26. 重力の働ける半無限弾性體の內部に存在する空窩の內面に作用する力によつて起される變形及び應力問題 (其の 1)

地震研究所　西 村 源 六 郎

(昭和 9 年 5 月 15 日發表—昭和 9 年 6 月 20 日受理)

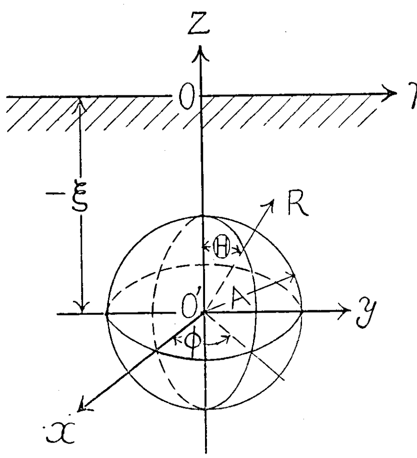
1. 地殼內部に空窩がある場合に，この空窩內の壓力が何かの原因で增加した場合地殼內部或はその表面ではどの樣な變形が起るか，又地殼內部の應力にはどの樣な變化を生じ，どの樣な所から破損が起り始めるか等の研究は地震現象殊に地震の原因等を研究する上に於て大切なものであると思ふ．妹澤教授[1] は半無限彈性體內に存する多重原の力核による表面の變形問題を理論的に研究された．著者の研究は全く同教授の論文に負ふ所が多い．重力の働いてゐる半無限彈性體內に球狀をした空窩がある場合，これに或る作用で力が加へられた場合，その附近での變形或は應力狀態を研究し，又これに釣合ふ爲めにはその彈性體の表面には如何なる變形が起され，又應力分布はどの樣になるかを研究した．研究方法は新しいとは云へないかも知れないが，理論的には可なり解析的であつて，殊に，空窩內面に於ける條件を完全に彈性力學的に滿足さす事の出來たのは，彈性理論的に見ても面白い事と思つてゐる．

この研究報告は，豫備的なものであつて，次にはもつと一般的な問題にして研究して行く考である．卽ち本論文では，空窩內面に作用する壓力分布が方位的には一樣で變化のない場合を研究してあるが，次には，方位的にも變化のある場合を發表する考である．

第　1　章

2. さて密度 ρ, 重力による加速度 g なる地殼と考へられる半無限彈性體上に原點 O を有し，上向きが正である軸 Oz を圖の樣に設ける．そして r は圓壔座標 (r, z) に於ける半徑方向の坐標とする．表面 $z=0$ より $z=-\xi$ なる所に中心 O' を有する半徑 $R=A$ なる空窩を考へる．この $R=A$ なる球面に壓力 P が作用するとする．

1) 妹澤克惟　地震研究所彙報 9 (1931), 398.



第　1　圖

P は勿論圖で見る樣に球座標 (R, θ, ϕ) による時 θ の任意の函數であつて $P=f(\theta)$ と考へる．勿論 R— は球座標による半徑方向，θ は $O'z$ を軸とする時これと $\theta=\theta$ なる圓錐のなす頂角卽ち餘緯角と考へる．

先づ重力が作用してゐる爲，表面 $z=O$ は彈性力學的に自由面であるが，彈性體內部に入るに從つて重力による應力は次第に大となる理である．これを O' 點に源點を有する座標 (θ, R) によつて表はしてみると $-R$ 方向，θ 方向の變位 u v，及び應力の分力 $\widehat{RR}$, $\widehat{\theta\theta}$, $\widehat{\phi\phi}$ 及び $\widehat{R\theta}$ は次式で示される．

$$u=-\frac{\rho g\xi}{3(\lambda+2\mu)}P_0(\cos\theta)+\left[\frac{\rho g\xi^2}{2(\lambda+2\mu)}+\frac{3}{10}\frac{\rho gR^2}{(\lambda+2\mu)}\right]P_1(\cos\theta)$$
$$-\frac{2}{3}\frac{\rho g\xi R}{(\lambda+2\mu)}P_2(\cos\theta)+\frac{1}{5}\frac{\rho gR^2}{(\lambda+2\mu)}P_3(\cos\theta),\ \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

$$v=\left[\frac{\rho g\xi^2}{2(\lambda+2\mu)}+\frac{1}{10}\frac{\rho gR^2}{(\lambda+2\mu)}\right]\frac{\partial P_1(\cos\theta)}{\partial\theta}$$
$$-\frac{\rho g\xi R}{3(\lambda+2\mu)}\frac{\partial P_2(\cos\theta)}{\partial\theta}+\frac{\rho gR^2}{15(\lambda+2\mu)}\frac{\partial P_3(\cos\theta)}{\partial\theta},\ \ldots\ldots\ldots(2)$$

$$\widehat{RR}=-\frac{(3\lambda+2\mu)}{3(\lambda+2\mu)}\rho g\xi P_0(\cos\theta)+\frac{(5\lambda+6\mu)}{5(\lambda+2\mu)}\rho gRP_1(\cos\theta)$$
$$-\frac{4}{3}\frac{\mu\rho g\xi}{(\lambda+2\mu)}P_2(\cos\theta)+\frac{4}{5}\frac{\mu\rho gR}{(\lambda+2\mu)}P_3(\cos\theta),\ \ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

$$\widehat{\theta\theta}=-\frac{(3\lambda+2\mu)}{3(\lambda+2\mu)}\rho g\xi P_0(\cos\theta)+\frac{(5\lambda+3\mu)}{5(\lambda+2\mu)}\rho gRP_1(\cos\theta)$$
$$-\frac{4}{3}\frac{\mu\rho g\xi}{(\lambda+2\mu)}P_2(\cos\theta)+\frac{2}{5}\frac{\mu\rho gR}{(\lambda+2\mu)}P_3(\cos\theta)$$
$$+\frac{1}{5}\frac{\mu\rho gR}{(\lambda+2\mu)}\frac{\partial^2P_1(\cos\theta)}{\partial\theta^2}-\frac{2}{3}\frac{\mu\rho g\xi}{(\lambda+2\mu)}\frac{\partial^2P_2(\cos\theta)}{\partial\theta^2}$$
$$+\frac{2}{15}\frac{\mu\rho gR}{(\lambda+2\mu)}\frac{\partial^2P_3(\cos\theta)}{\partial\theta^2},\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4)$$

$$\widehat{\phi\phi}=-\frac{1}{3}\frac{(3\lambda+2\mu)}{(\lambda+2\mu)}\rho g\xi P_0(\cos\theta)+\frac{1}{5}\frac{(5\lambda+3\mu)}{(\lambda+2\mu)}\rho gRP_1(\cos\theta)$$
$$-\frac{4}{3}\frac{\mu\rho g\xi}{(\lambda+2\mu)}P_2(\cos\theta)+\frac{2}{5}\frac{\mu\rho gR}{(\lambda+2\mu)}P_3(\cos\theta)$$
$$+\frac{1}{5}\frac{\mu\rho gR}{(\lambda+2\mu)}\cot\theta\frac{\partial P_1(\cos\theta)}{\partial\theta}-\frac{2}{3}\frac{\mu\rho g\xi}{(\lambda+2\mu)}\cot\theta\frac{\partial P_2(\cos\theta)}{\partial\theta}$$
$$+\frac{2}{15}\frac{\mu\rho gR}{(\lambda+2\mu)}\cot\theta\frac{\partial P_3(\cos\theta)}{\partial\theta},\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

$$\widehat{R\theta}=\frac{2}{5}\frac{\mu\rho gR}{(\lambda+2\mu)}\frac{\partial P_1(\cos\theta)}{\partial\theta}-\frac{2}{3}\frac{\mu\rho g\xi}{(\lambda+2\mu)}\frac{\partial P_2(\cos\theta)}{\partial\theta}$$
$$+\frac{4}{15}\frac{\mu\rho gR}{(\lambda+2\mu)}\frac{\partial P_3(\cos\theta)}{\partial\theta}.\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(6)$$

(1)～(6) に於て, λ, μ は ラーメ氏の彈性係數である. 勿論これ等の式は

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial\widehat{RR}}{\partial R}+\frac{1}{R}\frac{\partial\widehat{R\theta}}{\partial\theta}+\frac{1}{R}\left\{2\widehat{RR}-\widehat{\theta\theta}-\widehat{\phi\phi}+\widehat{R\theta}\cot\theta\right\}=\rho g\cos\theta,\\&\frac{\partial\widehat{R\theta}}{\partial R}+\frac{1}{R}\frac{\partial\widehat{\theta\theta}}{\partial\theta}+\frac{1}{R}\left\{(\widehat{\theta\theta}-\widehat{\phi\phi})\cot\theta+3\widehat{R\theta}\right\}=-g\rho\sin\theta\end{aligned}\right\}\quad\cdots(7)$$

なる彈性方程式を滿足するものであり, 且つ $z=O$ は自由面であると云ふ條件を滿足するものである.

次に此れ等 (1)～(6) なる應力の作用してゐる時空窩內面 $R=A$ に壓力 P が作用する場合の應力問題卽ち重力の作用せる場合壓力の作用によるこの彈性體內殊に空窩附近の應力周題を先づ解決しなければならない. それには先づこれ等の條件を滿足さすに必要な彈性體の釣合方程式 (7) の解を求めなければならぬ.

さて一般に $\widehat{RR}$, $\widehat{\theta\theta}$, $\widehat{\phi\phi}$, $\widehat{R\theta}$ なる應力分力と變位 u, v とは次の關係で結ばれてゐる.

$$\left.\begin{aligned}\widehat{RR}&=\frac{\lambda}{R^2\sin\theta}\left\{\frac{\partial}{\partial R}(R^2u\sin\theta)+\frac{\partial}{\partial\theta}(Rv\sin\theta)\right\}+2\mu\frac{\partial u}{\partial R},\\\widehat{\theta\theta}&=\frac{\lambda}{R^2\sin\theta}\left\{\frac{\partial}{\partial R}(R^2u\sin\theta)+\frac{\partial}{\partial\theta}(Rv\sin\theta)\right\}+2\mu\left\{\frac{1}{R}\frac{\partial v}{\partial\theta}+\frac{u}{R}\right\},\\\widehat{\phi\phi}&=\frac{\lambda}{R^2\sin\theta}\left\{\frac{\partial}{\partial R}(R^2u\sin\theta)+\frac{\partial}{\partial\theta}(Rv\sin\theta)\right\}+2\mu\left\{\frac{v}{R}\cot\theta+\frac{u}{R}\right\},\\\widehat{R\theta}&=\mu\left\{\frac{\partial v}{\partial R}-\frac{v}{R}+\frac{1}{R}\frac{\partial u}{\partial\theta}\right\}.\end{aligned}\right\}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots(8$$

この關係を (7) に代入する時，方程式は

$$
\left.\begin{aligned}
&(\lambda+2\mu)\frac{\partial\varDelta}{\partial R}-\frac{2\mu}{R}\frac{\partial\varpi}{\partial\theta}-\frac{2\mu}{R}\varpi\cot\theta=\rho g\cos\theta,\\
&(\lambda+2\mu)\frac{1}{R}\frac{\partial\varDelta}{\partial\theta}+2\mu\frac{\partial\varpi}{\partial R}+2\mu\frac{\partial\varpi}{R}=-\rho g\sin\theta.
\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(9)
$$

但し (9) に於て，

$$
\left.\begin{aligned}
&\varDelta=\frac{1}{R^2\sin\theta}\left\{\frac{\partial}{\partial R}(R^2u\sin\theta)+\frac{\partial}{\partial\theta}(Rv\sin\theta)\right\},\\
&2\varpi=\frac{\partial v}{\partial R}+\frac{v}{R}-\frac{1}{R}\frac{\partial u}{\partial\theta}.
\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(10)
$$

(9) を滿足する $\varDelta$ 及び 2ϖ の特解を

$$
\left.\begin{aligned}
&\varDelta=\frac{\rho gR}{(\lambda+2\mu)}P_1(\cos\theta),\\
&2\varpi=O.
\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(11)
$$

(9) の補解として必要なものを求めてみると，

$$
\left.\begin{aligned}
\varDelta=&A_0P_0(\cos\theta)+\frac{A_1'}{R^2}P_1(\cos\theta)+\frac{A_2'}{R^3}P_2(\cos\theta)\\
&+\frac{A_3'}{R^2}P_3(\cos\theta)+\frac{D_n}{R^{n+1}}P_n(\cos\theta)\\
2\varpi=&\frac{(\lambda+2\mu)}{\mu}\frac{A_1'}{R^2}\frac{\partial P_1(\cos\theta)}{\partial\theta}+\frac{(\lambda+2\mu)}{2\mu}\frac{A_2'}{R^3}\frac{\partial P_2(\cos\theta)}{\partial\theta}\\
&+\frac{(\lambda+2\mu)}{3\mu}\frac{A_3'}{R^4}\frac{\partial P_3(\cos\theta)}{\partial\theta}+\frac{(\lambda+2\mu)}{n\mu}\frac{D_n}{R^{n+1}}\frac{\partial P_n(\cos\theta)}{\partial\theta}.
\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(12)
$$

但し D_n は任意の常數であつて上式に於ける n は $1,2,3,\cdots\cdots$ なる正の整數であり，又 A_0, A_1' 及 A_2', A_3' も任意の常數である．

さて R^2u 及び $Rv\sin\theta$ に關する微分方程式として，

$$
\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial^2(R^2u)}{\partial R^2}+\frac{1}{R^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left\{\sin\theta\frac{\partial(R^2u)}{\partial\theta}\right\}=\frac{\partial}{\partial R}(R^2\varDelta)-\frac{2R}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\varpi),\\
&\frac{\partial}{\partial R}\left\{R^2\frac{\partial(Rv\sin\theta)}{\partial R}\right\}+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left\{\sin\theta\frac{\partial(Rv\sin\theta)}{\partial\theta}\right\}+2\cot\theta\frac{\partial(R^2u)}{\partial R}\\
&\qquad\qquad=\frac{R^2}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin^2\theta\varDelta)+2\sin\theta\frac{\partial}{\partial R}(R^3\varpi)
\end{aligned}\right\}
$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(13)$$

なる關係式を (10) から求める事が出來る，こゝに於て (11) を (13) に代入する時 R^2u 及 $Rv\sin\theta$ に就て (13) の特解を求める事が出來る．それは

$$\left.\begin{aligned} R^2u &= \frac{3}{10}\frac{\rho g R^4}{(\lambda+2\mu)}P_1(\cos\theta)+\frac{1}{5}\frac{\rho g R^4}{(\lambda+2\mu)}P_3(\cos\theta), \\ Rv\sin\theta &= \frac{1}{10}\frac{\rho g R^3}{(\lambda+2\mu)}\sin\theta\frac{\partial P_1(\cos\theta)}{\partial\theta}+\frac{1}{15}\frac{\rho g R^3}{(\lambda+2\mu)}\sin\theta\frac{\partial P_3(\cos\theta)}{\partial\theta}. \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots(14)$$

次に (12) な關係を用ひて，(13) より

$$\left.\begin{aligned} R^2u &= \frac{1}{3}A_0R^3P_0(\cos\theta)-\frac{(\lambda+2\mu)}{\mu}A_1'RP_1(\cos\theta) \\ &\quad -\frac{(3\lambda+5\mu)}{6\mu}A_2'P_2(\cos\theta)-\frac{(2\lambda+3\mu)}{5\mu}\frac{A_3'}{R}P_3(\cos\theta) \\ &\quad -D_n\frac{\{(n+1)\lambda+(n+3)\mu\}}{2(2n-1)\mu}\frac{1}{R^{n-2}}P_n(\cos\theta), \\ Rv\sin\theta &= -\frac{(\lambda+3\mu)}{2\mu}A_1'\sin\theta\frac{\partial P_1(\cos\theta)}{\partial\theta} \\ &\quad -\frac{A_2'}{6R}\sin\theta\frac{\partial P_2(\cos\theta)}{\partial\theta}+\frac{(\lambda-\mu)}{30\mu}\frac{A_3'}{R^2}\sin\theta\frac{\partial P_3(\cos\theta)}{\partial\theta} \\ &\quad -\frac{\{(2-n)\lambda+(4-n)\mu\}}{2(2n-1)n\mu}\frac{D_n}{R^{n-1}}\frac{\partial P_n(\cos\theta)}{\partial\theta}. \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots(15)$$

次に (13) の補解として必要なものを出してみると，

$$\left.\begin{aligned} R^2u &= -C_0'P_0(\cos\theta)+\left[C_1R^2-\frac{2}{R}C_1'\right]P_1(\cos\theta) \\ &\quad +\left[2R^3C_2-\frac{3}{R^2}C_2'\right]P_2(\cos\theta)-\frac{3}{R^3}C_3'P_3(\cos\theta) \\ &\quad -E_n\frac{(n+1)}{R^n}P_n(\cos\theta), \\ Rv\sin\theta &= \left[C_1R+\frac{C_1'}{R^2}\right]\sin\theta\frac{\partial P_1(\cos\theta)}{\partial\theta} \\ &\quad +\left[C_2R^2+\frac{C_2'}{R^3}\right]\sin\theta\frac{\partial P_2(\cos\theta)}{\partial\theta}+\frac{C_3'}{R^4}\sin\theta\frac{\partial P_3(\cos\theta)}{\partial\theta} \\ &\quad +\frac{1}{R^{n+1}}E_n\sin\theta\frac{\partial P_n(\cos\theta)}{\partial\theta}. \end{aligned}\right\} \quad \cdots(16)$$

但し (16) に於て，C_0', C_1, C_1', C_2, C_2', C_3' 及び，E_n は任意の常數であつて，n は

0, 1, 2, 3 ・・・等の正の整數を表はしてゐる.

次に此れ等 (11), (12), (14), (15), (16) を用ひて, 應力分力を求めてみると,

$$\widehat{RR}=\left[\left(\lambda+\frac{2\mu}{3}\right)A_0+\frac{4\mu}{R^3}C_0'\right]P_0(\cos\theta)$$
$$+\left[\frac{(5\lambda+6\mu)}{5(\lambda+2\mu)}\rho gR+\frac{(3\lambda+4\mu)}{R^2}A_1'+\frac{12\mu}{R^4}C_1'\right]P_1(\cos\theta)$$
$$+\left[\frac{(9\lambda+10\mu)}{3R^3}A_2'+4\mu C_2+\frac{24\mu}{R^5}C_2'\right]P_2(\cos\theta)$$
$$+\left[\frac{4\mu}{5(\lambda+2\mu)}\rho gR+\frac{(17\lambda+18\mu)}{5R^4}A_3'+\frac{40\mu}{R^6}C_3'\right]P_3(\cos\theta)$$
$$+\frac{\{(n^2+3n-1)\lambda+n(n+3)\mu\}}{(2n-1)}\frac{D_n}{R^{n+1}}P_n(\cos\theta)$$
$$+\frac{2(n+1)(n+2)\mu}{R^{n+3}}E_nP_n(\cos\theta),$$

$$\widehat{\theta\theta}=\left[\frac{(3\lambda+2\mu)}{3}A_0-\frac{2\mu}{R^3}C_0'\right]P_0(\cos\theta)$$
$$+\left[\frac{(5\lambda+3\mu)}{5(\lambda+2\mu)}\rho gR-\frac{(\lambda+4\mu)}{R^2}A_1'+\frac{2\mu}{R}C_1-\frac{4\mu}{R^4}C_1'\right]P_1(\cos\theta)$$
$$+\left[-\frac{5}{3}\frac{\mu}{R^3}A_2'+4\mu C_2-\frac{6\mu}{R^5}C_2'\right]P_2(\cos\theta)$$
$$+\left[\frac{2\mu}{5(\lambda+2\mu)}\rho gR+\frac{(\lambda-6\mu)}{5R^4}A_3'-\frac{8\mu}{R^6}C_3'\right]P_3(\cos\theta)$$
$$+\left[\frac{\mu}{5(\lambda+2\mu)}\rho gR-\frac{(\lambda+3\mu)}{R^2}A_1'+\frac{2\mu}{R}C_1+\frac{2\mu}{R^4}C_1'\right]\frac{\partial^2P_1(\cos\theta)}{\partial\theta^2}$$
$$+\left[-\frac{\mu}{3}\frac{A_2'}{R^2}+2\mu C_2+\frac{2\mu}{R^5}C_2'\right]\frac{\partial^2P_2(\cos\theta)}{\partial\theta^2}$$
$$+\left[\frac{2\mu}{15(\lambda+2\mu)}\rho gR+\frac{(\lambda-\mu)}{15R^4}A_3'+\frac{2\mu}{R^6}C_3'\right]\frac{\partial^2P_3(\cos\theta)}{\partial\theta^2}$$
$$+\left[\frac{\{(n-2)\lambda-(n+3)\mu\}}{(2n-1)}\frac{D_n}{R^{n+1}}-\frac{2(n+1)\mu}{R^{n+3}}E_n\right]P_n(\cos\theta)$$
$$+\left[\frac{\{(n-2)\lambda+(n-4)\mu\}}{(2n-1)n}\frac{D_n}{R^{n+1}}+\frac{2\mu}{R^{n+3}}E_n\right]\frac{\partial^2P_n(\cos\theta)}{\partial\theta^2},.$$

$$\widehat{\phi\phi}=\left[\frac{(3\lambda+2\mu)}{3}A_0-\frac{2\mu}{R^3}C_0'\right]P_0(\cos\theta)$$

$$
\begin{aligned}
&+\left[\frac{(5\lambda+3\mu)}{5(\lambda+2\mu)}\rho g R-\frac{(\lambda+4\mu)}{R^2}A_1'+\frac{2\mu}{R}C_1-\frac{4\mu}{R^4}C_1'\right]P_1(\cos\theta)\\
&+\left[-\frac{5}{3}\frac{\mu}{R^3}A_2'+4\mu C_2-\frac{6\mu}{R^5}C_2'\right]P_2(\cos\theta)\\
&+\left[\frac{2}{5}\frac{\mu\rho g R}{(\lambda+2\mu)}+\frac{(\lambda-6\mu)}{5R^4}A_3'-\frac{8\mu}{R^6}C_3'\right]P_3(\cos\theta)\\
&+\left[\frac{\mu\rho g R}{5(\lambda+2\mu)}-\frac{(\lambda+3\mu)}{R^2}A_1'+\frac{2\mu}{R}C_1+\frac{2\mu}{R^4}C_1'\right]\cot\theta\frac{\partial P_1(\cos\theta)}{\partial\theta}\\
&+\left[-\frac{\mu}{3R^3}A_2'+2\mu C_2+\frac{2\mu}{R^5}C_2'\right]\cot\theta\frac{\partial P_2(\cos\theta)}{\partial\theta}\\
&+\left[\frac{2}{15}\frac{\mu\rho g R}{(\lambda+2\mu)}+\frac{(\lambda-\mu)}{15R^4}A_3'+\frac{2\mu}{R^6}C_3\right]\cot\theta\frac{\partial P_3(\cos\theta)}{\partial\theta}\\
&+\left[\frac{\{(n-2)\lambda-(n+3)\mu\}}{(2n-1)}\frac{D_n}{R^{n+1}}-\frac{2(n+1)\mu E_n}{R^{n+3}}\right]P_n(\cos\theta)\\
&+\left[\frac{\{(n-2)\lambda+(n-4)\mu\}}{(2n-1)n}\frac{D_n}{R^{n+1}}+\frac{2\mu}{R^{n+3}}E_n\right]\cot\theta\frac{\partial P_n(\cos\theta)}{\partial\theta},\\
\widehat{R\theta}=&\left[\frac{2}{5}\frac{\mu\rho g R}{(\lambda+2\mu)}+\frac{\mu A_1'}{R^2}-\frac{6\mu}{R^4}C_1'\right]\frac{\partial P_1(\cos\theta)}{\partial\theta}\\
&+\left[-\frac{(3\lambda+2\mu)}{6R^3}A_2'+2\mu C_2-\frac{8\mu}{R^5}C_2'\right]\frac{\partial P_2(\cos\theta)}{\partial\theta}\\
&+\left[\frac{4}{15}\frac{\mu\rho g R}{(\lambda+2\mu)}-\frac{(8\lambda+7\lambda)}{15}\frac{A_3'}{R^4}-\frac{10\mu}{R^6}C_3'\right]\frac{\partial P_3(\cos\theta)}{\partial\theta}\\
&+\left[\frac{\{(1-n^2)\lambda+(2-n^2)\mu\}}{(2n-1)n}\frac{D_n}{R^{n+1}}-\frac{2(n+2)\mu}{R^{n+3}}E_n\right]\frac{\partial P_n(\cos\theta)}{\partial\theta}.
\end{aligned}
\qquad\cdots\cdots(17)
$$

さて以上求めて來た研究に必要な變位及び應力の一般式を用ひて，前述の條件即ち $R=A$ なる空窩内面に壓力が加へられしかも重力が作用してゐる時半無限彈性體内殊に空窩附近での應力は如何と云ふに，條件式は次の様になる．

即ち

$$
R=A:-\qquad \left.\begin{aligned}\widehat{RR}&=-f(\theta),\\ \widehat{R\theta}&=-0,\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(18)
$$

$$
R=\infty:-\qquad \left.\begin{aligned}\widehat{RR}&=(3),\\ \widehat{\theta\theta}&=(4),\\ \widehat{\phi\phi}&=(5),\\ \widehat{R\theta}&=(6).\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(19)
$$

さて (18), (19) を滿足する樣に調節する理であるが (18) に於ける $f(\theta)$ は

$$f(\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{2}\int_0^{\pi}f(\theta)P_n(\cos\theta)\sin\theta d\theta\cdot P_n(\cos\theta) \quad\ldots\ldots\ldots (20)$$

と展開が出來る故，(18), (19), (20) を滿足する樣に常數を調節する時は求める結果は次の樣になる．卽ち

$$\begin{aligned}\widehat{RR}=&-\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2n+1}{2}\right)\int_0^{\pi}f(\theta)P_n(\cos\theta)\sin\theta d\theta\\&\times\frac{(2n-1)n\{(n^2+3n-1)\lambda+n(n+3)\mu\}A^{n+1}}{\{(2n^2+1)\lambda+2(n^2+n+1)\mu)\}(2n-1)R^{n+1}}P_n(\cos\theta)\\&+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n+1)}{2}\int_0^{\pi}f(\theta)P_n(\cos\theta)\sin\theta d\theta\\&\times\frac{\{(n^2-1)\lambda+(n^2-2)\mu\}(n+1)(n+2)A^{n+3}}{(n+2)\{(2n^2+1)\lambda+2(n^2+n+1)\mu\}R^{n+3}}P_n(\cos\theta)\\&+\left[-\frac{(3\lambda+2\mu)}{3(\lambda+2\mu)}\rho g\xi+\frac{(3\lambda+2\mu)\rho g\xi A^3}{3(\lambda+2\mu)R^3}\right]P_0(\cos\theta)\\&+\left[\frac{(5\lambda+6\mu)}{5(\lambda+2\mu)}\rho gR-\frac{(3\lambda+4\mu)\rho gA^3}{3(\lambda+2\mu)R^2}+\frac{2\mu\rho g A^5}{15(\lambda+2\mu)R^4}\right]P_1(\cos\theta)\\&+\left[-\frac{4}{3}\frac{\mu\rho g\xi}{(\lambda+2\mu)}+\frac{20}{3}\frac{\mu(9\lambda+10\mu)\rho g\xi A^3}{(\lambda+2\mu)(9\lambda+14\mu)R^3}\right.\\&\left.-\frac{48\mu(\lambda+\mu)\rho g\xi A^5}{(\lambda+2\mu)(9\lambda+14\mu)R^5}\right]P_2(\cos\theta)\\&+\left[\frac{4\mu\rho gR}{5(\lambda+2\mu)}-\frac{28\mu(17\lambda+18\mu)\rho gA^5}{5(\lambda+2\mu)(19\lambda+26\mu)R^4}\right.\\&\left.+\frac{80\mu(\lambda+\mu)\rho gA^7}{(\lambda+2\mu)(19\lambda+26\mu)R^6}\right]P_3(\cos\theta),\quad\ldots\ \ldots\ldots\ldots (21)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\widehat{\theta\theta}=&-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\{(n-2)\lambda-(n+3)\mu\}(2n-1)n(2n+1)A^{n+1}}{2(2n-1)\{(2n^2+1)\lambda+2(n^2+n+1)\mu\}R^{n+1}}P_n(\cos\theta)\\&\times\int_0^{\pi}f(\theta)P_n(\cos\theta)\sin\theta d\theta\\&-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)\{(n^2-1)\lambda+(n^2-2)\mu\}(2n+1)A^{n+3}}{2(n+2)\{(2n^2+1)\lambda+2(n^2+n+1)\mu\}R^{n+3}}P_n(\cos\theta)\\&\times\int_0^{\pi}f(\theta)P_n(\cos\theta)\sin\theta d\theta\end{aligned}$$

$$-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\{(n-2)\lambda+(n-4)\mu\}(2n-1)n(2n+1)A^{n+1}}{2n(2n-1)\{(2n^2+1)\lambda+2(n^2+n+1)\mu\}R^{n+1}}\frac{\partial^2 P_n(\cos\theta)}{\partial\theta^2}$$

$$\times\int_0^{\pi} f(\theta)\,P_n(\cos\theta)\sin\theta\,d\theta$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\{(n^2-1)\lambda+(n^2-2)\mu\}(2n+1)A^{n+3}}{2(n+2)\{(2n^2+1)\lambda+2(n^2+n+1)\mu\}\,R^{n+3}}\frac{\partial^2 P_n(\cos\theta)}{\partial\theta^2}$$

$$\times\int_0^{\pi} f(\theta)P_n(\cos\theta)\sin\theta\,d\theta$$

$$-\left[\frac{(3\lambda+2\mu)}{3(\lambda+2\mu)}\rho g\xi+\frac{(3\lambda+2\mu)\rho g\xi}{6(\lambda+2\mu)}\frac{A^3}{R^3}\right]P_0(\cos\theta)$$

$$+\left[\frac{(5\lambda+3\mu)}{5(\lambda+2\mu)}\rho gR+\frac{\mu\rho g\xi^2}{(\lambda+2\mu)R}+\frac{(\lambda+4\mu)\rho gA^3}{3(\lambda+2\mu)R^2}\right.$$

$$\left.-\frac{4\mu\rho gA^5}{90(\lambda+2\mu)R^4}\right]P_1(\cos\theta)$$

$$-\left[\frac{4\mu\rho g\xi}{3(\lambda+2\mu)}+\frac{100\mu^2\rho g\xi A^3}{3(\lambda+2\mu)(9\lambda+14\mu)R^3}\right.$$

$$\left.-\frac{12\mu(\lambda+\mu)\rho g\xi A^5}{(\lambda+2\mu)(9\lambda+14\mu)R^5}\right]P_2(\cos\theta)$$

$$+\left[\frac{2\mu\rho gR}{5(\lambda+2\mu)}-\frac{28\mu(\lambda-6\mu)\rho gA^5}{5(\lambda+2\mu)(19\lambda+26\mu)R^4}\right.$$

$$\left.-\frac{16\mu(\lambda+\mu)\rho gA^7}{(\lambda+2\mu)(19\lambda+26\mu)R}\right]P_3(\cos\theta)$$

$$+\left[\frac{\mu\rho gR}{5(\lambda+2\mu)}+\frac{\mu\rho g\xi^2}{(\lambda+2\mu)R}+\frac{(\lambda+3\mu)\rho gA^3}{3(\lambda+2\mu)R^2}+\frac{2\mu\rho gA^5}{90(\lambda+2\mu)R^4}\right]\frac{\partial^2 P_1(\cos\theta)}{\partial\theta^2}$$

$$-\left[\frac{2\mu\rho g\xi}{3(\lambda+2\mu)}+\frac{20\mu^2\rho g\xi A^3}{3(\lambda+2\mu)(9\lambda+14\mu)R^3}\right.$$

$$\left.+\frac{4\mu(\lambda+\mu)\rho g\xi A^5}{(\lambda+2\mu)(9\lambda+14\mu)R^5}\right]\frac{\partial^2 P_2(\cos\theta)}{\partial\theta^2}$$

$$+\left[\frac{2\mu\rho gR}{15(\lambda+2\mu)}-\frac{28\mu(\lambda-\mu)\rho gA^5}{15(\lambda+2\mu)(19\lambda+26\mu)R^4}\right.$$

$$\left.+\frac{4\mu(\lambda+\mu)\rho gA^7}{(\lambda+2\mu)(19\lambda+26\mu)R^6}\right]\frac{\partial^2 P_3(\cos\theta)}{\partial\theta^2},\quad\ldots\ldots\ (22)$$

$$
\begin{aligned}
\widehat{\phi\phi} = & -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\{(n-2)\lambda-(n+3)\mu\}(2n-1)n(2n+1)A^{n+1}}{2(2n-1)\{(2n^2+1)\lambda+2(n^2+n+1)\mu\}\,R^{n+1}} P_n(\cos\theta) \\
& \qquad \times \int_0^{\pi} f(\theta)\, P_n(\cos\theta)\sin\theta\, d\theta \\
& -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)\{(n^2-1)\lambda+(n-2)\mu\}(2n+1)A^{n+3}}{2(n+2)\{(2n^2+1)\lambda+2(n^2+n+1)\mu\}R^{n+3}} P_n(\cos\theta) \\
& \qquad \times \int_0^{\pi} f(\theta)\, P_n(\cos\theta)\sin\theta d\theta \\
& -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\{(n-2)\lambda+(n-4)\mu\}n(2n+1)A^{n+1}}{2n\{(2n^2+1)\lambda+2(n^2+n+1)\mu\}R^{n+1}} \cot\theta \frac{\partial P_n(\cos\theta)}{\partial\theta} \\
& \qquad \times \int_0^{\pi} f(\theta)\, P_n(\cos\theta)\sin\theta d\theta \\
& +\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\{(n^2-1)\lambda+(n^2-2)\mu\}(2n+1)A^{n+3}}{2(n+2)\{(2n^2+1)\lambda+2(n^2+n+1)\mu\}R^{n+3}} \cot\theta \frac{\partial P_n(\cos\theta)}{\partial\theta} \\
& \qquad \times \int_0^{\pi} f(\theta) P_n(\cos\theta)\sin\theta d\theta \\
& -\left[\frac{(3\lambda+2\mu)\rho g\xi}{3(\lambda+2\mu)} + \frac{(3\lambda+2\mu)\rho g\xi A^3}{6(\lambda+2\mu)R^3}\right] P_0(\cos\theta) \\
& +\left[\frac{(5\lambda+3\mu)}{5(\lambda+2\mu)}\rho g R + \frac{\mu\rho g\xi^2}{(\lambda+2\mu)R} + \frac{(\lambda+4\mu)\rho g A^3}{3(\lambda+2\mu)R^2}\right] P_1(\cos\theta) \\
& -\left[\frac{4\mu\rho g\xi}{3(\lambda+2\mu)} + \frac{100\mu^2\rho g\xi A^3}{3(\lambda+2\mu)(9\lambda+14\mu)R^3}\right. \\
& \qquad \left. - \frac{12\mu(\lambda+\mu)\rho g\xi A^5}{(\lambda+2\mu)(9\lambda+14\mu)R^5}\right] P_2(\cos\theta) \\
& +\left[\frac{2\mu\rho g R}{5(\lambda+2\mu)} - \frac{28\mu(\lambda-6\mu)\rho g A^5}{5(\lambda+2\mu)(19\lambda+26\mu)R^4}\right. \\
& \qquad \left. - \frac{16\mu(\lambda+\mu)\rho g A^7}{(\lambda+2\mu)(19\lambda+26\mu)R^6}\right] P_3(\cos\theta) \\
& +\left[\frac{\mu\rho g R}{5(\lambda+2\mu)} + \frac{\mu\rho g\xi^2}{(\lambda+2\mu)R} + \frac{(\lambda+3\mu)\rho g A^3}{3(\lambda+2\mu)R^2}\right. \\
& \qquad \left. + \frac{2\mu\rho g A^5}{90(\lambda+2\mu)R^4}\right] \cot\theta \frac{\partial P_1(\cos\theta)}{\partial\theta} \\
& -\left[\frac{2\mu\rho g\xi}{3(\lambda+2\mu)} + \frac{20\mu^2\rho g\xi A^3}{3(\lambda+2\mu)(9\lambda+14\mu)R^3}\right. \\
& \qquad \left. + \frac{4\mu(\lambda+\mu)\rho g\xi A^5}{(\lambda+2\mu)(9\lambda+14\mu)R^5}\right] \cot\theta \frac{\partial P_2(\cos\theta)}{\partial\theta}
\end{aligned}
$$

$$+\left[\frac{2\mu\rho g R}{15(\lambda+2\mu)}-\frac{28\mu(\lambda-\mu)\rho g A^5}{15(\lambda+2\mu)(19\lambda+26\mu)R^4}\right.$$

$$\left.+\frac{4\mu(\lambda+\mu)\rho g A^7}{(\lambda+2\mu)(9\lambda+14\mu)R^6}\right]\cot\theta\frac{\partial P_3(\cos\theta)}{\partial\theta}, \quad \cdots (23)$$

$$\widehat{R\theta}=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\{(1-n^2)\lambda+(2-n^2)\mu\}(2n+1)A^{n+1}}{2\{(2n^2+1)\lambda+2(n^2+n+1)\mu\}R^{n+1}}\frac{\partial P_n(\cos\theta)}{\partial\theta}$$

$$\times\int_0^{\pi}f(\theta)P_n(\cos\theta)\sin\theta d\theta$$

$$-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\{(n^2-1)\lambda+(n^2-2)\mu\}A^{n+3}(2n+1)}{2\{(2n^2+1)\lambda+2(n^2+n+1)\mu\}R^{n+3}}\frac{\partial P_n(\cos\theta)}{\partial\theta}$$

$$\times\int_0^{\pi}f(\theta)P_n(\cos\theta)\sin\theta d\theta$$

$$-\left[\frac{\mu\rho g A^3}{3(\lambda+2\mu)R^2}+\frac{6\mu\rho g A^5}{90(\lambda+2\mu)R^4}-\frac{2\mu\rho g R}{5(\lambda+2\mu)}\right]\frac{\partial P_1(\cos\theta)}{\partial\theta}$$

$$-\left[\frac{2\mu\rho g\xi}{3(\lambda+2\mu)}+\frac{10\mu(3\lambda+2\mu)\rho g\xi A^3}{3(\lambda+2\mu)(9\lambda+14\mu)R^3}\right.$$

$$\left.-\frac{16\mu(\lambda+\mu)\rho g\xi A^5}{(\lambda+2\mu)(9\lambda+14\mu)R^5}\right]\frac{\partial P_2(\cos\theta)}{\partial\theta}$$

$$+\left[\frac{4\mu\rho g R}{15(\lambda+2\mu)}+\frac{28\mu(8\lambda+7\mu)\rho g A^5}{15(\lambda+2\mu)(19\lambda+26\mu)R^4}\right.$$

$$\left.-\frac{20\mu(\lambda+\mu)\rho g A^7}{(\lambda+2\mu)(19\lambda+26\mu)R^6}\right]\frac{\partial P_3(\cos\theta)}{\partial\theta}. \quad \cdots (24)$$

以上 (21)〜(24) なる應力式によつて重力の働いてゐる半無限彈性體內に表面より ξ なる深さの所にその中心を有する半徑 A なる球狀空窩の內面に壓力 P (卽ち $-f(\theta)$) が加へられた場合の彈性體內殊に空窩附近の應力問題を解結する事が出來た. さて主應力 σ_1, σ_2, σ_3 は

$$\left.\begin{aligned}\sigma_1&=\widehat{\phi\phi},\\ \sigma_2&=\frac{1}{2}(\widehat{RR}+\widehat{\theta\theta})+\frac{1}{2}\sqrt{(\widehat{RR}-\widehat{\theta\theta})^2+4\widehat{R\theta}^2},\\ \sigma_3&=\frac{1}{2}(\widehat{RR}+\widehat{\theta\theta})-\frac{1}{2}\sqrt{(\widehat{RR}-\widehat{\theta\theta})^2+4\widehat{R\theta}^2}\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots (25)$$

であるから (21)〜(24) を (25) に代入すれば以上の樣な條件の基にある彈性體內殊に空窩附近の彈性破損の問題も定量的に解決する事が出來る. 卽ち彈性破損の條件式として,

$$f(\xi,\ P,\ A,\ K)=0 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (26)$$

なる關係式を求める事が出來るる. 勿論 K はこの彈性體に特有な最大主應力或は最大剪斷應力等を表はしてゐるもので破損に關する定理によつて夫々定められるものである. 地殼の場合には最大剪斷力を K とするのが至當の樣である. これ等具體的の數量的計算は次の機會に讓る事にして, 次の問題に進んで行く.

第 2 章

3. 重力の作用せる半無限彈性體內の空窩に壓力 P が加へられた時この彈性體の表面附近, 卽ち第1圖に於て $z=0$ 附近に於ては如何なる變形が起り, そしてそこに現れる應力は如何なる分布狀態をなしてゐるか, 又表面附近は如何なる場所より破損が生ずるか等の問題の解決に進んで行く事とする.

さて $z=0$ 附近での釣合を研究するのには先づ重力の働いてゐる半無限彈性體內の空窩內面の彈性條件を滿足さす爲めの必要から生じて來た變位, 應力及び $R=A$ に作用する壓力に釣合ふ爲めに必要上生じて來た變位や應力を (21), (22), (23), (24) より摘出しなければならぬ. 卽ちこの樣にして摘出された變位や應力の項のみが $z=0$ 卽ち表面に作用する事となるが, これに表面附近で彈性運動的に釣合ひを保つて, 表面が自由表面であると云ふ條件を滿足する樣に, これ等摘出した變位及び應力の折り合ひをうまくつける樣にする理である.

今空窩がある爲めに生じた應力や變位及び壓力の作用する爲めに生じた變位應力を摘出すると次の樣になる. 但しこの時にこれ等の變位や應力を第 1 圖で見る樣に原點を O に置いた圓壔座標 $(r,\ z)$ によつて表はす事とする. この爲めには勿論複雜な轉換運算を必要とするが, これ等の運算の結果をまとめてみると,

$$u'=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n(2n-1)(2n+1)A^{n+1}}{2\{(2n^2+1)\lambda+2(n^2+n+1)\mu\}}$$

$$\times\int_0^{\infty}\frac{(z+\xi)}{2k}e^{-k(z+\xi)}\frac{\partial J_0(kr)}{\partial r}\frac{1}{n!}k^n dk\int_0^{\pi}f(\theta)P_n(\cos\theta)\sin\theta d\theta$$

$$-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n(2n-1)(2n+1)(\lambda+2\mu)A^{n+1}}{4\{(2n^2+1)\lambda+2(n^2+n+1)\mu\}\mu}$$

$$\times\int_0^{\infty}\frac{(z+\xi)}{k}e^{-k(z+\xi)}\frac{\partial J_0(kr)}{\partial r}\frac{k^n}{n!}dk\int_0^{\pi}f(\theta)P_n(\cos\theta)\sin\theta d\theta$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\{(n^2-1)\lambda+(n^2-2)\mu\}(2n+1)A^{n+3}}{4(n+2)\{(2n^2+1)n+2(n^2+n+1)\mu\}(n!)}$$

$$\times\int_0^{\infty}e^{-k(z+\xi)}\frac{\partial J_0(kr)}{\partial r}k^n dk\int_0^{\pi}f(\theta)P_n(\cos\theta)\sin\theta d\theta$$

$$+\frac{\rho g A^3(z+\xi)}{6(\lambda+2\mu)}\frac{(\lambda+\mu)}{\mu}\int_0^{\infty}\frac{e^{-k(z+\xi)}}{k}\frac{\partial J_0(kr)}{\partial r}kdk$$

$$+\frac{(3\lambda+2\mu)\rho g\xi A^3}{12\mu(\lambda+2\mu)}\int_0^{\infty}e^{-k(z+\xi)}\frac{\partial J_0(kr)}{\partial r}dk$$

$$+\frac{\rho g A^5}{90(\lambda+2\mu)}\int_0^{\infty}e^{-k(z+\xi)}\frac{\partial J_0(kr)}{\partial r}kdk$$

$$+\frac{10\rho\mu g\xi A^3}{(\lambda+2\mu)(9\lambda+14\mu)}\frac{(\lambda+\mu)}{\mu}\times\frac{z+\xi}{2!}\int_0^{\infty}e^{-k(z+\xi)}\frac{\partial J_0(kr)}{\partial r}kdk$$

$$-\frac{(\lambda+\mu)\rho g\xi A^5}{(\lambda+2\mu)(9\lambda+14\mu)}\int_0^{\infty}e^{-k(z+\xi)}\frac{\partial J_0(kr)}{\partial r}k^2dk$$

$$-\frac{28\mu\rho g A^5}{(\lambda+2\mu)(19\lambda+26\mu)}\frac{(\lambda+\mu)}{2\mu}\frac{(z+\xi)}{3!}\int_0^{\infty}e^{-k(z+\xi)}\frac{\partial J_0(kr)}{\partial r}k^2dk$$

$$+\frac{2(\lambda+\mu)\rho g A^7}{(\lambda+2\mu)(19\lambda+26\mu)}\frac{1}{(3!)}\int_0^{\infty}e^{-k(z+\xi)}\frac{\partial J_0(kr)}{\partial r}k^3dk, \qquad \ldots\ldots (27)$$

$$w'=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n(2n-1)(2n+1)A^{n+1}}{4\{(2n^2+1)\lambda+2(n^2+n+1)\mu\}(n!)}$$

$$\times\int_0^{\infty}\frac{\{1-k(z+\xi)\}}{k}e^{-k(z+\xi)}J_0(kr)k^n dk\int_0^{\pi}f(\theta)P_n(\cos\theta)\sin\theta\, d\theta$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n(2n-1)(2n+1)(\lambda+2\mu)A^{n+1}}{4\{(2n^2+1)\lambda+2(n^2+n+1)\mu\}\mu(n!)}$$

$$\times\int_0^{\infty}\{1+k(z+\xi)\}e^{-k(z+\xi)}J_0(kr)k^{n-1}dk\int_0^{\pi}f(\theta)P_n(\cos\theta)\sin\theta d\theta$$

$$-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n+1)\{(n^2-1)\lambda+(n^2-2)\mu\}A^{n+3}}{4(n+2)\{(2n^2+1)\lambda+2(n^2+n+1)\mu\}\mu(n!)}$$

$$\times\int_0^{\infty}e^{-k(z+\xi)}J_0(kr)k^{n+1}dk\int_0^{\pi}f(\theta)P_n(\cos\theta)\sin\theta d\theta$$

$$-\frac{(3\lambda+2\mu)\rho g\xi A^3}{12\mu(\lambda+2\mu)}\int_0^{\infty}e^{-k(z+\xi)}J_0(kr)kdk$$

$$+\frac{\rho g A^3}{6(\lambda+2\mu)}\int_0^{\infty}\frac{1}{k}\{1-k(z+\xi)\}e^{-k(z+\xi)}J_0(kr)kdk$$

$$+\frac{\rho g A^3}{6(\lambda+2\mu)}\int_0^{\infty}\frac{(\lambda+2\mu)}{\mu k}\{1+k(z+\xi)\}e^{-k(z+\xi)}J_0(kr)kdk$$

$$
\begin{aligned}
&-\frac{\rho g A^5}{90(\lambda+2\mu)}\int_0^\infty e^{-k(z+\xi)}J_0(kr)k^2dk\\
&-\frac{5\mu\rho g\xi A^3}{(\lambda+2\mu)(9\lambda+14\mu)}\int_0^\infty \frac{1}{k}\{1-k(z+\xi)\}e^{-k(z+\xi)}J_0(kr)k^2dk\\
&-\frac{5\rho g\xi A^3}{(9\lambda+14\mu)}\int_0^\infty \frac{\{1+k(z+\xi)\}}{k}e^{-k(z+\xi)}J_0(kr)k^2dk\\
&+\frac{(\lambda+\mu)\rho g\xi A^5}{(\lambda+2\mu)(9\lambda+14\mu)}\int_0^\infty e^{-k(z+\xi)}J_0(kr)k^3dk\\
&+\frac{7\mu\rho g\xi A^5}{(\lambda+2\mu)(19\lambda+26\mu)}\int_0^\infty \frac{1}{k}\{1-k(z+\xi)\}e^{-k(z+\xi)}J_0(kr)k^3dk\\
&+\frac{7\mu\rho g\xi A^5}{3(\lambda+2\mu)(19\lambda+26\mu)}\frac{(\lambda+2\mu)}{\mu}\int_0^\infty \frac{\{1+k(z+\xi)\}}{k}e^{-k(z+\xi)}J_0(kr)k^3dk\\
&-\frac{1}{3}\frac{\rho g(\lambda+\mu)A^7}{(\lambda+2\mu)(19\lambda+26\mu)}\int_0^\infty e^{-k(z+\xi)}J_0(kr)k^4dk, \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (28)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\widehat{rr}=&-\lambda\sum_{n=0}^\infty\frac{(2n-1)n(2n+1)A^{n+1}}{2(n!)\{(2n^2+1)\lambda+2(n^2+n+1)\mu\}}\\
&\qquad\times\int_0^\infty e^{-k(z+\xi)}J_0(kr)k^ndk\int_0^\pi f(\theta)P_n(\cos\theta)\sin\theta d\theta\\
&-(\lambda+\mu)(z+\xi)\sum_{n=0}^\infty\frac{(2n-1)n(2n+1)A^{n+1}}{2\{(2n^2+1)\lambda+2(n^2+n+1)\mu\}(n!)}\\
&\qquad\times\int_0^\infty e^{-k(z+\xi)}\frac{\partial^2 J_0(kr)}{\partial r^2}k^{n-1}dk\int_0^\pi f(\theta)P_n(\cos\theta)\sin\theta d\theta\\
&+\sum_{n=0}^\infty\frac{\{(n^2-1)\lambda+(n^2-2)\mu\}(2n+1)A^{n+3}}{(n+2)\{(2n^2+1)\lambda+2(n^2+n+1)\mu\}\mu(n!)}\\
&\qquad\times\int_0^\infty e^{-k(z+\xi)}\frac{\partial^2 J_0(kr)}{\partial r^2}k^ndk\int_0^\pi f(\theta)P_n(\cos\theta)\sin\theta d\theta\\
&-\frac{\lambda\rho g A^3}{3(\lambda+2\mu)}\int_0^\infty e^{-k(z+\xi)}J_0(kr)kdk\\
&-\frac{(\lambda+\mu)(z+\xi)\rho g A^3}{3(\lambda+2\mu)}\int_0^\infty e^{-k(z+\xi)}\frac{\partial^2 J_0(kr)}{\partial r^2}dk\\
&+\frac{\rho g A^5}{90(\lambda+2\mu)}\int_0^\infty e^{-k(z+\xi)}\frac{\partial^2 J_0(kr)}{\partial r^2}kdk\\
&+\frac{10\lambda\mu\rho g A^3\xi}{(\lambda+2\mu)(9\lambda+14\mu)}\int_0^\infty e^{-k(z+\xi)}J_0(kr)k^2dk
\end{aligned}
$$

$$+(\lambda+\mu)(z+\xi)\frac{10\mu\rho g\xi A^3}{(\lambda+2\mu)(9\lambda+14\mu)}\int_0^\infty e^{-k(z+\xi)}\frac{\partial^2 J_0(kr)}{\partial r^2}kdk$$

$$-\frac{(\lambda+\mu)\rho g\xi A^5}{(\lambda+2\mu)(9\lambda+14\mu)}\int_0^\infty e^{-k(z+\xi)}\frac{\partial^2 J_0(kr)}{\partial r^2}k^2dk$$

$$-\frac{\lambda}{(3!)}\frac{28\mu\rho g A^5}{(\lambda+2\mu)(19\lambda+26\mu)}\int_0^\infty e^{-k(z+\xi)}J_0(kr)k^3dk$$

$$-\frac{(\lambda+\mu)(z+\xi)}{(3!)}\frac{28\mu\rho g A^5}{(\lambda+2\mu)(19\lambda+26\mu)}\int_0^\infty e^{-k(z+\xi)}\frac{\partial^2 J_0(kr)}{\partial r^2}k^2dk$$

$$+\frac{1}{(3!)}\frac{2\rho g(\lambda+\mu)A^7}{(\lambda+2\mu)(19\lambda+26\mu)}\int_0^\infty e^{-k(z+\xi)}\frac{\partial^2 J_0(kr)}{\partial r^2}k^3dk, \ldots\ldots\ldots \quad (29)$$

$$\widehat{\theta\theta}=-\lambda\sum_{n=0}^\infty\frac{n(2n-1)(2n+1)A^{n+1}}{2(n!)\{(2n^2+1)\lambda+2(n^2+n+1)\mu\}}$$

$$\times\int_0^\infty e^{-k(z+\xi)}J_0(kr)k^ndk\int_0^\pi f(\theta)P_n(\cos\theta)\sin\theta d\theta$$

$$-(\lambda+\mu)(z+\xi)\sum_{n=0}^\infty\frac{n(2n-1)(2n+1)A^{n+1}}{2(n!)\{(2n^2+1)\lambda+2(n^2+n+1)\mu\}}$$

$$\times\int_0^\infty e^{-k(z+\xi)}\frac{1}{r}\frac{\partial J_0(kr)}{\partial r}k^{n-1}dk\int_0^\pi f(\theta)P_n(\cos\theta)\sin\theta d\theta$$

$$+\sum_{n=0}^\infty\frac{(2n+1)\{(n^2-1)\lambda+(n^2-2)\mu\}A^{n+3}}{4(n+2)\{(2n^2+1)\lambda+2(n^2+n+1)\mu\}\mu(n!)}$$

$$\times\int_0^\infty e^{-k(z+\xi)}\frac{1}{r}\frac{\partial J_0(kr)}{\partial r}k^ndk\int_0^\infty f(\theta)P_n(\cos\theta)\sin\theta d\theta$$

$$-\frac{\lambda\rho g A^3}{3(\lambda+2\mu)}\int_0^\infty e^{-k(z+\xi)}J_0(kr)kdk$$

$$-\frac{(\lambda+\mu)(z+\xi)}{3(\lambda+2\mu)}\rho g A^3\int_0^\infty e^{-k(z+\xi)}\frac{1}{r}\frac{\partial J_0(kr)}{\partial r}dk$$

$$+\frac{\rho g A^5}{90(\lambda+2\mu)}\int_0^\infty e^{-k(z+\xi)}\frac{1}{r}\frac{\partial J_0(kr)}{\partial r}kdk$$

$$+\frac{10\lambda\mu\rho g\xi A^3}{(\lambda+2\mu)(9\lambda+14\mu)}\int_0 e^{-k(z+\xi)}J_0(kr)k^2dk$$

$$+(\lambda+\mu)(z+\xi)\frac{10\mu\rho g\xi A^3}{(\lambda+2\mu)(9\lambda+14\mu)}\int_0^\infty e^{-k(z+\xi)}\frac{1}{r}\frac{\partial J_0(kr)}{\partial r}kdk$$

$$-\frac{(\lambda+\mu)\rho g\xi A^5}{(\lambda+2\mu)(9\lambda+14\mu)}\int_0^\infty e^{-k(z+\xi)}\frac{1}{r}\frac{\partial J_0(kr)}{\partial r}k^2dk$$

$$-\frac{20\lambda\mu\rho g A^5}{(3!)(\lambda+2\mu)(19\lambda+26\mu)}\int_0^\infty e^{-k(z+\xi)}\,J_0(kr)\,k^3dk$$

$$-\frac{(\lambda+\mu)(z+\xi)28\mu\rho g A^5}{(3!)(\lambda+2\mu)(19\lambda+26\mu)}\int_0^\infty e^{-k(z+\xi)}\,\frac{1}{r}\,\frac{\partial J_0(kr)}{\partial r}\,k^2dk$$

$$+\frac{2\rho g(\lambda+\mu)A^7}{(3!)(\lambda+2\mu)(19\lambda+26\mu)}\int_0^\infty e^{-k(z+\xi)}\,\frac{1}{r}\,\frac{\partial J_0(kr)}{\partial r}\,k^3dk, \quad \ldots\ldots(30)$$

$$\widehat{zz}=-\sum_{n=0}^\infty\frac{n(2n-1)(2n+1)\,A^{n+1}}{2\{(2n^2+1)\lambda+2(n^2+n+1)\mu\}(n!)}$$

$$\times\int_0^\infty\{(\lambda+2\mu)+(\lambda+\mu)k(z+\xi)\}\,e^{-k(z+\xi)}J_0(kr)k^n dk$$

$$\times\int_0^\pi f(\theta)\,P_n(\cos\theta)\sin\theta\,d\theta$$

$$+\sum_{n=0}^\infty\frac{1}{n!}\,\frac{\{(n^2-1)\lambda+(n^2-2)\mu\}\,(2n+1)A^{n+3}}{\{(2n^2+1)\lambda+2\,(n^2+n+1)\mu\}\,(n+2)}$$

$$\times\int_0^\pi e^{-k(z+\xi)}J_0(kr)\,k^{n+2}dk\int_0^\pi f(\theta)P_n(\cos\theta)\sin\theta\,d\theta$$

$$-\frac{\rho g A^3}{3(\lambda+2\mu)}\int_0^\infty\{(\lambda+2\mu)+(\lambda+\mu)\,k(z+\xi)\}\,e^{-k(z+\xi)}J_0(kr)\,kdk$$

$$+\frac{\mu\rho g A^5}{45(\lambda+2\mu)}\int_0^\infty e^{-k(z+\xi)}J_0(kr)\,k^3dk$$

$$+\frac{10\,\mu\rho g\xi A^3}{(\lambda+2\mu)(9\lambda+14\mu)}$$

$$\times\int_0^\infty e^{-k(z+\xi)}\{(\lambda+2\mu)+(\lambda+\mu)k(z+\xi)\}\,J_0(kr)\,k^2dk$$

$$-\frac{2\mu(\lambda+\mu)\,\rho g\xi A^5}{(\lambda+2\mu)(9\lambda+14\mu)}\int_0^\infty e^{-k(z+\xi)}J_0(kr)\,k^4dk$$

$$-\frac{28\mu\rho g A^5}{(\lambda+2\mu)(19\lambda+26\mu)(3!)}$$

$$\times\int_0^\infty e^{-k(z+\xi)}\{(\lambda+2\mu)+(\lambda+\mu)k(z+\xi)\}\,J_0(kr)\,k^3dk$$

$$+\frac{4\mu(\lambda+\mu)\,\rho g A^7}{(3!)(\lambda+2\mu)(19\lambda+26\mu)}\int_0^\infty e^{-k(z+\xi)}J_0(kr)k^5dk, \quad \ldots\ldots\ldots(31)$$

$$
\begin{aligned}
\widehat{rz} =& \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(2n+1)(2n-1)A^{n+1}}{2\{(2n^2+1)\lambda+2(n^2+n+1)\mu\}(n!)} \\
&\times \int_0^{\infty} \left\{\frac{\mu}{k}+(\lambda+\mu)(z+\xi)\right\} e^{-k(z+\xi)} \frac{\partial J_0(kr)}{\partial r} k^n dk \\
&\times \int_0^{\pi} f(\theta)\, P_n(\cos\theta) \sin\theta\, d\theta \\
&- \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n!)} \frac{\{(n^2-1)\lambda+(n^2-2)\mu\}(2n+1)A^{n+3}}{2\{n+2\}\{(2n^2+1)\lambda+2(n^2+n+1)\mu\}} \\
&\times \int_0^{\infty} e^{-k(z+\xi)} \frac{\partial J\,(kr)}{\partial r} k^{n+1} dk \int_0^{\pi} f(\theta)\, P_n(\cos\theta) \sin\theta\, d\theta \\
&+ \frac{\rho g A^3}{3(\lambda+2\mu)} \int_0^{\infty} \left\{\frac{\mu}{k}+(\lambda+\mu)(z+\xi)\right\} e^{-k(z+\xi)} \frac{\partial J_0(kr)}{\partial r} k\, dk \\
&- \frac{\mu\rho g A^5}{45(\lambda+2\mu)} \int_0^{\infty} e^{-k(z+\xi)} \frac{\partial J_0(kr)}{\partial r} k^2 dk \\
&- \frac{10\mu\rho g \xi A^3}{(\lambda+2\mu)(9\lambda+14\mu)} \\
&\times \int_0^{\infty} \left\{\frac{\mu}{k}+(\lambda+\mu)(z+\xi)\right\} e^{-k(z+\xi)} \frac{\partial J_0(kr)}{\partial r} k^2 dk \\
&+ \frac{2\mu(\lambda+\mu)\rho g \xi A^5}{(\lambda+2\mu)(9\lambda+14\mu)} \int_0^{\infty} e^{-k(z+\xi)} \frac{\partial J_0(kr)}{\partial r} k^3 dk \\
&- \frac{28\mu\rho g A^5}{(\lambda+2\mu)(19\lambda+26\mu)(3!)} \\
&\times \int_0^{\infty} e^{-k(z+\xi)} \left\{\frac{\mu}{k}+(\lambda+\mu)(z+\xi)\right\} \frac{\partial J_0(kr)}{\partial r} k^3 dk \\
&- \frac{4\mu\rho g(\lambda+\mu)A^7}{(3!)(\lambda+2\mu)(19\lambda+26\mu)} \int_0^{\infty} e^{-k(z+\xi)} \frac{\partial J_0(kr)}{\partial r} k^4 dk. \qquad \cdots\cdots\cdots (32)
\end{aligned}
$$

既に述べておいた様に (27)〜(32) なる變位及び應力の式は空窩がある爲めに重力の作用せる半無限彈性體中に生ずる變位及び應力と空窩に作用する壓力の爲めに生ずる夫等の總和を表はしてゐるものである．こゝに於て半無限體の表面即ち $z=0$ に於てこの面が自由面である様に彈性條件を作り此れに適合する様に此れ等 (27)〜(32) による應力を用ひて彈性體の表面の變形なり或は應力を夫々調節しなければならぬ．この爲めには半無限彈性體の彈性釣合運動式を先づ解く必要がある．即ち

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial\widehat{rr'}}{\partial r}+\frac{\partial\widehat{rz'}}{\partial z}+\frac{\widehat{rr'}-\widehat{\theta\theta'}}{r}=0,\\&\frac{\partial\widehat{rz'}}{\partial r}+\frac{\partial\widehat{zz'}}{\partial z}+\frac{\widehat{rz'}}{r}=0\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(32)$$

なる釣合式に於て，

$$\left.\begin{aligned}&\widehat{rr'}=\lambda\Delta'+2\mu\frac{\partial u'}{\partial r},\quad \widehat{\theta\theta'}=\lambda\Delta'+2\mu\left\{\frac{u'}{r}\right\},\\&\widehat{zz'}=\lambda\Delta'+2\mu\frac{\partial w}{\partial z},\quad \widehat{rz'}=\mu\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial r}\right),\\&\text{但し}\\&\Delta'=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(ru')+\frac{\partial w'}{\partial z}.\end{aligned}\right\}\cdots(33)$$

勿論表面の條件を完全に滿足さすのであるから (32) の運動式では重力による項は略してある．圓壔座標の原點は第 1 圖の 0 に置いてある．(33) を (32) に代入すれば

$$\left.\begin{aligned}&(\lambda+2\mu)\frac{\partial\Delta'}{\partial r}+2\mu\frac{\partial w'}{\partial z}=0,\\&(\lambda+2\mu\frac{\partial\Delta'}{\partial z}-\frac{2\mu}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rw')=0.\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots(34)$$

但し

$$\left.\begin{aligned}&\Delta'=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(ru')+\frac{\partial w'}{\partial z},\\&2\varpi'=\frac{\partial u'}{\partial z}-\frac{\partial w'}{\partial r}.\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(35)$$

u', w' は半徑方向，垂直方向の變位を表はしてゐる．

(34) の解としては色々のものが見出されるが，こゝでは次のものを採用する．即ち

$$\left.\begin{aligned}&\Delta'=A_m e^{+kz}J_0(kr),\\&2\varpi'=-\frac{(\lambda+2\mu)}{\mu}A_m e^{+kz}\frac{\partial J_0(kr)}{\partial(kr)}.\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(36)$$

A_m は勿論任意の常數である．

さて (35) より

$$\frac{\partial^2 w'}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial w'}{\partial r}+\frac{\partial^2 w'}{\partial z^2}=\frac{\partial\Delta'}{\partial z}-\frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\varpi'),\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(37)$$

$$\frac{\partial^2(ru')}{\partial r^2}-\frac{1}{r}\frac{\partial(ru')}{\partial r}+\frac{\partial^2(ru')}{\partial z^2}=r\cdot\frac{\partial\Delta'}{\partial r}+2r\frac{\partial\varpi'}{\partial z}. \quad\ldots\ldots\ldots(38)$$

(36) をこれ等 (37), (38) の右邊へ代入し, w' 及び ru' に關する特殊解, 及び補解を求める事は容易に出來る. その結果を出してみると,

$$u'=-\frac{(\lambda+\mu)}{2\mu}A_m\frac{z}{k}e^{kz}\frac{\partial J_0(kr)}{\partial r}+E_m e^{kz}\frac{\partial J_0(kr)}{\partial r}, \quad\ldots\ldots\ldots(39)$$

$$w'=\frac{(\lambda+3\mu)}{2\mu}A_m\frac{1}{k}e^{kz}J_0(kr)-\frac{(\lambda+\mu)}{2\mu}A_m z e^{kz}J_0(kr)$$
$$+E_m k e^{kz}J_0(kr). \quad\ldots\ldots\ldots(40)$$

E_m は任意の常數である.

(33) によつて應力の分力を求めてみると,

$$\widehat{rr}'=\lambda A_m e^{kz}J_0(kr)-\lambda+\mu)A_m\frac{z}{k}e^{kz}\frac{\partial^2 J_0(kr)}{\partial r^2}$$
$$+2\mu E_m e^{kz}\frac{\partial^2 J_0(kr)}{\partial r^2}, \quad\ldots\ldots\ldots(41)$$

$$\widehat{\theta\theta}'=\lambda A_m e^{kz}J_0(kr)-(\lambda+\mu)A_m\frac{z}{k}e^{kz}\frac{1}{r}\frac{\partial J_0(kr)}{\partial r}$$
$$+2\mu E_m e^{kz}\frac{1}{r}\frac{\partial J_0(kr)}{\partial r}, \quad\ldots\ldots\ldots(42)$$

$$\widehat{zz}'=(\lambda+2\mu)A_m e^{kz}J_0(kr)-(\lambda+\mu)kzA_m e^{kz}J_0(kr)$$
$$+2\mu k^2 E_m e^{kz}J_0(kr), \quad\ldots\ldots\ldots(43)$$

$$\widehat{rz}'=\frac{\mu}{k}A_m e^{kz}\frac{\partial J_0(kr)}{\partial r}-(\lambda+\mu)zA_m e^{kz}\frac{\partial J_0(kr)}{\partial r}$$
$$+2\mu k E_m e^{kz}\frac{\partial J_0(kr)}{\partial r}. \quad\ldots\ldots\ldots(44)$$

これ等一般解を用ひて, 彈性體の平面が自由面である條件, 即ち $z=0$ に於て

$$\left.\begin{aligned}\widehat{zz}'(43)+\widehat{zz}(31)=0,\\ \widehat{rz}'(44)+\widehat{zr}(32)=0\end{aligned}\right\} \quad\ldots\ldots\ldots(45)$$

なる樣に常數 A_m, E_m を調節し, 求め得た常數を (39), (40), (41), (42), (43), (44 に代入する時は,

$$u'=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n\int_0^{\infty}\frac{\{(\lambda+3\mu)+2(\lambda+\mu)k\xi\}k^{n-1}ze^{-k(\xi-z)}}{2\mu(n!)}\frac{\partial J_0(kr)}{\partial k}dk$$

$$\times\int_0^\pi f(\theta)P_n(\cos\theta)\sin\theta\,d\theta$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n\int_0^\infty\frac{\{(2\mu(\lambda+2\mu)+(\lambda+\mu)(\lambda+3\mu)k\xi\}}{2\mu(\lambda+\mu)(n!)}e^{-k(\xi-z)}\frac{\partial J_0(kr)}{\partial r}k^{n-2}dk$$

$$\times\int_0^\pi f(\theta)P_n(\cos\theta)\sin\theta d\theta$$

$$+\sum_{n=1}^{n=3}\beta_n\int_0^\infty\frac{\{(\lambda+3\mu)+2(\lambda+\mu)k\xi\}\,k^{n-1}z\,e^{-k(\xi-z)}}{2(n!)\mu}\frac{\partial J_0(kr)}{\partial r}dk$$

$$+\sum_{n=1}^{n=3}\beta_n\int_0^\infty\frac{\{(2\mu(\lambda+2\mu)+(\lambda+\mu)(\lambda+3\mu)k\xi\}}{2\mu(\lambda+\mu)(n!)}e^{-k(\xi-z)}\frac{\partial J_0(kr)}{\partial r}k^{n-2}dk$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}\gamma_n\int_0^\infty\frac{2z}{(n!)}e^{-k(\xi-z)}\frac{\partial J_0(kr)}{\partial r}k^{n+1}dk\int_0^\pi f(\theta)P_n(\cos\theta)\sin\theta\,d\theta$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\lambda+3\mu)\gamma_n}{(\lambda+\mu)(n!)}\int_0^\infty e^{-k(\xi-z)}\frac{\partial J_0(kr)}{\partial r}k^n dk\int_0^\pi f(\theta)P_n(\cos\theta)\sin\theta\,d\theta$$

$$+\sum_{n=1}^{n=3}\delta_n\int_0^\infty\frac{2z}{(n!)}e^{-k(\xi-z)}\frac{\partial J_0(kr)}{\partial r}k^{n+1}dk$$

$$+\sum_{n=1}^{n=3}\frac{(\lambda+3\mu)\delta_n}{(\lambda+\mu)(n!)}\int_0^\infty e^{-k(\xi-z)}\frac{\partial J_0(kr)}{\partial r}k^n dk,\qquad\ldots\ldots\ldots\ldots(45)$$

$$w'=-\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n\int_0^\infty\frac{\{(\lambda+3\mu)+2(\lambda+\mu)k\xi\}\,e^{-k(\xi-z)}k^{n-1}}{2(\lambda+\mu)(n!)}J_0(kr)\left\{\frac{(\lambda+3\mu)}{\mu}-\frac{(\lambda+\mu)}{\mu}kz\right\}$$

$$dk\times\int_0^\pi f(\theta)P_n(\cos\theta)\sin\theta\,d\theta$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n\int_0^\infty\frac{\{2\mu(\lambda+2\mu)+(\lambda+\mu)(\lambda+3\mu)k\xi\}}{2\mu(\lambda+\mu)(n!)}e^{-k(\xi-z)}k^{n-1}J_0(kr)\,dk$$

$$\times\int_0^\pi f(\theta)P_n(\cos\theta)\sin\theta\,d\theta$$

$$-\sum_{n=1}^{n=3}\beta_n\int_0^\infty\frac{\{(\lambda+3\mu)+2(\lambda+\mu)k\xi\}\,e^{-k(\xi-z)}k^{n-1}}{2(n!)(\lambda+\mu)}$$

$$J_0(kr)\left\{\frac{(\lambda+3\mu)}{\mu}-\frac{(\lambda+\mu)}{\mu}kz\right\}dk$$

$$+\sum_{n=1}^{n=3}\beta_n\int_0^\infty\frac{\{2\mu(\lambda+2\mu)+(\lambda+\mu)(\lambda+3\mu)k\xi\}}{2\mu(\lambda+\mu)(n!)}e^{-k(\xi-z)}J_0(rk)k^{n-1}dk$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2z\gamma_n}{(n!)}\int_0^\infty e^{-(\xi-z)}J_0(kr)k^{n+2}dk\int_0^\pi f(\theta)P_n(\cos\theta)\sin\theta\,d\theta$$

$$-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\lambda+3\mu)\gamma_n}{(\lambda+\mu)(n!)}\int_0^{\infty}e^{-k(\xi-z)}J_0(kr)k^{n+1}dk\int_0^{\pi}f(\theta)P_n(\cos\theta)\sin\theta d\theta$$

$$+\sum_{n=1}^{n=3}\frac{2z\delta_n}{(n!)}\int_0^{\infty}e^{-k(\xi-z)}J_0(kr)k^{n+2}dk$$

$$-\sum_{n=1}^{n=3}\frac{(\lambda+3\mu)\delta_m}{(\lambda+\mu)(n!)}\int_0^{\infty}e^{-k(\xi-z)}J_0(kr)k^{n+1}dk, \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(46)$$

$$\widehat{rr'}=-\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n\int_0^{\infty}\frac{\lambda\{(\lambda+3\mu)+2(\lambda+\mu)k\xi\}e^{-k(\xi-z)}k^n}{(\lambda+\mu)n!}J_0(kr)dk$$

$$\times\int_0^{\pi}f(\theta)P_n(\cos\theta)\sin\theta d\theta$$

$$+z\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n\int_0^{\infty}\frac{\{(\lambda+3\mu)+2(\lambda+\mu)k\xi\}e^{-k(\xi-z)}k^n}{n!}\frac{\partial^2J_0(kr)}{\partial r^2}dk$$

$$\times\int_0^{\pi}f(\theta)P_n(\cos\theta)\sin\theta d\theta$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n\int_0^{\infty}\frac{\{2\mu(\lambda+2\mu)+(\lambda+\mu)(\lambda+3\mu)k\xi\}}{n!}k^ne^{-k(\xi-z)}\frac{\partial^2J_0(kr)}{\partial r^2}dk$$

$$\times\int_0^{\pi}f(\theta)P_n(\cos\theta)\sin\theta d\theta$$

$$+\sum_{n=1}^{n=3}\beta_n\int_0^{\infty}\frac{\lambda\{(\lambda+3\mu)+2(\lambda+\mu)k\xi\}e^{-k(\xi-z)}k^n}{(\lambda+\mu)n!}J_0(kr)dk$$

$$+z\sum_{n=1}^{n=3}\beta_n\int_0^{\infty}\frac{\{(\lambda+3\mu)+2(\lambda+\mu)k\xi\}e^{-k(\xi-z)}k^n}{n!}\frac{\partial^2J_0(kr)}{\partial r^2}dk$$

$$+\sum_{n=1}^{n=3}\beta_n\int_0^{\infty}\frac{\{2\mu(\lambda+2\mu)+(\lambda+\mu)(\lambda+3\mu)k\xi\}}{n!}k^ne^{-k(\xi-z)}\frac{\partial^2J_0(kr)}{\partial r^2}dk$$

$$-\frac{4\mu\lambda}{(\lambda+\mu)}\sum_{n=0}^{\infty}\gamma_n\int_0^{\infty}\frac{e^{-k(\xi-2)}}{n!}J_0(kr)k^{n+2}dk\int_0^{2\pi}f(\theta)P_n(\cos\theta)\sin\theta d\theta$$

$$+4\mu z\sum_{n=0}^{\infty}\gamma_n\int_0^{\infty}\frac{e^{-k(\xi-z)}}{n!}\frac{\partial^2J_0(kr)}{\partial r^2}k^{n+1}dk\int_0^{2\pi}f(\theta)P_n(\cos\theta)\sin\theta d\theta$$

$$+\frac{2\mu(\lambda+3\mu)}{(\lambda+\mu)}\sum_{n=0}^{\infty}\gamma_n\int_0^{\infty}\frac{e^{-k(\xi-z)}}{n!}\frac{\partial^2J_0(kr)}{\partial r^2}k^ndk\int_0^{2\pi}f(\theta)P_n(\cos\theta)\sin\theta d\theta$$

$$-\frac{4\mu\lambda}{(\lambda+\mu)}\sum_{n=1}^{n=3}\delta_n\int_0^{\infty}\frac{e^{-k(\xi-z)}}{n!}J_0(kr)k^{n+2}dk$$

$$+4\mu z\sum_{n=1}^{n=3}\delta_n\int_0^{\infty}\frac{e^{-k(\xi-z)}}{n!}\frac{\partial^2J_0(kr)}{\partial r^2}k^{n+1}dk$$

$$+\frac{2\mu(\lambda+3\mu)}{(\lambda+\mu)}\sum_{n=1}^{n=3}\delta_n\int_0^\infty\frac{e^{-k(\xi-z)}}{n!}\frac{\partial^2 J_0(kr)}{\partial r^2}k^n dk, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (47)$$

$$\widehat{\theta\theta'}=-\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n\int_0^\infty\frac{\lambda\{(\lambda+3\mu)+2(\lambda+\mu)k\xi\}e^{-k(\xi-z)}k^n}{(\lambda+\mu)n!}J_0(kr)dk$$

$$\times\int_c^\pi f(\theta)P_n(\cos\theta)\sin\theta\,d\theta$$

$$+z\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n\int_0^\infty\frac{\{(\lambda+3\mu)+2(\lambda+\mu)k\xi\}e^{-k(\xi-z)}}{n!}\frac{1}{r}\frac{\partial J_0(kr)}{\partial r}k^n dk$$

$$\times\int_0^\pi f(\theta)P_n(\cos\theta)\sin\theta\,d\theta.$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n\int_0^\infty\frac{\{(2\mu(\lambda+2\mu)+(\lambda+\mu)(\lambda+3\mu)k\xi\}}{n!}e^{-k(\xi-z)}\frac{1}{r}\frac{\partial J_0(kr)}{\partial r}k^n dk$$

$$\times\int_0^\pi f(\theta)P_n(\cos\theta)\sin\theta\,d\theta$$

$$-\sum_{n=1}^{n=3}\beta_n\int_0^\infty\frac{\lambda\{(\lambda+3\mu)+2(\lambda+\mu)k\xi\}e^{-k(\xi-z)}}{(\lambda+\mu)(n!)}J_0(kr)k^n dk$$

$$+z\sum_{n=1}^{n=3}\beta_n\int_0^\infty\frac{\{(\lambda+3\mu)+2(\lambda+\mu)k\xi\}e^{-k(\xi-z)}}{n!}\frac{1}{r}\frac{\partial J_0(kr)}{\partial r}k^n dk$$

$$+\sum_{n=1}^{n=3}\beta_n\int_0^\infty\frac{\{2\mu(\lambda+2\mu)+(\lambda+\mu)(\lambda+3\mu)k\xi\}}{n!}e^{-k(\xi-z)}\frac{1}{r}\frac{\partial J_0(kr)}{\partial r}k^n dk$$

$$-\frac{4\mu\lambda}{(\lambda+\mu)}\sum_{n=0}^{\infty}\gamma_n\int_0^\infty\frac{e^{-k(\xi-z)}}{n!}J_0(kr)k^{n+2}dk\int_0^\pi f(\theta)P_n(\cos\theta)\sin\theta\,d\theta$$

$$+4\mu z\sum_{n=0}^{\infty}\gamma_n\int_0^\infty\frac{e^{-k(\xi-z)}}{n!}\frac{1}{r}\frac{\partial J_0(kr)}{\partial r}k^{n+1}dk\int_0^\pi f(\theta)P_n(\cos\theta)\sin\theta\,d\theta$$

$$+\frac{2\mu(\lambda+3\mu)}{(\lambda+\mu)}\sum_{n=0}^{\infty}\gamma_n\int_0^\infty\frac{e^{-k(\xi-z)}}{n!}\frac{1}{r}\frac{\partial J_0(kr)}{\partial r}k^n dk\int_0^\pi f(\theta)P_n(\cos\theta)\sin\theta\,d\theta$$

$$-\frac{4\mu\lambda}{(\lambda+\mu)}\sum_{n=1}^{n=3}\delta_n\int_0^\infty\frac{e^{-k(\xi-z)}}{n!}J_0(kr)k^{n+2}dk$$

$$+4\mu z\sum_{n=1}^{n=3}\delta_n\int_0^\infty\frac{e^{-k(\xi-z)}}{n!}\frac{1}{r}\frac{\partial J_0(kr)}{\partial r}k^{n+1}dk$$

$$+\frac{2\mu(\lambda+3\mu)}{(\lambda+\mu)}\sum_{n=1}^{n=3}\delta_n\int_0^\infty\frac{e^{-k(\xi-z)}}{n!}\frac{1}{r}\frac{\partial J_0(kr)}{\partial r}k^n dk, \quad \ldots\ldots\ldots (48)$$

$$\widehat{zz'}=-\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n\int_0^\infty\frac{\{(\lambda+2\mu)-(\lambda+\mu)kz\}}{(\lambda+\mu)n!}\{(\lambda+3\mu)+2(\lambda+\mu)k\xi\}e^{-k(\xi-z)}J_0(kr)k^n dk$$

$$\times\int_0^\pi f(\theta)P_n(\cos\theta)\sin\theta\,d\theta$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n\int_0^\infty\frac{\{2\mu(\lambda+2\mu)+(\lambda+\mu)(\lambda+3\mu)k\xi\}}{(\lambda+\mu)n!}e^{-k(\xi-z)}J_0(kr)k^n dk$$

$$\times\int_0^\pi f(\theta)P_n(\cos\theta)\sin\theta\,d\theta$$

$$-\sum_{n=1}^{n=3}\beta_n\int_0^\infty\frac{\{(\lambda+3\mu)+2(\lambda+\mu)k\xi\}\{(\lambda+2\mu)-(\lambda+\mu)kz\}}{(\lambda+\mu)\,(n!)}$$

$$J_0(kr)e^{-k(\xi-z)}k^n dk$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n\int_0^\infty\frac{\{2\mu(\lambda+2\mu)+(\lambda+\mu)(\lambda+3\mu)k\xi\}}{n!\,(\lambda+\mu)}e^{-k(\xi-z)}J_0(kr)k^n dk$$

$$-2\mu\sum_{n=0}^{\infty}\gamma_n\int_0^\infty\frac{e^{-k(\xi-z)}}{n!}J_0(kr)k^{n+2}dk\int_0^\pi f(\theta)P_n(\cos\theta)\sin\theta\,d\theta$$

$$+4\mu z\sum_{n=0}^{\infty}\gamma_n\int_0^\infty\frac{e^{-k(\xi-z)}}{n!}J_0(kr)k^{n+3}dk\int_0^\pi f(\theta)P_n(\cos\theta)\sin\theta\,d\theta$$

$$-2\mu\sum_{n=1}^{n=3}\delta_n\int_0^\infty\frac{e^{-k(\xi-z)}}{n!}J_0(kr)k^{n+2}dk$$

$$+4\mu z\sum_{n=1}^{n=3}\delta_n\int_0^\infty\frac{e^{-k(\xi-z)}}{n!}J_0(kr)k^{n+3}dk, \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(49)$$

$$\widehat{rz}'=-\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n\int_0^\infty\frac{\{(\lambda+3\mu)+2(\lambda+\mu)k\xi\}}{n!(\lambda+\mu)}\{\mu-(\lambda+\mu)kz\}\,e^{-k(\xi-z)}\frac{\partial J_0(kr)}{\partial r}k^{n-1}dk$$

$$\times\int_0^\pi f(\theta)P_n(\cos\theta)\sin\theta\,d\theta$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n\int_0^\infty\frac{\{2\mu(\lambda+2\mu)+(\lambda+\mu)(\lambda+3\mu)k\xi\}}{(\lambda+\mu)(n!)}e^{-k(\xi-z)}\frac{\partial J_0(kr)}{\partial r}k^{n-1}dk$$

$$\times\int_0^\pi f(\theta)P_n(\cos\theta)\sin\theta\,d\theta$$

$$-\sum_{n=1}^{n=3}\beta_n\int_0^\infty\frac{\{(\lambda+3\mu)+2(\lambda+\mu)k\xi\}}{(\lambda+\mu)(n!)}\{\mu-(\lambda+\mu)kz\}\,e^{-k(\xi-z)}\frac{\partial J_0(kr)}{\partial r}k^{n-1}dk$$

$$+\sum_{n=1}^{n=3}\beta_n\int_0^\infty\frac{\{2\mu(\lambda+2\mu)+(\lambda+\mu)(\lambda+3\mu)k\xi\}}{(\lambda+\mu)(n!)}e^{-k(\xi-z)}\frac{\partial J_0(kr)}{\partial r}k^{n-1}dk$$

$$-\sum_{n=0}^{\infty}\gamma_n\frac{4\mu}{(\lambda+\mu)}\int_0^\infty\{\mu-(\lambda+\mu)\,kz\}\frac{e^{-k(\xi-z)}}{n!}\frac{\partial J_0(kr)}{\partial r}k^{n+1}dk$$

$$\times\int_0^\pi f(\theta)P_n(\cos\theta)\sin\theta\,d\theta$$

$$+2\mu\sum_{n=0}^{\infty}\gamma_n\int_0^{\infty}\frac{(\lambda+3\mu)}{(\lambda+\mu)}\frac{e^{-k(\xi-z)}}{n!}\frac{\partial J_0(kr)}{\partial r}k^{n+1}dk\int_0^{\pi}f(\theta)P_n(\cos\theta)\sin\theta\,d\theta$$

$$-\sum_{n=1}^{n=3}\delta_n\int_0^{\infty}\frac{4\mu}{(\lambda+\mu)}\{\mu-(\lambda+\mu)kz\}\frac{e^{-k(\xi-z)}}{n!}\frac{\partial J_0(kr)}{\partial r}k^{n+1}dk$$

$$+2\mu\sum_{n=1}^{n=3}\delta_n\int_0^{\infty}\frac{(\lambda+3\mu)}{(\lambda+\mu)}\frac{e^{-k(\xi-z)}}{n!}\frac{\partial J_0(kr)}{\partial r}k^{n+1}dk. \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(50)$$

但し (45)〜(50) に於て.

$$\left.\begin{aligned}
\alpha_n &= -\frac{(2n-1)nA^{n+1}}{\{(2n^2+1)\lambda+2(n^2+n+1)\mu\}},\\
\gamma_n &= \frac{\{(n^2-1)\lambda+(n^2-2)\mu\}A^{n+3}}{2(n+2)\{(2n^2+1)\lambda+2(n^2+n+1)\mu\}\mu},\\
\beta_1 &= -\frac{\rho gA^3}{3(\lambda+2\mu)},\\
\beta_2 &= \frac{20\,\mu\rho g\xi A^3}{(\lambda+2\mu)(9\lambda+14\mu)},\\
\beta_3 &= -\frac{28\,\mu\rho gA^5}{(\lambda+2\mu)(19\lambda+26\mu)},\\
\delta_1 &= \frac{\rho gA^5}{90(\lambda+2\mu)},\\
\delta_2 &= -\frac{2(\lambda+\mu)\rho gA^5}{(\lambda+2\mu)(9\lambda+14\mu)},\\
\delta_3 &= -\frac{2\rho g(\lambda+\mu)A^7}{(\lambda+2\lambda)(19\lambda+26\mu)}.
\end{aligned}\right\} \qquad \cdots\cdots(51)$$

勿論 (51) の A は球狀空窩の半徑を意味してゐる.

以上 (45), (46), (47), (48), (49), (50) によつて (27), (28), (29), (30), (31), 及 (32) で表された變位及び應力を彈性體の表面 $z=0$ に於てこれを自由面ならしめる様に調節する事が出來た. 從つて本問題で求むべき結果即ち重力の作用せる半無限彈性體內に存在する球狀空窩に作用する壓力の爲めに生ずる彈性體內殊に $z=0$ 即ち表面近くでの變形及び應力は次式で完全に解決する事が出來る. 即ち求むる變位を U, W, 應力分力を $\widehat{rr}$, $\widehat{\theta\theta}$, $\widehat{zz}$, $\widehat{rz}$ とすれば

$$\left.\begin{aligned}
U &= u(27)+u'(45),\\
W &= w(28)+w'(46),\\
\widehat{rr} &= \widehat{rr}(29)+\widehat{rr}'(47),\\
\widehat{\theta\theta} &= \widehat{\theta\theta}(30)+\widehat{\theta\theta}'(48),
\end{aligned}\right\} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(52)$$

$$\left.\begin{aligned}\widehat{zz}&=\widehat{zz}(31)+\widehat{zz}'(49),\\ \widehat{rz}&=\widehat{rz}(32)+\widehat{rz}'(50).\end{aligned}\right\}$$

これ等の結果を數計算によつて，球狀空窩の內面に作用する壓力の $f(\theta)$ なる分布狀態を具體的に色々與へて (52) を圖示すれば色々面白い性質のある事が發見せらる筈である．この具體的の硏究は次の機會に讓る事にして，以下單に重力の作用を考へないで，半無限彈性體の內部に球狀空窩のある時これに次の樣な分布の壓力が作用してゐる場合の $z=0$ 卽ち表面での彈性問題を硏究しておく．

3. $R=A$ なる球狀空窩の內面に於て，

$$\left.\begin{aligned}\widehat{R\theta}&=0,\\ \widehat{RR}&=-\boldsymbol{P}P_n(\cos\theta)\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(53)$$

なる樣な壓力が作用してゐる時 $z=0$ 卽ち彈性體（重力の作用を無視した彈性體）の表面での變位 V, W 及び應力 $\widehat{rr}$, $\widehat{\theta\theta}$ を求めてみると次の樣になる．(勿論この結果は (52) を利用して解決したものである．尙 $z=0$ では $\widehat{rz}=\widehat{zz}=0$ である．)

$$U_{z=0}=\frac{\{(n^2-1)\lambda+(n^2-2)\mu\}A^{n+3}\boldsymbol{P}}{(n+2)\{(2n^2+1)\lambda+2(n^2+n+1)\mu\}\mu(n!)}\frac{(\lambda+2\mu)}{(\lambda+\mu)}\int_0^\infty e^{-k\xi}\frac{\partial J_0(kr)}{\partial r}k^n dk$$
$$-\frac{n(2n-1)A^{n+1}\boldsymbol{P}}{2\{(2n^2+1)\lambda+2(n^2+n+1)\mu\}\mu(n!)}\Big[2\xi(\lambda+2\mu)\int_0^\infty e^{-k\xi}\frac{\partial J_0(kr)}{\partial r}k^{n-1}dk$$
$$+\frac{2\mu(\lambda+2\mu)}{(\lambda+\mu)}\int_0^\infty e^{-k\xi}\frac{\partial J_0(kr)}{\partial r}k^{n-2}dk\Big],\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(54)$$

$$W_{z=0}=-\frac{\{(n^2-1)\lambda+(n^2-2)\mu\}A^{n+3}\boldsymbol{P}}{(n+2)\{(2n^2+1)\lambda+2(n^2+n+1)\mu\}(n')\mu}\frac{(\lambda+2\mu)}{(\lambda+\mu)}$$
$$\times\int_0^\infty e^{-k\xi}J_0(kr)k^{n+1}dk$$
$$+\frac{n(2n-1)A^{n+1}\boldsymbol{P}}{\{2n^2+1)\lambda+2(n^2+n+1)\mu\}\mu(n!)}\Big[(\lambda+3\mu)\int_0^\infty e^{-k\xi}J_0(kr)k^{n-1}dk$$
$$+\xi(\lambda+2\mu)\int_0^\infty e^{-k\xi}J_0(kr)k^n dk\Big],\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(55)$$

$$\widehat{rz}_{z=0}=\widehat{zz}_{z=0}=0,\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(56)$$

$$\widehat{rr}_{z=0}=\frac{2\lambda}{(n!)(\lambda+\mu)}\frac{n(2n-1)A^{n+1}\boldsymbol{P}}{\{(2n^2+1)\lambda+2(n^2+n+1)\mu\}}$$
$$\times\int_0^\infty\{\mu+(\lambda+\mu)k\xi\}e^{-k\xi}J_0(kr)k^n dk$$

$$-\frac{1}{(n!)(\lambda+\mu)}\frac{n(2n-1)A^{n+1}\boldsymbol{P}}{\{(2n^2+1)\lambda+2(n^2+n+1)\mu\}}$$
$$\times\int_0^\infty\{2\mu(\lambda+2\mu)+(\lambda+\mu)(\lambda+3\mu)k\xi\}e^{-k\xi}\frac{\partial^2 J_0(kr)}{\partial r^2}k^{n-2}dk$$
$$-\frac{2\mu(\lambda+2\mu)}{(n!)(\lambda+\mu)}\frac{\{(n^2-1)\lambda+(n^2-2)\mu\}A^{n+3}p}{(n+2)\{(2n^2+1)\lambda+2(n^2+n+1)\mu\}\mu}$$
$$\times\int_0^\infty e^{-k\xi}\frac{\partial^2 J_0(kr)}{\partial r^2}k^n dk$$
$$-\frac{2\mu\lambda}{(n!)(\lambda+\mu)}\frac{\{(n^2-1)\lambda+(n^2-2)\mu\}A^{n+3}\boldsymbol{P}}{(n+2)\{(2n^2+1)\lambda+2(n^2+n+1)\mu\}\mu}$$
$$\times\int_0^\infty e^{-k\xi}J_0(kr)k^{n+2}dk, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(57)$$

$$\widehat{\theta\theta}_{z=0}=\frac{2\lambda}{(n!)(\lambda+\mu)}\frac{n(2n-1)A^{n+1}\boldsymbol{P}}{\{(2n^2+1)\lambda+2(n^2+n+1)\mu\}}$$
$$\times\int_0^\infty\{\mu+(\lambda+\mu)k\xi\}e^{-k\xi}J_0(kr)k^n dk$$
$$-\frac{2\lambda\{(n^2-1)\lambda+(n^2-2)\mu\}A^{n+3}\boldsymbol{P}}{(n!)(\lambda+\mu)(n+2)\{(2n^2+1)\lambda+2(n^2+n+1)\mu\}}\int_0^\infty e^{-k\xi}J_0(kr)k^{n+2}dk$$
$$+\frac{2(\lambda+2\mu)\{(n^2-1)\lambda+(n^2-2)\mu\}A^{n+3}\boldsymbol{P}}{(n!)(\lambda+\mu)(n+2)\{(2n^2+1)\lambda+2(n^2+n+1)\mu\}}$$
$$\times\int_0^\infty e^{-k\xi}\frac{1}{r}\frac{\partial J_0(kr)}{\partial r}k^n dk$$
$$-\frac{n(2n-1)A^{n+1}\boldsymbol{P}}{(n!)(\lambda+\mu)\{2n^2+1)\lambda+2(n^2+n+1)\mu\}}\int_0^\infty\{2\mu(\lambda+2\mu)+(\lambda+\mu)$$
$$\times(\lambda+3\mu)k\xi\}\ e^{-k\xi}\frac{1}{r}\frac{\partial J_0(kr)}{\partial r}k^{n-2}dk.(58)$$

以上 (54), (55), (56), (57), (58) によつて夫々空窩に作用する壓力が $P_n(\cos\theta)$ で表される時の半無限彈性體の表面に於ける變形及び應力分布を研究する事が出來る.

今 $n=0$, $n=1$, 及び $n=2$ の場合に就て卽ち空窩に働く壓力 $\widehat{RR}$ が夫々 $\boldsymbol{P}^0$, $\boldsymbol{P}_0\cos\theta$, 及び $\boldsymbol{P}_0 P_2(\cos\theta)$ の場合に就て研究を進めてみよう.

3 *a*. $n=0$:—(壓力が $\boldsymbol{P}_0$ で一様な場合)

$$R=A:—\widehat{RR}=\boldsymbol{P}_0,\ \widehat{R\theta}=0. \quad \ldots\ldots\ldots(59)$$

この場合表面では

$$U_{z=0}=-\frac{A^3\boldsymbol{P}_0(\lambda+2\mu)}{2\mu(\lambda+\mu)}\int_0^\infty e^{-k\xi}\frac{\partial J_0(kr)}{\partial r}dk, \quad \cdots\cdots\cdots(60)$$

$$W_{z=0}=\frac{A^3\boldsymbol{P}_0(\lambda+2\mu)}{2\mu(\lambda+\mu)}\int_0^\infty e^{-k\xi}J_0(kr)kdk, \quad \cdots\cdots\cdots(61)$$

$$\widehat{rr}_{z=0}=-\frac{(\lambda+2\mu)}{(\lambda+\mu)}A^3\boldsymbol{P}_0\int_0^\infty e^{-k\xi}\frac{J_1(kr)}{r}kdk+2A^3\boldsymbol{P}_0\int_0^\infty e^{-k\xi}J_0(kr)k^2dk, \cdots(62)$$

$$\widehat{\theta\theta}_{z=0}=\frac{(\lambda+2\mu)}{(\lambda+\mu)}A^3\boldsymbol{P}_0\int_0^\infty e^{-k\xi}\frac{J_1(kr)}{r}kdk+\frac{\lambda A^3P_0}{(\lambda+\mu)}\int_0^\infty e^{-k\xi}J_0(kr)k^2dk. \cdots(63)$$

即ちこれを書きなほして,

$$U_{z=0}=\frac{A^3\boldsymbol{P}_0(\lambda+2\mu)}{2\mu(\lambda+\mu)}\frac{r}{(r^2+\xi^2)^{3/2}}, \quad \cdots\cdots\cdots(60)'$$

$$W_{z=0}=\frac{A^3\boldsymbol{P}_0(\lambda+2\mu)}{2\mu(\lambda+\mu)}\frac{\xi}{(r^2+\xi^2)^{3/2}}, \quad \cdots\cdots\cdots(61)'$$

$$\widehat{rr}_{z=0}=-\frac{(\lambda+2\mu)}{(\lambda+\mu)}\frac{A^3\boldsymbol{P}_0}{(r^2+\xi^2)^{3/2}}+2A^3\boldsymbol{P}_0\frac{(2\xi^2-r^2)}{(r^2+\xi^2)^{5/2}}, \quad \cdots(62)'$$

$$\widehat{\theta\theta}_{z=0}=\frac{(\lambda+2\mu)}{(\lambda+\mu)}\frac{A^3\boldsymbol{P}_0}{(r^2+\xi^2)^{3/2}}+\frac{\lambda}{(\lambda+\mu)}A^3\boldsymbol{P}_0\frac{(2\xi^2-r^2)}{(r^2+\xi^2)^{5/2}}. \cdots(63)'$$

今弾性體のポアツソン比を 1/4 とし, 縦弾性係數を E とすれば,

$$U_{z=0}=\frac{15}{8}\frac{\boldsymbol{P}A}{E}\left(\frac{A}{\xi}\right)^2\frac{r/\xi}{\left\{\left(\frac{r}{\xi}\right)^2+1\right\}^{3/2}}, \quad \cdots\cdots\cdots(64)$$

$$W_{z=0}=\frac{15}{8}\frac{\boldsymbol{P}A}{E}\left(\frac{A}{\xi}\right)^2\frac{1}{\left\{\left(\frac{r}{\xi}\right)^2+1\right\}^{3/2}}, \quad \cdots\cdots\cdots(65)$$

$$\widehat{rr}_{z=0}=\boldsymbol{P}_0\left(\frac{A}{\xi}\right)^3\left[-\frac{3}{2\left\{\left(\frac{r}{\xi}\right)^2+1\right\}^{3/2}}+\frac{2\left\{2-\left(\frac{r}{\xi}\right)^2\right\}}{\left\{\left(\frac{r}{\xi}\right)^2+1\right\}^{5/2}}\right], \quad \cdots(66)$$

$$\widehat{\theta\theta}_{z=0}=\boldsymbol{P}_0\left(\frac{A}{\xi}\right)^3\left\{\frac{3}{2\left\{\left(\frac{r}{\xi}\right)^2+1\right\}^{3/2}}+\frac{\left\{2-\left(\frac{r}{\xi}\right)^2\right\}}{2\left\{\left(\frac{r}{\xi}\right)^2+1\right\}^{5/2}}\right\}. \cdots\cdots(67)$$

次にポアツソン比が $\frac{1}{2}$ の時には,

$$U_{z=0}=\frac{3}{2}\frac{\boldsymbol{P}A}{E}\left(\frac{A}{\xi}\right)\frac{\left(\frac{r}{\xi}\right)}{\left\{\left(\frac{r}{\xi}\right)^2+1\right\}^{3/2}}, \quad \cdots\cdots(68)$$

$$W_{z=0}=\frac{3}{2}\frac{\boldsymbol{P}A}{E}\left(\frac{A}{\xi}\right)^2\frac{1}{\left\{\left(\frac{r}{\xi}\right)^2+1\right\}^{3/2}}, \quad \cdots\cdots(69)$$

$$\widehat{rr}_{z=0}=\boldsymbol{P}\left(\frac{A}{\xi}\right)^3\left[\frac{-1}{\left\{\left(\frac{r}{\xi}\right)^2+1\right\}^{3/2}}+\frac{2\left\{2-\left(\frac{r}{\xi}\right)^2\right\}}{\left\{\left(\frac{r}{\xi}\right)^2+1\right\}^{5/2}}\right], \quad \cdots\cdots(70)$$

$$\widehat{\theta\theta}_{z=0}=\boldsymbol{P}\left(\frac{A}{\xi}\right)^3\left[\frac{1}{\left\{\left(\frac{r}{\xi}\right)^2+1\right\}^{3/2}}+\frac{\left\{2-\left(\frac{r}{\xi}\right)^2\right\}}{\left\{\left(\frac{r}{\xi}\right)^2+1\right\}^{5/2}}\right], \quad \cdots\cdots(71)$$

表面に於ける變形の量は內部に加へられる壓力の大きさ，空窩の大きさ卽ち半徑又空窩中心の深さ等に關係しており $PA^3/E\xi^2$ なる量に比例してゐる事がわかる．又表面上の應力は $\boldsymbol{P}\left(\frac{A}{\xi}\right)^3$ に比例してをる．變位，應力の分布狀態よりわかる事は，若し彈性體が主應力で破損が起るとせば $r=0$ の所で起り，最大剪斷應力で破損が起るとせば $r=\xi$ の所卽ち深さと同じ位の距離だけ離れた所で圓形をなして破損が現れる．

3 *b*. $n=1$:—

空窩內面で

$$\left.\begin{aligned}\widehat{R\theta}&=0,\\ \widehat{RR}&=-\boldsymbol{P}_0P_1(\cos\theta).\end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots(72)$$

この場合表面 $z=0$ では，

$$U_{z=0}=\frac{A^2\boldsymbol{P}_0}{9(\lambda+\mu)}\int_0^\infty e^{-k\xi}J_1(kr)k^2dk+\frac{A^2\xi\boldsymbol{P}_0}{3\mu}\int_0^\infty e^{-k\xi}J_1(kr)kdk$$

$$+\frac{A^2\boldsymbol{P}_0}{3(\lambda+\mu)}\int_0^\infty e^{-k\xi}J_1(kr)dk$$

$$=\frac{A^4\boldsymbol{P}_0}{3(\lambda+\mu)}\frac{r\xi}{(r^2+\xi^2)^{5/2}}+\frac{A^2\xi\boldsymbol{P}}{3\mu}\frac{r}{(r^2+\xi^2)^{3/2}}$$

$$+\frac{A^2\boldsymbol{P}_0}{3(\lambda+\mu)}\frac{r\sqrt{r^2+\xi^2}-\xi}{r\sqrt{r^2+\xi^2}}, \quad\cdots\cdots(73)$$

$$W_{z=0}=\frac{A^4\boldsymbol{P}_0}{9(\lambda+\mu)}\int_0^\infty e^{-k\xi}J_0(kr)k^2dk+\frac{A^2\boldsymbol{P}_0(\lambda+3\mu)}{3\mu(\lambda+2\mu)}\int_0^\infty e^{-k\xi}J_0(kr)dk$$

$$+\frac{A^2\boldsymbol{P}_0\xi}{3\mu}\int_0^\infty e^{-k\xi}J_0(kr)kdk$$

$$=\frac{A^4\boldsymbol{P}_0}{9(\lambda+\mu)}\frac{2\xi^2-r^2}{(r^2+\xi^2)^{5/2}}+\frac{A^2\boldsymbol{P}_0(\lambda+3\mu)}{3\mu(\lambda+2\mu)}\frac{1}{(r^2+\xi^2)^{1/2}}$$

$$+\frac{A^2\boldsymbol{P}_0\xi^2}{3\mu(r^2+\xi^2)^{3/2}} \quad\cdots\cdots(74)$$

ポアツソン比が $\frac{1}{4}$ の時には,

$$U_{z=0}=\frac{5A\boldsymbol{P}_0}{12E}\left(\frac{A}{\xi}\right)^3\frac{\frac{r}{\xi}}{\left\{\left(\frac{r}{\xi}\right)^2+1\right\}^{5/2}}+\frac{5A\boldsymbol{P}}{6E}\left(\frac{A}{\xi}\right)\frac{\left(\frac{r}{\xi}\right)}{\left\{\left(\frac{r}{\xi}\right)^2+1\right\}^{3/2}}$$

$$+\frac{5A_0\boldsymbol{P}}{12E}\frac{\sqrt{\left\{\left(\frac{r}{\xi}\right)^2+1\right\}}-1}{\left(\frac{r}{\xi}\right)\sqrt{\left(\frac{r}{\xi}\right)^2+1}}\left(\frac{A}{\xi}\right), \quad\cdots\cdots(75)$$

$$W_{z=0}=\frac{5A\boldsymbol{P}_0}{36E}\left(\frac{A}{\xi}\right)^3\frac{\left\{2-\left(\frac{r}{\xi}\right)^2\right\}}{\left\{\left(\frac{r}{\xi}\right)^2+1\right\}^{5/2}}+\frac{20A\boldsymbol{P}_0}{18E}\left(\frac{A}{\xi}\right)\frac{1}{\left\{\left(\frac{r}{\xi}\right)^2+1\right\}^{1/2}}$$

$$+\frac{5A\boldsymbol{P}_0}{6E}\left(\frac{A}{\xi}\right)\frac{1}{\left\{\left(\frac{r}{\xi}\right)^2+1\right\}^{3/2}} \quad\cdots\cdots(76)$$

ポアツソン比が $\frac{1}{2}$ の時には,

$$U_{z=0}=\frac{AP_0}{E}\left(\frac{A}{\xi}\right)\frac{\frac{r}{\xi}}{\left\{\left(\frac{r}{\xi}\right)^2+1\right\}^{3/2}}, \quad\cdots\cdots(77)$$

$$W_{z=0}=\frac{A\boldsymbol{P}_0}{E}\left(\frac{A}{\xi}\right)\left[\frac{1}{\left\{\left(\frac{r}{\xi}\right)^2+1\right\}^{1/2}}+\frac{1}{\left\{\left(\frac{r}{\xi}\right)^2+1\right\}^{3/2}}\right]. \quad\cdots\cdots(78)$$

3 $c.$ $n=2$:—

空窩内面 $R=A$ に於て，

$$\left.\begin{aligned}\widehat{R\theta}&=0,\\ \widehat{RR}&=-\boldsymbol{P}_0P_2(\cos\theta).\end{aligned}\right\}\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots(79)$$

この場合には表面 $z=0$ では變位及應力は次の如くなる．

$$\begin{aligned}U_{z=0}=&-\frac{(\lambda+2\mu)(3\lambda+2\pi)A^5\boldsymbol{P}_0}{8\mu(\lambda+\mu)(9\lambda+14\mu)}\int_0^\infty e^{-k\xi}J_1(kr)k^3dk\\ &+\frac{3(\lambda+2\mu)A^2\xi\boldsymbol{P}_0}{\mu(9\lambda+14\mu)}\int_0^\infty e^{-k\xi}J_1(kr)k^2dk\\ &+\frac{3(\lambda+2\mu)A^3\boldsymbol{P}_0}{(\lambda+\mu)(9\lambda+14\mu)}\int_0^\infty e^{-k\xi}J_1(kr)kdk\\ =&-\frac{3(\lambda+2\mu)(3\lambda+2\mu)}{8\mu(\lambda+\mu)(9\lambda+14\mu)}\frac{r(4\xi^2-r^2)A^5\boldsymbol{P}_0}{(r^2+\xi^2)^{7/2}}\\ &+\frac{3(\lambda+2\mu)A^3\xi\boldsymbol{P}_0}{\mu(9\lambda+14\mu)}\frac{3r\xi}{(r^2+\xi^2)^{5/2}}\\ &+\frac{3(\lambda+2\mu)A^3\boldsymbol{P}_0}{(\lambda+\mu)(9\lambda+14\mu)}\frac{r}{(r^2+\xi^2)^{3/2}},\qquad\cdots\cdots\cdots(80)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}W_{z=0}=&-\frac{(3\lambda+2\mu)A^5\boldsymbol{P}_0(\lambda+2\mu)}{8\mu(9\lambda+14\mu)(\lambda+\mu)}\int_0^\infty e^{-k\xi}J_0(kr)k^3dk\\ &+\frac{3(\lambda+3\mu)A^3\boldsymbol{P}_0}{\mu(9\lambda+14\mu)}\int_0^\infty e^{-k\xi}J_0(kr)kdk\\ &+\frac{3(\lambda+2\mu)A^3\xi\boldsymbol{P}_0}{\mu(9\lambda+14\mu)}\int_0^\infty e^{-k\xi}J_0(kr)k^2dk\\ =&-\frac{(\lambda+2\mu)(3\lambda+2\mu)A^5\boldsymbol{P}_0}{8\mu(\lambda+\mu)(9\lambda+14\mu)}\frac{3\xi(2\xi^2-3r^2)}{(r^2+\xi^2)^{7/2}}\\ &+\frac{3(\lambda+3\mu)A^3\boldsymbol{P}_0}{\mu(9\lambda+14\mu)}\frac{\xi}{(r^2+\xi^2)^{3/2}}\\ &+\frac{3(\lambda+2\mu)A^3\boldsymbol{P}_0\xi}{\mu(9\lambda+14\mu)}\frac{(2\xi^2-r^2)}{(r^2+\varsigma^2)^{5/2}},\qquad\cdots\cdots\cdots(81)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\widehat{rr}_{z=0}=&\frac{12\mu}{(9\lambda+14\mu)}A^3\boldsymbol{P}_0\int_0^\infty e^{-k\xi}J_0(kr)k^2dk\\ &+\frac{9(\lambda+\mu)}{(9\lambda+14\mu)}A^3\xi\boldsymbol{P}_0\int_0^\infty e^{-k\xi}J_0(kr)k^3dk\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&-\frac{(3\lambda+2\mu)(3\lambda+4\mu)}{8(\lambda+\mu)(9\lambda+14\mu)}A^5\boldsymbol{P}_0\int_0^\infty e^{-k\xi}J_0(kr)k^4dk \\
&-\frac{6\mu(\lambda+2\mu)}{(\lambda+\mu)(9\lambda+14\mu)}\frac{A^3\boldsymbol{P}_0}{r}\int_0^\infty e^{-k\xi}J_1(kr)kdk \\
&-\frac{3(\lambda+3\mu)}{(9\lambda+14\mu)}\frac{A^3\xi\boldsymbol{P}_0}{r}\int_0^\infty e^{-k\xi}J_1(kr)k^2dk \\
&+\frac{(\lambda+2\mu)(3\lambda+2\mu)}{4(\lambda+\mu)(9\lambda+14\mu)}\frac{A^5\boldsymbol{P}_0}{r}\int_0^\infty e^{-k\xi}J_1(kr)k^3dk \\
=&\frac{12\mu A^3\boldsymbol{P}_0}{(9\lambda+14\mu)}\frac{(2\xi^2-r^2)}{(r^2+\xi^2)^{5/2}} \\
&+\frac{9(\lambda+\mu)A^3\boldsymbol{P}_0\xi}{(9\lambda+14\mu)}\frac{3\xi(2\xi^2-3r^2)}{(r^2+\xi^2)^{7/2}} \\
&-\frac{(3\lambda+2\mu)(3\lambda+4\mu)A^5\boldsymbol{P}_0}{8(\lambda+\mu)(9\lambda+14\mu)}\frac{3\{3r^4+8\xi^4-24\xi^2r^2\}}{(r^2+\xi^2)^{9/2}} \\
&-\frac{6\mu(\lambda+2\mu)A^3\boldsymbol{P}_0}{(\lambda+\mu)(9\lambda+14\mu)}\frac{1}{(r^2+\xi^2)^{3/2}} \\
&-\frac{3(\lambda+3\mu)\boldsymbol{P}_0A^3\xi}{(9\lambda+14\mu)}\frac{3\xi}{(r^2+\xi^2)^{5/2}} \\
&+\frac{(\lambda+2\mu)(3\lambda+2\mu)A^5\boldsymbol{P}_0}{4(\lambda+\mu)(9\lambda+14\mu)}\frac{3(4\xi^2-r^2)}{(r^2+\xi^2)^{7/2}}\,, \qquad\cdots\cdots\cdots\cdots(82)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\widehat{\theta\theta}_{z=0}=&\frac{6\lambda\mu}{(\lambda+\mu)(9\lambda+14\mu)}A^3\boldsymbol{P}_0\int_0^\infty e^{-k\xi}J_0(kr)k^2dk \\
&+\frac{6\lambda}{(9\lambda+14\mu)}A^3\xi\boldsymbol{P}_0\int_0^\infty c^{-k\xi}J_0(kr)k^3dk \\
&-\frac{\lambda(3\lambda+2\mu)}{4(\lambda+\mu)(9\lambda+14\mu)}A^5\boldsymbol{P}_0\int_0^\infty e^{-k\xi}J_0(kr)k^4dk \\
&+\frac{6\mu(\lambda+2\mu)}{(\lambda+\mu)(9\lambda+14\mu)}\frac{A^3\boldsymbol{P}_0}{r}\int_0^\infty e^{-k\xi}J_1(kr)kdk \\
&+\frac{3(\lambda+3\mu)}{(9\lambda+14\mu)}\frac{A^3\xi\boldsymbol{P}_0}{r}\int_0^\infty e^{-k\xi}J_1(kr)k^2dk \\
&-\frac{(\lambda+2\mu)(3\lambda+2\mu)}{4(\lambda+\mu)(9\sigma+14\mu)}\frac{A^5\boldsymbol{P}_0}{r}\int_0^\infty e^{-k\xi}J_1(kr)k^3dk \\
=&\frac{6\lambda\mu\boldsymbol{P}_0}{(\lambda+\mu)(9\lambda+14\mu)}\frac{A^3(2\xi^2-r^2)}{(r^2+\xi^2)^{5/2}}+\frac{18\lambda\boldsymbol{P}_0}{(9\lambda+14\mu)}\frac{A^3\xi^2(2\xi^2-3r^2)}{(r^2+\xi^2)^{7/2}}
\end{aligned}
$$

$$-\frac{3\lambda(3+2\mu)\boldsymbol{P}_0}{4(\lambda+\mu)(9\lambda+14\mu)}\frac{A^5(3r^4+8\xi^4-24r^2\xi^2)}{(r^2+\xi^2)^{9/2}}$$

$$+\frac{6\mu(\lambda+2\mu)\boldsymbol{P}_0}{(\lambda+\mu)(9\lambda+14\mu)}\frac{A^3}{(r^2+\xi^2)^{3/2}}+\frac{9(\lambda+3\mu)\boldsymbol{P}_0}{(9\lambda+14\mu)}\frac{A^3\xi^2}{(r^2+\xi^2)^{5/2}}$$

$$-\frac{3(\lambda+2\mu)(3\lambda+2\mu)\boldsymbol{P}_0}{4(\lambda+\mu)(9\lambda+14\mu)}\frac{A^5(4\xi^2-r^2)}{(r^2+\xi^2)^{7/2}}. \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(83)$$

次にポアツソン比が $\frac{1}{4}$ の時には，

$$U_{z=0}=-\frac{225}{736}\frac{A\boldsymbol{P}_0}{E}\left(\frac{A}{\xi}\right)^4\frac{\left(\frac{r}{\xi}\right)\left\{4-\left(\frac{r}{\xi}\right)^2\right\}}{\left\{\left(\frac{r}{\xi}\right)^2+1\right\}^{7/2}}+\frac{135}{46}\frac{A\boldsymbol{P}_0}{E}\left(\frac{A}{\xi}\right)^2\frac{\left(\frac{r}{\xi}\right)}{\left\{\left(\frac{r}{\xi}\right)^2+1\right\}^{5/2}}$$

$$+\frac{45}{46}\frac{A\boldsymbol{P}_0}{E}\left(\frac{A}{\xi}\right)^2\frac{\left(\frac{r}{\xi}\right)}{\left\{\left(\frac{r}{\xi}\right)^2+1\right\}^{3/2}}, \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(84)$$

$$W_{z=0}=-\frac{225}{736}\frac{A\boldsymbol{P}_0}{E}\left(\frac{A}{\xi}\right)^4\frac{\left\{2-3\left(\frac{r}{\xi}\right)^2\right\}}{\left\{\left(\frac{r}{\xi}\right)^2+1\right\}^{7/2}}+\frac{60}{46}\frac{A\boldsymbol{P}_0}{E}\left(\frac{A}{\xi}\right)^2\frac{1}{\left\{\left(\frac{r}{\xi}\right)^2+1\right\}^{3/2}}$$

$$+\frac{45}{46}\frac{A\boldsymbol{P}_0}{E}\left(\frac{A}{\xi}\right)^2\frac{\left\{2-\left(\frac{r}{\xi}\right)^2\right\}}{\left\{\left(\frac{r}{\xi}\right)^2+1\right\}^{5/2}}, \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(85)$$

$$\widehat{rr}_{z=0}=\frac{12}{23}\boldsymbol{P}_0\left(\frac{A}{\xi}\right)^3\frac{\left\{2-\left(\frac{r}{\xi}\right)^2\right\}}{\left\{1+\left(\frac{r}{\xi}\right)^2\right\}^{5/2}}+\frac{54}{23}\left(\frac{A}{\xi}\right)^3P_0\frac{\left\{2-3\left(\frac{r}{\xi}\right)^2\right\}}{\left\{\left(\frac{r}{\xi}\right)^2+1\right\}^{7/2}}$$

$$-\frac{105}{368}\left(\frac{A}{\xi}\right)^5\boldsymbol{P}_0\frac{\left\{3\left(\frac{r}{\xi}\right)^4-24\left(\frac{r}{\xi}\right)^2+8\right\}}{\left\{\left(\frac{r}{\xi}\right)^2+1\right\}^{9/2}}$$

$$-\frac{9}{23}\left(\frac{A}{\xi}\right)^3\boldsymbol{P}_0\frac{1}{\left\{\left(\frac{r}{\xi}\right)^2+1\right\}^{3/2}}-\frac{36}{23}\left(\frac{A}{\xi}\right)^3\boldsymbol{P}_0\frac{1}{\left\{\left(\frac{r}{\xi}\right)^2+1\right\}^{5/2}}$$

$$+\frac{45}{184}\left(\frac{A}{\xi}\right)^5 \boldsymbol{P}_0 \frac{\left\{4-\left(\frac{r}{\xi}\right)^2\right\}}{\left\{\left(\frac{r}{\xi}\right)^2+1\right\}^{7/2}}, \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(86)$$

$$\widehat{\theta\theta}_{z=0}=\frac{3}{23}\left(\frac{A}{\xi}\right)^3 \boldsymbol{P}_0 \frac{\left\{2-\left(\frac{r}{\xi}\right)^2\right\}}{\left\{\left(\frac{r}{\xi}\right)^2+1\right\}^{5/2}}+\frac{18}{23}\left(\frac{A}{\xi}\right)^3 \boldsymbol{P}_0 \frac{\left\{2-3\left(\frac{r}{\xi}\right)^2\right\}}{\left\{\left(\frac{r}{\xi}\right)^2+1\right\}^{7/2}}$$

$$-\frac{15}{184}\left(\frac{A}{\xi}\right)^5 \boldsymbol{P}_0 \frac{\left\{3\left(\frac{r}{\xi}\right)^4-24\left(\frac{r}{\xi}\right)^2+8\right\}}{\left\{\left(\frac{r}{\xi}\right)^2+1\right\}^{9/2}}$$

$$+\frac{9}{23}\left(\frac{A}{\xi}\right)^5 \boldsymbol{P}_0 \frac{1}{\left\{\left(\frac{r}{\xi}\right)^2+1\right\}^{3/2}}+\frac{36}{23}\left(\frac{A}{\xi}\right)^3 \boldsymbol{P}_0 \frac{1}{\left\{\left(\frac{r}{\xi}\right)^2+1\right\}^{5/2}}$$

$$-\frac{45}{184}\left(\frac{A}{\xi}\right)^5 \boldsymbol{P}_0 \frac{\left\{4-\left(\frac{r}{\xi}\right)^2\right\}}{\left\{\left(\frac{r}{\xi}\right)^2+1\right\}^{7/2}}. \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(87)$$

ポアツソン比が$\frac{1}{2}$の時には,

$$U_{z=0}=-\frac{3}{8}\frac{A\boldsymbol{P}_0}{E}\left(\frac{A}{\xi}\right)^4 \frac{\left(\frac{r}{\xi}\right)\left\{4-\left(\frac{r}{\xi}\right)^2\right\}}{\left\{\left(\frac{r}{\xi}\right)^2+1\right\}^{7/2}}$$

$$+3\frac{A\boldsymbol{P}_0}{E}\left(\frac{A}{\xi}\right)^2 \frac{\left(\frac{r}{\xi}\right)}{\left\{\left(\frac{r}{\xi}\right)^2+1\right\}^{5/2}}, \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(88)$$

$$W_{z=0}=-\frac{3}{8}\frac{A\boldsymbol{P}_0}{E}\left(\frac{A}{\xi}\right)^4 \frac{\left\{2-3\left(\frac{r}{\xi}\right)^2\right\}}{\left\{\left(\frac{r}{\xi}\right)^2+1\right\}^{7/2}}+\frac{A\boldsymbol{P}_0}{E}\left(\frac{A}{\xi}\right)^2 \frac{1}{\left\{\left(\frac{r}{\xi}\right)^2+1\right\}^{3/2}}$$

$$+\frac{A\boldsymbol{P}_0}{E}\left(\frac{A}{\xi}\right)^2 \frac{\left\{2-\left(\frac{r}{\xi}\right)^2\right\}}{\left\{\left(\frac{r}{\xi}\right)^2+1\right\}^{5/2}}, \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(89)$$

$$\widehat{rr}_{z=0}=3\boldsymbol{P}_0\left(\frac{A}{\xi}\right)^3\frac{\left\{2-3\left(\frac{r}{\xi}\right)^2\right\}}{\left\{\left(\frac{r}{\xi}\right)^2+1\right\}^{7/2}}-\frac{3}{8}\boldsymbol{P}_0\left(\frac{A}{\xi}\right)^5\frac{\left\{3\left(\frac{r}{\xi}\right)^4-24\left(\frac{r}{\xi}\right)^2+8\right\}}{\left\{\left(\frac{r}{\xi}\right)^2+1\right\}^{9/2}}$$

$$-\boldsymbol{P}_0\left(\frac{A}{\xi}\right)^3\frac{1}{\left\{\left(\frac{r}{\xi}\right)^2+1\right\}^{5/2}}+\frac{1}{4}\boldsymbol{P}_0\left(\frac{A}{\xi}\right)^5\frac{\left\{4-\left(\frac{r}{\xi}\right)^2\right\}}{\left\{\left(\frac{r}{\xi}\right)^2+1\right\}^{7/2}} \quad \ldots\ldots(90)$$

$$\widehat{\theta\theta}_{z=0}=2\boldsymbol{P}_0\left(\frac{A}{\xi}\right)^3\frac{\left\{2-3\left(\frac{r}{\xi}\right)^2\right\}}{\left\{\left(\frac{r}{\xi}\right)^2+1\right\}^{7/2}}-\frac{1}{4}\boldsymbol{P}_0\left(\frac{A}{\xi}\right)^5\frac{\left\{3\left(\frac{r}{\xi}\right)^4-24\left(\frac{r}{\xi}\right)^2+8\right\}}{\left\{\left(\frac{r}{\xi}\right)^2+1\right\}^{9/2}}$$

$$+\boldsymbol{P}_0\left(\frac{A}{\xi}\right)^3\frac{1}{\left\{\left(\frac{r}{\xi}\right)^2+1\right\}^{5/2}}-\frac{1}{4}\boldsymbol{P}_0\left(\frac{A}{\xi}\right)^5\frac{\left\{4-\left(\frac{r}{\xi}\right)^2\right\}}{\left\{\left(\frac{r}{\xi}\right)^2+1\right\}^{7/2}}. \quad \ldots(91)$$

以上數節に渡つて $n=0$, $n=1$, $n=2$ の場合に就て具體的の例を研究する事が出來たが，これは勿論今後行ふべき計算に對する豫備的なものである．n が增加するに從つて表面に於ける主應力は $n=0$ の時の樣に單に $\left(\frac{A}{\xi}\right)^3$ に比例すると云ふ樣には云へなくなつて來る事もわかり，又變形量に就ても同樣な事がわかる．

尙最後に杉原助教授も著者と同じ樣な計算であるが探鑛方面に關した研究を行つてゐる事を附加しておく．著者の計算は全く同助教授に負ふ所が多いので，末筆ながら厚く御禮申上る．

---

26. *On the Deformation of the Semi-infinite Gravitating Elastic Solid due to the Force acting on the Surface of its Spherical Cavity. (I)*

By Genrokuro NISHIMURA,

Earthquake Research Institute.

The deformation and stress distribution are studied which are caused by the force given on the surface of a spherical cavity in it as a function of colatitude.
