27. 表面に作用する力によつて起される不均質彈性體の振動問題（其の1）

地震研究所　西村源六郎

（昭和9年6月20日受理）

彈性體の表面に作用する力によつて起される振動問題は昔から色々の方法で色々の物理數學者によつて取扱はれてゐる．所謂ストークスの方法によつてこの問題を研究した論文はあまり見當らない．著者はこの方法で地殼表面に風が一様に吹き始め，その强さが時間的に變化する樣な時，地殼内部に生ずる振動を研究したが[1]，その時には，或る深さの所では全然振動が起らない樣な深さを考へて計算を進めた．（勿論これは，又考へ方をかへれば剛體とも考へられる硬い媒體に密着してゐる彈性體の振動問題となる．）此の論文はその續きとも云ふべきものであるが，順序として前述した論文の內容もこれに再錄する事とする．卽ち本論文では，先づ第1章で地殼表層がその下の地殼に密着してゐてしかもそれが全然動かない場合を取扱ひ，第2章では，この彈性體はその下面に於て滑動を許される場合卽ち滑りに對して抵抗の生ずる場合を取扱つてゐる．尙第3章では地表で風が時間的に變化するのみでなく任意の分布狀態を保つてゐる場合を取扱つてゐる．全章を通じて具體的に數計算を行つたものはないがこれは次の機會に讓る事として，この研究で面白い事は，例へば風が適當な時間だけ吹いて靜かになつても土地には振動が持續する事で，これはこの頃所謂土地の固有振動などゝ論ぜられてゐる事に可なり關係してゐるが，この土地の固有振動の問題に就いては更に他の論文として發表する考でゐる．

第　1　章

1. 今無風の地殼表面に風が一樣に吹き始め，その强さがだんだん變化すると考へる．勿論地殼內部には震動が傳つて行く．而し地表から或る深さの所では全然風の影響が見られなくなり，その所では全く振動が起らないとする．この風によつて地殼表面及び內部ではどの樣な振動が起るかを解析してみよう．

---

1) 西村源六郎　地震 5 (1933), 677.

さて直交坐標 (x,y,z) の原點 (0) を地表上 h_1 の所にとり，$0x$ 及び $0y$ 兩軸を地表面に平行に置き，$0z$ 軸は地表に垂直にとり，u,v 及び w を x,y 及び z 方向の地殼の變位とする．地殼の彈性に關するラーメの係數を λ,μ そして密度を ρ とすれば，地殼の振動を取扱ふには次の運動方程式を研究すればよい．

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\mu\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+\frac{d\mu}{dz}\frac{\partial u}{\partial z}, \qquad \ldots\ldots(1)$$

$$\rho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}=\mu\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}+\frac{d\mu}{dz}\frac{\partial v}{\partial z}, \qquad \ldots\ldots(2)$$

$$\rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=(\lambda+2\mu)\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}+\frac{d}{dz}(\lambda+2\mu)\frac{\partial w}{\partial z}. \qquad \ldots\ldots(3)$$

(t は勿論時間を表はす.)

風は一樣に吹くと考へるから右の樣な運動式を解けば充分である．風の强さの垂直方向 (z 方向)，又地表面に平行な方向 (x, y 方向) の分力を夫々 $F_z(t)$, $F_x(t)$ 及び $F_y(t)$ とする．$F_z(t)$ は表面 $z=h_1$ に於ける垂直分力 $\widehat{zz}\left(\text{卽ち } (\lambda+2\mu)\frac{\partial w}{\partial z}\right)$ と釣合ひを保ち $F_x(t)$ 及 $F_y(t)$ は $\widehat{xz}$, $\widehat{yz}$ 卽ち $\mu\frac{\partial u}{\partial z}$, $\mu\frac{\partial v}{\partial z}$ なる接面分力と釣合ひを保つて地殼は振動し始める．そして $z=h_2$ なる場所では全然振動が起らない．卽ち表面より內部に入るに從つて振動が衰へてゐると考へる．そして風の吹き始めるまでは地殼は全然振動してゐないと考へるから，(1), (2), (3) を次の樣な始めの條件及び境界條件を滿足する樣に解けばよい．卽ち

$$t=0:\quad \left.\begin{aligned} &u=0,\quad v=0,\quad w=0,\\ &\frac{\partial u}{\partial t}=0,\ \frac{\partial v}{\partial t}=0,\ \frac{\partial w}{\partial t}=0. \end{aligned}\right\} \qquad \ldots\ldots(4)$$

$$z=h_1:\quad \left.\begin{aligned} &\widehat{zz}=-F_z(t),\\ &\widehat{xz}=-F_x(t),\\ &\widehat{yz}=-F_y(t), \end{aligned}\right\} \qquad \ldots\ldots(5)$$

$$x=h_2:\quad u=0,\ v=0,\ w=0. \qquad \ldots\ldots(6)$$

扨て (1), (2), (3) 及び (4), (5), (6) を見ると，u, v 及び w は數學的には全然お互に獨立してをり (勿論力學的には (5) で見る樣に關係づけられてゐる)，解くべき方程式も又滿足すべき條件も全く同じ形であるから，數學的の煩しさを避ける爲め，しばらくの間 u のみに就て研究して行く事とする．

今 u が次の樣な $\chi_s(z)$ なる直交函數で展開出來たと考へる．

$$u=\sum_{s=1}^{\infty}A_s\chi_s(z). \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(7)$$

但し

$$A_s=\frac{\int_{h_1}^{h_2}u\chi_s(z)dz}{\int_{h_1}^{h_2}\chi_s^2(z)dz}. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(8)$$

そして (7) に於ける $\chi_s(z)$ は

$$\mu\frac{d^2\chi_s(z)}{dz^2}+\frac{d\mu}{dz}\frac{d\chi_s(z)}{dz}+\lambda_s^2\chi_s(z)=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(9)$$

の解であつて，しかも

$$z=h_1:\quad \mu\frac{d\chi_s(z)}{dz}=0, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(10)$$

$$z=h_2:\quad \chi_s(z)=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(11)$$

を滿足するものである. (9) の解で (10), (11) を滿足するものは直交函數である事は容易に證明出來る. $s\neq p$ と考へる時,

$$(\lambda_s^2+\lambda_p^2)\int_{h_1}^{h_2}\chi_s(z)\chi_p(z)dz=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(12)$$

なる事を (9), (10), (11) より證明する事が出來, 從つて u は (7) で展開出來る.

次に $\mu\frac{\partial^2u}{\partial z^2}+\frac{d\mu}{dz}\frac{\partial u}{\partial z}$ も $\chi_s(z)$ なる函數で展開出來ると考へる. 即ち

$$\mu\frac{\partial^2u}{\partial z^2}+\frac{d\mu}{dz}\frac{\partial u}{\partial z}=\sum_{s=1}^{\infty}B_s\chi_s(z). \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (13)$$

但し

$$B_s=\frac{\int_{h_1}^{h_2}\frac{\partial}{\partial z}\left\{\mu\frac{\partial u}{\partial z}\right\}\chi_s(z)dz}{\int_{h_1}^{h_2}\chi_s^2(z)dz}. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(14)$$

さて (14) の右邊の分子は次の様に (10), (11) 及び (5), (6) を使つて積分する事が出來る.

$$\int_{h_1}^{h_2}\frac{\partial}{\partial z}\left\{\mu\frac{\partial u}{\partial z}\right\}\chi_s(z)dz=\left[\mu\frac{\partial u}{\partial z}\right]_{h_1}^{h_2}-\int_{h_1}^{h_2}\mu\frac{\partial u}{\partial z}\frac{d\chi_s(z)}{dz}dz$$

$$=\left[\mu\frac{du}{\partial z}\chi_s(z)\right]_{h_1}^{h_2}-\left[u\mu\frac{d\chi_s(z)}{dz}\right]_{h_1}^{h_2}+\int_{h_1}^{h_2}u\frac{d}{dz}\left[\mu\frac{d\chi_s(z)}{dz}\right]dz$$

$$=\chi_s(h_1)F_x(t)-\lambda_s^2\int_{h_1}^{h_2}u\chi_s(z)dz$$

$$=\chi_s(h_1)F_x(t)-\lambda_s^2A_s\int_{h_1}^{h_2}\chi_s^2(z)dz. \qquad \dots\dots\dots(15)$$

從つて

$$\mu\frac{\partial^2u}{\partial z^2}+\frac{d\mu}{dz}\frac{du}{dz}=\sum_{s=1}^{\infty}\frac{\chi_s(h_1)F_x(t)-\lambda_s^2A_s\int_{h_1}^{h_2}\chi_s^2(z)dz}{\int_{h_1}^{h_2}\chi_s^2(z)dz}\chi_s(z). \quad \dots\dots (16)$$

又 (7) を利用すれば, $\dfrac{\partial^2u}{\partial t^2}$ も $\chi_z(z)$ で展開が出來,

$$\frac{\partial^2u}{\partial t^2}=\sum_{s=1}^{\infty}\frac{d^2A_s}{dt^2}\chi_s(z) \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots(17)$$

となる. 從つて方程式 (1) に照して (16), (17) より A_s に就て次の方程式が出て來る.

即ち

$$\frac{d^2A_s}{dt^2}+\frac{\lambda_s^2}{\rho}A_s-\frac{\chi_s(h_1)}{\rho\int_{h_1}^{h_2}\chi_s^2(z)dz}F_x(t)=0. \quad \dots\dots\dots(18)$$

(18) の解は容易に求める事が出來るが, (4) なる條件即ち

$$t=0:\quad A_s=0,\frac{dA_s}{dt}=0 \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots(19)$$

を滿足する解は次のものでよい.

即ち

$$A_s=\frac{\chi_s(h_1)}{\sqrt{\rho}\lambda_s\int_{h_1}^{h_2}\chi_s^2(z)dz}\int_0^t F_x(\xi)\sin\frac{\lambda_s}{\sqrt{\rho}}(t-\xi)d\xi. \quad \dots\dots(20)$$

從つて求むる變位 u は

$$u=\frac{1}{\rho^{\frac{1}{2}}}\sum_{s=1}^{\infty}\frac{\chi_s(h_1)\chi_s(z)}{\lambda_s\int_{h_1}^{h_2}\chi_s^2(z)dz}\int_0^t F_x(\xi)\sin\frac{\lambda_s}{\sqrt{\rho}}(t-\xi)d\xi. \quad \dots\dots(21)$$

全く同様な方法で

$$v=\frac{1}{\rho^{\frac{1}{2}}}\sum_{s=1}^{\infty}\frac{\chi_s(h_1)\chi_s(z)}{\lambda_s\int_{h_1}^{h_2}\chi_s^2(z)dz}\int_0^t F_y(\xi)\sin\frac{\lambda_s}{\sqrt{\rho}}(t-\xi)d\xi, \quad \dots\dots(22)$$

$$w=\frac{1}{\rho^{\frac{1}{2}}}\sum_{s=1}^{\infty}\frac{Z_s(h_1)Z_s(z)}{\eta_s\int_{h_1}^{h_2}Z_s^2(z)dz}\int_0^t F_z(\xi)\sin\frac{\eta_s}{\sqrt{\rho}}(t-\xi)d\xi \quad \ldots.(23)$$

(23) に於ける $Z_s(z)$ は次の方程式及び條件を滿足する直交函數である.

$$(\lambda+2\mu)\frac{d^2Z_s(z)}{dz^2}+\frac{d}{dz}(\lambda+2\mu)\frac{dZ_s(z)}{dz}+\eta_s^2Z_s(z)=0, \quad \ldots.(24)$$

$$z=h_1:— \ (\lambda+2\mu)\frac{dZ_s(z)}{dz}=0, \quad \ldots\ldots(25)$$

$$z=h_2:— \ Z_s(z)=0. \quad \ldots\ldots(26)$$

これ等 (21), (22), (23) によつて地殼の振動問題を解決する事が出來る.

次に特殊な問題に就て計算を進めてみよう. 今取扱ひを簡單にする爲め風が單に x 方向にのみ吹いてゐる場合卽ち (21) 式によつて表される振動のみ存在して他の分變位 (22), (23) は全然起らないとする.

$\mu(z)=\mu_0$ の場合

地殼の剪斷彈性係數が一樣で μ_0 の場合には $\mu(z)=\mu_0$ とおいて計算を進めて行けばよい. (9) 式に於て $\mu=\mu_0$ と置けば,

$$\frac{d^2\chi_s(z)}{dz^2}+\frac{\lambda_s^2}{\mu_0}\chi_s(z)=0 \quad \ldots\ldots(27)$$

となり, この方程式の解は容易に求める事が出來る. そして (10), (11) で表はされる條件を滿足する $\chi_s(z)$ を出して見ると,

$$\left.\begin{aligned}\chi_s(z)&=\cos\frac{(2s-1)\pi}{2(h_2-h_1)}(z-h_1),\ (s=1,2,3..)\\ \lambda_s&=\frac{(2s-1)\pi}{2(h_2-h_1)}\sqrt{\mu_0}.\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots(28)$$

次に (28) を利用して,

$$\int_{h_1}^{h_2}\chi_s^2(z)dz=\int_{h_1}^{h_2}\cos^2\frac{(2s-1)\pi}{2(h_2-h_1)}(z-h_1)dz=\frac{(h_2-h_1)}{2}. \quad \ldots\ldots(29)$$

從つて

$$u=\frac{4}{\pi\rho^{\frac{1}{2}}\mu_0^{\frac{1}{2}}}\sum_{s=1}^{\infty}\frac{\cos\frac{(2s-1)\pi}{2(h_2-h_1)}(z-h_1)}{(2s-1)}\int_0^t F_x(\xi)\sin\frac{(2s-1)\pi\sqrt{\mu_0}}{2(h_2-h_1)\sqrt{\rho}}(t-\xi)d\xi. \quad \ldots\ldots(30)$$

$F_x(t)$ を實際に與へて研究すれば色々面白い振動上の性質が出て來る．殊に $t=0$ 卽ち風が吹き始めた頃は面白い振動狀態のある事がわかる．

今 $F_x(t)$ を次のもので與へてみる．

$$F_x(t)=\gamma P_0\frac{\sqrt{\dfrac{\mu_0}{\rho}}}{H}te^{-\beta\frac{\sqrt{\frac{\mu_0}{\rho}}}{H}t}\text{. . . . .}(31)$$

但し H は層の厚さであつて，$H=h_2-h_1$ である．β, γ は單なる數であつて，P_0 は力の單位をもつ常數で γ, β, P_0 を調節すれば色々の形で $F_x(t)$ を與へる事が出來る．

(31) の時は彈性體の振動は (30) より次式で研究する事が出來る．

$$\begin{aligned}u=\frac{4\gamma P_0H}{\pi\mu_0}\sum_{s=1}^{\infty}\frac{\cos\dfrac{(2s-1)\pi}{2\pi}(z-h_1)}{(2s-1)}&\left\{\frac{2(2s-1)\pi\sqrt{\dfrac{\mu_0}{\rho}}}{H\{4\beta^2+(2s-1)^2\pi^2\}}te^{-\beta\sqrt{\frac{\mu_0}{\rho}}\frac{t}{H}}\right.\\&+\frac{16\beta(2s-1)\pi}{\{4\beta^2+(2s-1)^2\pi^2\}}e^{-\beta\sqrt{\frac{\mu_0}{\rho}}\frac{t}{H}}\\&+\frac{4\{4\beta^2-(2s-1)^2\pi^2\}}{\{4\beta^2+(2s-1)^2\pi^2\}^2}\sin\left(\frac{(2s-1)\pi}{2H}\sqrt{\frac{\mu_0}{\rho}}t\right)\\&\left.-\frac{16\beta(2s-1)\pi}{\{4\beta^2+(2s-1)^2\pi^2\}^2}\cos\left(\frac{(2s-1)\pi}{2H}\sqrt{\frac{\mu_0}{\rho}}t\right)\right\}\text{. . . . . . .}(32)\end{aligned}$$

$z=h_1$, 卽ち地表での振動は

$$\begin{aligned}u=\frac{4\gamma P_0H}{\pi\mu_0}\sum_{s=1}^{\infty}&\left[\frac{2\pi}{\{4\beta^2+(2s-1)^2\pi^2\}}\sqrt{\frac{\mu_0}{\rho}}\frac{t}{H}e^{-\beta\sqrt{\frac{\mu_0}{\rho}}\frac{t}{H}}\right.\\&+\frac{16\beta\pi}{\{4\beta^2+(2s-1)^2\pi^2\}}e^{-\beta\sqrt{\frac{\mu_0}{\rho}}\frac{t}{H}}\\&+\frac{4\{4\beta^2-(2s-1)^2\pi^2\}}{(2s-1)\{4\beta^2+(2s-1)^2\pi^2\}^2}\sin\left\{\frac{(2s-1)\pi}{2}\sqrt{\frac{\mu_0}{\rho}}\frac{t}{H}\right\}\\&\left.-\frac{16\beta\pi}{\{4\beta^2+(2s-1)^2\pi^2\}^2}\cos\left\{\frac{(2s-1)\pi}{2}\sqrt{\frac{\mu_0}{\rho}}\frac{t}{H}\right\}\right]\text{. . . .}(33)\end{aligned}$$

によつて解決する事が出來る．

(33) より見られる事は右邊の最初の 2 項には風による影響が見えてゐるが風がやむと共にこれ等の影響もなくなる事を示してゐる．しかし第 3 項，第 4 項はこの土地の自由振動とも云ふべきものに當り，これがいつまでも續いてゐる．勿論內部的な摩擦のある時は勿論この自由振動もその振幅が次第に減ずる．

$\mu(z)=\dfrac{\mu_0}{h_1}z$ の場合

剪斷彈性係數が地表では μ_0 であつて地殼內部に入るに從つて直線的に增してゐる場合剛性が地殼の振動へどの樣に影響するかを檢べる事とする. この場合必要な直交函數 $\chi_s(z)$ の滿足すべき方程式は次の樣になる.

$$\frac{d^2\chi_s(z)}{dz^2}+\frac{1}{z}\frac{d\chi_s(z)}{dz}+\frac{h_1}{\mu_0}\frac{\lambda_s^2\chi_s(z)}{z}=0. \qquad (34)$$

この方程式を滿足する解は圓壔函數を利用して容易に求まる. (10), (11) の條件を考へに入れて

$$\chi_s(z)=Y_0'\left(2\lambda_s\sqrt{\frac{h_1}{\mu_0}}\sqrt{h_1}\right)J_0\left(2\lambda_s\sqrt{\frac{h_1}{\mu_0}}\sqrt{z}\right)-J_0'\left(2\lambda_s\sqrt{\frac{h_1}{\mu_0}}\sqrt{h_1}\right)Y_0\left(2\lambda_s\sqrt{\frac{h_1}{\mu_0}}\sqrt{z}\right). \qquad (35)$$

但し

$$Y_0'(x)=\frac{\partial Y_0(x)}{\partial x},\quad J_0'(x)=\frac{\partial J_0(x)}{\partial x}$$

を意味してゐる. そして λ_s は

$$Y_0'\left(2\lambda_s\sqrt{\frac{h_1}{\mu_0}}\sqrt{h_1}\right)J_0\left(2\lambda_s\sqrt{\frac{h_1}{\mu_0}}\sqrt{h_2}\right)-J_0'\left(2\lambda_s\sqrt{\frac{h_1}{\mu_0}}\sqrt{h_1}\right)Y_0\left(2\lambda_s\sqrt{\frac{h_1}{\mu_0}}\sqrt{h_2}\right)=0 \qquad (36)$$

を滿足する第 s 番目の根である.

尙 $\int_{h_1}^{h_2}\chi_s^2(z)dz$ を求めてみると,

$$\int_{h_1}^{h_2}\chi_s^2(z)dz=\int_{h_1}^{h_2}U_0^2\left(2\lambda_s\sqrt{\frac{h_1}{\mu_0}}\sqrt{z}\right)dz=\frac{1}{2\lambda_s^2\dfrac{h_1}{\mu_0}}\int_{2\lambda_s\sqrt{\frac{h_1}{\mu_0}}\sqrt{h_1}}^{2\lambda_s\sqrt{\frac{h_1}{\mu_0}}\sqrt{h_2}}kU_0^2(k)dk. \qquad (37)$$

但し

$$U_0\left(2\lambda_s\sqrt{\frac{h_1}{\mu_0}}\sqrt{z}\right)=Y_0'\left(2\lambda_s\sqrt{\frac{h_1}{\mu_0}}\sqrt{h_1}\right)J_0\left(2\lambda_s\sqrt{\frac{h_1}{\mu_0}}\sqrt{z}\right)-J_0'\left(2\lambda_s\sqrt{\frac{h_1}{\mu_0}}\sqrt{h_1}\right)Y_0\left(2\lambda_s\sqrt{\frac{h_1}{\mu_0}}\sqrt{z}\right).$$

然るに $U_0(k)$ は

$$\frac{1}{k}\frac{d}{dk}\left(k\frac{dU_0(k)}{dk}\right)+U_0(k)=0$$

を滿足しなければならない事は圓壔函數の性質からわかる.

従つて

$$2k\frac{dU_0(k)}{dk}\frac{d}{dk}\left(k\frac{dU_0(k)}{dk}\right)+2k^2U_0(k)\frac{dU_0(k)}{dk}=0.$$

故に

$$\frac{d}{dk}\left(k\frac{dU_0(k)}{dk}\right)^2+k^2\frac{d(U_0(k))}{dk}=0.$$

従つて

$$\int_{2\lambda_s\sqrt{\frac{h_1}{\mu_0}}\sqrt{h_1}}^{2\lambda_s\sqrt{\frac{h_1}{\mu_0}}\sqrt{h_2}} k^2\frac{dU_0^2(k)}{dk}dk=-\left[\left(k\frac{dU_0(k)}{dk}\right)^2\right]_{2\lambda_s\sqrt{\frac{h_1}{\mu_0}}\sqrt{h_1}}^{2\lambda_s\sqrt{\frac{h_1}{\mu_0}}\sqrt{h_2}}.$$

故に

$$\int_{2\lambda_s\sqrt{\frac{h_1}{\mu_0}}\sqrt{h_1}}^{2\lambda_s\sqrt{\frac{h_1}{\mu_0}}\sqrt{h_2}} kU_0^2(k)dk=\frac{1}{2}\left[k^2U_0^2(k)+\left(k\frac{dU_0(k)}{dk}\right)^2\right]_{2\lambda_s\sqrt{\frac{h_1}{\mu_0}}\sqrt{h_2}}^{2\lambda_s\sqrt{\frac{h_1}{\mu_0}}\sqrt{h_1}} \quad \ldots\ldots(38)$$

従つて (34) は

$$\int_{h_1}^{h_2}\chi_s^2(z)dz=\frac{1}{4\lambda_s^2\frac{h_1}{\mu_0}}\left[k^2U_0^2(k)+\left(k\frac{dU_0(k)}{dk}\right)^2\right]_{2\lambda_s\sqrt{\frac{h_1}{\mu_0}}\sqrt{h_2}}^{2\lambda_s\sqrt{\frac{h_1}{\mu_0}}\sqrt{h_1}} \quad \ldots\ldots(39)$$

然るに (33) から $\left[U_0(k)\right]_{k=2\lambda_s\sqrt{\frac{h_1}{\mu_0}}\sqrt{h_2}}=0.$

又 $J_0(x)Y_0'(x)-J_0'(x)Y_0(x)=\dfrac{2}{\pi x}$

なるロンメルの公式を利用すれば,

$$\left[U_0(k)\right]_{k=2\lambda_s\sqrt{\frac{h_1}{\mu_0}}\sqrt{h_1}}=\frac{1}{\pi\lambda_s\sqrt{\frac{h_1}{\mu_0}}\sqrt{h_1}}.$$

又 (32) より

$$\left[\frac{dU_0(k)}{dk}\right]_{k=2\lambda_s\sqrt{\frac{h_1}{\mu_0}}\sqrt{h_1}}=0.$$

そして

$$\left[\frac{dU_0(h)}{dk}\right]_{k=2\lambda_s\sqrt{\frac{h_1}{\mu_0}}\sqrt{h_2}}=Y_0'\left(2\lambda_s\sqrt{\frac{h_1}{\mu_0}}\sqrt{h_1}\right)J_0'\left(2\lambda_s\sqrt{\frac{h_1}{\mu_0}}\sqrt{h_2}\right)$$
$$-J_0'\left(2\lambda_s\sqrt{\frac{h_1}{\mu_0}}\sqrt{h_1}\right)Y_0'\left(2\lambda_s\sqrt{\frac{h_1}{\mu_0}}\sqrt{h_2}\right).$$

従つて (36) なるものは結局

$$\int_{h_1}^{h_2}\chi_s^2(z)dz=\frac{1}{4\lambda_s^2\frac{h_1}{\mu_0}}\left[-\frac{1}{\pi}+4\lambda_s\frac{h_1h_2}{\mu_0}\left\{Y_0'\left(2\lambda_s\sqrt{\frac{h_1}{\mu_0}}\sqrt{h_1}\right)J_0'\left(2\lambda_s\sqrt{\frac{h_1}{\mu_0}}\sqrt{h_2}\right)\right.\right.$$
$$\left.\left.-J_0'\left(2\lambda_s\sqrt{\frac{h_1}{\mu_0}}\sqrt{h_1}\right)Y_0'\left(2\lambda_s\sqrt{\frac{h_1}{\mu_0}}\sqrt{h_2}\right)\right\}\right]. \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(40)$$

故に求むる地殼の振動式は (21) から

$$u=\frac{\mu_0^{\frac{1}{2}}}{\pi\rho^{\frac{1}{2}}h_1}\sum_{s=1}^{\infty}\frac{\left\{Y_0'\left(2\lambda_s\sqrt{\frac{h_1}{\mu_0}}\sqrt{h_1}\right)J_0\left(2\lambda_s\sqrt{\frac{h_1}{\mu_0}}\sqrt{z}\right)-J_0'\left(2\lambda_s\sqrt{\frac{h_1}{\mu_0}}\sqrt{h_1}\right)Y_0\left(2\lambda_s\sqrt{\frac{h_1}{\mu_0}}\sqrt{z}\right)\right\}}{\left[\lambda_s^2h_2\left\{Y_0'\left(2\lambda_s\sqrt{\frac{h_1}{\mu_0}}\sqrt{h_1}\right)J_0'\left(2\lambda_s\sqrt{\frac{h_1}{\mu_0}}\sqrt{h_2}\right)-J_0'\left(2\lambda_s\sqrt{\frac{h_1}{\mu_0}}\sqrt{h_1}\right)Y_0'\left(2\lambda_s\sqrt{\frac{h_1}{\mu_0}}\sqrt{h_2}\right)\right\}-\frac{\mu_0}{\pi^2h_1}\right]}\int_0^t E_x(\xi)\sin\frac{\lambda_s}{\sqrt{\rho}}(t-\xi)d\xi.$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(41)$$

λ_s は (33) の第 s 番目の根である事は勿論.

$\mu(z)=\frac{\mu_0}{h_1^2}z^2$ なる場合

地表の剪斷彈性係數が μ_0 で地殼內部に入るに從つて表面からの距離の 2 乘に比例して增してゐる場合には地殼內部にどの樣な振動が誘發されるかを檢べてみる. 計算に必要な直交函數 $\chi_s(z)$ は次の式の解でなくてはならぬ.

$$\frac{d^2\chi_s(z)}{dz^2}+\frac{2}{z}\frac{d\chi_s(z)}{dz}+\frac{h_1^2}{\mu_0}\lambda_s^2\frac{\chi_s(z)}{z_2}=0. \quad\cdots\cdots(42)$$

この方程式を滿足する解を求めてみると,

$$\lambda_s^2=\frac{\mu_0}{4h_1^2}:\!-\quad \chi_p=z^{-\frac{1}{2}}, \quad\cdots\cdots(43)$$

$$\lambda_s^2<\frac{\mu_0}{h_1^2}:\!-\quad \chi_p=z^{\frac{-1+\sqrt{1-\frac{4h_1^2\lambda_s^2}{\mu_0}}}{2}}+z^{\frac{-1-\sqrt{1-\frac{4h_1^2\lambda_s^2}{\mu_0}}}{2}} \quad\cdots\cdots(44)$$

$$\lambda_s^2>\frac{\mu_0}{4h_1^2}:\!-\quad \chi_p=(z)^{-\frac{1}{2}}e^{i\frac{1}{2}\sqrt{4\frac{h_1^2\lambda_s^2}{\mu_0}-1}\ln z}+z^{-\frac{1}{2}}e^{-i\frac{1}{2}\sqrt{4\frac{h_1^2\lambda_s^2}{\mu_0}-1}\ln z}. \quad\cdots\cdots(45)$$

(40), (41) は今の問題には不都合であり (45) を採用するのが都合がよい. そしてこの問題に適合する樣に (42) を調節してみると,

$$\chi_p(z)=z^{-\frac{1}{2}}\left\{\sin\frac{1}{2}\sqrt{\frac{4h_1^2\lambda_s^2}{\mu_0}-1}\,(\ln z-\ln h_1)\right.$$
$$\left.+\sqrt{\frac{4h_1^2\lambda_s^2}{\mu_0}-1}\cos\frac{1}{2}\sqrt{\frac{4h_1^2\lambda_s^2}{\mu_0}-1}\,(\ln z-\ln h_1)\right\}. \quad\cdots\cdots(46)$$

但し λ_s は次式を滿足する第 s 番目の根である.

$$\tan\frac{1}{2}\sqrt{\frac{4h_1^2\lambda_s^2}{\mu_0}-1}\,(\ln h_2-\ln h_1)+\sqrt{\frac{4h_1^2\lambda_s^2}{\mu_0}-1}=0. \quad\cdots\cdots(47)$$

次に $\int_{h_1}^{h_2}\chi_s^2(z)dz$ を求めると,

$$\int_{h_1}^{h_2}\chi_s^2(z)dz=\int_{h_1}^{h_2}z^{-1}\left\{\sin\sqrt{\frac{4h_1^2\lambda_s^2}{\mu_0}-1}\,(\ln z-\ln h_1)\right.$$
$$\left.+\sqrt{\frac{4h_1^2\lambda_s^2}{\mu_0}-1}\cos\sqrt{\frac{4h_2^2\lambda_s^2}{\mu_0}-1}\,(\ln z-\ln h_1)\right\}^2dz$$
$$=\frac{2}{\sqrt{\frac{4h_1^2\lambda_s^2}{\mu_0}-1}}\int_0^{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{4h_1^2\lambda_s^2}{\mu_0}-1}\,(\ln h_2-\ln h_1)}\left\{\sin k+\sqrt{\frac{4h_1^2\lambda_s^2}{\mu_0}-1}\cos k\right\}^2dk$$
$$=\frac{2h_1^2\lambda_s^2}{\mu_0}\ln\left(\frac{h_2}{h_1}\right)-2\left(\frac{2h_1^2\lambda_s^2}{\mu_0}+1\right)\cos^2\frac{1}{2}\sqrt{\frac{4\lambda_s^2h_1^2}{\mu_0}-1}\left(\ln\frac{h_2}{h_1}\right)$$
$$-\cos\sqrt{\frac{4\lambda_s^2h_1^2}{\mu_0}-1}\left(\ln\frac{h_2}{h_1}\right)+1. \quad\cdots\cdots(48)$$

從つてこの場合地殼の振動狀態は次式で研究する事が出來る.

$$u=\frac{1}{(\rho h_1)^{\frac{1}{2}}}\sum_{s=1}^{\infty}\frac{\sqrt{\frac{4h_2^2\lambda_s^2}{\mu_0}-1}\left\{\sin\frac{1}{2}\sqrt{\frac{4h_1^2\lambda_s^2}{\mu_0}-1}\left(\ln\frac{z}{h}\right)\right.}{\lambda_s z^{\frac{1}{2}}\left\{1+\frac{2h_1^2\lambda_s^2}{\mu_0}\ln\left(\frac{h_2}{h_1}\right)-2\left(\frac{2h_1^2\lambda_s^2}{\mu_0}+1\right)\right.}$$

$$\frac{\left.+\sqrt{\frac{4h_1^2\lambda_s^2}{\mu_0}-1}\cos\frac{1}{2}\sqrt{\frac{4h_1^2\lambda_s^2}{\mu_0}-1}\left(\ln\frac{z}{h_1}\right)\right\}}{\left.\times\cos^2\frac{1}{2}\sqrt{\frac{4\lambda_s^2h_1^2}{\mu_0}-1}\left(\ln\frac{h_2}{h_1}\right)-\cos\sqrt{\frac{4\lambda_s^2h_1^2}{\mu_0}-1}\ln\frac{h_2}{h_1}\right\}}$$

$$\times\int_0^t F_x(\xi)\sin\frac{\lambda_0}{\sqrt{\rho}}(t-\xi)d\xi. \qquad \cdots\cdots(49)$$

$\mu(z)=\frac{\mu_0}{h_1^n}z^n$ の場合

地表の剪斷彈性係數が μ_0 であつて內部に入るに從ひ地表からの距離の n 乘 (n は 2 には等しくないと考へる) に比例してゐると考へて問題を解いてみよう.

この場合直交函數 $\chi_s(z)$ の滿足すべき方程式は

$$\frac{d^2\chi_s(z)}{dz^2}+\frac{n}{z}\frac{d\chi_s(z)}{dz}+\frac{h_1^n\lambda_s^2}{\mu^0}\frac{\chi_s(z)}{z_n}=0. \qquad \cdots\cdots(50)$$

この方程式を滿足し, (10), (11) の條件に適合する解は次のものでよい.

$$\chi_s(z)=\left[\frac{\partial}{\partial z}\left\{z^{\frac{1-n}{2}}Y_{\frac{1-n}{2-n}}\left(\frac{2}{2-n}\sqrt{\frac{h_1^n}{\mu_0}}\lambda_s z^{\frac{2-n}{2}}\right)\right\}\right]_{z=h_1}z^{\frac{1-n}{2}}J_{\frac{1-n}{2-n}}\left(\frac{2}{2-n}\sqrt{\frac{h_1^n}{\mu_0}}\lambda_s z^{\frac{2-n}{2}}\right).$$

$$-\left[\frac{\partial}{\partial z}\left\{z^{\frac{1-n}{2}}J_{\frac{1-n}{2-n}}\left(\frac{2}{2-n}\sqrt{\frac{h_1^n}{\mu_0}}\lambda_s z^{\frac{2-n}{2}}\right)\right\}\right]_{z=1}z^{\frac{1-n}{2}}Y_{\frac{1-n}{2-n}}\left(\frac{2}{2-n}\sqrt{\frac{h_1^n}{\mu_0}}\lambda_s z^{\frac{2-n}{2}}\right).$$

$$\cdots\cdots(51)$$

そして λ_s は次式を滿足する第 s 番目の根である.

$$\frac{\partial}{\partial h_1}\left\{h_1^{\frac{1-n}{2}}Y_{\frac{1-n}{2-n}}\left(\frac{2}{2-n}\sqrt{\frac{h_1^n}{\mu_0}}\lambda_s h_1^{\frac{2-n}{2}}\right)\right\}J_{\frac{1-n}{2-n}}\left(\frac{2}{2-n}\sqrt{\frac{h_1^n}{\mu_0}}\lambda_s h_2^{\frac{2-n}{2}}\right)$$

$$=\frac{\partial}{\partial h_1}\left\{h_1^{\frac{1-n}{2}}J_{\frac{1-n}{2-n}}\left(\frac{2}{2-n}\sqrt{\frac{h_1^n}{\mu_0}}\lambda_s h_1^{\frac{2-n}{2}}\right)\right\}Y_{\frac{1-n}{2-n}}\left(\frac{2}{2-n}\sqrt{\frac{h_1^n}{\mu_0}}\lambda_s h_2^{\frac{2-n}{2}}\right).$$

$$\cdots\cdots(52)$$

次に $\int_{h_1}^{h_2}\chi_s^2(z)\,dz$ を求める爲め, 簡單の爲め

$$U_{\frac{1-n}{2-n}}\left(\frac{2}{2-n}\sqrt{\frac{h_1^n}{\mu_0}}\lambda_s z^{\frac{2-n}{2}}\right)$$

$$=\frac{\partial}{\partial h_1}\left\{h_1^{\frac{1-n}{2}}Y_{\frac{1-n}{2-n}}\left(\frac{2}{2-n}\sqrt{\frac{h_1^n}{\mu_0}}\lambda_s h_1^{\frac{2-n}{2}}\right)\right\}J_{\frac{1-n}{2-n}}\left(\frac{2}{2-n}\sqrt{\frac{h_1^n}{\mu_0}}\lambda_s z^{\frac{2-n}{2}}\right)$$
$$-\frac{\partial}{\partial h_1}\left\{h_1^{\frac{1-n}{2}}J_{\frac{1-n}{2-n}}\left(\frac{2}{2-n}\sqrt{\frac{h_1^n}{\mu_0}}\lambda_s h_1^{\frac{2-n}{2}}\right)\right\}Y_{\frac{1-n}{2-n}}\left(\frac{2}{2-n}\sqrt{\frac{h_1^n}{\mu_0}}\lambda_s z^{\frac{2-n}{2}}\right) \quad\cdots\cdots\cdots(53)$$

とおけば，

$$\int_{h_1}^{h_2}\chi_s^2(z)\,dz=\int_{h_1}^{h_2}z^{1-n}\,U^2_{\frac{1-n}{2-n}}\left(\frac{2}{2-n}\sqrt{\frac{h_1^n}{\mu_0}}\lambda z^{\frac{2-n}{2}}\right)dz$$
$$=\frac{1}{\frac{2}{2-n}\cdot\frac{h_1^n\lambda_s^2}{\mu_0}}\int_{\frac{2}{2-n}\sqrt{\frac{h_1n}{2-n}}\lambda s h_1^{\frac{2-n}{2}}}^{\frac{2}{2-n}\sqrt{\frac{h_1n}{\mu_0}}\lambda s h_2^{\frac{2-n}{2}}}kU^2_{\frac{1-n}{2-n}}(k)\,dk. \quad\cdots\cdots\cdots(54)$$

而して $U_{\frac{1-n}{2-n}}(k)$ は圓壔函數であるから

$$\frac{1}{k}\frac{d}{dk}\left(k\frac{d}{dk}U_{\frac{1-n}{2-n}}(k)\right)+\left\{1-\frac{\left(\frac{1-n}{2-n}\right)^2}{k^2}\right\}U_{\frac{1-n}{2-n}}(k)=0$$

を滿足しなければならぬ.

從つて

$$2k\frac{d}{dk}U_{\frac{1-n}{2-n}}(k)\frac{d}{dk}\left\{k\frac{d}{dk}U_{\frac{1-n}{2-n}}(k)\right\}+2\left\{1-\frac{\left(\frac{1-n}{2-n}\right)^2}{k^2}\right\}k^2U_{\frac{1-n}{2-n}}(k)\frac{d}{dk}U_{\frac{1-n}{2-n}}(k)=0.$$

故に

$$\frac{d}{dk}\left\{k\frac{d}{dk}U_{\frac{1-n}{2-n}}(k)\right\}^2+k^2\frac{d}{dk}U^2_{\frac{1-n}{2-n}}(k)-\frac{(1-n)^2}{(2-n)^2}\frac{d}{dk}U^2_{\frac{1-n}{2-n}}(k)=0.$$

これから

$$\int_{\frac{2}{2-n}\sqrt{\frac{h_1n}{\mu_0}}\lambda s h_1^{\frac{2-n}{2}}}^{\frac{2}{2-n}\sqrt{\frac{h_1n}{\mu_0}}\lambda s h_2^{\frac{2-n}{2}}}k^2\frac{d}{dk}U^2_{\frac{1-n}{2-n}}(k)\,dk=\left[\frac{(1-n)^2}{(2-n)^2}U^2_{\frac{1-n}{1-2}}(k)-\left\{k\frac{d}{dk}U_{\frac{1-n}{2-n}}(k)\right\}^2\right]_{\frac{2}{(2-n)}\sqrt{\frac{h_1n}{\mu_0}}\lambda s h_1^{\frac{2-n}{2}}}^{\frac{2}{(2-n)}\sqrt{\frac{h_1n}{\mu_0}}\lambda s h_2^{\frac{2-n}{2}}}$$

故に

$$\int_{\frac{2}{(2-n)}\sqrt{\frac{h_1 n}{\mu_0}}\lambda s h_1^{\frac{2-n}{2}}}^{\frac{2}{(2-n)}\sqrt{\frac{h_1 n}{\mu_0}}\lambda s h_2^{\frac{2-n}{2}}} kU^2_{\frac{1-n}{n-2}}(k)\,dk=\frac{1}{2}\Bigg[\left(k\frac{d}{dk}U_{\frac{1-n}{2-n}}(k)\right)^2$$

$$+\left\{k^2-\frac{(1-n)^2}{(2-n)^2}\right\}U^2_{\frac{1-n}{2-n}}(k)\Bigg]_{\frac{2}{(2-n)}\sqrt{\frac{h_1 n}{\mu_0}}\lambda s h_1^{\frac{2-n}{2}}}^{\frac{2}{(2-n)}\sqrt{\frac{h_1 n}{\mu_0}}\lambda s h_2^{\frac{2-n}{2}}} \quad \cdots\cdots(55)$$

故に (54) なる積分は

$$\int_{h_1}^{h_2}\chi_s^2(z)\,dz=\frac{1}{\dfrac{4}{2-n}\dfrac{h_1{}^n\lambda_s^2}{\mu_0}}\Bigg[\left(k\frac{d}{dk}U_{\frac{1-n}{2-n}}(k)\right)^2$$

$$+\left\{k^2-\frac{(1-n)^2}{(2-n)^2}\right\}U^2_{\frac{1-n}{2-n}}(k)\Bigg]_{\frac{2}{(2-n)}\sqrt{\frac{h_1^n}{\mu_0}}\lambda s h_1^{\frac{2-n}{2}}}^{\frac{2}{(2-n)}\sqrt{\frac{h_1^n}{\mu_0}}\lambda s h_2^{\frac{2-n}{2}}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(56)$$

従つて求むる振動式は

$$u=\frac{4h_1^{\frac{1+n}{2}}z^{\frac{1-n}{2}}}{(2-n)\rho^{\frac{1}{2}}\mu_0}\sum_{s=1}^{\infty}\frac{\lambda_s U_{\frac{1-n}{2-n}}\left(\dfrac{2}{2-n}\sqrt{\dfrac{h_1^n}{\mu_0}}\lambda h_1^{\frac{2-n}{2}}\right)U_{\frac{1-n}{2-n}}\left(\dfrac{2}{2-n}\sqrt{\dfrac{h_1^n}{\mu_0}}\lambda_s z^{\frac{2-n}{2}}\right)}{\left[\left(k\dfrac{d}{dk}U_{\frac{1-n}{2-n}}(k)\right)^2+\left(k^2-\dfrac{(1-n)^2}{(2-n)^2}\right)U^2_{\frac{1-n}{2-n}}(k)\right]_{k=\frac{2}{2-n}\sqrt{\frac{h_1 n}{\mu_0}}\lambda_s h_1^{\frac{2-n}{2}}}^{k=\frac{2}{2-n}\sqrt{\frac{h_1 n}{\mu_0}}\lambda_s h_2^{\frac{2-n}{2}}}}$$

$$\times\int_0^t F_x(\xi)\sin\frac{\lambda_s}{\sqrt{\rho}}(t-\xi)\,d\xi. \quad \cdots\cdots(57)$$

(57) 式を研究すれば面白い性質のある事がわかるが，具體的の計算は次に譲る．

以上の計算は具體的に面白い結果を與へてゐないが，次の機會にはもつと具體的なものにして論じてみようと考へてゐる．ちよつと式を見てもわかる様に，風が一定の強さで吹いて何ら息をつく様な事がなくても，地表面では一定の振動が起される事もわかるし，又風の吹き始めでは振動狀態が可なり定狀態になつた時と異つてゐる事などもわかる．

尙この計算では $z=h_2$ の面は全然風による影響なく靜止してゐると考へたが，考へ方を少し違へれば，この面でその下にある剛體とも考へられる様な硬い媒體に密着してゐると考へられる様な場合にもこの計算は適用出來る．

又以上の計算を利用して容易に半無限弾性體の振動問題に問題を移す事も出來る．卽ち本計算に於ける h_2 を無限大にすればよい．その計算方法は簡單であるが，こゝでは略しておく．

第　2　章

本章では地殼表面での條件は全く第 1 章の場合と同じに考へる．たゞ $z=h_2$ 卽ち底面に於てその下の弾性體との間に滑りを許し，この滑りに對し抵抗が作用してゐるとして研究を進めてみる．從つて第 1 章に於ける運動方程式 (1), (2), (3), 又 $t=0$ に於ける條件 (4), $z=h_1$ なる表面に於ける條件 (5) は同様に本章でも用ひる理である．たゞ $z=h_2$ なる底面に於ける條件 (6) の代りに次の條件を用ひる事とする．卽ち

$z=h_2$:—

$$\left.\begin{aligned}&\mu\frac{\partial u}{\partial z}-\sigma u=0,\\&\mu\frac{\partial v}{\partial z}-\sigma' v=0,\\&\mu\frac{\partial w}{\partial z}-\sigma'' w=0.\end{aligned}\right\}\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(58)$$

卽ち (1), (2), (3), (4), (5) 及び (58) を滿足する様な運動式の解を求める理である．そして第 1 章と同じく u, v 及 w は全然お互に數學的には獨立してゐるから u のみに就て計算を進めてみる．勿論力學的には (5) によつて結びつけられてゐる．

今次の様な函數 $Z_s(z)$ を考へる．卽ち $Z_s(z)$ は (9) を滿足し，$z=h$ に於て，(10), $z=h_2$ に於て，

$$\left(\mu\frac{dZ_s(z)}{dz}\right)_{z=h_2}-(\sigma Z_s(z))_{z=h_2}=0\qquad\cdots\cdots(59)$$

なる 2 つの條件に適合するものとすれば，$Z_s(z)$ は $z_s=h_1\sim z=h_2$ の間で直交函數である事は容易に證明出來る．卽ち (9), (10) 及び (59) を滿足する $Z_s(z)$ で u を展開する．卽ち

$$u=\sum_{s=1}^{\infty} A_s \chi_s(z). \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (60)$$

但し

$$A_s=\frac{\int_{h_1}^{h_2} u\chi_s(z)dz}{\int_{h_1}^{h_2} \chi_s^2(z)dz}. \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (61)$$

又 $\dfrac{\partial}{\partial z}\left(\mu\dfrac{\partial u}{\partial z}\right)$ も $Z_s(z)$ で展開出來て次の様になる．卽ち

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial z}\right)=\sum_{s=1}^{\infty} Z_s(z)\frac{\int_{h_1}^{h_2}\frac{\partial}{\partial \xi}\left[\mu(\xi)\frac{\partial u(\xi)}{\partial \xi}\right]Z_s(\xi)d\xi}{\int_{h_1}^{h_2}\chi_s^2(z)dz}. \quad \cdots\cdots (62)$$

(47) の右邊の $Z_s(z)$ の係數の分子は (10), (59), (5) 及び (58) なる條件を用ひて次の様に積分する事が出來る．

$$\begin{aligned}
\int_{h_1}^{h_2}\frac{\partial}{\partial \xi}\left[\mu(\xi)\frac{\partial u(\xi)}{\partial \xi}\right]Z_s(\xi)d\xi &= \left[Z_s(\xi)\mu(\xi)\frac{\partial u(\xi)}{\partial \xi}\right]_{h_1}^{h_2} \\
&-\left[u(\xi)\mu(\xi)\frac{dZ_s(\xi)}{d\xi}\right]_{h_1}^{h_2}+\int_{h_1}^{h_2} u(\xi)\frac{d}{d\xi}\left[u(\xi)\frac{dZ_s(\xi)}{d\xi}\right]d\xi \\
&=\left[Z_s(h_2)\mu(h_2)\frac{\partial u(h_2)}{\partial h_2}\right]-\left[Z_s(h_1)\mu(h_1)\frac{\partial u(h_1)}{\partial h_1}\right] \\
&+\left[u(h_1)\mu(h_1)\frac{dZ_s(h_1)}{dh_1}\right]-\left[u(h_2)\mu(h_2)\frac{dZ_s(k_2)}{dh_2}\right] \\
&-\lambda_s^2\int_{h_1}^{h_2} u(\xi)Z_s(\xi)d\xi \\
&=\left\{\sigma\chi_s(h_2)-\mu(h_2)\frac{d\chi_s(h_2)}{dh_2}\right\}u(h_2)+\chi_s(h_1)f(t) \\
&\quad -\lambda_s^2 A_s\int_{h_1}^{h_2}\chi_s^2(\xi)d\xi \\
&=\chi_s(h_1)F_x(t)-\lambda_s^2 A_s\int_{h_1}^{h_2}\chi_s^2(z)dz. \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (63)
\end{aligned}$$

從つて (62) は全く (16) と等しくなる．從つて第 1 章の (17), (18), (19) も適用する事が出來，(20) なる A_s の解も全く用ひる事が出來た．たゞ $z=h_2$ に於ける $\chi_s(z)$ の條件が (59) となるだけが第 1 章の $\chi_s(z)$ と異ふ．從つて求むる變位は次の様になる．

$$u=\frac{1}{\rho^{1/2}}\sum_{s=1}^{\infty}\frac{\chi_s(h_1)\chi_s(z)}{\lambda_s\int_{h_1}^{h_2}\chi_s^2(z)dz}\int_0^t F_x(\xi)\sin\frac{\lambda_s}{\sqrt{\rho}}(t-\xi)d\xi. \quad\ldots\ldots(64)$$

第 1 章と同じく具體的に μ に特殊な形を與へて計算を進めてみる.

$$\mu(z)=\mu_0$$

この場合には解くべき $\chi_s(z)$ の方程式は

$$\frac{d^2\chi_s(z)}{dz^2}+\frac{\lambda_s^2}{\mu_0}\chi_s(z)=0. \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(65)$$

$\chi_s(z)$ の満足すべき條件は

$$\left.\begin{aligned}&z=h_1:\text{—}\\&\qquad\frac{d\chi_s(z)}{dh_1}=0,\\&z=h_2:\text{—}\\&\qquad\mu_0\frac{d\chi_s(z)}{dh_2}-\sigma\chi_s(z)=0.\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(66)$$

この條件 (65), (66) を滿足する解は

$$\chi_s(z)=\cos\frac{\lambda_s}{\sqrt{\mu_0}}(z-h_1). \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(67)$$

但し λ_s は

$$\tan\frac{\lambda_s}{\sqrt{\mu_0}}(h_2-h_1)+\frac{\sigma}{\lambda_s\sqrt{\mu_1}}=0 \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(68)$$

を滿足する第 s 番目の根である.

さて

$$\int_{h_1}^{h_2}\chi_s^2(z)dz=\int_{h_1}^{h_2}\cos^2\frac{\lambda_s}{\sqrt{\mu_0}}(z-h_1)dz$$

$$=\frac{1}{4}\frac{\sqrt{\mu_0}}{\lambda_s}\sin\frac{2\lambda_s}{\sqrt{\mu_0}}(h_2-h_1)+\frac{h_2-h_1}{2} \quad\ldots\ldots\ldots69)$$

故に

$$u=\frac{1}{\rho^{1/2}}\sum_{s=1}^{\infty}\frac{\cos\frac{\lambda_s}{\sqrt{\mu_0}}(z-h_1)}{\frac{1}{4}\sqrt{\mu_0}\sin\frac{2\lambda_s}{\sqrt{\mu_0}}(h_2-h_1)+\frac{\lambda_s(h_2-h_1)}{2}}$$

$$\times\int_0^t F_x(\xi)\sin\frac{\lambda_s}{\sqrt{\rho}}(t-\xi)d\xi. \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(70)$$

今 $z=h_2$ 即ち底面では全然抵抗なく自由に滑るとすれば, (66) に於て, $\sigma=0$. 故にこの場合には, λ_s は

$$\lambda_s = s\pi\frac{\sqrt{\mu_0}}{(h_2-h_1)} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (71)$$

故に

$$u=\frac{2}{\rho^{1/2}}\sum_{s=1}^{\infty}\frac{\cos\dfrac{s\pi(z-h_1)}{(h_2-h_1)}}{s\pi\sqrt{\mu_0}}\int_0^t F_x(\xi)\sin\frac{s\pi}{(h_2-h_1)}\sqrt{\frac{\mu_0}{\rho}}(t-\xi)d\xi. \qquad \ldots (72)$$

今 $F_x(t)$ を次のもので與へる．

$$F_x(t)=\gamma p_0\frac{\sqrt{\dfrac{\mu_0}{\rho}}}{H}te^{-\beta\sqrt{\frac{\mu_0}{\rho}}} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (73)$$

(73) は第 1 章の (31) と同じものであるが，これによつておこされる地表 $z=h_1$ の振動式を出しておく．

$$\begin{aligned} u=\frac{2\gamma p_0 H}{\pi\mu_0}\sum_{s=1}^{\infty}\Bigg[&\frac{\pi}{\{\beta^2+s^2\pi^2\}}\sqrt{\frac{\mu_0}{\rho}}\frac{t}{H}\,e^{-\beta\sqrt{\frac{\mu_0}{\rho}}\frac{t}{H}} \\ &+\frac{2\beta\pi}{\{\beta^2+s^2\pi^2\}}\,e^{-\beta\sqrt{\frac{\mu_0}{\rho}}\frac{t}{H}} \\ &+\frac{\{\beta^2-s^2\pi^2\}}{s\{\beta^2+s^2\pi^2\}^2}\sin\left\{s\pi\sqrt{\frac{\mu_0}{\rho}}\frac{t}{H}\right\} \\ &-\frac{2\beta\pi}{\{\beta^2+s^2\pi^2\}^2}\cos\left\{s\pi\sqrt{\frac{\mu_0}{\rho}}\frac{t}{H}\right\}\Bigg]. \end{aligned} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (74)$$

$$\boldsymbol{\mu(z)=\frac{\mu_0}{h_1}z,\ \frac{\mu_0}{h_1}z^2,\ \frac{\mu_0}{h_1}z^n}$$

この場合も全く第 1 章の例に於ける (38), (46), 及び (42) に夫々 u の式は一致するが，たゞ λ_s が (64) 式の根である事に注意して計算を運べばよい．具體的の事は次に讓る．

第　3　章

本章で彈性體の表面 $z=h_1$ に加へられる風が時間的に變化するのみでなく場所的に任意の分布をしてゐる場合に生ずる不均質な彈性體の振動問題を取扱ふ事とする．

座標の原點及び z 軸の方向は全く第 1 章と同じにとる．そして本章では圓壔座標 (r,θ,z) によつて問題を研究して行く．

さて半徑方向の變位 u，方位方向の變位 v, z 軸方向の變位を w とする時，彈性係數 λ, μ が z 方向卽ち軸方向のみに變化してゐる不均質な彈性體に就ての運動方程式は．

$$\left.\begin{aligned}\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}&=(\lambda+2\mu)\frac{\partial\varDelta}{\partial r}-\frac{2\mu}{r}\frac{\partial\varpi z}{\partial\theta}+2\mu\frac{\partial}{\partial z}(\varpi_\theta)+2\varpi_\theta\frac{d\mu}{dz},\\ \rho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}&=(\lambda+2\mu)\frac{1}{r}\frac{\partial\varDelta}{\partial\theta}-2\mu\frac{\partial\varpi_r}{\partial z}-2\varpi_r\frac{d\mu}{dz}+2\mu\frac{\partial\varpi_z}{\partial r},\\ \rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}&=(\lambda+2\mu)\frac{\partial\varDelta}{\partial z}+\varDelta\frac{d}{dz}(\lambda+2\mu)-\frac{2\mu}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\varpi_\theta)+\frac{2\mu}{r}\frac{\partial\varpi_r}{\partial\theta}.\end{aligned}\right\}\quad\dots(75)$$

但し (75) に於て

$$\left.\begin{aligned}\varDelta&=\frac{1}{r}\frac{\partial(ru)}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial\theta}+\frac{\partial w}{\partial z},\\ 2\varpi_r&=\frac{1}{r}\frac{\partial\varpi}{\partial\theta}-\frac{\partial v}{\partial z},\quad 2\varpi_\theta=\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial r},\quad 2\varpi_z=\frac{1}{r}\left(\frac{\partial(rv)}{\partial r}-\frac{\partial u}{\partial\theta}\right).\end{aligned}\right\}\quad\dots(76)$$

今この取扱ふべき彈性體は非壓縮性の物質よりなつており，且つ彈性體の表面を吹く風が全く表面に平行に吹くと考へる時はこの物體の運動方程式は (75) より

$$\left.\begin{aligned}\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}&=-\frac{2\mu}{r}\frac{\partial\varpi_z}{\partial\theta}+2\mu\frac{\partial\varpi_\theta}{\partial z}+2\varpi_\theta\frac{d\mu}{dz},\\ \rho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}&=-2\mu\frac{\partial\varpi_r}{\partial z}-2\varpi_r\frac{d\mu}{dz}+2\mu\frac{\partial\varpi_z}{\partial r}\end{aligned}\right\}\quad\dots\dots\dots(77)$$

となる.

(77) なる運動方程式は又次の運動式を與へてくれる. 即ち

$$\left.\begin{aligned}\rho\frac{\partial^2\varpi_z}{\partial t^2}&=\mu\left\{\frac{\partial^2\varpi_z}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\varpi_z}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\varpi_z}{\partial\theta^2}\right\}+\frac{\partial}{\partial z}\left(\mu\frac{\partial\varpi_z}{\partial z}\right),\\ \rho\frac{\partial^2\varpi_r}{\partial t^2}&=\mu\left\{\frac{\partial^2\varpi_r}{\partial r^2}+\frac{3}{r}\frac{\partial\varpi_r}{\partial r}+\frac{\varpi_r}{r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\varpi_r}{\partial\theta^2}\right\}+\frac{\partial}{\partial z}\left\{\mu\left(\frac{\partial\varpi_r}{\partial z}+\frac{2}{r}\varpi_z\right)\right\},\\ \rho\frac{\partial^2\varpi_\theta}{\partial t^2}&=\mu\left\{\frac{\partial^2\varpi_\theta}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\varpi_\theta}{\partial r}-\frac{\varpi_\theta}{r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\varpi_\theta}{\partial\theta^2}+\frac{2}{r^2}\frac{\partial\varpi_r}{\partial\theta}\right\}+\frac{\partial}{\partial z}\left(\mu\frac{\partial\varpi_\theta}{\partial z}\right).\end{aligned}\right\}\quad(78)$$

今 (78) を解くのに當つて，θ に關しては圓函數，r に關しては圓壔函數 $C_m(kr)$ で表されると考へて $2\varpi_r$, $2\varpi_\theta$, $2\varpi_z$ を次の樣に置いてみる. 即ち

$$\left.\begin{aligned}2\varpi_r&=\frac{1}{k^2}\frac{\partial\Phi}{\partial z}\frac{\partial C_m(kr)}{\partial r}\sin m\theta-\frac{1}{k^2}\frac{\partial\Phi'}{\partial z}\frac{\partial C_m(kr)}{\partial r}\cos m\theta,\\ 2\varpi_\theta&=\frac{1}{k^2}\frac{\partial\Phi}{\partial z}\frac{C_m(kr)}{r}\cos m\theta+\frac{1}{k^2}\frac{\partial\Phi'}{\partial z}\frac{C_m(kr)}{r}\sin m\theta,\\ 2\varpi_z&=\Phi C_m(kr)\sin m\theta-\Phi' C_m(kr)\cos m\theta.\end{aligned}\right\}\quad\dots(79)$$

(79) に於て Φ, Φ' は z 及び時間 t の函數である. (79) を (78) なる運動方程式に代入して，Φ 及び Φ' に關する關係式を求めてみると，

$$\rho\frac{\partial^2\Phi(z,t)}{\partial t^2}=\mu(z)\frac{\partial^2\Phi(z,t)}{\partial z^2}+\frac{d\mu(z)}{dz}\frac{\partial\Phi(z,t)}{\partial z}-k^2\mu(z)\Phi(z,t), \quad\ldots\ldots(80)$$

$$\rho\frac{\partial^2\Phi'(z,t)}{\partial t^2}=\mu(z)\frac{\partial^2\Phi'(z,t)}{\partial z^2}+\frac{d\mu(z)}{dz}\frac{\partial\Phi'(z,t)}{\partial z}-k^2\mu(z)\Phi'(z,t). \quad\ldots(81)$$

この方程式を滿足する Φ 及び Φ' を見出す事が出來れば，(79) によつて $2\varpi_r$, $2\varpi_\theta$, $2\varpi_z$ は一般的に求める事が出來る.

尙 (79) の様な不變容積歪に關する運動式を與へる變位 u, v は

$$\left.\begin{aligned}u&=\Phi(z,t)\frac{m}{k^2}\frac{C_m(kr)}{r}\cos m\theta+\Phi'(z,t)\frac{m}{k^2}\frac{C_m(kr)}{r}\sin m\theta,\\ v&=-\Phi(z,t)\frac{1}{k^2}\frac{\partial C_m(kr)}{\partial r}\sin m\theta+\Phi'(z,t)\frac{1}{k^2}\frac{\partial C_m(kr)}{\partial r}\cos m\theta\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots(82)$$

である事がわかる. さて圓壔座標による應力分力 $\widehat{rr}$, $\widehat{\theta\theta}$, $\widehat{zz}$, $\widehat{r\theta}$, $\widehat{rz}$, $\widehat{\theta z}$ と變位 u, v との關係は

$$\left.\begin{aligned}&\widehat{rr}=2\mu\frac{\partial u}{\partial r},\quad \widehat{\theta\theta}=2\mu\left\{\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial\theta}+\frac{u}{r}\right\},\\ &\widehat{zz}=0,\quad \widehat{r\theta}=\mu\left\{\frac{\partial v}{\partial r}-\frac{v}{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\theta}\right\},\\ &\widehat{rz}=\mu\left\{\frac{\partial u}{\partial z}\right\},\quad \widehat{\theta z}=\mu\frac{\partial v}{\partial z}.\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\ldots(83)$$

從つて (82) より

$$\begin{aligned}\widehat{rr}=&2\mu(z)\Phi(z,t)\frac{m}{k^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{C_m(kr)}{r}\right)\cos m\theta\\ &+2\mu(z)\Phi'(z,t)\frac{m}{k^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{C_m(kr)}{r}\right)\sin m\theta, \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(84)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\widehat{\theta\theta}=&2\mu(z)\Phi(z,t)\left\{\frac{m}{k^2}\frac{1}{r^2}C_m(kr)-\frac{m}{k^2}\frac{1}{r}\frac{\partial C_m(kr)}{\partial r}\right\}\cos m\theta\\ &+2\mu(z)\Phi'(z,t)\left\{\frac{m}{k^2}\frac{1}{r^2}C_m(kr)-\frac{m}{k^2}\frac{1}{r}\frac{\partial C_m(kr)}{\partial r}\right\}\sin m\theta, \quad\ldots\ldots(85)\end{aligned}$$

$$\widehat{zz}=0, \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(86)$$

$$\begin{aligned}\widehat{r\theta}=&\mu(z)\frac{\Phi(z,t)}{k^2}\left\{-\frac{\partial^2C_m(kr)}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial C_m(kr)}{\partial r}-\frac{m^2}{r^2}C_m(kr)\right\}\sin m\theta\\ &+\mu(z)\frac{\Phi'(z,t)}{\partial r^2}\left\{\frac{\partial^2C_m(kr)}{\partial r^2}-\frac{1}{r}\frac{\partial C_m(kr)}{\partial r}+\frac{m^2}{r^2}C_m(kr)\right\}\cos m\theta, \quad\ldots(87)\end{aligned}$$

$$\widehat{rz}=\frac{m}{k^2}\mu(z)\frac{\partial\Phi(z,t)}{\partial z}\frac{C_m(kr)}{r}\cos m\theta.$$

$$+\frac{m}{k^2}\mu(z)\frac{\partial\Phi'(z,t)}{\partial z}\frac{C_m(kr)}{r}\sin m\theta, \qquad \ldots\ldots\ldots(88)$$

$$\widehat{\theta z}=-\frac{1}{k^2}\mu(z)\frac{\partial\Phi(z,t)}{\partial z}\frac{\partial C_m(kr)}{\partial r}\sin m\theta$$

$$+\frac{1}{k^2}\mu(z)\frac{\partial\Phi(z,t)}{\partial z}\frac{\partial C_m(kr)}{\partial r}\cos m\theta. \qquad \ldots\ldots\ldots(89)$$

さて硏究せんとする問題は地殼の表面に風が吹き始めその强さや分布狀態が時間と共に變化する場合に，地殼內部へは震動が傳つて行く．しかし地表から或る深さ $z=h_2$ の所では全然風の影響は見られなくなり，その所では全然振動が起らないとする．尙風の吹き始めるまでは地殼は全然振動してゐないと考へる．

さて解くべき問題の條件を表はしてみると

$$t=0:\!-\quad u=0,\quad v=0. \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(90)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}=0,\quad \frac{\partial v}{\partial t}=0. \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(91)$$

$z=h_2$:—

$$u=0,\ v=0,\ w=0. \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(92)$$

尙

$z=h_1$:—

$$\left.\begin{aligned}&\widehat{zz}=0,\\&\widehat{rz}=f(r,\theta,t),\\&\widehat{\theta z}=F(r,\theta,t).\end{aligned}\right\} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(93)$$

卽ち (90), (91), (92) 及び (93) を滿足する樣に運動方程式 (78) を解けば，不均質な彈性體の振動を解決する事が出來る．

この爲めには先づ次の樣な基礎的な條件を滿足する結果を出しておく必要がある．卽ちその條件は

$$t=0:\!-\quad u=v=0, \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(94)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial v}{\partial t}=0. \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(95)$$

$z=h_1$:—

$$\widehat{zz}=0,$$

$$\widehat{rz}=\frac{m}{k}\frac{C_m(kr)}{r}\cos m\theta f(t)$$

$$+\frac{m}{k}\frac{C_m(kr)}{r}\sin m\theta f(t), \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (96)$$

$$\widehat{\theta z}=-\frac{1}{k}\frac{\partial C_m(kr)}{\partial r}\sin m\theta f(t)$$

$$+\frac{1}{k}\frac{\partial C_m(kr)}{\partial r}\cos m\theta f(t), \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (97)$$

$$z=h_2:\text{—}\quad u=v=w=0. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (98)$$

この條件に適合する解を求める事は，(89) までの準備計算と比較する時結局次の問題を解く事に歸着せしめる事が出來る．即ち (94), (95), (96), (97), (98) を滿足する樣に (78) を解く代りに，

$$t=0:\text{—}\quad \Phi(z,\ t)=0, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (94)'$$

$$\frac{\partial\Phi(z,t)}{\partial t}=0, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (95)'$$

$$z=h_1:\text{—}$$

$$\mu(z)\frac{\partial\Phi(z,\ t)}{\partial z}=-kf(t), \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (96)'$$

$$z=h_2:\text{—}$$

$$\Phi(z,\ t)=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (97)'$$

を滿足する樣に

$$\rho\frac{\partial^2\Phi(z,t)}{\partial t^2}=\mu(z)\frac{\partial^2\Phi(z,t)}{\partial z^2}+\frac{\partial\Phi(z,t)}{\partial z}\frac{d\mu(z)}{dz}-k^2\mu(z)\Phi(z,t) \quad ..(80)$$

を滿足する $\Phi(z,t)$ を見出せば充分であると云ふ事がわかる．勿論 $\Phi'(z,t)$ に關するものも同時に出さなければならぬが數學的の計算は全然 $\Phi(z,t)$ を求めるのと同じ事であるから略しておく．

この解法として $Z_s(z)$ なる函數で，

$$\frac{d}{dz}\left\{\mu(z)\frac{dZ_s(z)}{dz}\right\}+\lambda_s^2 Z_s(z)=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (99)$$

を滿足し

$$z=h_1:\text{—}\quad \mu(z)\frac{dZ_s(z)}{dz}=0, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (100)$$

$$z=h_2 \quad Z_s(z)=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (101)$$

に適合する z の函數を考へる．(99) の解で，(100), (101) を滿足するものは直交函數である事は容易に證明出來る．かゝる函數 $Z_s(z)$ を用ひて $\Phi(z,t)$ を展開する事が出來る筈である．即ち

$$\Phi(z,t)=\sum_{s=1}^{\infty}A_sZ_s(z). \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(102)$$

但し

$$A_s=\frac{\displaystyle\int_{h1}^{h2}\Phi(\xi)Z_s(\xi)d\xi}{\displaystyle\int_{h1}^{h2}Z_s^2(z)dz}. \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(103)$$

又 $\dfrac{\partial}{\partial z}\left(\mu(z)\dfrac{\partial\Phi(z,t)}{\partial z}\right)$ も第 1 章或は第 2 章に於ける様に $Z_s(z)$ で展開出來る. 尙この場合には, (100), (101) 及 (96)$'$, (97)$'$ を利用する時はこの展開式は簡單になり,

$$\frac{\partial}{\partial z}\left\{\mu(z\frac{\partial\Phi(z,t)}{\partial z}\right\}=-\sum_{s=1}^{\infty}Z_s(z)\frac{\left[Z_s(h_1)f(t)+\lambda_s^2A_s\displaystyle\int_{h1}^{h2}Z_s^2(z)dz\right]}{\displaystyle\int_{h1}^{h2}Z_s^2(z)dz} \quad ..(104)$$

となる. 又 $-k^2\mu(z)\Phi(z,t)$ も展開出來て,

$$-k^2\mu(z)\Phi(z,t)=-k^2\mu(z)\sum_{s=1}^{\infty}A_sZ_s(z). \qquad \ldots\ldots\ldots(105)$$

又 $\dfrac{\partial^2\Phi(z,t)}{\partial t^2}$ も展開し得て

$$\frac{\partial^2\Phi(z,t)}{\partial t^2}=\sum_{s=1}^{\infty}\frac{d^2A_s}{dt^2}Z_s(z). \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(106)$$

故に式 (80) は

$$\frac{d^2A_s}{dt^2}+\frac{\{k^2\mu(z)+\lambda_s^2\}}{\rho}A_s-\frac{Z_s(h_1)}{\rho\boldsymbol{K}}f(t)=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(107)$$

なる A_s に關する關係を與へる. 但し $\boldsymbol{K}=\displaystyle\int_{h1}^{h2}Z_s^2(z)dz.$

こゝに於て (94)$'$, (95)$'$ に照して,

$$\left.\begin{aligned}t=0:\!-\quad & A_s=0,\\ & \frac{dA_s}{dt}=0\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(108)$$

を滿足する樣に A_s を決定する時は,

$$A_s=\frac{Z_s(h_1)}{\sqrt{\rho(\lambda_s^2+k^2\mu(z))}}\frac{1}{\boldsymbol{K}}\int_0^t f(\xi)\sin\sqrt{\frac{\lambda_s^2+k^2\mu(z)}{\rho}}(t-\xi)d\xi. \quad \ldots(109)$$

故に (103) より

$$\Phi(z,t)=\sum_{s=1}^{\infty}\frac{Z_s(h_1)Z_s(z)}{\sqrt{\rho(\lambda_s^2+k^2\mu(z))}}\frac{1}{K}\int_0^t f(\xi)\sin\sqrt{\frac{\lambda_s^2+k^2\mu(z)}{\rho}}(t-\xi)d\xi \quad \ldots(110)$$

これより容易に振動を示す變位 u, v は次の如くなる事がわかる.

($\Phi'(z,t)$ の解も全く同様なものである.) 即ち

$$\begin{aligned} u=&\sum_{s=1}^{\infty}\frac{Z_s(h_1)Z_s(z)}{\sqrt{\rho(\lambda_s^2+k^2\mu(z))}}\frac{m}{k^2}\frac{C_m(kr)}{k^2}\frac{\cos m\theta}{K}\int_0^t f(\xi)\sin\sqrt{\frac{\lambda_s^2+k^2\mu(z)}{\rho}}(t-\xi)d\xi \\ &+\sum_{s=1}^{\infty}\frac{Z_s(h_1)Z_s(z)}{\sqrt{\rho(\lambda_s^2+k^2\mu(z))}}\frac{m}{k^2}\frac{C_m(kr)}{r}\frac{\sin m\theta}{K}\int_0^t f(\xi)\sin\sqrt{\frac{\lambda_s^2+k^2\mu(z)}{\rho}}(t-\xi)d\xi, \end{aligned} \quad \ldots(111)$$

$$\begin{aligned} v=&-\sum_{s=1}^{\infty}\frac{Z_s(h_1)Z_s(z)}{\sqrt{\rho(\lambda_s^2+k^2\mu(z))}}\frac{1}{k^2}\frac{\partial C_m(kr)}{\partial r}\frac{\sin m\theta}{K}\int_0^t f(\xi)\sin\sqrt{\frac{\lambda_s^2+k^2\mu(z)}{\rho}}(t-\xi)d\xi \\ &+\sum_{s=1}^{\infty}\frac{Z_s(h_1)Z_s(z)}{\sqrt{\rho(\lambda_s^2+k^2\mu(z))}}\frac{1}{k^2}\frac{\partial C_m(kr)}{\partial r}\frac{\cos m\theta}{K}\int_0^t f(\xi)\sin\sqrt{\frac{\lambda_s^2+k^2\mu(z)}{\rho}}(t-\xi)d\xi. \end{aligned} \quad \ldots(112)$$

即ち (94), (95), (96), (97) 及び (98) なる條件のもとに於ける一般的な不均質彈性體の振動問題をかくして解決する事が出來た.

今表面卽 $z=h_1$ で方位方向のみに力が作用してゐる時, 即ち

$$\left.\begin{aligned} \widehat{rz}_{z=h_1}&=0, \\ \widehat{\theta z}_{z=h_1}&=-C_1(kr)f(t) \end{aligned}\right\} \quad \ldots(113)$$

が作用する場合には,

$$\left.\begin{aligned} v=&-\frac{1}{k}C_1(kr)\times\frac{1}{\rho^{1/2}}\sum_{s=1}^{\infty}\frac{Z_s(h_1)Z_s(z)}{\sqrt{\lambda_s^2+k^2\mu(z)}}\frac{1}{K}\int_0^t f(\xi)\sin\frac{\sqrt{\lambda_s^2+k^2\mu(z)}}{\sqrt{\rho}}(t-\xi)d\xi, \\ u=&0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots(114)$$

となる. この結果を利用して

$z=h_1$ で

$$\left.\begin{aligned} \widehat{rz}_{z=h_1}&=0, \\ \widehat{\theta z}_{z=h_1}&=-\phi(r,t)=-\psi(r)f(t) \end{aligned}\right\} \quad \ldots(115)$$

の時には,

$$\left.\begin{aligned} u=&0, \\ v=&-\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\psi(\eta)J_1(kr)J_1(k\eta)k\eta\,dk\,d\eta \\ &\times\frac{1}{\rho^{1/2}}\sum_{s=1}^{\infty}\frac{Z_s(h_1)Z_s(z)}{\sqrt{\lambda_s^2+k^2\mu(z)}}\frac{1}{K}\int_0^t f(\xi)\sin\sqrt{\frac{\lambda_s^2+k^2\mu(z)}{\rho}}(t-\xi)d\xi. \end{aligned}\right\} \quad (116)$$

又 (115) の代りに,

$$
\left.\begin{array}{l}
z=h_1:-\quad \widehat{rz}_{z=h}=0 \\
\qquad\qquad \widehat{\theta z}_{z=h}=-\phi(r,t)=-\psi(r)f(t), \quad 0<r<a
\end{array}\right\} \quad \ldots\ldots(117)
$$

の樣にある限られた表面 $0<r<a$ だけの問題として研究する樣な時には,

$$
\left.\begin{array}{l}
u=0, \\
v=-\dfrac{2}{a^2}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty}\frac{Z_s(h_1)}{\sqrt{\lambda_s^2+\dfrac{\eta_n^2}{a^2}\mu(z)}}\,\frac{Z_s(z)J_1\left(\dfrac{\eta_n r}{a}\right)}{J_2^2(\eta_n)}\,\frac{1}{K} \\
\qquad\times\displaystyle\int_0^a J_1\left(\frac{\eta_n\xi}{a}\right)\xi d\xi\int_0^t\phi(\xi,\lambda)\sin\sqrt{\frac{\lambda_s^2+\dfrac{\eta_n^2}{a^2}\mu(z)}{\rho}}(t-\lambda)d\lambda
\end{array}\right\} \quad (118)
$$

によつて問題を解決する事が出來る.

但し η_n は次式の第 n 番目の根である.

$$J_1(\eta_n)=0. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(119)$$

以上第 1 章より第 3 章までの研究は今後の研究に對する基礎になる計算である事を附記しておく.

---

27. *On the Vibration of a Heterogeneous Elastic Solid due to the Surface Force. (I)*

By Genrokuro NISHIMURA,

Earthquake Research Institute.

Using Stokes' method, which has recently been adopted for the study of the long water wave in a bay of variable section, we solved the vibration problem of a heterogeneous elastic solid. The force applied on the top surface of the solid is given as a function of time and space. The boundary conditions at the bottom surface of that solid are taken as in the following two cases.

1. The solid adheres closely to the under-lying rigid solid.
2. The solid is capable of sliding over the lower medium with a slide friction.
