

## 25. 不連續面が弾性波の傳播に及ぼす影響 (其の 5)

地震研究所 西村源六郎  
金井清

(昭和 9 年 6 月 20 日受理)

中間層の存在による弾性波の反射屈折に關しては入射波の入射角が  $90^\circ$  の場合に就て妹澤教授<sup>1)</sup> の研究がある。任意の入射角  $e$  で衝撃波型の縦弾性波が入射する場合その中間層が弾性波に及ぼす影響即ち第 1 圖に於ける 3 つの弾性體の物理力學的性質及び境界面の爲めに弾性波の傳播に伴ふ弾性體内の分子振動が如何なる影響を受けるかを研究したものは見當らない。最も簡単な場合から論じて行く事にする。即ち第 1 圖の様に  $y > 0$  なる弾性體の密度を  $\rho$ , 弾性に関する常數を  $\lambda, \mu$ , 中間層  $0 > y > -H$ , 及び  $y < -H$  なる弾性體の夫等を  $\rho', \lambda', \mu'$  及び  $\rho'', \lambda'', \mu''$  とする時  $y > 0$  なる弾性體を傳播せる衝撃波型の縦弾性波が  $y = 0$  なる面に入射した時より如何なる経路で弾性波が發達するかを研究する事とする。そして,  $y = 0$  及び  $y = -H$  なる弾性體の境界面では弾性體が相互に辯り得ると考へる。そして辯りに對する抵抗が作用するとする。(勿論密着せる場合の研究も全く本論文の方法で可能であるがこれは次の機會に譲る。)

無限に長い振幅の一定な調和弾性波が  $y = 0$  なる面に入射した場合には、勿論弾性係數及び密度が 3 つの弾性體に就て或る一定な關係が與へられてゐる場合、入射調和波の波長  $L$  と中間層の厚さ  $H$  との關係に應じて弾性體中各點での振動狀況は非常に違ふ。即ち各點に於ける振動軌跡は一般には橢圓になるが、この橢圓の長軸、短軸の大きさの關係、及び長軸の方向はいづれも  $H$  及び  $L$  のある函數となつて現れる。 $H$  と  $L$  に關するこれ等の間の關係は表面層を有する半無限弾性體の場合に就ては<sup>2)</sup> 少少述べておいたが、中間層のある場合でも勿論この關係を求める事が出来る。

1) 妹澤克惟、西村源六郎 地震研究所彙報 8 (1930), 321.

妹澤克惟、金井清 地震研究所彙報 10 (1932), 1.

2) 西村源六郎、金井清 地震研究所彙報 11 (1933), 595.

本論文では衝撃波型の縦弾性波が入射した場合の研究を先づ報告する事にしてゐるので調和波型の入射波の場合に就ての性質にはあまり觸れない。そしてこの種の弾性波動力学の研究に於て著者達の方法は甚だその計算に於て又數計算圖示法に於て複雑の極をきはめる拙法ではあるが、その弾性體の境界面に於ける弾性力學的な條件の如何なるものであつても正確に研究解決の可能である事を附加しておく。

さて第1圖に於て、入射波の傳播する  $y > 0$  なる弾性體を第1弾性體、 $0 > y > H$  を中間層、 $-H > y$  なるものを第2弾性體と今後呼ぶ事があるのでこゝに記しておく。計算の順序として振幅の一定な調和波の入射する場合から論じ始める。 $T_1$  を入射縦弾性波の週期とし、

$$\frac{2\pi}{T_1} = p \quad \dots \dots \dots \quad (1)$$

とおく時、第1弾性體中の入射波は、

$$\left. \begin{array}{l} u_i = i f Q e^{i(fx - ry - pt)}, \\ v_i = -ir Q e^{i(fx - ry - pt)} \end{array} \right\} \quad \dots \dots \dots \quad (2)$$

但し  $u_i$  は  $x$ -、 $v_i$  は  $y$ - 方向の分位を表す。そして

$$r^2 = \frac{\rho p^2}{(\lambda + 2\mu)} - f^2 \quad \dots \dots \dots \quad (3)$$

である。(2) が  $y=0$  に入射する時弾性條件を満足さす爲めには、

$$\left. \begin{array}{l} u_1 = if A e^{i(fx + ry - pt)}, \\ v_1 = ir A e^{i(fx + ry - pt)} \end{array} \right\} \quad \dots \dots \dots \quad (4)$$

及び

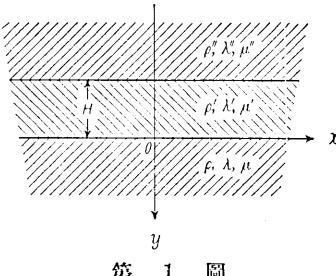
$$\left. \begin{array}{l} u_2 = is B e^{i(fx + sy - pt)}, \\ v_2 = -if B e^{i(fx + sy - pt)} \end{array} \right\} \quad \dots \dots \dots \quad (5)$$

なる反射波を意味する縦横兩弾性波が必要である。(5) に於て、

$$s^2 = \frac{\rho p^2}{\mu} - f^2. \quad \dots \dots \dots \quad (6)$$

中間層に就てその  $y=0$  及び  $y=-H$  に於ける弾性力學條件を満足さすには次の縦横兩弾性波4種が必要である。

$$\left. \begin{array}{l} u'_1 = if C e^{i(fx - r'y - pt)}, \\ v'_1 = -ir' C e^{i(fx - r'y - pt)} \end{array} \right\} \quad \dots \dots \dots \quad (7)$$



第 1 圖

$$\left. \begin{aligned} u'_2 &= if D e^{i(fx+ry-vt)}, \\ v'_2 &= ir' D e^{i(fx+ry-vt)}, \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots \dots \quad (8)$$

但し

$$\left. \begin{aligned} r'^2 &= \frac{\rho' p^2}{(\lambda' + 2\mu')} - f^2, \\ s'^2 &= \frac{\rho' p^2}{\mu'} - f^2. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots \quad (11)$$

次に  $y < -H$  なる弾性體に就ては、

$$\left. \begin{aligned} u_1'' &= if M e^{i(fx - r''y - pt)}, \\ v_1'' &= -ir'' M e^{i(fx - r''y - pt)}, \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots \quad (12)$$

及び

$$\left. \begin{aligned} u_2'' &= -is''Ne^{i(fx-s'''y-pt)}, \\ v_2'' &= -ifNe^{i(fx-s'''y-pt)} \end{aligned} \right\} \quad \dots \dots \dots \quad (13)$$

なる縦横兩波を必要とする。

但し

$$\left. \begin{aligned} r''^{I2} &= \frac{\rho'' p^2}{(\lambda'' + 2\mu'')} - f^2, \\ s''^{I2} &= \frac{\rho'' p^2}{\mu''^{I2}} - f. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots \quad (14)$$

勿論中間層内では波の両面に於ける數回の反射を考へる時には(7),(8),(9),(10)は必要である。

さて本研究での条件即ち  $y=0$  及  $y=-H$  なる 2 面に於ける弾性力学的条件を求めるとき、

$$y=0 := y + v_1 + v_2 = y' + v'_1 + v'_2 + v'_3 + v'_4, \dots \dots \dots \dots \quad (15)$$

$$\lambda \left\{ \frac{\partial}{\partial x} (u + u_1 + u_2) + \frac{\partial}{\partial y} (v + v_1 + v_2) \right\} + 2\mu \frac{\partial}{\partial y} (v + v_1 + v_2)$$

$$= \lambda' \left\{ \frac{\partial}{\partial x} (u_1' + u_2' + u_3' + u_4') + \frac{\partial}{\partial y} (v_1' + v_2' + v_3' + v_4') \right.$$

$$+ 2\mu' \frac{\partial}{\partial y} (v_1' + v_2' + v_3' + v_4'), \quad \dots \dots \dots \quad (16)$$

$$\mu' \left\{ \frac{\partial}{\partial x} (v + v_1 + v_2) + \frac{\partial}{\partial y} (u + u_1 + u_2) \right\} = k(u + u_1 + u_2), \quad \dots (17)$$

$$\begin{aligned} \mu' \left\{ \frac{\partial}{\partial x} (v_1' + v_2' + v_3' + v_4') + \frac{\partial}{\partial y} (u_1' + u_2' + u_3' + u_4') \right\} \\ = k'(u_1' + u_2' + u_3' + u_4'), \quad \dots \dots \dots (18) \end{aligned}$$

$y = -H$  : —

$$v_1' + v_2' + v_3' + v_4' = v_1'' + v_2'', \quad \dots \dots \dots (19)$$

$$\begin{aligned} \lambda' \left\{ \frac{\partial}{\partial x} (u_1' + u_2' + u_3' + u_4') + \frac{\partial}{\partial y} (v_1' + v_2' + v_3' + v_4') \right\} \\ + 2\mu' \frac{\partial}{\partial y} (v_1' + v_2' + v_3' + v_4') \\ = \lambda'' \left\{ \frac{\partial}{\partial x} (u_1'' + u_2'') + \frac{\partial}{\partial y} (v_1'' + v_2'') \right\} \\ + 2\mu' \frac{\partial}{\partial y} (v_1'' + v_2''), \quad \dots \dots \dots (20) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mu' \left\{ \frac{\partial}{\partial x} (v_1' + v_2' + v_3' + v_4') + \frac{\partial}{\partial y} (u_1' + u_2' + u_3' + u_4') \right\} \\ = k'(u_1' + u_2' + u_3' + u_4'), \quad \dots \dots \dots (21) \end{aligned}$$

$$\mu'' \left\{ \frac{\partial}{\partial x} (v_1'' + v_2'') + \frac{\partial}{\partial y} (u_1'' + u_2'') \right\} = k''(u_1'' + u_2'') \quad \dots (22)$$

勿論以上 8 個の條件はその彈性力學的な意味は自ら明かであるが,  $k, k', k''$  は辻りの抵抗に關する數である。

これ等の條件を満足する彈性波動式は (2), (4), (5), (7), (8), (9), (10), (12), (13) より求める事が出来るが, 今  $k = k' = k'' = 0$  とおく. (このおき方は波動力學の性質を無視した置き方ではない) 然る時は上の 8 つの條件より,

$$\frac{r}{f} A - B + \frac{r'}{f} C - \frac{r'}{f} D + E + F = \frac{r}{f} \mathfrak{A}, \quad \dots \dots \dots (23)$$

$$\begin{aligned} -\frac{\mu}{\mu'} \left( 1 - \frac{s^2}{f^2} \right) A - \frac{2\mu}{\mu'} \frac{s}{f} B + \left( 1 - \frac{s'^2}{f^2} \right) C + \left( 1 - \frac{s'^2}{f^2} \right) D \\ - 2 \frac{s'}{f} E + 2 \frac{s'}{f} F = \frac{\mu}{\mu'} \left( 1 - \frac{s^2}{f^2} \right) \mathfrak{A}, \quad \dots \dots \dots (24) \end{aligned}$$

$$2 \frac{r}{f} A - \left( 1 - \frac{s^2}{f^2} \right) B = 2 \frac{r}{f} \mathfrak{A}, \quad \dots \dots \dots (25)$$

$$2\frac{r'}{f}C - 2\frac{r'}{f}D + \left(1 - \frac{s'^2}{f^2}\right)E + \left(1 - \frac{s'^2}{f^2}\right)F = 0, \dots \dots \dots (26)$$

$$-\frac{r'}{f}Ce^{tr''H} + \frac{r'}{f}De^{-tr''H} - Ee^{is''H} - Fe^{-is''H} + \frac{r''}{f}Me^{tr''H} + Ne^{is''H} = 0, \dots \dots \dots (27)$$

$$-\left(1 - \frac{s'^2}{f^2}\right)Cc^{tr''H} - \left(1 - \frac{s'^2}{f^2}\right)De^{-tr''H} + 2\frac{s'}{f}Ee^{is''H} - 2\frac{s'}{f}Fe^{-is''H} + \frac{\mu''}{\mu'}\left(1 - \frac{s'^2}{f^2}\right)Mc^{tr''H} - 2\frac{\mu''}{\mu'}\frac{s''}{f}Ne^{is''H} = 0, \dots (28)$$

$$2\frac{r'}{f}Ce^{tr''H} - 2\frac{r'}{f}De^{-tr''H} + \left(1 - \frac{s'^2}{f^2}\right)Ee^{is''H} + \left(1 - \frac{s'^2}{f^2}\right)Fe^{-is''H} = 0, \dots (29)$$

$$2\frac{r''}{f}Me^{tr''H} + \left(1 - \frac{s'^2}{f^2}\right)Ne^{is''H} = 0. \dots \dots \dots (30)$$

これ等 8 個の 1 次式より、8 個の  $A, B, C, D, E, F, M$  及び  $N$  の値を決定する事が出来、従つて變位の關係を決定する事が出来る。

さて不連續面  $y=0$ 、及び  $y=-H$  で境された 3 つの彈性體の物理力學的性質が全然相等しいとする。即ち密度が全部一樣であり、剪斷彈性係數が全部等しいとする。そして而もボアソン比が 3 つの彈性體一樣に  $\frac{1}{4}$  と考へる。そしてかくの如き彈性體のつながりへ、入射角が  $30^\circ$  に等しい衝擊波型の縱彈性波が入射する時の研究を進める。この様な物理力學的の性質となる時、(23), (24), (25), (26), (27), (28), (29) 及び (30) は次の様に書きなほす事が出来る。

$$A - \sqrt{3}B + C - D + \sqrt{3}E + \sqrt{3}F = \mathfrak{A}, \dots \dots \dots (31)$$

$$A - \sqrt{3}B - C - D - \sqrt{3}E + \sqrt{3}F = -\mathfrak{A}, \dots \dots \dots (32)$$

$$A + \sqrt{3}B = \mathfrak{A}, \dots \dots \dots (33)$$

$$C - D - \sqrt{3}E - \sqrt{3}F = 0, \dots \dots \dots (34)$$

$$-Ce^{t\frac{1}{\sqrt{3}}fH} + De^{-t\frac{1}{\sqrt{3}}fH} - \sqrt{3}Ee^{t\sqrt{3}fH} - \sqrt{3}Fe^{-t\sqrt{3}fH} + Me^{t\frac{1}{\sqrt{3}}fH} + \sqrt{3}Ne^{t\sqrt{3}fH} = 0, \dots \dots \dots (35)$$

$$Ce^{t\frac{1}{\sqrt{3}}fH} + De^{-t\frac{1}{\sqrt{3}}fH} + \sqrt{3}Ee^{t\sqrt{3}fH} - \sqrt{3}Fe^{-t\sqrt{3}fH} - Me^{t\frac{1}{\sqrt{3}}fH} - \sqrt{3}Ne^{t\sqrt{3}fH} = 0, \dots \dots \dots (36)$$

$$Ce^{t\frac{1}{\sqrt{3}}fH} - De^{-t\frac{1}{\sqrt{3}}fH} - \sqrt{3}Ee^{t\sqrt{3}fH} - \sqrt{3}Fe^{-t\sqrt{3}fH} = 0, \dots \dots \dots (37)$$

$$Me^{t\frac{1}{\sqrt{3}}fH} - \sqrt{3}Ne^{t\sqrt{3}fH} = 0. \dots \dots \dots (38)$$

(31)～(38) の 8 個の 1 次方程式より  $A, B, C, D, E, F, M, N$  を決定する時は,

$$A = \frac{2(e^{\frac{t}{\sqrt{3}}fH} + 1)}{\Phi}, \quad \dots \dots \dots \dots \quad (39)$$

$$B = \frac{1}{\sqrt{3}} \left[ 1 - \frac{2(e^{\frac{t}{\sqrt{3}}fH} + 1)}{\Phi} \right] \varphi, \quad \dots \dots \dots \dots \quad (40)$$

$$C = \left[ 1 + \frac{(e^{\frac{t}{\sqrt{3}}fH} + 2)}{\Phi} \right] \varphi, \quad \dots \dots \dots \dots \quad (41)$$

$$D = \frac{e^{\frac{t}{\sqrt{3}}fH}}{\Phi} \varphi, \quad \dots \dots \dots \dots \quad (42)$$

$$E = \frac{(e^{\frac{t}{\sqrt{3}}fH} + 2)}{\sqrt{3} \Phi} \varphi, \quad \dots \dots \dots \dots \quad (43)$$

$$F = \frac{e^{\frac{t}{\sqrt{3}}fH}}{\sqrt{3} \Phi} \varphi, \quad \dots \dots \dots \dots \quad (44)$$

$$M = \frac{(1 + e^{\frac{t}{\sqrt{3}}fH})^2}{\Phi} \varphi, \quad \dots \dots \dots \dots \quad (45)$$

$$N = \frac{e^{-\frac{t}{\sqrt{3}}fH} (e^{\frac{t}{\sqrt{3}}fH} + 1)^2}{\Phi} \varphi. \quad \dots \dots \dots \dots \quad (46)$$

となる。但し

$$\Phi = e^{\frac{t}{\sqrt{3}}fH} + 3e^{\frac{t}{\sqrt{3}}fH} + 4. \quad \dots \dots \dots \dots \quad (47)$$

かくして求め得た常数  $A, B, C, D, E, F, M, N$  は皆  $fH$  の固函数の或る函数である事がわかる。この結果を變位式に代入すれば入射角  $30^\circ$  の時の調和波による解が得られる。

此れ等得られたものはフーリエの 4 重積分公式を利用する時は容易に一般化せしむる事が出来る。即ち任意の形をした波が入射する問題を解くには、入射波としてこれが時間  $t$  のある時例へば  $t=0$  の時に

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{\partial}{\partial x} F(x, y), \\ v &= \frac{\partial}{\partial y} F(x, y) \end{aligned} \right\} \quad \dots \dots \dots \dots \quad (48)$$

なる形でその變位分布が與へられた時これが傳播と共に如何なる波動現象が 3 つの彈

性體中に見られるかと云ふ事は次式によつて研究する事が出来る。

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{1}{4\pi^2} \frac{\partial}{\partial x} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\eta t} df \int_{-\infty}^{\infty} dr \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} d\eta F(\xi, \eta) e^{i\{f(x-\xi)-r(y-\eta)\}}, \\ v &= \frac{1}{4\pi^2} \frac{\partial}{\partial y} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\eta t} df \int_{-\infty}^{\infty} dr \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} d\eta F(\xi, \eta) e^{i\{f(x-\xi)-r(y-\eta)\}}, \end{aligned} \right\} \quad \dots (49)$$

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= \frac{1}{4\pi^2} \frac{\partial}{\partial x} \int_{-\infty}^{\infty} Ae^{-i\eta t} df \int_{-\infty}^{\infty} dr \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} d\eta F(\xi, \eta) e^{i\{f(x-\xi)+r(y-\eta)\}}, \\ v_1 &= \frac{1}{4\pi^2} \frac{\partial}{\partial y} \int_{-\infty}^{\infty} Ae^{-i\eta t} df \int_{-\infty}^{\infty} dr \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} d\eta F(\xi, \eta) e^{i\{f(x-\xi)+r(y-\eta)\}}, \end{aligned} \right\} \quad \dots (50)$$

$$\left. \begin{aligned} u_2 &= \frac{1}{4\pi^2} \frac{\partial}{\partial y} \int_{-\infty}^{\infty} Be^{-i\eta t} df \int_{-\infty}^{\infty} dr \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} d\eta F(\xi, \eta) e^{i\{f(x-\xi)+r(\frac{s}{r}y-\eta)\}}, \\ v_2 &= -\frac{1}{4\pi^2} \frac{\partial}{\partial x} \int_{-\infty}^{\infty} Be^{-i\eta t} df \int_{-\infty}^{\infty} dr \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} d\eta F(\xi, \eta) e^{i\{f(x-\xi)+r(\frac{s}{r}y+\eta)\}}, \end{aligned} \right\} \quad \dots (51)$$

$$\left. \begin{aligned} u'_1 &= \frac{1}{4\pi^2} \frac{\partial}{\partial x} \int_{-\infty}^{\infty} Ce^{-i\eta t} df \int_{-\infty}^{\infty} dr \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} d\eta F(\xi, \eta) e^{i\{f(x-\xi)-r(\frac{r''}{r}y-\eta)\}}, \\ v'_1 &= \frac{1}{4\pi^2} \frac{\partial}{\partial y} \int_{-\infty}^{\infty} Ce^{-i\eta t} df \int_{-\infty}^{\infty} dr \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} d\eta F(\xi, \eta) e^{i\{f(x-\xi)-r(\frac{r''}{r}y-\eta)\}}, \end{aligned} \right\} \quad \dots (52)$$

$$\left. \begin{aligned} u'_2 &= \frac{1}{4\pi^2} \frac{\partial}{\partial x} \int_{-\infty}^{\infty} De^{-i\eta t} df \int_{-\infty}^{\infty} dr \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} d\eta F(\xi, \eta) e^{i\{f(x-\xi)+r(\frac{r''}{r}y+\eta)\}}, \\ v'_2 &= \frac{1}{4\pi^2} \frac{\partial}{\partial y} \int_{-\infty}^{\infty} De^{-i\eta t} df \int_{-\infty}^{\infty} dr \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} d\eta F(\eta, \xi) e^{i\{f(x-\xi)+r(\frac{r''}{r}y+\eta)\}}, \end{aligned} \right\} \quad \dots (53)$$

$$\left. \begin{aligned} u'_3 &= \frac{1}{4\pi^2} \frac{\partial}{\partial y} \int_{-\infty}^{\infty} Ee^{-i\eta t} df \int_{-\infty}^{\infty} dr \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} d\eta F(\xi, \eta) e^{i\{f(x-\xi)-r(\frac{s''}{r}y-\eta)\}}, \\ v'_3 &= -\frac{1}{4\pi^2} \frac{\partial}{\partial x} \int_{-\infty}^{\infty} Ee^{-i\eta t} df \int_{-\infty}^{\infty} dr \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} d\eta F(\xi, \eta) e^{i\{f(x-\xi)-r(\frac{s'}{r}y-\eta)\}}, \end{aligned} \right\} \quad \dots (54)$$

$$\left. \begin{aligned} u'_4 &= \frac{1}{4\pi^2} \frac{\partial}{\partial x} \int_{-\infty}^{\infty} Fe^{-i\eta t} df \int_{-\infty}^{\infty} dr \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} d\eta F(\xi, \eta) e^{i\{f(x-\xi)+r(\frac{s'}{r}y+\eta)\}}, \\ v'_4 &= -\frac{1}{4\pi^2} \frac{\partial}{\partial x} \int_{-\infty}^{\infty} Fe^{-i\eta t} df \int_{-\infty}^{\infty} dr \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} d\eta F(\xi, \eta) e^{i\{f(x-\xi)+r(\frac{s'}{r}y+\eta)\}}, \end{aligned} \right\} \quad \dots (55)$$

$$\left. \begin{aligned} u''_1 &= \frac{1}{4\pi^2} \frac{\partial}{\partial x} \int_{-\infty}^{\infty} Me^{-i\eta t} df \int_{-\infty}^{\infty} dr \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} d\eta F(\xi, \eta) e^{i\{f(x-\xi)-r(\frac{r'''}{r}y-\eta)\}}, \\ v''_1 &= \frac{1}{4\pi^2} \frac{\partial}{\partial y} \int_{-\infty}^{\infty} Me^{-i\eta t} df \int_{-\infty}^{\infty} dr \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} d\eta F(\xi, \eta) e^{i\{f(x-\xi)-r(\frac{r'''}{r}y-\eta)\}}, \end{aligned} \right\} \quad \dots (56)$$

$$\left. \begin{aligned} u_2'' &= \frac{1}{4\pi^2} \frac{\partial}{\partial y} \int_{-\infty}^{\infty} N e^{-i y t} d f \int_{-\infty}^{\infty} d r \int_{-\infty}^{\infty} d \xi \int_{-\infty}^{\infty} d \eta F(\xi, \eta) e^{i \{f(x-\xi)-r(\frac{s''}{r}y-\eta)\}}, \\ v_2'' &= -\frac{1}{4\pi^2} \frac{\partial}{\partial x} \int_{-\infty}^{\infty} N e^{-i x t} d f \int_{-\infty}^{\infty} d r \int_{-\infty}^{\infty} d \xi \int_{-\infty}^{\infty} d \eta F(\xi, \eta) e^{i \{f(x-\xi)-r(\frac{s''}{r}y-\eta)\}}. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (57)$$

但し  $A, B, C, D, E, F, M, N$  は、(23), (24), (25), (26), (27), (28), (29), (30) より決定される定数で、これ等は縦横両様の波の速度  $V_1, V_2, V'_1, V'_2, V''_1, V''_2$  及び入射角  $c$ 、及び剪断弾性係数  $\mu, \mu', \mu''$  と  $fH$  との函数で與へられる。そしてその式の形は  $e^{\pm i k f H n}$  を項とする代數函数である。

今衝撃波型の入射波として  $F(x, y)$  を

$$F(x, y) = e^{-\frac{(x \cos c - y \sin c)^2}{c^2}} \dots \dots \dots (58)$$

とおく。但し角  $c$  は入射角である。 $c$  は見掛けの衝撃波の長さである。

そして入射角が  $30^\circ$  とする時は

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{1}{4\pi^2} \frac{\partial}{\partial x} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i \frac{2}{\sqrt{3}} V_1 t f} d f \int_{-\infty}^{\infty} d r \int_{-\infty}^{\infty} d \xi \int_{-\infty}^{\infty} d \eta e^{-\frac{(x-\frac{1}{\sqrt{3}}y)^2}{c^2}} e^{-i f(x-\xi)-r(y-\eta)}, \\ v &= \frac{1}{4\pi^2} \frac{\partial}{\partial y} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i \frac{2}{\sqrt{3}} V_1 t f} d f \int_{-\infty}^{\infty} d r \int_{-\infty}^{\infty} d \xi \int_{-\infty}^{\infty} d \eta e^{-\frac{(x-\frac{1}{\sqrt{3}}y)^2}{c^2}} e^{i f(x-\xi)-r(y-\eta)}, \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (54)$$

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= \frac{1}{2\pi^2} \frac{\partial}{\partial x} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(e^{i \frac{2}{\sqrt{3}} f H} + 1) e^{-i \frac{2}{\sqrt{3}} V_1 t f} d f}{(4 + 3e^{i \frac{2}{\sqrt{3}} f H} + e^{i \frac{4}{\sqrt{3}} f H})} \\ &\quad \times \int_{-\infty}^{\infty} d r \int_{-\infty}^{\infty} d \xi \int_{-\infty}^{\infty} d \eta e^{-\frac{(x-\frac{1}{\sqrt{3}}y)^2}{c^2}} e^{i f(x-\xi)+r(y-\eta)}, \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (60)$$

$$\left. \begin{aligned} v_1 &= \frac{1}{2\pi^2} \frac{\partial}{\partial x} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(e^{i \frac{2}{\sqrt{3}} f H} + 1) e^{-i \frac{2}{\sqrt{3}} V_1 t f} d f}{(4 + 3e^{i \frac{2}{\sqrt{3}} f H} + e^{i \frac{4}{\sqrt{3}} f H})} \\ &\quad \times \int_{-\infty}^{\infty} d r \int_{-\infty}^{\infty} d \xi \int_{-\infty}^{\infty} d \eta e^{-\frac{(x-\frac{1}{\sqrt{3}}y)^2}{c^2}} e^{i f(x-\xi)+r(y-\eta)}, \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (61)$$

$$\left. \begin{aligned} u_2 &= \frac{1}{4\sqrt{3} \pi^2} \frac{\partial}{\partial y} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ 1 - \frac{2(1 + e^{i \frac{2}{\sqrt{3}} f H}) e^{-i \frac{2}{\sqrt{3}} V_1 t f}}{(4 + 3e^{i \frac{2}{\sqrt{3}} f H} + e^{i \frac{4}{\sqrt{3}} f H})} d f \right. \\ &\quad \times \left. \int_{-\infty}^{\infty} d r \int_{-\infty}^{\infty} d \xi \int_{-\infty}^{\infty} d \eta e^{-\frac{(x-\frac{1}{\sqrt{3}}y)^2}{c^2}} e^{i f(x-\xi)+r(3y+\eta)}, \right\} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (61)$$

$$\left. \begin{aligned}
 v_2 &= \frac{-1}{4\sqrt{3}\pi^2} \frac{\partial}{\partial x} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ 1 - \frac{2(1+e^{i\frac{2}{\sqrt{3}}f''})e^{-i\frac{2}{\sqrt{3}}V_1 t}}{(1+3e^{i\frac{2}{\sqrt{3}}f''}+e^{i\frac{4}{\sqrt{3}}f''})} \right\} df \\
 &\quad \times \int_{-\infty}^{\infty} dr \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\frac{1}{\sqrt{3}}y)^2}{c^2}} e^{i(f(x-\xi)+r(3y+\eta))} d\eta, \\
 u'_1 &= \frac{1}{4\pi^2} \frac{\partial}{\partial x} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ 1 + \frac{(2+e^{i\frac{2}{\sqrt{3}}f''})e^{-i\frac{2}{\sqrt{3}}V_1 t f}}{(4+3e^{i\frac{2}{\sqrt{3}}f''}+e^{i\frac{4}{\sqrt{3}}f''})} \right\} df \\
 &\quad \times \int_{-\infty}^{\infty} dr \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\frac{1}{\sqrt{3}}y)^2}{c^2}} e^{i(f(x-\xi)-r(y-\eta))} d\eta, \\
 v'_1 &= \frac{1}{4\pi^2} \frac{\partial}{\partial y} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ 1 + \frac{(2+e^{i\frac{2}{\sqrt{3}}f''})e^{-i\frac{2}{\sqrt{3}}V_1 t f}}{(4+3e^{i\frac{2}{\sqrt{3}}f''}+e^{i\frac{4}{\sqrt{3}}f''})} \right\} df \\
 &\quad \times \int_{-\infty}^{\infty} dr \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\frac{1}{\sqrt{3}}y)^2}{c^2}} e^{i(f(x-\xi)-r(y-\eta))} d\eta,
 \end{aligned} \right\} \dots (62)$$

$$\left. \begin{aligned}
 u'_2 &= \frac{1}{4\pi^2} \frac{\partial}{\partial x} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\frac{2}{\sqrt{3}}f''} e^{-i\frac{2}{\sqrt{3}}V_1 t f}}{(4+3e^{i\frac{2}{\sqrt{3}}f''}+e^{i\frac{4}{\sqrt{3}}f''})} df \\
 &\quad \times \int_{-\infty}^{\infty} dr \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\frac{1}{\sqrt{3}}y)^2}{c^2}} e^{i(f(x-\xi)+r(y+\eta))} d\eta, \\
 v'_2 &= \frac{1}{4\pi^2} \frac{\partial}{\partial y} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\frac{2}{\sqrt{3}}f''} e^{-i\frac{2}{\sqrt{3}}V_1 t f}}{(4+3e^{i\frac{2}{\sqrt{3}}f''}+e^{i\frac{4}{\sqrt{3}}f''})} df \\
 &\quad \times \int_{-\infty}^{\infty} dr \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\frac{1}{\sqrt{3}}y)^2}{c^2}} e^{i(f(x-\xi)+r(y+\eta))} d\eta,
 \end{aligned} \right\} \dots (63)$$

$$\left. \begin{aligned}
 u'_3 &= \frac{1}{4\pi^2} \frac{\partial}{\partial y} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(2+e^{i\frac{2}{\sqrt{3}}f''})e^{-i\frac{2}{\sqrt{3}}V_1 t f}}{\sqrt{3}(4+3e^{i\frac{2}{\sqrt{3}}f''}+e^{i\frac{4}{\sqrt{3}}f''})} df \\
 &\quad \times \int_{-\infty}^{\infty} dr \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\frac{1}{\sqrt{3}}y)^2}{c^2}} e^{i(f(x-\xi)-r(3y-\eta))} d\eta, \\
 v'_3 &= \frac{-1}{4\sqrt{3}\pi} \frac{\partial}{\partial x} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(2+e^{i\frac{2}{\sqrt{3}}f''})e^{-i\frac{2}{\sqrt{3}}V_1 t f}}{(4+3e^{i\frac{2}{\sqrt{3}}f''}+e^{i\frac{4}{\sqrt{3}}f''})} df \\
 &\quad \times \int_{-\infty}^{\infty} dr \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\frac{1}{\sqrt{3}}y)^2}{c^2}} e^{i(f(x-\xi)-r(3y-\eta))} d\eta,
 \end{aligned} \right\} \dots (64)$$

$$\left. \begin{aligned} u_4' &= \frac{1}{4\sqrt{3}\pi^2} \frac{\partial}{\partial y} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\frac{4}{\sqrt{3}}f''} e^{-i\frac{2}{\sqrt{3}}V_1 t f}}{(4+3e^{i\frac{2}{\sqrt{3}}f''} + e^{i\frac{4}{\sqrt{3}}f''})} df \\ &\quad \times \int_{-\infty}^{\infty} dr \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\frac{1}{\sqrt{3}}y)^2}{c^2}} e^{i[f(x-\xi)+r(3y-\eta)]} d\eta, \\ v_4' &= -\frac{1}{4\sqrt{3}\pi^2} \frac{\partial}{\partial x} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\frac{4}{\sqrt{3}}f''} e^{-i\frac{2}{\sqrt{3}}V_1 t f}}{(4+3e^{i\frac{2}{\sqrt{3}}f''} + e^{i\frac{4}{\sqrt{3}}f''})} df \\ &\quad \times \int_{-\infty}^{\infty} dr \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\frac{1}{\sqrt{3}}y)^2}{c^2}} e^{i[f(x-\xi)+r(3y-\eta)]} d\eta, \end{aligned} \right\} \quad (65)$$

$$\left. \begin{aligned} u_4'' &= \frac{1}{4\pi^2} \frac{\partial}{\partial x} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(1+e^{i\frac{2}{\sqrt{3}}f''})^2 e^{-i\frac{2}{\sqrt{3}}V_1 t f}}{(4+3e^{i\frac{2}{\sqrt{3}}f''} + e^{i\frac{4}{\sqrt{3}}f''})} df \\ &\quad \times \int_{-\infty}^{\infty} dr \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\frac{1}{\sqrt{3}}y)^2}{c^2}} e^{i[f(x-\xi)-r(y-\eta)]} d\eta, \\ v_4'' &= \frac{1}{4\pi^2} \frac{\partial}{\partial y} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(1+e^{i\frac{2}{\sqrt{3}}f''})^2 e^{-i\frac{2}{\sqrt{3}}V_1 t f}}{(4+3e^{i\frac{2}{\sqrt{3}}f''} + e^{i\frac{4}{\sqrt{3}}f''})} df \\ &\quad \times \int_{-\infty}^{\infty} dr \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\frac{1}{\sqrt{3}}y)^2}{c^2}} e^{i[f(x-\xi)-r(y-\eta)]} d\eta, \end{aligned} \right\} \quad (66)$$

$$\left. \begin{aligned} u_4''' &= \frac{1}{4\pi^2} \frac{\partial}{\partial y} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\frac{2}{\sqrt{3}}f''} (1+e^{i\frac{2}{\sqrt{3}}f''})^2 e^{-i\frac{2}{\sqrt{3}}V_1 t f}}{(4+3e^{i\frac{2}{\sqrt{3}}f''} + e^{i\frac{4}{\sqrt{3}}f''})} df \\ &\quad \times \int_{-\infty}^{\infty} dr \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\frac{1}{\sqrt{3}}y)^2}{c^2}} e^{i[f(x-\xi)-r(y-\eta)]} d\eta, \\ v_4''' &= -\frac{1}{4\pi^2} \frac{\partial}{\partial x} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\frac{2}{\sqrt{3}}f''} (1+e^{i\frac{2}{\sqrt{3}}f''})^2 e^{-i\frac{2}{\sqrt{3}}V_1 t f}}{(4+3e^{i\frac{2}{\sqrt{3}}f''} + e^{i\frac{4}{\sqrt{3}}f''})} df \\ &\quad \times \int_{-\infty}^{\infty} dr \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\frac{1}{\sqrt{3}}y)^2}{c^2}} e^{i[f(x-\xi)-r(y-\eta)]} d\eta. \end{aligned} \right\} \quad (67)$$

さて (59) より (67) までの式の積分に於て,  $\eta$ ,  $\xi$ ,  $r$  に就ての積分は容易である. 最後に  $f$  に関する積分を行ふ爲めには, (47) で表される  $\Phi$  を次の様に展開する. 即ち

$$\frac{1}{\Phi} = \frac{1}{(4+3e^{i\frac{2}{\sqrt{3}}f''} + e^{i\frac{4}{\sqrt{3}}f''})}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{4} - \frac{3}{16} e^{t\sqrt{\frac{2}{3}}fH} + \frac{5}{64} e^{t\sqrt{\frac{4}{3}}fH} - \frac{3}{256} e^{t\sqrt{\frac{6}{3}}fH} \\
 &\quad - \frac{11}{1024} e^{t\sqrt{\frac{8}{3}}fH} + \frac{45}{4096} e^{t\sqrt{\frac{10}{3}}fH} - \frac{91}{16384} e^{t\sqrt{\frac{12}{3}}fH} + \dots
 \end{aligned} \tag{68}$$

即ちかくの如く展開した級数は收斂性が可なりよい事がわかる。この展開に於ける各項は夫々力学的の意味を有するものである事は結局の積分を行つた時にわかるが、即ち展開の各項を變位式に代入し積分した時の各項は中間層内での數回の反射に關係するものである。即ち (68) を代入して「其の 3」で論じた方法で積分式を所理する時,  $y > 0$  なる第 1 の弾性體内に生ずる弾性波動は結局

$$\left. \begin{aligned}
 u_i &= -\frac{2\left(x - \frac{1}{\sqrt{3}}y - \frac{2}{\sqrt{3}}V_1 t\right)}{c^2} e^{-\frac{(x - \frac{1}{\sqrt{3}}y - \frac{2}{\sqrt{3}}V_1 t)^2}{c^2}}, \\
 v_i &= \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{\left(x - \frac{1}{\sqrt{3}}y - \frac{2}{\sqrt{3}}V_1 t\right)}{c^2} e^{-\frac{(x - \frac{1}{\sqrt{3}}y - \frac{2}{\sqrt{3}}V_1 t)^2}{c^2}}, \\
 u_1 &= \left[ -\frac{\left(x + \frac{1}{\sqrt{3}}y - \frac{2}{\sqrt{3}}V_1 t\right)}{c^2} e^{-\frac{(x + \frac{1}{\sqrt{3}}y - \frac{2}{\sqrt{3}}V_1 t)^2}{c^2}} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{\left(x + \frac{1}{\sqrt{3}}y - \frac{2}{\sqrt{3}}V_1 t + \frac{2}{\sqrt{3}}H\right)}{4c^2} e^{-\frac{(x + \frac{1}{\sqrt{3}}y - \frac{2}{\sqrt{3}}V_1 t + \frac{2}{\sqrt{3}}H)^2}{c^2}} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{7\left(x + \frac{1}{\sqrt{3}}y - \frac{2}{\sqrt{3}}V_1 t + \frac{4}{\sqrt{3}}H\right)}{16c^2} e^{-\frac{(x + \frac{1}{\sqrt{3}}y - \frac{2}{\sqrt{3}}V_1 t + \frac{4}{\sqrt{3}}H)^2}{c^2}} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{17\left(x + \frac{1}{\sqrt{3}}y - \frac{2}{\sqrt{3}}V_1 t + \frac{6}{\sqrt{3}}H\right)}{64c^2} e^{-\frac{(x + \frac{1}{\sqrt{3}}y - \frac{2}{\sqrt{3}}V_1 t + \frac{6}{\sqrt{3}}H)^2}{c^2}} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{23\left(x + \frac{1}{\sqrt{3}}y - \frac{2}{\sqrt{3}}V_1 t + \frac{8}{\sqrt{3}}H\right)}{256c^2} e^{-\frac{(x + \frac{1}{\sqrt{3}}y - \frac{2}{\sqrt{3}}V_1 t + \frac{8}{\sqrt{3}}H)^2}{c^2}} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{\left(x + \frac{1}{\sqrt{3}}y - \frac{1}{\sqrt{3}}V_1 t + \frac{10}{\sqrt{3}}H\right)}{1024c^2} e^{-\frac{(x + \frac{1}{\sqrt{3}}y - \frac{2}{\sqrt{3}}V_1 t + \frac{10}{\sqrt{3}}H)^2}{c^2}} \right]
 \end{aligned} \right\} \tag{68}$$

$$-\frac{89\left(x + \frac{1}{\sqrt{3}}y - \frac{2}{\sqrt{3}}V_1t + \frac{12}{\sqrt{3}}H\right)}{4096c^2}e^{-\frac{\left(x + \frac{1}{\sqrt{3}}y - \frac{2}{\sqrt{3}}V_1t + \frac{12}{\sqrt{3}}H\right)^2}{c^2}} \\ + \dots \dots \dots \quad \Bigg|, \quad \dots \dots \quad (69)$$

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \left[ -\frac{\left(x + \frac{1}{\sqrt{3}}y - \frac{2}{\sqrt{3}}V_1 t\right)}{c^2} e^{-\frac{(x + \frac{1}{\sqrt{3}}y - \frac{2}{\sqrt{3}}V_1 t)^2}{c^2}} \right.$$

$$-\frac{\left(x + \frac{1}{\sqrt{3}}y - \frac{2}{\sqrt{3}}V_1 t + \frac{2}{\sqrt{3}}H\right)}{4c^2} e^{-\frac{(x + \frac{1}{\sqrt{3}}y - \frac{2}{\sqrt{3}}V_1 t + \frac{2}{\sqrt{3}}H)^2}{c^2}}$$

$$+ \frac{7\left(x + \frac{1}{\sqrt{3}}y - \frac{2}{\sqrt{3}}V_1 t + \frac{4}{\sqrt{3}}H\right)}{16c^2} e^{-\frac{(x + \frac{1}{\sqrt{3}}y - \frac{2}{\sqrt{3}}V_1 t + \frac{4}{\sqrt{3}}H)^2}{c^2}}$$

$$- \frac{17\left(x + \frac{1}{\sqrt{3}}y - \frac{2}{\sqrt{3}}V_1 t + \frac{6}{\sqrt{3}}H\right)}{64c^2} e^{-\frac{(x + \frac{1}{\sqrt{3}}y - \frac{2}{\sqrt{3}}V_1 t + \frac{6}{\sqrt{3}}H)^2}{c^2}}$$

$$+ \frac{23\left(x + \frac{1}{\sqrt{3}}y - \frac{2}{\sqrt{3}}V_1 t + \frac{8}{\sqrt{3}}H\right)}{256c^2} e^{-\frac{(x + \frac{1}{\sqrt{3}}y - \frac{2}{\sqrt{3}}V_1 t + \frac{8}{\sqrt{3}}H)^2}{c^2}}$$

$$- \frac{\left(x + \frac{1}{\sqrt{3}}y - \frac{2}{\sqrt{3}}V_1 t + \frac{10}{\sqrt{3}}H\right)}{1624c^2} e^{-\frac{(x + \frac{1}{\sqrt{3}}y - \frac{2}{\sqrt{3}}V_1 t + \frac{10}{\sqrt{3}}H)^2}{c^2}}$$

$$- \frac{89\left(x + \frac{1}{\sqrt{3}}y - \frac{2}{\sqrt{3}}V_1 t + \frac{12}{\sqrt{3}}H\right)}{4096c^2} e^{-\frac{(x + \frac{1}{\sqrt{3}}y - \frac{2}{\sqrt{3}}V_1 t + \frac{12}{\sqrt{3}}H)^2}{c^2}}$$

$$u_2 = \frac{\left(x + \sqrt{3}y - \frac{2}{\sqrt{3}}V_1 t\right)}{c^2} e^{-\frac{(x + \sqrt{3}y - \frac{2}{\sqrt{3}}V_1 t)^2}{c^2}}$$

$$+ \frac{\left(x + \sqrt{3}y - \frac{2}{\sqrt{3}}V_1 t + \frac{2}{\sqrt{3}}H\right)}{4c^2} e^{-\frac{(x + \sqrt{3}y - \frac{2}{\sqrt{3}}V_1 t + \frac{2}{\sqrt{3}}H)^2}{c^2}}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{7(x + \sqrt{3}y - \frac{2}{\sqrt{3}}V_1 t + \frac{4}{\sqrt{3}}H)}{16c^2} e^{-\frac{(x + \sqrt{3}y - \frac{2}{\sqrt{3}}V_1 t + \frac{4}{\sqrt{3}}H)^2}{c^2}} \\
& + \frac{17(x + \sqrt{3}y - \frac{2}{\sqrt{3}}V_1 t + \frac{6}{\sqrt{3}}H)}{64c^2} e^{-\frac{(x + \sqrt{3}y - \frac{2}{\sqrt{3}}V_1 t + \frac{6}{\sqrt{3}}H)^2}{c^2}} \\
& - \frac{23(x + \sqrt{3}y - \frac{2}{\sqrt{3}}V_1 t + \frac{8}{\sqrt{3}}H)}{256c^2} e^{-\frac{(x + \sqrt{3}y - \frac{2}{\sqrt{3}}V_1 t + \frac{8}{\sqrt{3}}H)^2}{c^2}} \\
& + \frac{\left(x + \sqrt{3}y - \frac{2}{\sqrt{3}}V_1 t + \frac{10}{\sqrt{3}}H\right)}{1024c^2} e^{-\frac{(x + \sqrt{3}y - \frac{2}{\sqrt{3}}V_1 t + \frac{10}{\sqrt{3}}H)^2}{c^2}} \\
& + \frac{89(x + \sqrt{3}y - \frac{2}{\sqrt{3}}V_1 t + \frac{12}{\sqrt{3}}H)}{4096c^2} e^{-\frac{(x + \sqrt{3}y - \frac{2}{\sqrt{3}}V_1 t + \frac{12}{\sqrt{3}}H)^2}{c^2}} \\
& + \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \quad \left. \right], \quad \dots \dots \dots \quad (71)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v_2 = & \frac{1}{\sqrt{3}} \left[ \frac{\left(x + \sqrt{3}y - \frac{2}{\sqrt{3}}V_1 t\right)}{c^2} e^{-\frac{(x + \sqrt{3}y - \frac{2}{\sqrt{3}}V_1 t)^2}{c^2}} \right. \\
& - \frac{\left(x + \sqrt{3}y - \frac{2}{\sqrt{3}}V_1 t + \frac{2}{\sqrt{3}}H\right)}{4c^2} e^{-\frac{(x + \sqrt{3}y - \frac{2}{\sqrt{3}}V_1 t + \frac{2}{\sqrt{3}}H)^2}{c^2}} \\
& + \frac{7(x + \sqrt{3}y - \frac{2}{\sqrt{3}}V_1 t + \frac{4}{\sqrt{3}}H)}{16c^2} e^{-\frac{(x + \sqrt{3}y - \frac{2}{\sqrt{3}}V_1 t + \frac{4}{\sqrt{3}}H)^2}{c^2}} \\
& - \frac{17(x + \sqrt{3}y - \frac{2}{\sqrt{3}}V_1 t + \frac{6}{\sqrt{3}}H)}{64c^2} e^{-\frac{(x + \sqrt{3}y - \frac{2}{\sqrt{3}}V_1 t + \frac{6}{\sqrt{3}}H)^2}{c^2}} \\
& + \frac{23(x + \sqrt{3}y - \frac{2}{\sqrt{3}}V_1 t + \frac{8}{\sqrt{3}}H)}{256c^2} e^{-\frac{(x + \sqrt{3}y - \frac{2}{\sqrt{3}}V_1 t + \frac{8}{\sqrt{3}}H)^2}{c^2}} \\
& \left. - \frac{\left(x + \sqrt{3}y - \frac{2}{\sqrt{3}}V_1 t + \frac{10}{\sqrt{3}}H\right)}{1024c^2} e^{-\frac{(x + \sqrt{3}y - \frac{2}{\sqrt{3}}V_1 t + \frac{10}{\sqrt{3}}H)^2}{c^2}} \right]
\end{aligned}$$

$$-\frac{89\left(x+\sqrt{3}y-\frac{2}{\sqrt{3}}V_1t+\frac{12}{\sqrt{3}}H\right)}{4096c^2}e^{-\frac{(x+\sqrt{3}y-\frac{2}{\sqrt{3}}V_1t+\frac{12}{\sqrt{3}}H)^2}{c^2}} \\ + \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \quad ] , \quad \dots \dots \quad (72)$$

$$u_1' = \left[ -\frac{\left(x-\frac{1}{\sqrt{3}}y-\frac{2}{\sqrt{3}}V_1t\right)}{c^2}e^{-\frac{(x-\frac{1}{\sqrt{3}}y-\frac{2}{\sqrt{3}}V_1t)^2}{c^2}} \right. \\ -\frac{\left(x-\frac{1}{\sqrt{3}}y-\frac{2}{\sqrt{3}}V_1t+\frac{2}{\sqrt{3}}H\right)}{4c^2}e^{-\frac{(x-\frac{1}{\sqrt{3}}y-\frac{2}{\sqrt{3}}V_1t+\frac{2}{\sqrt{3}}H)^2}{c^2}} \\ -\frac{\left(x-\frac{1}{\sqrt{3}}y-\frac{2}{\sqrt{3}}V_1t+\frac{4}{\sqrt{3}}H\right)}{16c^2}e^{-\frac{(x-\frac{1}{\sqrt{3}}y-\frac{2}{\sqrt{3}}V_1t+\frac{4}{\sqrt{3}}H)^2}{c^2}} \\ +\frac{7\left(x-\frac{1}{\sqrt{3}}y-\frac{2}{\sqrt{3}}V_1t+\frac{6}{\sqrt{3}}H\right)}{64c^2}e^{-\frac{(x-\frac{1}{\sqrt{3}}y-\frac{2}{\sqrt{3}}V_1t+\frac{6}{\sqrt{3}}H)^2}{c^2}} \\ -\frac{17\left(x-\frac{1}{\sqrt{3}}y-\frac{2}{\sqrt{3}}V_1t+\frac{8}{\sqrt{3}}H\right)}{256c^2}e^{-\frac{(x-\frac{1}{\sqrt{3}}y-\frac{2}{\sqrt{3}}V_1t+\frac{8}{\sqrt{3}}H)^2}{c^2}} \\ +\frac{23\left(x-\frac{1}{\sqrt{3}}y-\frac{2}{\sqrt{3}}V_1t+\frac{10}{\sqrt{3}}H\right)}{1024c^2}e^{-\frac{(x-\frac{1}{\sqrt{3}}y-\frac{2}{\sqrt{3}}V_1t+\frac{10}{\sqrt{3}}H)^2}{c^2}} \\ -\frac{\left(x-\frac{1}{\sqrt{3}}y-\frac{2}{\sqrt{3}}V_1t+\frac{12}{\sqrt{3}}H\right)}{4096c^2}e^{-\frac{(x-\frac{1}{\sqrt{3}}y-\frac{2}{\sqrt{3}}V_1t+\frac{12}{\sqrt{3}}H)^2}{c^2}} \\ \left. + \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \quad \right] , \quad \dots \dots \quad (73)$$

$$v_1' = \frac{1}{\sqrt{3}} \left[ \frac{\left(x-\frac{1}{\sqrt{3}}y-\frac{2}{\sqrt{3}}V_1t\right)}{c^2}e^{-\frac{(x-\frac{1}{\sqrt{3}}y-\frac{2}{\sqrt{3}}V_1t)^2}{c^2}} \right. \\ \left. + \frac{\left(x-\frac{1}{\sqrt{3}}y-\frac{2}{\sqrt{3}}V_1t+\frac{2}{\sqrt{3}}H\right)}{4c^2}e^{-\frac{(x-\frac{1}{\sqrt{3}}y-\frac{2}{\sqrt{3}}V_1t+\frac{2}{\sqrt{3}}H)^2}{c^2}} \right]$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\left(x - \frac{1}{\sqrt{3}}y - \frac{2}{\sqrt{3}}V_1 t + \frac{4}{\sqrt{3}}H\right)}{16c^2} e^{-\frac{(x - \frac{1}{\sqrt{3}}y - \frac{2}{\sqrt{3}}V_1 t + \frac{4}{\sqrt{3}}H)^2}{c^2}} \\
& - \frac{7\left(x - \frac{1}{\sqrt{3}}y - \frac{2}{\sqrt{3}}V_1 t + \frac{6}{\sqrt{3}}H\right)}{64c^2} e^{-\frac{(x - \frac{1}{\sqrt{3}}y - \frac{2}{\sqrt{3}}V_1 t + \frac{6}{\sqrt{3}}H)^2}{c^2}} \\
& + \frac{17\left(x - \frac{1}{\sqrt{3}}y - \frac{2}{\sqrt{3}}V_1 t + \frac{8}{\sqrt{3}}H\right)}{256c^2} e^{-\frac{(x - \frac{1}{\sqrt{3}}y - \frac{2}{\sqrt{3}}V_1 t + \frac{8}{\sqrt{3}}H)^2}{c^2}} \\
& - \frac{23\left(x - \frac{1}{\sqrt{3}}y - \frac{2}{\sqrt{3}}V_1 t + \frac{10}{\sqrt{3}}H\right)}{1024c^2} e^{-\frac{(x - \frac{1}{\sqrt{3}}y - \frac{2}{\sqrt{3}}V_1 t + \frac{10}{\sqrt{3}}H)^2}{c^2}} \\
& + \frac{\left(x - \frac{1}{\sqrt{3}}y - \frac{2}{\sqrt{3}}V_1 t + \frac{12}{\sqrt{3}}H\right)}{4096c^2} e^{-\frac{(x - \frac{1}{\sqrt{3}}y - \frac{2}{\sqrt{3}}V_1 t + \frac{12}{\sqrt{3}}H)^2}{c^2}} \\
& + \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \quad \left. \right], \quad \dots \dots \quad (74)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_2' = & \left[ -\frac{\left(x + \frac{1}{\sqrt{3}}y - \frac{2}{\sqrt{3}}V_1 t + \frac{2}{\sqrt{3}}H\right)}{2c^2} e^{-\frac{(x + \frac{1}{\sqrt{3}}y - \frac{2}{\sqrt{3}}V_1 t + \frac{2}{\sqrt{3}}H)^2}{c^2}} \right. \\
& + \frac{3\left(x + \frac{1}{\sqrt{3}}y - \frac{2}{\sqrt{3}}V_1 t + \frac{4}{\sqrt{3}}H\right)}{8c^2} e^{-\frac{(x + \frac{1}{\sqrt{3}}y - \frac{2}{\sqrt{3}}V_1 t + \frac{4}{\sqrt{3}}H)^2}{c^2}} \\
& - \frac{5\left(x + \frac{1}{\sqrt{3}}y - \frac{2}{\sqrt{3}}V_1 t + \frac{6}{\sqrt{3}}H\right)}{32c^2} e^{-\frac{(x + \frac{1}{\sqrt{3}}y - \frac{2}{\sqrt{3}}V_1 t + \frac{6}{\sqrt{3}}H)^2}{c^2}} \\
& + \frac{3\left(x + \frac{1}{\sqrt{3}}y - \frac{2}{\sqrt{3}}V_1 t + \frac{8}{\sqrt{3}}H\right)}{128c^2} e^{-\frac{(x + \frac{1}{\sqrt{3}}y - \frac{2}{\sqrt{3}}V_1 t + \frac{8}{\sqrt{3}}H)^2}{c^2}} \\
& + \frac{11\left(x + \frac{1}{\sqrt{3}}y - \frac{2}{\sqrt{3}}V_1 t + \frac{10}{\sqrt{3}}H\right)}{512c^2} e^{-\frac{(x + \frac{1}{\sqrt{3}}y - \frac{2}{\sqrt{3}}V_1 t + \frac{10}{\sqrt{3}}H)^2}{c^2}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{45(x + \frac{1}{\sqrt{3}}y - \frac{2}{\sqrt{3}}V_1t + \frac{12}{\sqrt{3}}H)}{2048c^2} e^{-\frac{(x + \frac{1}{\sqrt{3}}y - \frac{2}{\sqrt{3}}V_1t + \frac{12}{\sqrt{3}}H)^2}{c^2}} \\
 & + \frac{91(x + \frac{1}{\sqrt{3}}y - \frac{2}{\sqrt{3}}V_1t + \frac{14}{\sqrt{3}}H)}{8192c^2} e^{-\frac{(x - \frac{1}{\sqrt{3}}y - \frac{2}{\sqrt{3}}V_1t + \frac{14}{\sqrt{3}}H)^2}{c^2}} \\
 & + \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \quad \left. \right], \quad \dots \dots \quad (75)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 v_2' = & \frac{1}{\sqrt{3}} \left[ -\frac{\left( x + \frac{1}{\sqrt{3}}y - \frac{2}{\sqrt{3}}V_1t + \frac{2}{\sqrt{3}}H \right) e^{-\frac{(x + \frac{1}{\sqrt{3}}y - \frac{2}{\sqrt{3}}V_1t + \frac{2}{\sqrt{3}}H)^2}{c^2}}}{2c^2} \right. \\
 & + \frac{3\left( x + \frac{1}{\sqrt{3}}y - \frac{2}{\sqrt{3}}V_1t + \frac{4}{\sqrt{3}}H \right) e^{-\frac{(x + \frac{1}{\sqrt{3}}y - \frac{2}{\sqrt{3}}V_1t + \frac{4}{\sqrt{3}}H)^2}{c^2}}}{8c^2} \\
 & - \frac{5\left( x + \frac{1}{\sqrt{3}}y - \frac{2}{\sqrt{3}}V_1t + \frac{6}{\sqrt{3}}H \right) e^{-\frac{(x + \frac{1}{\sqrt{3}}y - \frac{2}{\sqrt{3}}V_1t + \frac{6}{\sqrt{3}}H)^2}{c^2}}}{32c^2} \\
 & + \frac{3\left( x + \frac{1}{\sqrt{3}}y - \frac{2}{\sqrt{3}}V_1t + \frac{8}{\sqrt{3}}H \right) e^{-\frac{(x + \frac{1}{\sqrt{3}}y - \frac{2}{\sqrt{3}}V_1t + \frac{8}{\sqrt{3}}H)^2}{c^2}}}{128c^2} \\
 & + \frac{11\left( x + \frac{1}{\sqrt{3}}y - \frac{2}{\sqrt{3}}V_1t + \frac{10}{\sqrt{3}}H \right) e^{-\frac{(x + \frac{1}{\sqrt{3}}y - \frac{2}{\sqrt{3}}V_1t + \frac{10}{\sqrt{3}}H)^2}{c^2}}}{512c^2} \\
 & - \frac{45\left( x + \frac{1}{\sqrt{3}}y - \frac{2}{\sqrt{3}}V_1t + \frac{12}{\sqrt{3}}H \right) e^{-\frac{(x + \frac{1}{\sqrt{3}}y - \frac{2}{\sqrt{3}}V_1t + \frac{12}{\sqrt{3}}H)^2}{c^2}}}{2048c^2} \\
 & + \frac{91\left( x + \frac{1}{\sqrt{3}}y - \frac{2}{\sqrt{3}}V_1t + \frac{14}{\sqrt{3}}H \right) e^{-\frac{(x + \frac{1}{\sqrt{3}}y - \frac{2}{\sqrt{3}}V_1t + \frac{14}{\sqrt{3}}H)^2}{c^2}}}{8192c^2} \\
 & + \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \quad \left. \right], \quad \dots \dots \quad (76)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u'_3 = & \left[ \frac{\left( x - \sqrt{3}y - \frac{x}{\sqrt{3}} V_1 t \right) e^{-\frac{(x - \sqrt{3}y - \frac{2}{\sqrt{3}} V_1 t)^2}{c^2}}}{c^2} \right. \\
& - \frac{\left( x - \sqrt{3}y - \frac{2}{\sqrt{3}} V_1 t + \frac{2}{\sqrt{3}} H \right) e^{-\frac{(x - \sqrt{3}y - \frac{2}{\sqrt{3}} V_1 t + \frac{2}{\sqrt{3}} H)^2}{c^2}}}{4c^2} \\
& - \frac{\left( x - \sqrt{3}y - \frac{2}{\sqrt{3}} V_1 t + \frac{4}{\sqrt{3}} H \right) e^{-\frac{(x - \sqrt{3}y - \frac{2}{\sqrt{3}} V_1 t + \frac{4}{\sqrt{3}} H)^2}{c^2}}}{16c^2} \\
& + \frac{7 \left( x - \sqrt{3}y - \frac{2}{\sqrt{3}} V_1 t + \frac{6}{\sqrt{3}} H \right) e^{-\frac{(x - \sqrt{3}y - \frac{2}{\sqrt{3}} V_1 t + \frac{6}{\sqrt{3}} H)^2}{c^2}}}{64c^2} \\
& - \frac{17 \left( x - \sqrt{3}y - \frac{2}{\sqrt{3}} V_1 t + \frac{8}{\sqrt{3}} H \right) e^{-\frac{(x - \sqrt{3}y - \frac{2}{\sqrt{3}} V_1 t + \frac{8}{\sqrt{3}} H)^2}{c^2}}}{256c^2} \\
& + \frac{23 \left( x - \sqrt{3}y - \frac{2}{\sqrt{3}} V_1 t + \frac{10}{\sqrt{3}} H \right) e^{-\frac{(x - \sqrt{3}y - \frac{2}{\sqrt{3}} V_1 t + \frac{10}{\sqrt{3}} H)^2}{c^2}}}{1024c^2} \\
& - \frac{\left( x - \sqrt{3}y - \frac{2}{\sqrt{3}} V_1 t + \frac{12}{\sqrt{3}} H \right) e^{-\frac{(x - \sqrt{3}y - \frac{2}{\sqrt{3}} V_1 t + \frac{12}{\sqrt{3}} H)^2}{c^2}}}{4096c^2} \\
& \left. + \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \right], \quad \dots \dots \dots \quad (77)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v'_3 = & \frac{1}{\sqrt{3}} \left[ \frac{\left( x - \sqrt{3}y - \frac{2}{\sqrt{3}} V_1 t \right) e^{-\frac{(x - \sqrt{3}y - \frac{2}{\sqrt{3}} V_1 t)^2}{c^2}}}{c^2} \right. \\
& - \frac{\left( x - \sqrt{3}y - \frac{2}{\sqrt{3}} V_1 t + \frac{2}{\sqrt{3}} H \right) e^{-\frac{(x - \sqrt{3}y - \frac{2}{\sqrt{3}} V_1 t + \frac{2}{\sqrt{3}} H)^2}{c^2}}}{4c^2} \\
& - \frac{\left( x - \sqrt{3}y - \frac{2}{\sqrt{3}} V_1 t + \frac{4}{\sqrt{3}} H \right) e^{-\frac{(x - \sqrt{3}y - \frac{2}{\sqrt{3}} V_1 t + \frac{4}{\sqrt{3}} H)^2}{c^2}}}{16c^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{7(x - \sqrt{3}y - \frac{2}{\sqrt{3}}V_1t + \frac{6}{\sqrt{3}}H)}{64c^2} e^{-\frac{(x - \sqrt{3}y - \frac{2}{\sqrt{3}}V_1t + \frac{6}{\sqrt{3}}H)^2}{c^2}} \\
& - \frac{17(x - \sqrt{3}y - \frac{2}{\sqrt{3}}V_1t + \frac{8}{\sqrt{3}}H)}{256c^2} e^{-\frac{(x - \sqrt{3}y - \frac{2}{\sqrt{3}}V_1t + \frac{8}{\sqrt{3}}H)^2}{c^2}} \\
& + \frac{23(x - \sqrt{3}y - \frac{2}{\sqrt{3}}V_1t + \frac{10}{\sqrt{3}}H)}{1024c^2} e^{-\frac{(x - \sqrt{3}y - \frac{2}{\sqrt{3}}V_1t + \frac{10}{\sqrt{3}}H)^2}{c^2}} \\
& - \frac{\left(x - \sqrt{3}y - \frac{2}{\sqrt{3}}V_1t + \frac{12}{\sqrt{3}}H\right)}{4096c^2} e^{-\frac{\left(x - \sqrt{3}y - \frac{2}{\sqrt{3}}V_1t + \frac{12}{\sqrt{3}}H\right)^2}{c^2}} \\
& + \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \quad \boxed{,} \quad \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \quad (78)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u'_4 = & \left[ -\frac{\left(x + \sqrt{3}y - \frac{2}{\sqrt{3}}V_1t + \frac{4}{\sqrt{3}}H\right)}{2c^2} e^{-\frac{\left(x + \sqrt{3}y - \frac{2}{\sqrt{3}}V_1t + \frac{4}{\sqrt{3}}H\right)^2}{c^2}} \right. \\
& + \frac{3\left(x + \sqrt{3}y - \frac{2}{\sqrt{3}}V_1t + \frac{6}{\sqrt{3}}H\right)}{8c^2} e^{-\frac{\left(x + \sqrt{3}y - \frac{2}{\sqrt{3}}V_1t + \frac{6}{\sqrt{3}}H\right)^2}{c^2}} \\
& - \frac{5\left(x + \sqrt{3}y - \frac{2}{\sqrt{3}}V_1t + \frac{8}{\sqrt{3}}H\right)}{32c^2} e^{-\frac{\left(x + \sqrt{3}y - \frac{2}{\sqrt{3}}V_1t + \frac{8}{\sqrt{3}}H\right)^2}{c^2}} \\
& + \frac{3\left(x + \sqrt{3}y - \frac{2}{\sqrt{3}}V_1t + \frac{10}{\sqrt{3}}H\right)}{128c^2} e^{-\frac{\left(x + \sqrt{3}y - \frac{2}{\sqrt{3}}V_1t + \frac{10}{\sqrt{3}}H\right)^2}{c^2}} \\
& + \frac{11\left(x + \sqrt{3}y - \frac{2}{\sqrt{3}}V_1t + \frac{12}{\sqrt{3}}H\right)}{512c^2} e^{-\frac{\left(x + \sqrt{3}y - \frac{2}{\sqrt{3}}V_1t + \frac{12}{\sqrt{3}}H\right)^2}{c^2}} \\
& - \frac{45\left(x + \sqrt{3}y - \frac{2}{\sqrt{3}}V_1t + \frac{14}{\sqrt{3}}H\right)}{2048c^2} e^{-\frac{\left(x + \sqrt{3}y - \frac{2}{\sqrt{3}}V_1t + \frac{14}{\sqrt{3}}H\right)^2}{c^2}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{91(x+\sqrt{3}y-\frac{2}{\sqrt{3}}V_1t+\frac{16}{\sqrt{3}}H)}{8192c^2} e^{-\frac{(x+\sqrt{3}y-\frac{2}{\sqrt{3}}V_1t+\frac{16}{\sqrt{3}}H)^2}{c^2}} \\
 & + \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \quad \left. \right] , \quad \dots \dots \dots \dots \quad (79)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 v'_4 = & \frac{1}{\sqrt{3}} \left[ \frac{\left( x+\sqrt{3}y-\frac{2}{\sqrt{3}}V_1t+\frac{4}{\sqrt{3}}H \right)}{2c^2} e^{-\frac{(x+\sqrt{3}y-\frac{2}{\sqrt{3}}V_1t+\frac{4}{\sqrt{3}}H)^2}{c^2}} \right. \\
 & - \frac{3\left( x+\sqrt{3}y-\frac{2}{\sqrt{3}}V_1t+\frac{6}{\sqrt{3}}H \right)}{8c^2} e^{-\frac{(x+\sqrt{3}y-\frac{2}{\sqrt{3}}V_1t+\frac{6}{\sqrt{3}}H)^2}{c^2}} \\
 & + \frac{5\left( x+\sqrt{3}y-\frac{2}{\sqrt{3}}V_1t+\frac{8}{\sqrt{3}}H \right)}{32c^2} e^{-\frac{(x+\sqrt{3}y-\frac{2}{\sqrt{3}}V_1t+\frac{8}{\sqrt{3}}H)^2}{c^2}} \\
 & - \frac{3\left( x+\sqrt{3}y-\frac{2}{\sqrt{3}}V_1t+\frac{10}{\sqrt{3}}H \right)}{128c^2} e^{-\frac{(x+\sqrt{3}y-\frac{2}{\sqrt{3}}V_1t+\frac{10}{\sqrt{3}}H)^2}{c^2}} \\
 & - \frac{11\left( x+\sqrt{3}y-\frac{2}{\sqrt{3}}V_1t+\frac{12}{\sqrt{3}}H \right)}{512c^2} e^{-\frac{(x+\sqrt{3}y-\frac{2}{\sqrt{3}}V_1t+\frac{12}{\sqrt{3}}H)^2}{c^2}} \\
 & + \frac{45\left( x+\sqrt{3}y-\frac{2}{\sqrt{3}}V_1t+\frac{14}{\sqrt{3}}H \right)}{2048c} e^{-\frac{(x+\sqrt{3}y-\frac{2}{\sqrt{3}}V_1t+\frac{14}{\sqrt{3}}H)^2}{c^2}} \\
 & - \frac{91\left( x+\sqrt{3}y-\frac{2}{\sqrt{3}}V_1t+\frac{16}{\sqrt{3}}H \right)}{8192c^2} e^{-\frac{(x+\sqrt{3}y-\frac{2}{\sqrt{3}}V_1t+\frac{16}{\sqrt{3}}H)^2}{c^2}} \\
 & + \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \quad \left. \right] , \quad \dots \dots \dots \dots \quad (80)
 \end{aligned}$$

$$u''_1 = \left[ -\frac{\left( x-\frac{1}{\sqrt{3}}y-\frac{2}{\sqrt{3}}V_1t \right)}{2c^2} e^{-\frac{(x-\frac{1}{\sqrt{3}}y-\frac{2}{\sqrt{3}}V_1t)^2}{c^2}} \right]$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{5(x - \frac{1}{\sqrt{3}}y - \frac{2}{\sqrt{3}}V_1 t + \frac{2}{\sqrt{3}}H)}{8c^2} e^{-\frac{(x - \frac{1}{\sqrt{3}}y - \frac{2}{\sqrt{3}}V_1 t + \frac{2}{\sqrt{3}}H)^2}{c^2}} \\
& + \frac{3(x - \frac{1}{\sqrt{3}}y - \frac{2}{\sqrt{3}}V_1 t + \frac{4}{\sqrt{3}}H)}{32c^2} e^{-\frac{(x - \frac{1}{\sqrt{3}}y - \frac{2}{\sqrt{3}}V_1 t + \frac{4}{\sqrt{3}}H)^2}{c^2}} \\
& + \frac{11(x - \frac{1}{\sqrt{3}}y - \frac{2}{\sqrt{3}}V_1 t + \frac{6}{\sqrt{3}}H)}{128c^2} e^{-\frac{(x - \frac{1}{\sqrt{3}}y - \frac{2}{\sqrt{3}}V_1 t + \frac{6}{\sqrt{3}}H)^2}{c^2}} \\
& - \frac{45(x - \frac{1}{\sqrt{3}}y - \frac{2}{\sqrt{3}}V_1 t + \frac{8}{\sqrt{3}}H)}{512c^2} e^{-\frac{(x - \frac{1}{\sqrt{3}}y - \frac{2}{\sqrt{3}}V_1 t + \frac{8}{\sqrt{3}}H)^2}{c^2}} \\
& + \frac{91(x - \frac{1}{\sqrt{3}}y - \frac{2}{\sqrt{3}}V_1 t + \frac{10}{\sqrt{3}}H)}{2048c^2} e^{-\frac{(x - \frac{1}{\sqrt{3}}y - \frac{2}{\sqrt{3}}V_1 t + \frac{10}{\sqrt{3}}H)^2}{c^2}} \\
& - \frac{93(x - \frac{1}{\sqrt{3}}y - \frac{2}{\sqrt{3}}V_1 t + \frac{12}{\sqrt{3}}H)}{8192c^2} e^{-\frac{(x - \frac{1}{\sqrt{3}}y - \frac{2}{\sqrt{3}}V_1 t + \frac{12}{\sqrt{3}}H)^2}{c^2}} \\
& + \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \quad \left. \right], \quad \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \quad (81)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v_1'' = & \frac{1}{\sqrt{3}} \left[ \frac{\left( x - \frac{1}{\sqrt{3}}y - \frac{2}{\sqrt{3}}V_1 t \right)}{2c^2} e^{-\frac{\left( x + \frac{1}{\sqrt{3}}y - \frac{2}{\sqrt{3}}V_1 t \right)^2}{c^2}} \right. \\
& + \frac{5(x - \frac{1}{\sqrt{3}}y - \frac{2}{\sqrt{3}}V_1 t + \frac{2}{\sqrt{3}}H)}{8c^2} e^{-\frac{(x - \frac{1}{\sqrt{3}}y - \frac{2}{\sqrt{3}}V_1 t + \frac{2}{\sqrt{3}}H)^2}{c^2}} \\
& - \frac{3(x - \frac{1}{\sqrt{3}}y - \frac{2}{\sqrt{3}}V_1 t + \frac{4}{\sqrt{3}}H)}{32c^2} e^{-\frac{(x - \frac{1}{\sqrt{3}}y - \frac{2}{\sqrt{3}}V_1 t + \frac{4}{\sqrt{3}}H)^2}{c^2}} \\
& - \frac{11(x - \frac{1}{\sqrt{3}}y - \frac{2}{\sqrt{3}}V_1 t + \frac{6}{\sqrt{3}}H)}{128c^2} e^{-\frac{(x - \frac{1}{\sqrt{3}}y - \frac{2}{\sqrt{3}}V_1 t + \frac{6}{\sqrt{3}}H)^2}{c^2}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{45(x - \frac{1}{\sqrt{3}}y - \frac{2}{\sqrt{3}}V_1 t + \frac{8}{\sqrt{3}}H)}{512c^2} e^{-\frac{(x - \frac{1}{\sqrt{3}}y - \frac{2}{\sqrt{3}}V_1 t + \frac{8}{\sqrt{3}}H)^2}{c^2}} \\
 & - \frac{91(x - \frac{1}{\sqrt{3}}y - \frac{2}{\sqrt{3}}V_1 t + \frac{10}{\sqrt{3}}H)}{2048c^2} e^{-\frac{(x - \frac{1}{\sqrt{3}}y - \frac{2}{\sqrt{3}}V_1 t + \frac{10}{\sqrt{3}}H)^2}{c^2}} \\
 & + \frac{93(x - \frac{1}{\sqrt{3}}y - \frac{2}{\sqrt{3}}V_1 t + \frac{12}{\sqrt{3}}H)}{8192c^2} e^{-\frac{(x - \frac{1}{\sqrt{3}}y - \frac{2}{\sqrt{3}}V_1 t + \frac{12}{\sqrt{3}}H)^2}{c^2}} \\
 & + \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \quad ] , \quad \dots \dots \dots \quad (82)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 u_2'' = & \left[ \frac{\left( x - \sqrt{3}y - \frac{2}{\sqrt{3}}V_1 t - \frac{2}{\sqrt{3}}H \right) e^{-\frac{(x - \sqrt{3}y - \frac{2}{\sqrt{3}}V_1 t - \frac{2}{\sqrt{3}}H)^2}{c^2}}}{2c^2} \right. \\
 & + \frac{5\left( x - \sqrt{3}y - \frac{2}{\sqrt{3}}V_1 t \right) e^{-\frac{(x - \sqrt{3}y - \frac{2}{\sqrt{3}}V_1 t)^2}{c^2}}}{8c^2} \\
 & - \frac{3\left( x - \sqrt{3}y - \frac{2}{\sqrt{3}}V_1 t + \frac{2}{\sqrt{3}}H \right) e^{-\frac{(x - \sqrt{3}y - \frac{2}{\sqrt{3}}V_1 t + \frac{2}{\sqrt{3}}H)^2}{c^2}}}{32c^2} \\
 & - \frac{11\left( x - \sqrt{3}y - \frac{2}{\sqrt{3}}V_1 t + \frac{4}{\sqrt{3}}H \right) e^{-\frac{(x - \sqrt{3}y - \frac{2}{\sqrt{3}}V_1 t + \frac{4}{\sqrt{3}}H)^2}{c^2}}}{128c^2} \\
 & + \frac{45\left( x - \sqrt{3}y - \frac{2}{\sqrt{3}}V_1 t + \frac{6}{\sqrt{3}}H \right) e^{-\frac{(x - \sqrt{3}y - \frac{2}{\sqrt{3}}V_1 t + \frac{6}{\sqrt{3}}H)^2}{c^2}}}{512c^2} \\
 & - \frac{91\left( x - \sqrt{3}y - \frac{2}{\sqrt{3}}V_1 t + \frac{8}{\sqrt{3}}H \right) e^{-\frac{(x - \sqrt{3}y - \frac{2}{\sqrt{3}}V_1 t + \frac{8}{\sqrt{3}}H)^2}{c^2}}}{2048c^2} \\
 & + \frac{93\left( x - \sqrt{3}y - \frac{2}{\sqrt{3}}V_1 t + \frac{10}{\sqrt{3}}H \right) e^{-\frac{(x - \sqrt{3}y - \frac{2}{\sqrt{3}}V_1 t + \frac{10}{\sqrt{3}}H)^2}{c^2}}}{8192c^2} \\
 & \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \quad ] , \quad \dots \dots \dots \quad (83)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 v_2'' = & \frac{1}{\sqrt{3}} \left[ \frac{\left( x - \sqrt{3}y - \frac{2}{\sqrt{3}}V_1 t - \frac{2}{\sqrt{3}}H \right) e^{-\frac{(x - \sqrt{3}y - \frac{2}{\sqrt{3}}V_1 t - \frac{2}{\sqrt{3}}H)^2}{c^2}}}{2c^2} \right. \\
 & + \frac{5 \left( x - \sqrt{3}y - \frac{2}{\sqrt{3}}V_1 t \right) e^{-\frac{(x - \sqrt{3}y - \frac{2}{\sqrt{3}}V_1 t)^2}{c^2}}}{8c^2} \\
 & - \frac{3 \left( x - \sqrt{3}y - \frac{2}{\sqrt{3}}V_1 t + \frac{2}{\sqrt{3}}H \right) e^{-\frac{(x - \sqrt{3}y - \frac{2}{\sqrt{3}}V_1 t + \frac{2}{\sqrt{3}}H)^2}{c^2}}}{32c^2} \\
 & - \frac{11 \left( x - \sqrt{3}y - \frac{2}{\sqrt{3}}V_1 t + \frac{4}{\sqrt{3}}H \right) e^{-\frac{(x - \sqrt{3}y - \frac{2}{\sqrt{3}}V_1 t + \frac{4}{\sqrt{3}}H)^2}{c^2}}}{128c^2} \\
 & + \frac{45 \left( x - \sqrt{3}y - \frac{2}{\sqrt{3}}V_1 t + \frac{6}{\sqrt{3}}H \right) e^{-\frac{(x - \sqrt{3}y - \frac{2}{\sqrt{3}}V_1 t + \frac{6}{\sqrt{3}}H)^2}{c^2}}}{512c^2} \\
 & - \frac{91 \left( x - \sqrt{3}y - \frac{2}{\sqrt{3}}V_1 t + \frac{8}{\sqrt{3}}H \right) e^{-\frac{(x - \sqrt{3}y - \frac{2}{\sqrt{3}}V_1 t + \frac{8}{\sqrt{3}}H)^2}{c^2}}}{2048c^2} \\
 & + \frac{93 \left( x - \sqrt{3}y - \frac{2}{\sqrt{3}}V_1 t + \frac{10}{\sqrt{3}}H \right) e^{-\frac{(x - \sqrt{3}y - \frac{2}{\sqrt{3}}V_1 t + \frac{10}{\sqrt{3}}H)^2}{c^2}}}{8192c^2} \\
 & \left. + \dots \dots \dots \dots \dots \dots \right] . \quad \dots \dots \dots \quad (84)
 \end{aligned}$$

(68) で表される衝撃波型の縦弾性波が  $y > 0$  なる弾性體中を傳播して  $y = 0$  なる面に入射角が  $30^\circ$  となつて入射する時  $y > 0, 0 > y > -H$  及び  $-H > y$  なる 3 つの弾性體中に現はれる波動現象は全く (69), (70) 及び (71), (72); (73), (74), (75), (76), (77), (78), (79), (80); (81), (82), (83), (84) によつて夫々解決されてゐる。 $u_1, v_1$  に於ける第 1 項の波は  $u_1, v_1$  の  $y = 0$  に入射する時に起される反射の縦波であり、 $u_1, v_1$  に於ける第 1 は同じく反射の横波である。 $u_1, v_1$  及び  $u_2, v_2$  に於ける他の夫々の項は順次中間層中の  $y = -H$  で反射された縦波、横波によつてこれ等が順次  $y = 0$  に入射する時  $y = 0$  の面で起された縦横兩波を示めすものであつて、夫々の波と波との間に位相のおくれのある事、及びおくれて出る波程その大きさが減じて行くのが見られる。そしてこれ等位相のおくれのある波は次第にその大きさは減ずるが理論的には

無限に起され續くのである。中間層での反射屈折の波は  $u_1', v_1', u_2', v_2'$  及び  $u_3' v_3', u_4', v_4'$  によって全く表されてゐる。そして此れ等の波の位相のおくれは勿論後に  $y=0$ ,  $y=-H$  で反射或は屈折されるもの程大となつており、又  $y>0$  に於けるものと同様に、おくれの大きいもの程その大きさが順々に小さくなつてゐる事も見られる。 $u_1', v_1'$  に於ける第 1 項は勿論 (68) なる入射波によつて  $y=0$  の面でおこされた屈折の縦波であり、 $u_2', v_2'$ 、に於ける第 1 項はこの縦波が  $y=-H$  なる面に入射した時この中間層におこされる反射の縦波である。 $v_3'$  及び  $v_4'$  の第 1 項は (68) の波の入射によつて  $y=0$  でおこされた横波の屈折波であり、 $u_4', v_4'$  の第 1 項は又  $u_1', v_1'$  の第 1 項が  $y=-H$  の面に入射した時此の面で起される中間層の横波である。

$y < -H$  なる弾性體に就ては  $u_1'', v_1'', u_2'', v_2''$  が夫々中間層の縦横の弾性波が  $y=-H$  なる面に入射した時に起される縦横の波を示してゐる。おくれのあるもの程その大きさの小さくなつて行く事は全く前と同様である。

尙全波動に就て各  $x-$ ,  $y-$  分變位の符號が反射屈折の重なる都度變化してゐるのが見られる。即ちこの様に符號の變化する事が夫々の弾性體中の分子の運動を複雑にする 1 つの原因である事は勿論である。又この符號の變化すると云ふ事柄によつて、(68) なるその見掛け上の波の長さが  $c$  であるものが  $y=0$  に入射した時、夫々の弾性體中の 1 點に於ける  $x-$  及び  $y-$  方向の振動を時間の變化に對して求めた時に、一般的に各點のそれ等がお互に見掛け上の週期と云ふものが異つて出て来る原因であり又 1 點での夫々  $x-$ ,  $y-$  方向の變位の時間的の變化に於て、あたかも色々の週期の波が重なり現はれてゐる様になる 1 つの原因である。即ち換言すれば、中間層の両面での反射、屈折の爲めに、(68) なる見掛け上週期が一定な波が入射しても、各點での  $x-$ ,  $y-$  方向の變位の時間的の變化を見る時は週期が一般的に異つてゐる振動をしてゐる原因であり、又各點での夫等のものを比較する時、週期が各場所に於て異つてゐる原因である。此の頃各土地には固有週期が存在してゐると、盛んにとなへられる様になつて來た。著者は決してこれを是認しないものではないが、地震動は入射波そのものと、そして土地の深さの方向或は水平方向に弾性力學的な物理量の變化してゐると云ふ事で説明の出来る部分がありはしないかと云ふ事を考へてゐる。震源からの距離と觀測點附近の土質、波の長さ或はその見掛けの週期との關係及び入射角の關係を考へに入れて説明し得る部分が地震動にはあると思つてゐる。この事に就ては別の機會に論文を發表する考である。

即ち此れ等の量を考へに入れて, 弾性波の反射屈折の理論を適用すれば可なり地震記象を證明し得る部分があると考へてゐる。

以上の計算結果を利用して, 弾性體内各點に於ける振動状況を今少しあげてみよう。今  $x=0$  なる線に沿ふて,  $y>0$  なる弾性體に就ては  $x=0, y=0$  なる點,  $0>y>-H$  なる中間層に就ては  $x=0, y=0$  の點と  $x=0, y=-\frac{H}{2}$ , 及び  $x=0, y=-H$  なる 3 點,  $y<-H$  なる弾性體に就ては  $x=0, y=0$  なる點に就て, 夫々振動状況を明かにしよう。それは  $y>0$  なる弾性體に就ては,

$$\left. \begin{array}{l} cU = cu_1 + cu_1' + cu_2, \\ cV = cv_1 + cv_1' + cv_2, \end{array} \right\} \dots \dots \dots \dots \dots \quad (85)$$

$-H < y < 0$  なる中間層では,

$$\left. \begin{array}{l} cU' = cu_1' + cu_2' + cu_3' + cu_4', \\ cV' = cv_1' + cv_2' + cv_3' + cv_4', \end{array} \right\} \dots \dots \dots \dots \dots \quad (86)$$

$-H > y$  なる弾性では,

$$\left. \begin{array}{l} cU'' = cu_1'' + cu_2'', \\ cV'' = cv_1'' + cv_2'', \end{array} \right\} \dots \dots \dots \dots \dots \quad (87)$$

とおいて, 色々の波による結局の振動状況をしらべればよい。即ち

$y>0$  なる弾性體:—

$$cU_{y=0} = \frac{8}{\sqrt{3}} \left( \frac{V_1 t}{c} \right) e^{-\frac{4}{3} \left( \frac{V_1 t}{c} \right)^2}, \quad \dots \dots \dots \dots \dots \quad (88)$$

$$\begin{aligned} cV_{y=0} = & \frac{1}{3} \left[ -4 \left( \frac{V_1 t}{c} \right) e^{-\frac{4}{3} \left( \frac{V_1 t}{c} \right)^2} \right. \\ & + \left( \frac{V_1 t}{c} - \frac{H}{c} \right) e^{-\frac{4}{3} \left( \frac{V_1 t}{c} - \frac{H}{c} \right)^2} \\ & - \frac{7}{4} \left( \frac{V_1 t}{c} - 2 \frac{H}{c} \right) e^{-\frac{4}{3} \left( \frac{V_1 t}{c} - 2 \frac{H}{c} \right)^2} \\ & + \frac{17}{16} \left( \frac{V_1 t}{c} - 3 \frac{H}{c} \right) e^{-\frac{4}{3} \left( \frac{V_1 t}{c} - 3 \frac{H}{c} \right)^2} \\ & - \frac{23}{64} \left( \frac{V_1 t}{c} - 4 \frac{H}{c} \right) e^{-\frac{4}{3} \left( \frac{V_1 t}{c} - 4 \frac{H}{c} \right)^2} \\ & \left. + \frac{1}{256} \left( \frac{V_1 t}{c} - 5 \frac{H}{c} \right) e^{-\frac{4}{3} \left( \frac{V_1 t}{c} - 5 \frac{H}{c} \right)^2} \right] \end{aligned}$$

$0 > y > -H$  なる中間層:—

$$\begin{aligned}
cU'_{x=0, y=0} = & \frac{1}{\sqrt{3}} \left[ 2 \left( \frac{V_1 t}{c} - \frac{H}{c} \right) e^{-\frac{4}{3} \left( \frac{V_1 t}{c} - \frac{H}{c} \right)^2} \right. \\
& + \frac{1}{2} \left( \frac{V_1 t}{c} - 2 \frac{H}{c} \right) e^{-\frac{4}{3} \left( \frac{V_1 t}{c} - 2 \frac{H}{c} \right)^2} \\
& - \frac{7}{8} \left( \frac{V_1 t}{c} - 3 \frac{H}{c} \right) e^{-\frac{4}{3} \left( \frac{V_1 t}{c} - 3 \frac{H}{c} \right)^2} \\
& + \frac{17}{32} \left( \frac{V_1 t}{c} - 4 \frac{H}{c} \right) e^{-\frac{4}{3} \left( \frac{V_1 t}{c} - 4 \frac{H}{c} \right)^2} \\
& - \frac{23}{128} \left( \frac{V_1 t}{c} - 5 \frac{H}{c} \right) e^{-\frac{4}{3} \left( \frac{V_1 t}{c} - 5 \frac{H}{c} \right)^2} \\
& + \frac{1}{512} \left( \frac{V_1 t}{c} - 6 \frac{H}{c} \right) e^{-\frac{4}{3} \left( \frac{V_1 t}{c} - 6 \frac{H}{c} \right)^2} \\
& \left. + \dots \right], \quad \dots \quad (90)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
cV'_{x=0} &= \frac{1}{3} \left[ -4 \left( \frac{V_1 t}{c} \right) e^{-\frac{4}{3} \left( \frac{V_1 t}{c} \right)^2} \right. \\
&\quad + \left( \frac{V_1 t}{c} - \frac{H}{c} \right) e^{-\frac{4}{3} \left( \frac{V_1 t}{c} - \frac{H}{c} \right)^2} \\
&\quad - \frac{7}{4} \left( \frac{V_1 t}{c} - 2 \frac{H}{c} \right) e^{-\frac{4}{3} \left( \frac{V_1 t}{c} - 2 \frac{H}{c} \right)^2} \\
&\quad + \frac{17}{16} \left( \frac{V_1 t}{c} - 3 \frac{H}{c} \right) e^{-\frac{4}{3} \left( \frac{V_1 t}{c} - 3 \frac{H}{c} \right)^2} \\
&\quad - \frac{23}{64} \left( \frac{V_1 t}{c} - 4 \frac{H}{c} \right) e^{-\frac{4}{3} \left( \frac{V_1 t}{c} - 4 \frac{H}{c} \right)^2} \\
&\quad + \frac{1}{256} \left( \frac{V_1 t}{c} - 5 \frac{H}{c} \right) e^{-\frac{4}{3} \left( \frac{V_1 t}{c} - 5 \frac{H}{c} \right)^2} \\
&\quad + \frac{89}{1024} \left( \frac{V_1 t}{c} - 6 \frac{H}{c} \right) e^{-\frac{4}{3} \left( \frac{V_1 t}{c} - 6 \frac{H}{c} \right)^2} \\
&\quad \left. + \dots \right], \quad \dots \quad (91)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 cU'_{x=0} &= \frac{1}{\sqrt{3}} \left[ 2 \left( \frac{V_1 t}{c} - \frac{1}{4} \frac{H}{c} \right) e^{-\frac{1}{12} \left( \frac{4V_1 t}{c} - \frac{H}{c} \right)^2} \right. \\
 &\quad - \left( \frac{V_1 t}{c} - \frac{3}{4} \frac{H}{c} \right) e^{-\frac{1}{12} \left( \frac{4V_1 t}{c} - \frac{3H}{c} \right)^2} \\
 &\quad + \frac{3}{2} \left( \frac{V_1 t}{c} - \frac{5}{4} \frac{H}{c} \right) e^{-\frac{1}{12} \left( \frac{4V_1 t}{c} - \frac{5H}{c} \right)^2} \\
 &\quad - \frac{1}{4} \left( \frac{V_1 t}{c} - \frac{7}{4} \frac{H}{c} \right) e^{-\frac{1}{12} \left( \frac{4V_1 t}{c} - \frac{7H}{c} \right)^2} \\
 &\quad - \frac{5}{8} \left( \frac{V_1 t}{c} - \frac{9}{4} \frac{H}{c} \right) e^{-\frac{1}{12} \left( \frac{4V_1 t}{c} - \frac{9H}{c} \right)^2} \\
 &\quad + \frac{7}{16} \left( \frac{V_1 t}{c} - \frac{11}{4} \frac{H}{c} \right) e^{-\frac{1}{12} \left( \frac{4V_1 t}{c} - \frac{11H}{c} \right)^2} \\
 &\quad + \frac{3}{32} \left( \frac{V_1 t}{c} - \frac{13}{4} \frac{H}{c} \right) e^{-\frac{1}{12} \left( \frac{4V_1 t}{c} - \frac{13H}{c} \right)^2} \\
 &\quad - \frac{17}{64} \left( \frac{V_1 t}{c} - \frac{15}{4} \frac{H}{c} \right) e^{-\frac{1}{12} \left( \frac{4V_1 t}{c} - \frac{15H}{c} \right)^2} \\
 &\quad + \frac{11}{128} \left( \frac{V_1 t}{c} - \frac{17}{4} \frac{H}{c} \right) e^{-\frac{1}{12} \left( \frac{4V_1 t}{c} - \frac{17H}{c} \right)^2} \\
 &\quad + \frac{23}{256} \left( \frac{V_1 t}{c} - \frac{19}{4} \frac{H}{c} \right) e^{-\frac{1}{12} \left( \frac{4V_1 t}{c} - \frac{19H}{c} \right)^2} \\
 &\quad - \frac{45}{512} \left( \frac{V_1 t}{c} - \frac{21}{4} \frac{H}{c} \right) e^{-\frac{1}{12} \left( \frac{4V_1 t}{c} - \frac{21H}{c} \right)^2} \\
 &\quad - \frac{1}{1024} \left( \frac{V_1 t}{c} - \frac{23}{4} \frac{H}{c} \right) e^{-\frac{1}{12} \left( \frac{4V_1 t}{c} - \frac{23H}{c} \right)^2} \\
 &\quad + \frac{91}{2048} \left( \frac{V_1 t}{c} - \frac{25}{4} \frac{H}{c} \right) e^{-\frac{1}{12} \left( \frac{4V_1 t}{c} - \frac{25H}{c} \right)^2} \\
 &\quad - \frac{89}{4096} \left( \frac{V_1 t}{c} - \frac{27}{4} \frac{H}{c} \right) e^{-\frac{1}{12} \left( \frac{4V_1 t}{c} - \frac{27H}{c} \right)^2} \\
 &\quad \left. + \dots \right], \quad \dots \quad (92) \\
 cV'_{x=0} &= \frac{1}{3} \left[ -2 \left( \frac{V_1 t}{c} - \frac{1}{4} \frac{H}{c} \right) e^{-\frac{1}{12} \left( \frac{4V_1 t}{c} - \frac{H}{c} \right)^2} \right. \\
 &\quad \left. - \left( \frac{V_1 t}{c} - \frac{3}{4} \frac{H}{c} \right) e^{-\frac{1}{12} \left( \frac{4V_1 t}{c} - \frac{3H}{c} \right)^2} \right]
 \end{aligned}$$

$$cU'_{\substack{x=0 \\ y=-H}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \left[ 4 \left( \frac{V_1 t}{c} - \frac{1}{2} \frac{H}{c} \right) e^{-\frac{1}{3} \left( \frac{2V_1 t}{c} - \frac{H}{c} \right)^2} \right. \\ \left. - 3 \left( \frac{V_1 t}{c} - \frac{3}{2} \frac{H}{c} \right) e^{-\frac{1}{3} \left( \frac{2V_1 t}{c} - 3 \frac{H}{c} \right)^2} \right. \\ \left. + \frac{5}{4} \left( \frac{V_1 t}{c} - \frac{5}{2} \frac{H}{c} \right) e^{-\frac{1}{3} \left( \frac{2V_1 t}{c} - 5 \frac{H}{c} \right)^2} \right. \\ \left. - \frac{3}{16} \left( \frac{V_1 t}{c} - \frac{7}{2} \frac{H}{c} \right) e^{-\frac{1}{3} \left( \frac{2V_1 t}{c} - 7 \frac{H}{c} \right)^2} \right. \\ \left. - \frac{11}{64} \left( \frac{V_1 t}{c} - \frac{9}{2} \frac{H}{c} \right) e^{-\frac{1}{3} \left( \frac{2V_1 t}{c} - 9 \frac{H}{c} \right)^2} \right]$$

$$+\frac{45}{256}\left(\frac{V_1t}{c}-\frac{11}{2}\frac{H}{c}\right)e^{-\frac{1}{3}\left(\frac{2V_1t}{c}-11\frac{H}{c}\right)^2} \\ -\frac{91}{1024}\left(\frac{V_1t}{c}-\frac{13}{2}\frac{H}{c}\right)e^{-\frac{1}{3}\left(\frac{2V_1t}{c}-13\frac{H}{c}\right)^2} \\ +\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\Big], \quad \dots\dots(94)$$

$$\begin{aligned}
cV'_{x=0} = & \frac{1}{3} \left[ -2 \left( \frac{V_2 t}{c} - \frac{1}{2} \frac{H}{c} \right) e^{-\frac{1}{3} \left( \frac{2V_1 t}{c} - \frac{H}{c} \right)^2} \right. \\
& - \frac{5}{2} \left( \frac{V_1 t}{c} - \frac{3}{2} \frac{H}{c} \right) e^{-\frac{1}{3} \left( \frac{2V_1 t}{c} - \frac{3H}{c} \right)^2} \\
& + \frac{3}{8} \left( \frac{V_1 t}{c} - \frac{5}{2} \frac{H}{c} \right) e^{-\frac{1}{3} \left( \frac{2V_1 t}{c} - \frac{5H}{c} \right)^2} \\
& + \frac{11}{32} \left( \frac{V_1 t}{c} - \frac{7}{2} \frac{H}{c} \right) e^{-\frac{1}{3} \left( \frac{2V_1 t}{c} - \frac{7H}{c} \right)^2} \\
& - \frac{45}{128} \left( \frac{V_1 t}{c} - \frac{9}{2} \frac{H}{c} \right) e^{-\frac{1}{3} \left( \frac{2V_1 t}{c} - \frac{9H}{c} \right)^2} \\
& + \frac{91}{512} \left( \frac{V_1 t}{c} - \frac{11}{2} \frac{H}{c} \right) e^{-\frac{1}{3} \left( \frac{2V_1 t}{c} - \frac{11H}{c} \right)^2} \\
& - \frac{93}{2048} \left( \frac{V_1 t}{c} - \frac{13}{2} \frac{H}{c} \right) e^{-\frac{1}{3} \left( \frac{2V_1 t}{c} - \frac{13H}{c} \right)^2} \\
& \left. + \dots \right], \quad \dots \quad (95)
\end{aligned}$$

$y < -H$  なる弾性體:—

$$\begin{aligned}
 cU''_{\substack{x=0 \\ y=-H}} &= 0, \\
 cV''_{\substack{x=0 \\ y=-H}} &= \frac{1}{3} \left[ -2 \left( \frac{V_1 t}{c} - \frac{1}{2} \frac{H}{c} \right) e^{-\frac{1}{3} \left( \frac{2V_1 t}{c} - \frac{H}{c} \right)^2} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{5}{2} \left( \frac{V_1 t}{c} - \frac{3}{2} \frac{H}{c} \right) e^{-\frac{1}{3} \left( \frac{V_1 t}{c} - 3 \frac{H}{c} \right)^2} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{3}{8} \left( \frac{V_1 t}{c} - \frac{5}{2} \frac{H}{c} \right) e^{-\frac{1}{3} \left( \frac{2V_1 t}{c} - 5 \frac{H}{c} \right)^2} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{11}{32} \left( \frac{V_1 t}{c} - \frac{7}{2} \frac{H}{c} \right) e^{-\frac{1}{3} \left( \frac{2V_1 t}{c} - 7 \frac{H}{c} \right)^2} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{45}{128} \left( \frac{V_1 t}{c} - \frac{9}{2} \frac{H}{c} \right) e^{-\frac{1}{3} \left( \frac{2V_1 t}{c} - 9 \frac{H}{c} \right)^2} \right]
 \end{aligned} \tag{96}$$

これ等求め得た弾性體内の諸點に於ける振動を見るに、中間層の厚さ  $H$  と衝撃波型の入射波の見掛けの長さ  $c$  との大きさの關係即ち  $\frac{H}{c}$  の値の大小によつて、非常に振動状況の違ふ事がわかる。

$\frac{H}{c} = 0$  の場合. (圖 2, 3, 4 參照) 見掛けの波長が中間層の厚さ  $H$  に比較して非常に大きい様な場合には;  $y > 0$  なる弾性體の  $x=0, y=0$  の點の振動軌跡は全く直線的になり, しかもその見掛けの入射角は  $16^\circ$  となつて, 入射角  $30^\circ$  よりは小さくなる. そして,  $U_{\substack{x=0 \\ y=0}}, V_{\substack{x=0 \\ y=0}}$  分變位の時間に對する變化狀態及びその變位量も非常に 2 つ半無限弾性體が  $y=0$  で境された場合と似て来る. 振動軌跡の最大移動量の入射波による最大移動量に對する比は 1.80 となるがこの値は全く前述の場合と同じになる. 勿論入射波との押し引きの關係は成立する. (第 2 圖參照) 尚  $x$ -方向の變位  $U$  は  $\frac{H}{c}$  の値には無關係に (88) で表されてゐる事を注意しておく. 中間層の  $x=0, y=0$  の點では  $U'_{\substack{x=0 \\ y=0}}$ , 及び  $V'_{\substack{x=0 \\ y=0}}$  はその變化狀態は第 3 圖の上圖に示してあるが  $x$ -方向の變位  $U_{\substack{x=0 \\ y=0}}$  が  $y > 0$  の弾性體の  $x=0, y=0$  に於けるそれよりも遙かに小さくなつてゐる. 勿論  $V'$  は  $V$  と同じ變化をする故結局振動軌跡はその初動の方向は  $x$ -軸と  $50^\circ$  の角をなし, そして直線的の變動をする. 押し引きの關係は成立する. (第 3 圖參照) 第 4 圖には  $x=0, y=-H$  なる點の變位  $u'', v''$  とその振動軌跡を示してあるが, この場合は式 (96) でもわかる様に,  $x$ -方向には變動なく, たゞ上下運動のみ存在する事となる. 従つて  $x$ -軸と初動のなす角は  $90^\circ$  となる. 押し引きの關係は成立つ. 以上で  $\frac{H}{c} = 0$  の場合はとめておくが, 中間層があつてもこの時には, 割合に振動は簡単になる.

次に  $\frac{H}{c} = \frac{1}{3}$  の場合. (圖 5, 6, 7, 8, 9 圖参照) 即ち見掛けの入射波の長さが, 中間層の厚さの 3 倍になつてゐる場合. この場合には全體として, 少多少中間層での反射屈折の影響が現はれて來る事がわかる.  $x > 0$  なる弾性體の  $x=0, y=0$  點では, 式 (89) でもわかる様に,  $V$  の方が多少  $U$  より位相の後れが中間層での反射屈折の結果として多少現はれ, しかもその最大變位が  $\frac{H}{c} = 0$  の場合に比して多少小さくなつ

てゐる。従つて、振動軌跡は多少複雑化して來るが、その初動方向が  $x$ -軸となす角即ちこの場合は見掛けの入射角は  $\frac{H}{c}=0$  の場合と同じになる事は當然である。押しありの關係は成立する。

中間層の  $x=0, y=0$  の點では、 $x$ -方向の變位が  $y$ -方向のものよりおくれる事は第 6 圖の上圖を見ればわかる。従つて、振動軌跡は圖の様になり、しかも第 5 圖のそれとは可なり様子がちがつてゐる。初動の  $x$ -軸となす角は  $90^\circ$  に近づいてゐるが  $\frac{H}{c}=0$  の時より大きくなつてゐる。 $U'$  の最大變位量が  $\frac{H}{c}=0$  の場合より多少大きい。

次に中間層の中點  $x=0, y=-\frac{H}{2}$  の點では  $U'$  及び  $V'$  は第 7 圖で見る様な變化をなし、振動軌跡がその初動に於て、 $x$  軸となす角は  $45^\circ$  である。次に矢張り中間層で  $x=0, y=-H$  の點では變位は第 8 圖で見る様な變化をし、その初動が  $x$ -軸となす角は非常に小さくて  $0^\circ$  に近いが、相のよくわかる所ではかると  $25^\circ$  位になる。

$y < -H$  なる彈性體の  $x=0, y=-H$  の點の様子は第 9 圖が示してゐる。振動軌跡は  $x$ -軸に垂直である。

第 5, 6, 7, 8, 9 圖を比較すると、その動きはじめの點が  $\frac{H}{c}=0$  の場合に比して  $y=0$  の面に遠い程おくれてゐるのが見られる。押しありの關係は矢張りなりたつ。

次に  $\frac{H}{c}=1$  の場合 (圖 10, 11, 12, 13, 14 參照)

即ち波の長さが中間層の厚さに等しい波が入射する場合、益々中間層の影響が各點の振動狀態にあらはれて來るのが見られる。

$y>0$  なる彈性體の  $x=0, y=0$  なる點に於ける  $U$  及  $V$  の時間に對する變化狀態即ち  $x$ ,  $y$ -方向の振動は、第 10 圖の上圖に示してあるが、 $y$ -方向の振動が  $\frac{H}{c}=0$  及び  $\frac{H}{c}=\frac{1}{3}$  の場合に比して著しく出て来る。そして振動軌跡は同じ圖の下に示してあるが、 $\frac{H}{c}=0$  及び  $\frac{H}{c}=\frac{1}{3}$  に比して複雑となり、 $x$ -方向の變位がなくなれば  $y$ -方向のみの振動が續いて、終つて済む。この時中間層の  $x=0, y=0$  の點では、 $x$ -方向の振動が  $y$ -方向のそれに比して大體  $\frac{c}{V_1}$  だけおくれてゐる。従つて振動軌跡は第 11 圖で見る様にその初動が  $x$ -軸となす角は完全に  $90^\circ$  になつてしまふ。 $(\frac{H}{c}=\frac{1}{3}$  の時にも  $90^\circ$  であつたが、 $\frac{H}{c}$  が小さくなれば、 $54^\circ$  に近づく。)

第 10 圖で見る  $u$  と、第 11 圖の  $u'$  とは  $\frac{c}{V_1}$  位おくれてゐるので、 $y=0$  の面では  $x$  の方向に中間層と  $y>0$  の彈性體の間にすべり現象が現はれる。第 12 圖には

$y=-\frac{H}{2}$ ,  $x=0$  の點の振動を示してある。振動状況が  $y=0$ ,  $x=0$  の點とは可なりちがつてゐるのが見られる。

第 13 圖は、中間層の  $x=0$ ,  $y=-H$  なる點の様子を示してゐるが、 $x$ -軸方向の振動が非常に卓越して来る。 $y < -H$  の弾性體の  $x=0$ ,  $y=-H$  點の振動は第 14 圖に示してあるが、勿論  $y$ -方向のみの振動が存在してゐる。 $\frac{H}{c}=0$ ,  $\frac{H}{c}=\frac{1}{3}$  の場合に比して、その最大移動量が小さい事がわかる。そして數回の振動を繰り返してゐる。

次に  $\frac{H}{c}=3$  の場合:——(圖 15, 16, 17, 18, 19 參照)

即ち中間層の厚さより  $\frac{1}{3}$  だけ長さの短い衝撃波型の波が入射した時には、 $y>0$  なる弾性體の  $x=0$ ,  $y=0$  點の振動は、第 15 圖が示してゐる。 $y$ -方向の變位はこの場合初めより  $\frac{2.5c}{V_1}$  位の間では全然中間層での反射波による影響が出て來ない。従つて、振動軌跡はこの圖では直線的となる。時間の経過と共に  $y$ -方向の振動のみとなる事は  $\frac{H}{c}=1$  の場合と同じである。

第 16 圖には、中間層の  $x=0$ ,  $y=0$  點の振動を示してある。 $x$ -,  $y$ -方向の振動は複雑化して来る。そして、 $y$  方向の變位に比して、 $x$ -方向の變位は  $\frac{3c}{V_1}$  以上もおくれて始まつてゐる。従つて、全く  $\frac{H}{c}=1$  の時と同じく中間層と  $y>0$  なる弾性體の間には相互に連り運動がある事がわかる。始めの間では第 16 圖の下圖の振動軌跡で見る様に、 $y$ -方向の振動のみが存在し、時間の経過と共に圖で見る様な振動軌跡を畫く。

第 17 圖は中間層の  $x=0$ ,  $y=-\frac{H}{2}$  なる點の  $x$ -,  $y$ - 分振動を示めし下圖にはその振動軌跡を示してある。振動は  $\frac{H}{c}=1$  の場合に比して複雑である。勿論押し引きの關係は成立する。

中間層の  $x=0$ ,  $y=-H$  の點に於ける  $x$ ,  $y$  方向の分振動及び振動軌跡は第 18 圖でわかる。

$y < -H$  なる弾性體の  $x=0$ ,  $y=-H$  點での振動は、第 19 圖に示してある。勿論  $x$ -方向の變位はない。勿論  $y=-H$  の面では相互に上の運動がある事が見られる。押し引きの關係は成立してゐる。

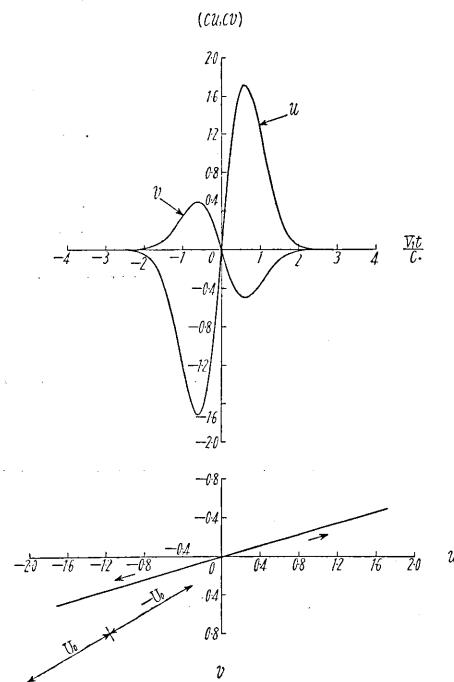
以上  $\frac{H}{c}=0$ ,  $\frac{H}{c}=\frac{1}{3}$ ,  $\frac{H}{c}=1$ ,  $\frac{H}{c}=3$  の場合に就て弾性體中の振動を詳しく研究したが、 $\frac{H}{c}$  の値によつて、振動状況が非常に違ふ事は注意すべき事であつて、ことに適當な  $\frac{H}{c}$  の時には、弾性體中の 1 點で  $x$ -,  $y$ -方向の分變位の時間的變化を見てゐると、入射波が衝撃波である時は各點は振動周期の異なる運動（周期と云ふ言葉はよくな

い)をするのが見える。地震波が衝撃波の色々の集まりであると考へる時地表或は地中で観測する時の各點の見掛けの振動周期は當然複雑なものとなり又計測する點によつても異なる事が當然の事の様に考へられる。

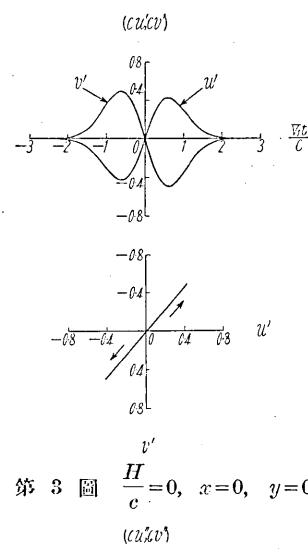
振幅の一定な調和波が入射した場合に各點での振動状況は矢張り  $\frac{H}{c}$  の函数となるが、その見掛けの周期の相違などは起らない。

本計算は今後行ふべき衝撃波型の入射波による弾性體（殊に自由表面や不連續面などを色々の弾性力学的の條件のもとにもつてゐる弾性體）中の振動状況を明かにせんとする試みの1つである事を附加してお

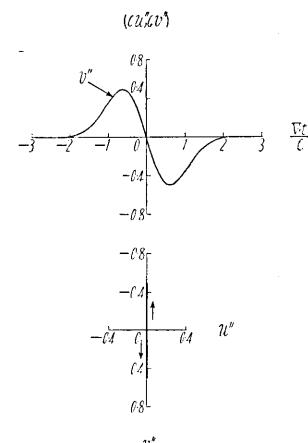
く。



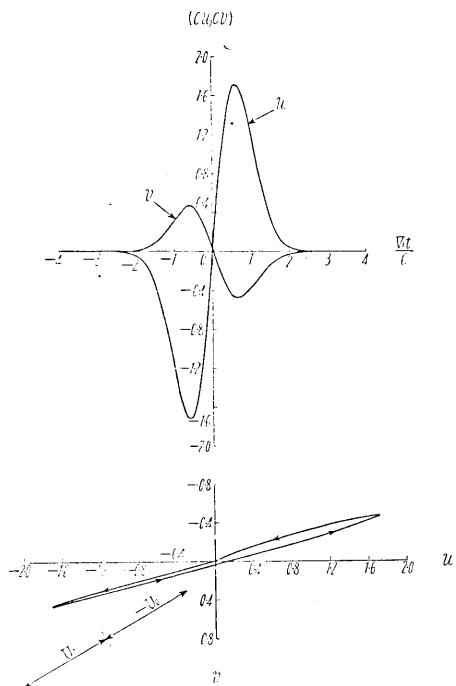
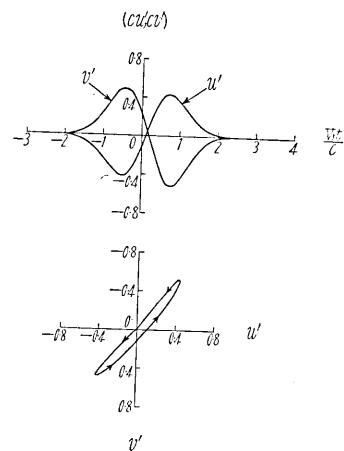
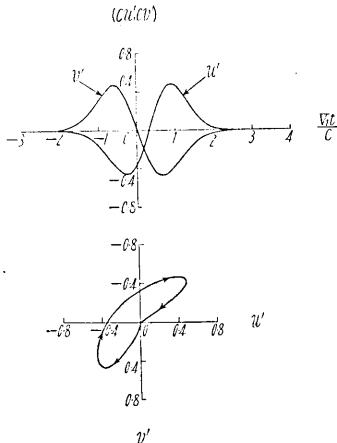
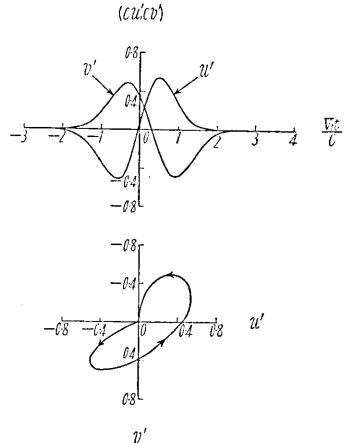
第2圖  $\frac{H}{c}=0$ ,  $x=0$ ,  $y=0$

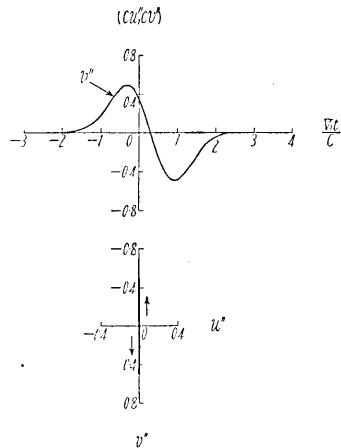
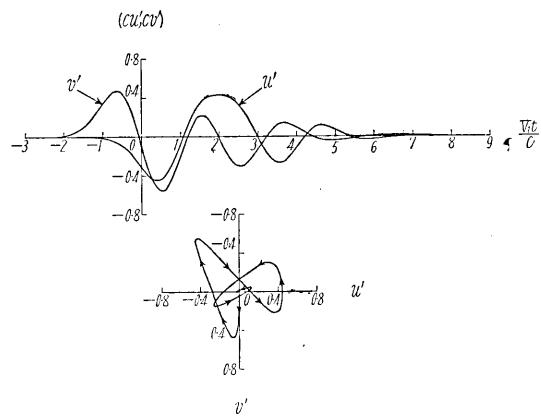
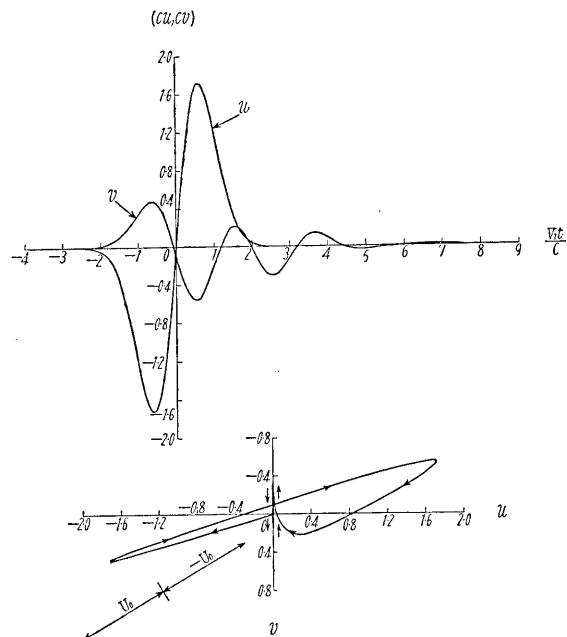


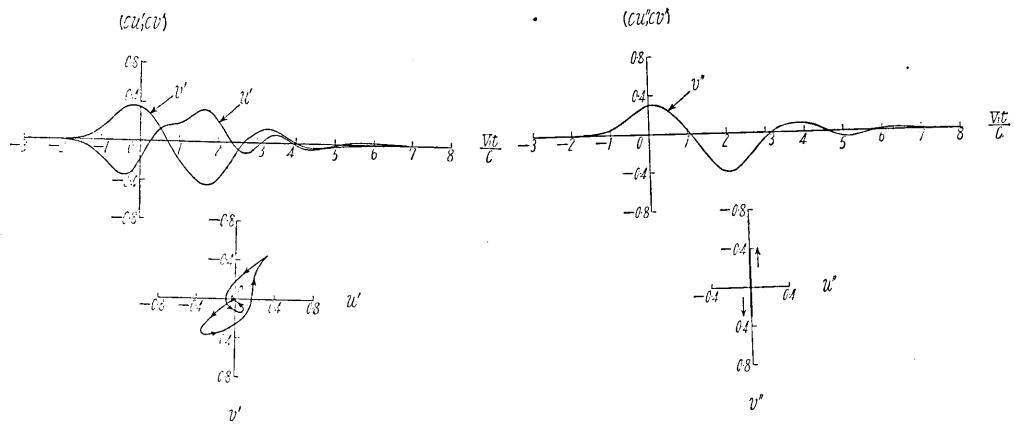
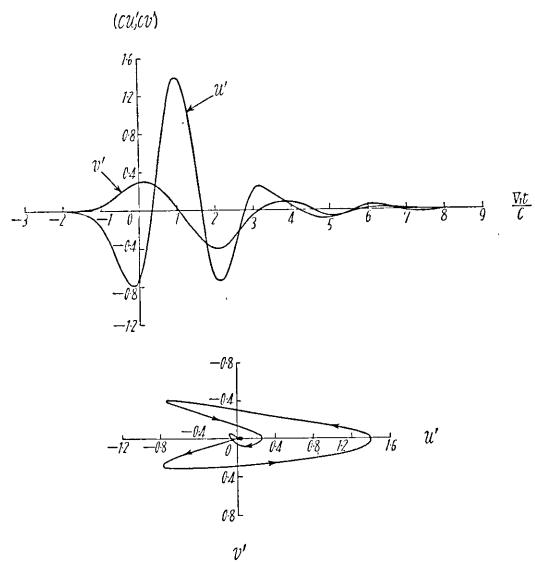
第3圖  $\frac{H}{c}=0$ ,  $x=0$ ,  $y=0$

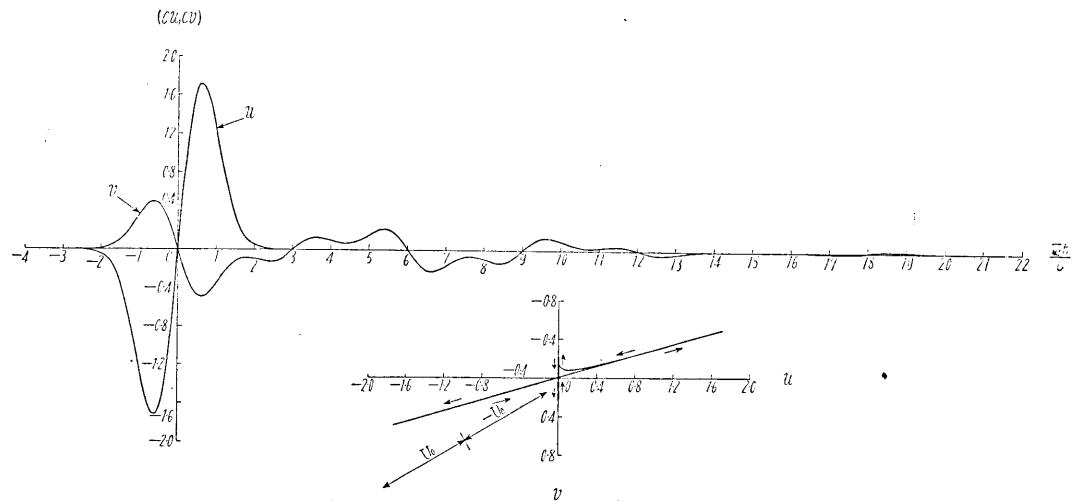
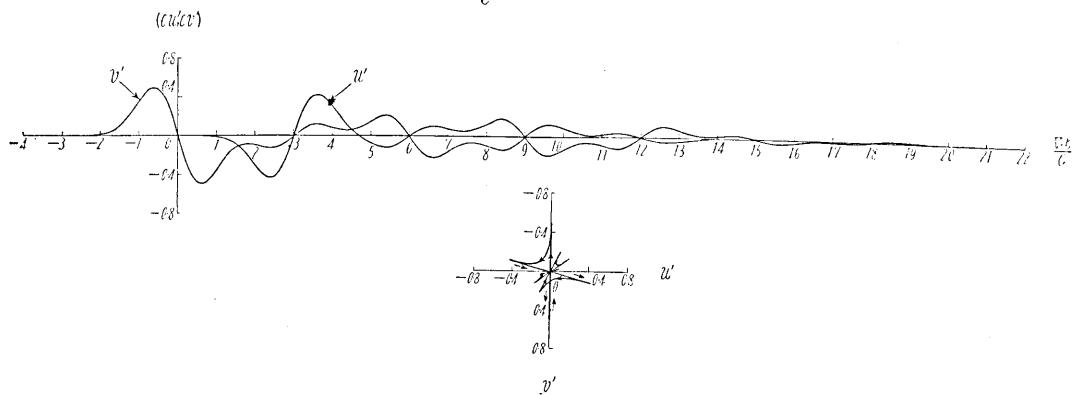
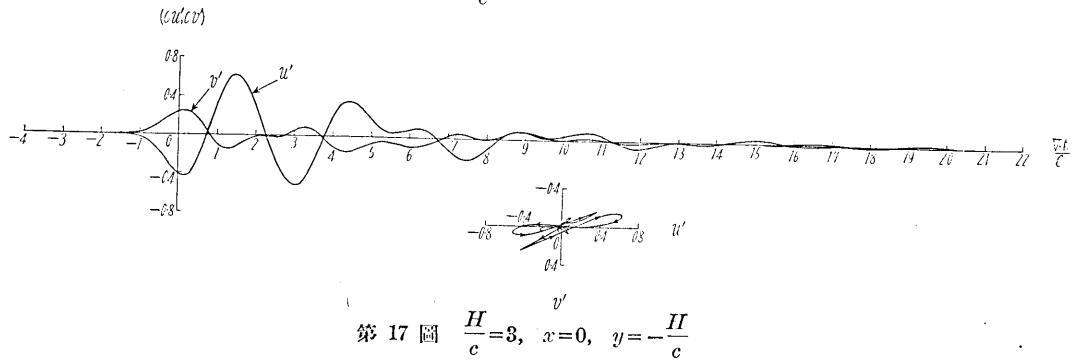


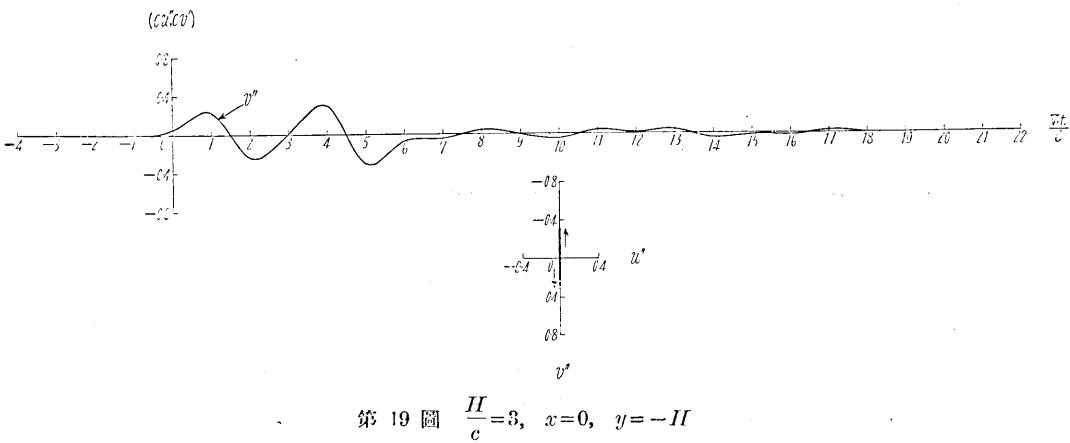
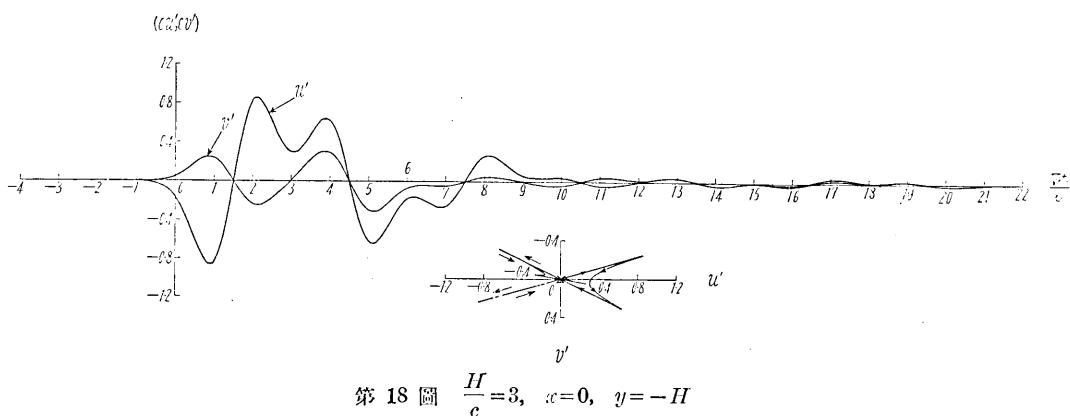
第4圖  $\frac{H}{c}=0$ ,  $x=0$ ,  $y=-H$

第 5 圖  $\frac{H}{c} = \frac{1}{3}$ ,  $x=0$ ,  $y=0$ 第 7 圖  $\frac{H}{c} = \frac{1}{3}$ ,  $x=0$ ,  $y=-\frac{H}{2}$ 第 5 圖  $\frac{H}{c} = \frac{1}{3}$ ,  $x=0$ ,  $y=0$ 第 6 圖  $\frac{H}{c} = \frac{1}{3}$ ,  $y=0$ ,  $x=0$ 第 8 圖  $\frac{H}{c} = \frac{1}{3}$ ,  $x=0$ ,  $y=-H$

第 9 圖  $\frac{H}{c} = \frac{1}{3}$ ,  $y = -H$ ,  $x = 0$ 第 11 圖  $\frac{H}{c} = 1$ ,  $y = 0$ ,  $x = 0$ 第 10 圖  $\frac{H}{c} = 1$ ,  $x = 0$ ,  $y = 0$

第 12 図  $\frac{H}{c}=1, x=0, y=-\frac{H}{2}$ 第 14 図  $\frac{H}{c}=1, x=0, y=-H$ 第 13 図  $\frac{H}{c}=1, y=-H, x=0$

第 15 圖  $\frac{H}{c} = 3, x=0, y=0$ 第 16 圖  $\frac{H}{c} = 3, x=0, y=0$ 第 17 圖  $\frac{H}{c} = 3, x=0, y = -\frac{H}{c}$




---

25. On the Effect of Discontinuity Surfaces upon  
the Propagation of Elastic Waves. (V)

By Genrokuro NISHIMURA and Kiyoshi KANAI,

Earthquake Research Institute.

The case is studied in which an elastic solid has an intermediate elastic layer and these solids slide over each other with slide frictions at the boundaries. The incident dilatational wave is of a shock wave type. The figures contained in this paper show the results when these solids slide over without frictions at the boundaries.

---