frac{\beta^3}{\alpha^4} - 2\frac{\beta\gamma}{\alpha^4} \right) e^{i2(3\alpha' + b')fH} + \left(3\frac{\beta^2\varepsilon}{\alpha^4} + 3\frac{\varepsilon^2\delta}{\alpha^4} - 2\frac{\gamma\varepsilon}{\alpha^4} \right) e^{i2(\alpha' + 2b')fH} \right. \\
&\quad \quad \left. \left. + 3\frac{\beta\varepsilon^2}{\alpha^4} e^{i(\alpha' + 5b')fH} + \frac{\varepsilon^3}{\alpha^4} e^{i4b'fH} \right\} \right. \\
&\quad \left. + \left\{ \frac{\delta^4}{\alpha^5} e^{i8\alpha'fH} + 4\frac{\beta\delta^3}{\alpha^5} e^{i(7\alpha' + b')fH} \right. \right. \\
&\quad + \left(4\frac{\delta^3\varepsilon}{\alpha^5} + 6\frac{\delta^2\beta^2}{\alpha^5} - 3\frac{\delta^2\gamma}{\alpha^5} \right) e^{i2(3\alpha' + b')fH} + \left(4\frac{\delta\beta^3}{\alpha^5} + 12\frac{\delta^2\beta\varepsilon}{\alpha^5} - 6\frac{\gamma\delta\beta}{\alpha^5} \right) e^{i(5\alpha' + 3b')fH} \\
&\quad + \left(12\frac{\varepsilon\beta^2\delta}{\alpha^5} + 6\frac{\varepsilon^2\delta^2}{\alpha^5} + \frac{\beta^4}{\alpha^5} + \frac{\gamma^2}{\alpha^5} - 3\frac{\beta^2\gamma}{\alpha^5} - 6\frac{\gamma\delta\varepsilon}{\alpha^5} \right) e^{i4(\alpha' + b')fH} \\
&\quad + \left(4\frac{\varepsilon\beta^3}{\alpha^5} + 12\frac{\delta\beta\varepsilon^2}{\alpha^5} - 6\frac{\varepsilon\beta\gamma}{\alpha^5} \right) e^{i(3\alpha' + 5b')fH} + \left(4\frac{\delta\varepsilon^3}{\alpha^5} + 6\frac{\varepsilon^2\beta^2}{\alpha^5} - 3\frac{\varepsilon^2\gamma}{\alpha^5} \right) e^{i2(\alpha' + 3b')fH} \\
&\quad \left. \left. + 4\frac{\varepsilon^3\beta}{\alpha^5} e^{i(\alpha' + 7b')fH} + \frac{\varepsilon^4}{\alpha^5} e^{i8b'fH} \right\} + \dots \right]. \tag{45}
\end{aligned}$$

(45)に於ける級数は初項より第8項目まで採つてあるが、計算の目的によつては今少し項数を増さなければならぬ事もある。兎に角展開式に於ける各項は夫々力學的の意味を有するものであつて、 $F(x, y)$ なる初入射波によつて起される表面層内に於ける數次の反射屈折に關係するものである事は(30)~(35)に(45)を用ひた(37)~(42)を代入すれば解かる。尙かくの如くして求めた展開式は非常に收斂性のよい事は(44)に於ける a の羅が展開式の各項の分母に入つてゐる事より明かであり、尙これは表面層内に於ける自由波の表面及び $y=0$ なる境界面に於ける數次の反射に伴ふてその強さが次第に減少して行く事を示めてゐるのである。次に(45)を用ひた(37)~(42)の $A/a, B/a, C/a, E/a, D/a$ 及び F/a を夫々(30)~(35)なる $\phi_1, \psi_2, \phi_2', \psi_2', \phi_1'', \psi_2''$ に代入すれば、(29)なる波の入射によつて誘起される彈性體内の自由波の問題は解決せられるが、その結果の式は略して置く。一般に彈性體内で反射或は屈折する各自由波の形式は總て

$$F = Q \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\gamma r + \frac{V_1 t}{\cos \theta})} df \int_{-\infty}^{\infty} dr \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} F(\xi, \eta) e^{-i(f(x-\xi) - r(sy + \tau))} d\eta \quad (46)$$

の形式となる。位相の違ひを示す q は(45)を用ひた(37)~(42)によつて決定せられてゐる。 Q は各自由波の強さに關する常數であつて、これは、入射角 θ 、速度 V_1, V_2, V_1', V_2' の超越函數となつてゐる事は(37)~(42)で明かである。従つて問題は(28)なる ϕ_0 の形即ち $F(x, y)$ を具體的に與へ、(46)なる積分を求める事が出来れば、彈性體中に起る波動現象は完全に解き得る理である。

今例へば

$$F(x, y) = e^{-\frac{(x \cos \theta + y \sin \theta)^2}{c^2}} \quad (47)$$

なる衝撃波型の縦波が入射すると考へる。 c は見掛け上の波長に關係したものであり、 θ は入射角である。然る時は⁶⁾

$$F = Q e^{-\frac{(x \cos \theta + sy \sin \theta - \eta \cos \theta - V_1 t)^2}{c^2}} \quad (48)$$

となり、これを利用する事によつて問題は完全に解決せられるのである。

6) 妹澤克惟, 金井清 地震研究所彙報 10 (1933), 805.

西村源六郎, 金井清 地震研究所彙報 12 (1934), 292.

第2節 兩彈性體の弾性力學的性質が全然相等しい場合, $\theta = 30^\circ$ で入射す

る衝撃波によつて生ずる彈性體內の自由波問題

さて $\lambda = \lambda'$, $\mu = \mu'$, $\rho = \rho'$, そして $\lambda = \mu$, $\lambda' = \mu'$ なる時, $\theta = 30^\circ$ で (47) なる型の波が入射する場合の問題を圖をもつて研究解決する事とする.

(47) はこの場合,

$$F(x, y) = e^{-\frac{(\frac{1}{2}\sqrt{3}x + \frac{1}{2}y)^2}{c^2}} \quad (49)$$

となる. 従つて

$$\phi = e^{-\frac{(\frac{1}{2}\sqrt{3}x + \frac{1}{2}y - V_1t)^2}{c^2}}, \quad (50)$$

$$\phi_1 = \frac{1}{2} e^{-\frac{(\frac{1}{2}\sqrt{3}x - \frac{1}{2}y - V_1t)^2}{c^2}} - \frac{1}{2} e^{-\frac{(\frac{1}{2}\sqrt{3}x - \frac{1}{2}y - V_1t + \frac{4}{\sqrt{3}}M)^2}{c^2}}, \quad (51)$$

$$\phi_2 = \frac{1}{2\sqrt{3}} e^{-\frac{(\frac{1}{2}\sqrt{3}x - \frac{1}{2}y - V_1t)^2}{c^2}} + e^{-\frac{(x - \sqrt{3}y - V_1t + \frac{4}{\sqrt{3}}M)^2}{c^2}}, \quad (52)$$

$$\phi'_1 + \phi''_1 = \frac{1}{2} \left[-e^{-\frac{(x + \frac{1}{\sqrt{3}}y - V_1t + \frac{4}{\sqrt{3}}M)^2}{c^2}} + e^{-\frac{(x - \frac{1}{\sqrt{3}}y - V_1t)^2}{c^2}} \right], \quad (53)$$

$$\phi'_2 + \phi''_2 = \frac{1}{2\sqrt{3}} \left[e^{-\frac{(x + \sqrt{3}y - V_1t + \frac{4}{\sqrt{3}}M)^2}{c^2}} + e^{-\frac{(x - \sqrt{3}y - V_1t)^2}{c^2}} \right] \quad (54)$$

となり, この他には全然波動は彈性體內には生じる事がない. この場合には, (45) を代入した (37)~(42) に於ける無限級数が結局合成の結果次の様な簡単なものに置き換へられるから, (51), (52), (53), (54) で示めされる夫々の位相波より以外の波即ち地表面或は $y=0$ なる不連続面での數次反射或は屈折するものは相互に打消し合つて, 結局 (51)~(54) 以外の位相波は現はれない事となる.

$$\frac{A'}{\alpha} = \frac{1}{2} \left\{ 1 - e^{i\frac{4}{\sqrt{3}}M} \right\}, \quad \frac{B'}{\alpha} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \left\{ 1 + e^{i\frac{4}{\sqrt{3}}M} \right\}, \quad \frac{C}{\alpha} = -\frac{1}{2} e^{i\frac{4}{\sqrt{3}}M},$$

$$\frac{D}{\alpha} = \frac{1}{2}, \quad \frac{E}{\alpha} = \frac{1}{2\sqrt{3}} e^{i\frac{4}{\sqrt{3}}M}, \quad \frac{F}{\alpha} = \frac{1}{2\sqrt{3}}.$$

茲に於て (14) で示めされる U, V, U', V' を求める時は,

$$\begin{aligned}
 U = & \left[\frac{-2\left(x - \frac{1}{\sqrt{3}}y - V_1 t\right)}{c^2} e^{-\frac{\left(x - \frac{1}{\sqrt{3}}y - V_1 t\right)^2}{c^2}} - \frac{\left(x + \frac{1}{\sqrt{3}}y - V_1 t\right)}{c^2} e^{-\frac{\left(x + \frac{1}{\sqrt{3}}y - V_1 t\right)^2}{c^2}} \right. \\
 & + \frac{\left(x + \frac{1}{\sqrt{3}}y - V_1 t + \frac{4}{\sqrt{3}}H\right)}{c^2} e^{-\frac{\left(x + \frac{1}{\sqrt{3}}y - V_1 t + \frac{4}{\sqrt{3}}H\right)^2}{c^2}} - \frac{\left(x + \sqrt{3}y - V_1 t\right)}{c^2} e^{-\frac{\left(x + \sqrt{3}y - V_1 t\right)^2}{c^2}} \\
 & \left. - \frac{\left(x + \sqrt{3}y - V_1 t + \frac{4}{\sqrt{3}}H\right)}{c^2} e^{-\frac{\left(x + \sqrt{3}y - V_1 t + \frac{4}{\sqrt{3}}H\right)^2}{c^2}} \right], \quad (55)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 V = & \left[\frac{2}{\sqrt{3}} \frac{\left(x - \frac{1}{\sqrt{3}}y - V_1 t\right)}{c^2} e^{-\frac{\left(x - \frac{1}{\sqrt{3}}y - V_1 t\right)^2}{c^2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\left(x + \frac{1}{\sqrt{3}}y - V_1 t\right)}{c^2} e^{-\frac{\left(x + \frac{1}{\sqrt{3}}y - V_1 t\right)^2}{c^2}} \right. \\
 & + \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\left(x + \frac{1}{\sqrt{3}}y - V_1 t + \frac{4}{\sqrt{3}}H\right)}{c^2} e^{-\frac{\left(x + \frac{1}{\sqrt{3}}y - V_1 t + \frac{4}{\sqrt{3}}H\right)^2}{c^2}} \\
 & + \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\left(x + \sqrt{3}y - V_1 t\right)}{c^2} e^{-\frac{\left(x + \sqrt{3}y - V_1 t\right)^2}{c^2}} \\
 & \left. + \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\left(x + \sqrt{3}y - V_1 t + \frac{4}{\sqrt{3}}H\right)}{c^2} e^{-\frac{\left(x + \sqrt{3}y - V_1 t + \frac{4}{\sqrt{3}}H\right)^2}{c^2}} \right], \quad (56)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 W = & \left[\frac{\left(x + \sqrt{3}y - V_1 t + \frac{4}{\sqrt{3}}H\right)}{c^2} e^{-\frac{\left(x + \sqrt{3}y - V_1 t + \frac{4}{\sqrt{3}}H\right)^2}{c^2}} \right. \\
 & - \frac{\left(x - \frac{1}{\sqrt{3}}y - V_1 t\right)}{c^2} e^{-\frac{\left(x - \frac{1}{\sqrt{3}}y - V_1 t\right)^2}{c^2}} - \frac{\left(x + \sqrt{3}y - V_1 t + \frac{4}{\sqrt{3}}H\right)}{c^2} \\
 & \left. - e^{-\frac{\left(x + \sqrt{3}y - V_1 t + \frac{4}{\sqrt{3}}H\right)^2}{c^2}} + \frac{\left(x - \sqrt{3}y - V_1 t\right)}{c^2} e^{-\frac{\left(x - \sqrt{3}y - V_1 t\right)^2}{c^2}} \right], \quad (57)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 V' = \frac{1}{\sqrt{3}} & \left[\left(x + \frac{1}{\sqrt{3}}y - V_1 t + \frac{4}{\sqrt{3}}H \right) \frac{(x + \frac{1}{\sqrt{3}}y - V_1 t + \frac{4}{\sqrt{3}}H)^2}{c^2} e^{-\frac{(x + \frac{1}{\sqrt{3}}y - V_1 t + \frac{4}{\sqrt{3}}H)^2}{c^2}} \right. \\
 & + \frac{(x - \frac{1}{\sqrt{3}}y - V_1 t)^2}{c^2} e^{-\frac{(x - \frac{1}{\sqrt{3}}y - V_1 t)^2}{c^2}} \\
 & + \frac{(x + \frac{1}{\sqrt{3}}y - V_1 t + \frac{4}{\sqrt{3}}H)^2}{c^2} e^{-\frac{(x + \frac{1}{\sqrt{3}}y - V_1 t + \frac{4}{\sqrt{3}}H)^2}{c^2}} \\
 & \left. + \frac{(x - \sqrt{3}y - V_1 t)^2}{c^2} e^{-\frac{(x - \sqrt{3}y - V_1 t)^2}{c^2}} \right] \quad (58)
 \end{aligned}$$

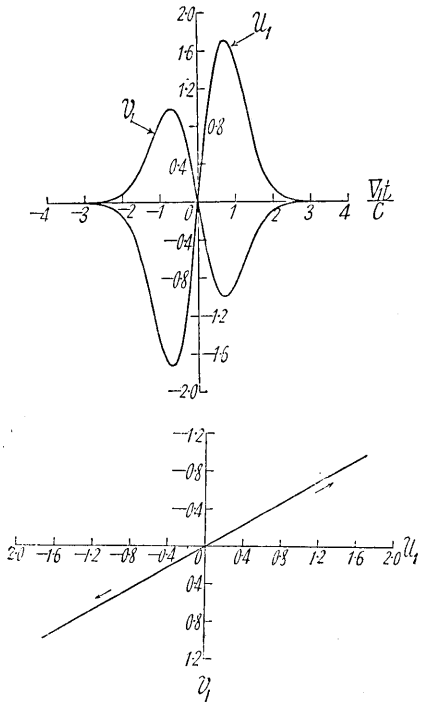
そしてこれ等の波動を起す爲めの初射波は

$$\left. \begin{aligned}
 u_0 &= \frac{-2 \left(x - \frac{1}{\sqrt{3}}y - V_1 t \right)^2}{c^2} e^{-\frac{(x - \frac{1}{\sqrt{3}}y - V_1 t)^2}{c^2}}, \\
 v_0 &= \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{\left(x - \frac{1}{\sqrt{3}}y - V_1 t \right)^2}{c^2} e^{-\frac{(x - \frac{1}{\sqrt{3}}y - V_1 t)^2}{c^2}}.
 \end{aligned} \right\} \quad (59)$$

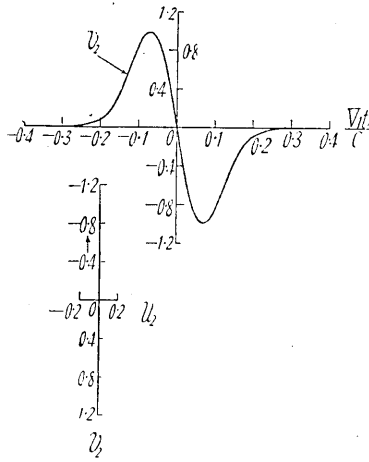
$x=0, y=0$ に於ける U, V 及び U', V' , そして $x=0, y=H/2$ に於ける U', V' , $x=0, y=H$ に於ける U', V' を夫々 $H/C=0, H/C=\frac{1}{3}, H/C=1, H/C=3$ の場合に就て計算, 圖示すると第2 a~第5 d 圖を得. 各圖に於て上圖は, 弾性體內各點に於ける水平垂直各方向の變位即ち U, V 及び U', V' の變化を示し, 下圖は各點に於ける運動軌跡を示してゐる.

第2圖 a, b, c, d は $H/C=0$ の場合であるが, 表面層には全然水平方向の變位はなく, 垂直方向のものだけである. 而もその振幅は深さに無關係である. 運動の始まる時刻が深さに實際上無關係であつて, $y=0$ に初射波が入射した時より深さの方向には位相の後れなく表面層は一塊となつて, 上下運動をするのである, 勿論表面層でも水平方向には傳播性のものである事は式を見ても明かである.

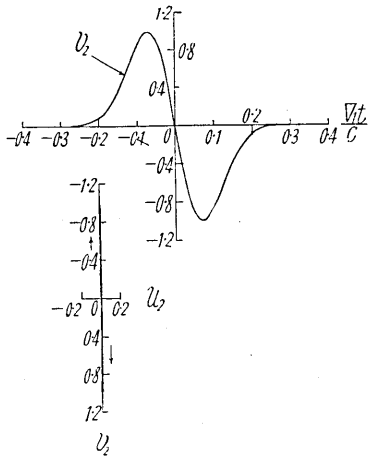
第3圖 a, b, c, d は $H/C=\frac{1}{3}$ の場合であるが分子運動は, 境界面 $y=0$ に於て



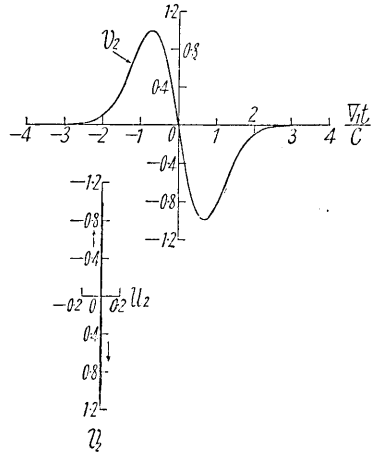
第2圖 a. $\frac{II}{c} = 0, y = 0.$



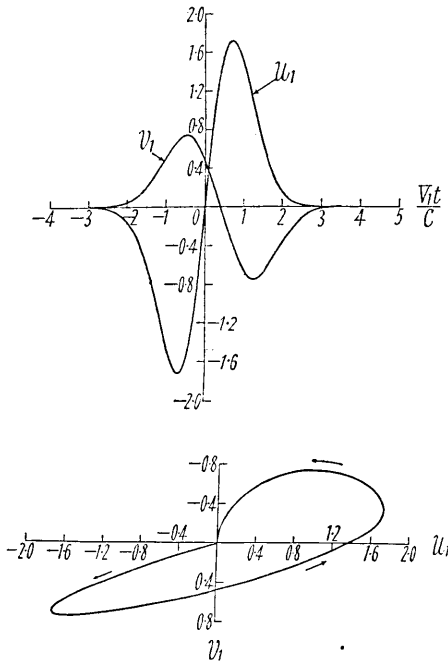
第2圖 c. $\frac{II}{c} = 0, y = 0.$



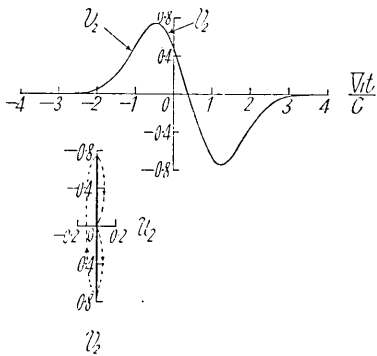
第2圖 b. $\frac{II}{c} = 0, y = 0.$



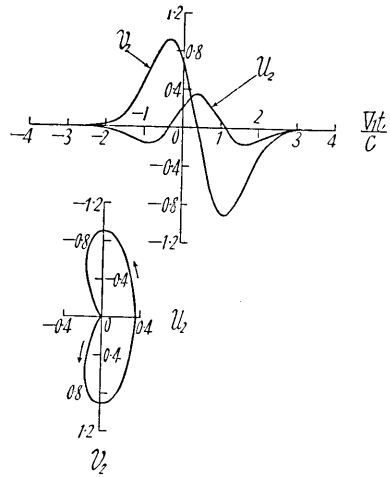
第2圖 d. $\frac{II}{c} = 0, y = -II.$



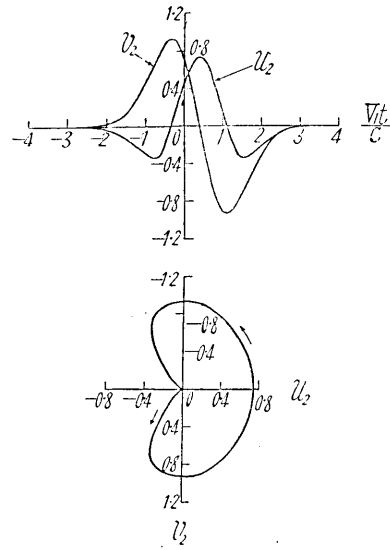
第3圖 a. $\frac{H}{c} = \frac{1}{3}, y=0.$



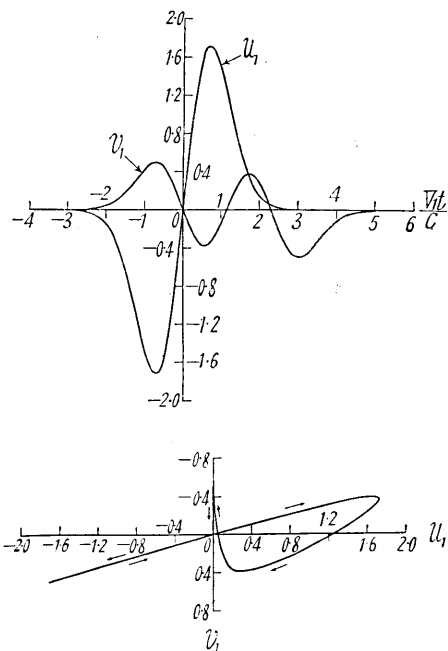
第3圖 b. $\frac{H}{c} = \frac{1}{3}, y=0.$



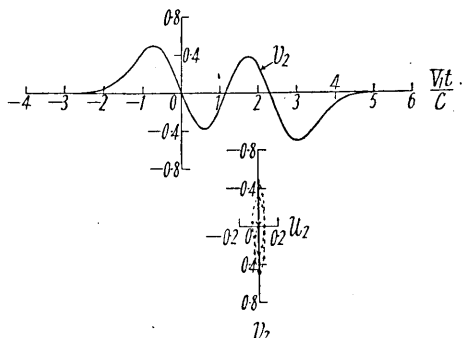
第3圖 c. $\frac{H}{c} = \frac{1}{3}, y = -\frac{H}{2}.$



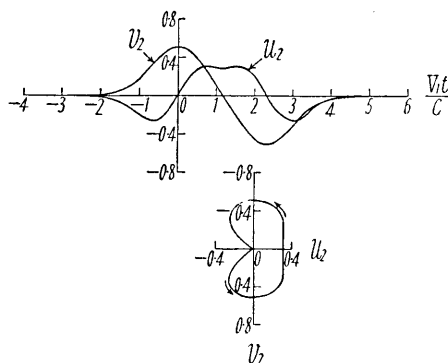
第3圖 d. $\frac{H}{c} = \frac{1}{3}, y = -H.$



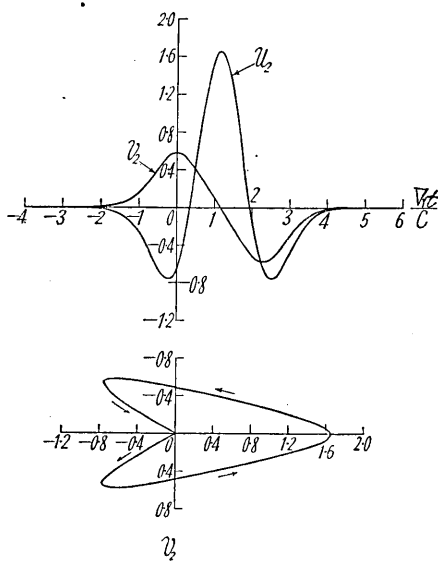
第4圖 a. $\frac{H}{c} = 1, y = 0.$



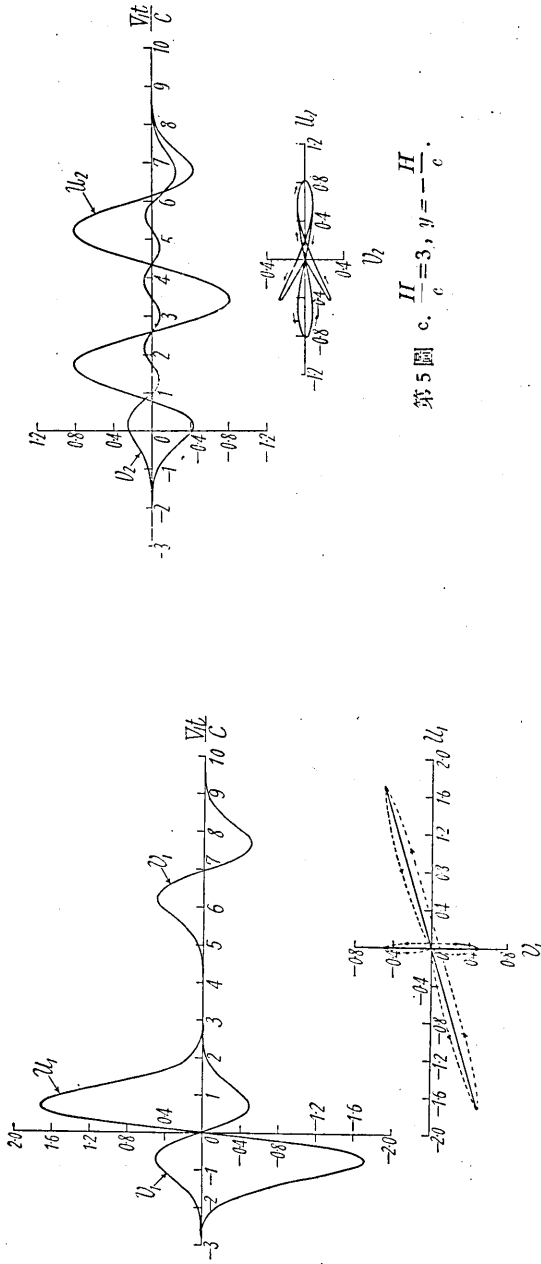
第4圖 b. $\frac{H}{c} = 1, y = 0.$



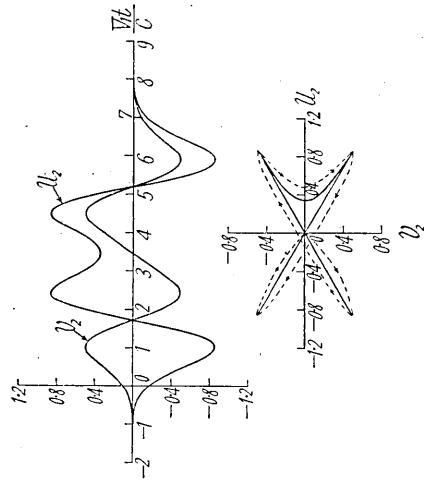
第4圖 c. $\frac{H}{c} = 1, y = -\frac{H}{2}.$



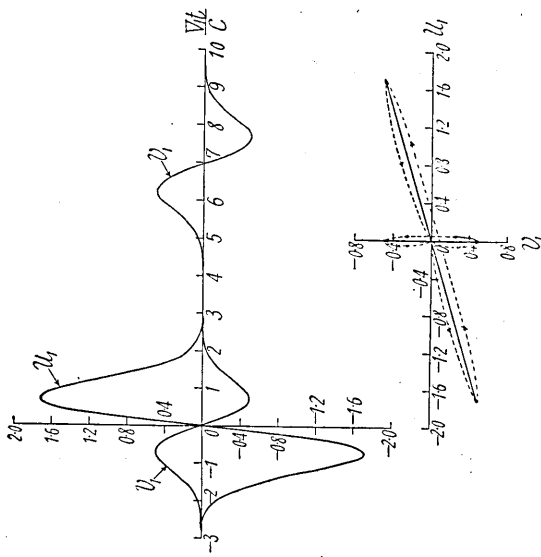
第4圖 d. $\frac{H}{c} = 1, y = -H.$



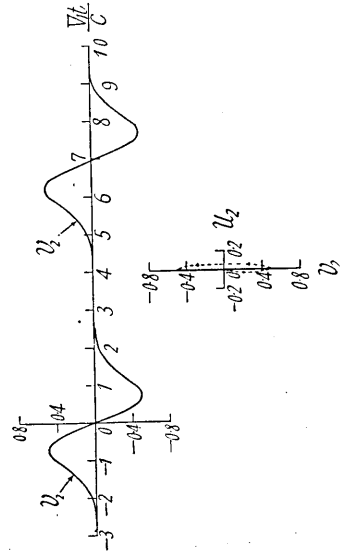
第5圖 c. $\frac{H}{c} = 3, y = -\frac{H}{c}$.



第5圖 d. $\frac{H}{c} = 3, y = -H$.



第5圖 a. $\frac{H}{c} = 3, y = -H$.



第5圖 b. $\frac{H}{c} = 3, y = 0$.

も、表面層内に於ても $H/C=0$ の場合と非常に趣きを異にしてゐる事が見られる。 $y=0$ に於て、下の媒體は水平方向の變位は $H/C=0$ の場合と殆んど同じ變化をし振幅も等しいのであるが、垂直方向の變位は $H/C=0$ の場合より多少振幅に於ても小さくなり位相も多少後れて来る。従つてその軌跡は $H/C=0$ の様な直線形とはならず第3圖 a で見る様な形をとつて分子は運動するのである。表面層の分子はその底 $y=0$ に於ては單に垂直方向のみの運動であつて、これは全然下の媒體の $y=0$ に於ける分子運動の垂直方向の分運動と等しいものである。第3圖 c, d で見る様に地表層の表面及び内部では垂直變位の他に水平方向の變位も現はれ、而も表面に近づく程その變位量が大きくなり、表面で最大となる。垂直方向の變位も表面に近い程その量が大きく表面で最大である。見掛け上の運動週期が垂直方向の變位と水平のものとの差があつて、垂直の方が水平の夫れの約2倍位になつてゐる。垂直方向水平方向夫々の變位に就て、層の表面に近づく程、底に於けるものよりも初動の時刻がおくれてゐる事が見られる。以上の事柄等の爲め、分子振動軌跡は圖で見る様に多少複雑化して来る。

第4圖 a, b, c, d は $H/L=1$ の場合であるが $H/L=\frac{1}{3}$ の場合に於ける性質が益々明かに見られる様になつて来る。下の媒體の $y=0$ に於ける分子に就ては水平方向の變位はその最大振幅も變動狀況も全く $H/c=0, 1/3$ の場合と同様であるが垂直方向の夫れは、全く趣を異にし、最大振幅も $H/c=0, 1/3$ の場合に比し次第に小さく成ると共に、波が2つの波に次第に分れて来る傾向をとつて来る。従つて見掛け上の入射角が $H/c=0, H/c=1/3$ の場合に比し次第に小さくなつて来る傾向をもつ。表面層内に於ても H/c が大きくなる程垂直水平方向何れの變位に於ても次第に2つの群に分れる傾向を持つ。

第5圖 a, b, c, d は $H/c=3$ の場合であるが、第5圖 a で見る様に、 $y=0$ 面では、下の媒體の分子の水平分變位は H/c の小さい場合と量も變化狀況も違はないが垂直方向の變位は全く2つの波群に分れて仕舞つてゐる。垂直、水平兩變位が圖で見る様な位相の関係をもつて、従つて、運動軌跡も2つの垂直線運動を示めず事となつて来る。見かけの入射角は $H/c=3$ より小さい場合に比して小さくなる事も見られる。表面層内の運動も H/c が小さい場合に比して複雑となるが地表面に於ては H/c が大きくなるに従つて、水平方向の變位は2つの位相の異つた群に分れる傾向をもち、垂直方向のものは位相の同じ2つの群に分れて来る。そして垂直、水平の各群は一對をなし、振動軌跡は方向の異つた2つの直線形をとる様になる。

要するに地表では $H/c=0$ の時は垂直運動のみであるが、 H/c が大きくなると共に水平方向の變位も現はれ、振動軌跡は複雑となるが常に水平面に對して軌跡は面對稱

であつて、2つの異つた直線型軌跡をとる傾向となる。そして初動の方向は $y=0$ 面に入射する初射波の入射角と同じ角度になるのである。

尚 H/e の値によつて振動狀況が全く異つて來、従つて、適當な H/e の時には弾性體內各點での水平或は垂直方向の變位の時間的變化即ち見掛けの週期は全く場所によつて異つて來るものである。厚さ H に比して見掛けの波長 e が非常に大きい時にはかゝる現象は見られない。又振幅の一定な無限に長い調和波が入射した時にも矢張り前述の見掛けの週期が場所によつて異なる事はない。自由波の傳播によつて各場所により振動週期の相違する事を説明せんと試みるのには、少くとも波長と同じ位數の厚さの層がある事を必要とする。又自由波が圓函數的な無限に續く調和波であつては説明が不可能である。

39. *On the Effect of Discontinuity Surfaces on the Propagation of Elastic Waves. (VI)*

By Genrokuro NISHIMURA and Kiyoshi KANAI,

Earthquake Research Institute.

In the first chapter, we studied the nature of free waves propagated in a surface layer and a subjacent semi-infinite elastic body when a dilatational wave of harmonic wave-type of infinite extent is obliquely incident on the common boundary of the two solids. We assume that it is possible for the two solids, the surface layer and the subjacent solid, to slide over each other at the common boundary when a wave is obliquely incident upon it.

In the second chapter we discussed analytically the general properties of vibratory motions of the surface layer and the subjacent medium when a dilatational wave of shock wave-type is obliquely incident on the bottom surface of the surface layer. From numerical calculations, the vibratory motions of certain points of the surface layer and the subjacent solid are shown in the figures for the case when the incident angle θ of the primary wave is 30° and $V_1=V_1'$, $V_2=V_2'$ and $\mu=\mu'$, where V_1 , V_2 and μ are the dilatational and the rotational wave velocities and the rigidity of the subjacent solid and V_1' , V_2' , μ' are those of the surface layer respectively. The dynamical conditions at the common boundary are the same as those assumed in the first chapter.
