

# Model Order Reduction を用いた リアルタイム大変形シミュレーション

47106721 和田 雅之  
指導教員 鈴木 克幸 教授

Recently the demand of real-time physics base simulation has been rising in the CG animation area. It is popular to use spring-damper model or Finite Element Method, but these have either low accuracy or high cost. In this report, we propose a new method of real-time large deformation simulation by Model Order Reduction. Our method is derived by linear eigenvalue equations or Krylov subspace. The new method gives good approximation of nonlinear FEM and reduces the time cost drastically both static analyses and dynamic analyses.

Key words: Model Order Reduction, Real-time, Finite Element Method, Large deformation

## 1 序論

計算機の性能の向上に従い、CG アニメーションの分野で物理シミュレーションの需要が高まってきている。物理シミュレーションにおいて、計算時間の短縮はきわめて重要であり、いわゆるリアルタイムシミュレーションは計算に要する時間を実時間と同程度まで短縮する必要がある。その代わり、求められる精度は見た目には不自然がなければ十分であることが多い。

設計のためのシミュレーションでは近年、微分方程式の自由度や未知数を任意の数まで落とせる Model Order Reduction(以下: MOR)が注目されている。MOR の考えを用いると、ある程度の正確性を有しながらも、オリジナルの問題よりずっと速く解くことが出来る。そのため問題があまりにも大きい場合や、設計の初期段階で解析対象の特性知りたい場合などにこの考えが用いられる。

本論では、リアルタイム大変形シミュレーションを実現するために MOR を非線形有限要素法に用いる。まず非線形有限要素法の定式化を示し、その後、提案手法の定式化を示す。さらに、その手法の妥当性を非線形有限要素法の結果と比較することで検証する。

## 2 固体力学

有限要素法は固体力学を基に定式化されている。固体力学において幾何学的非線形を考慮しない場合とする場合では用いられる変位・ひずみ関係式が変わってくる。幾何学的非線形性を考慮する場合には、グリーン・ラグランジュひずみと呼ばれる、変位の偏微分とひずみが非線形の関係で結ばれている式を用いる。

## 3 有限要素法

### 3.1 線形有限要素法

有限要素法(以下: FEM)とは、微分方程式で表される場の問題を解くための解析手法の 1 つであり、無限の自由度を持った連続体を有限の自由度に離散化して解析を行なうのが特徴である。線形 FEM では節点変位ベクトルを  $\{\mathbf{u}\}$ 、離散化した外力ベクトルを  $\{\mathbf{f}\}$ 、剛性マトリクスを  $[\mathbf{K}]$  としたとき

$$[\mathbf{K}]\{\mathbf{u}\} = \{\mathbf{f}\} \quad (1)$$

を解くことで変位を求めることが出来る。

### 3.2 非線形有限要素法

幾何学的非線形性を考慮した非線形有限要素法では、離散化した内力ベクトルを  $\{\mathbf{Q}\}$  としたとき、

$$[\mathbf{K}_T]\{\Delta\mathbf{u}\} = \{\mathbf{f}\} - \{\mathbf{Q}\} \quad (2)$$

とすることで  $\{\Delta\mathbf{u}\}$  を求め、 $\{\mathbf{u}\}$  を求める。ここで  $[\mathbf{K}_T]$  は接線剛性マトリクスと呼ばれ、

$$[\mathbf{K}_T] = [\mathbf{K}] + [\mathbf{K}_L] + [\mathbf{K}_G] \quad (3)$$

として計算することが出来る。

$[\mathbf{K}_L]$  は各増分のステップにおける変位の影響を含んでおり、初期変位マトリクスあるいは大変位マトリクスと呼ばれる。 $[\mathbf{K}_G]$  は応力マトリクスや変位勾配マトリクスから計算され、初期応力マトリクスあるいは幾何剛性マトリクスと呼ばれる。

### 3.3 動的解析

構造物の時刻  $t$  での運動方程式は非減衰の系では質量マトリクス  $[\mathbf{M}]$  を用いて

$$[\mathbf{M}]\{\ddot{\mathbf{u}}\}_t + \{\mathbf{Q}\}_t = \{\mathbf{f}\}_t \quad (4)$$

と表される。中央差分法を用いて数値積分する場合は

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta t^2}[\mathbf{M}]\{\mathbf{u}\}_{t+\Delta t} &= \{\mathbf{f}\}_t - \{\mathbf{Q}\}_t \\ &+ \frac{1}{\Delta t^2}[\mathbf{M}](2\{\mathbf{u}\}_t - \{\mathbf{u}\}_{t-\Delta t}) \end{aligned} \quad (5)$$

を逐次解いていけばよい。

### 3.4 線形・非線形 FEM の比較

ここでは線形 FEM と非線形 FEM の比較を行なう。Fig.1 (a)は線形 FEM, Fig.1 (b)は非線形 FEM による変形シミュレーションであり、どちらも上面の中心に荷重を加えている。また Fig.2 はゴム材に荷重を加えたときの変形の様子である。

設計のために FEM が用いられる場合などでは線形 FEM でも十分な精度が得られることも多いが、このように変形が大きくなるような現象で特に変位を計算するときには、非線形 FEM を用いたほうが物体の実際の挙動をより精度よく計算、表現できることがわかる。

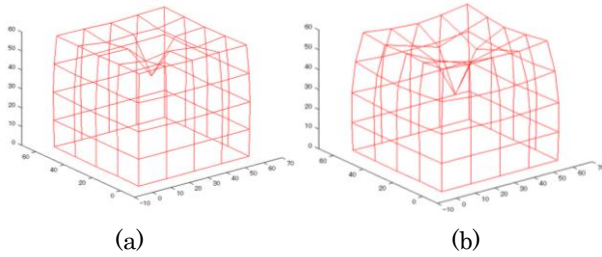


Fig.1 Linear FEM and nonlinear FEM

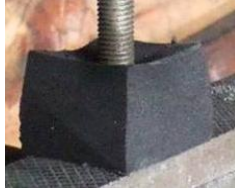


Fig.2 Deformation of the gum

#### 4 Model Order Reduction

本章では固有値解析を用いるものと Krylov subspace を用いるものの解説を行なう。本研究では、問題のサイズ  $n$  を  $m(m \ll n)$  に落とすとき、変位ベクトル  $\{\mathbf{u}\}$  を次式で近似するという考え方を採用する。

$$\{\mathbf{u}\} = [\mathbf{T}]\{\xi\} \quad (6)$$

ここで  $[\mathbf{T}]$  は 4.1 節および 4.2 節で述べる手法により求める長さ  $n$  の列ベクトルを  $m$  個並べた  $n \times m$  のマトリクスである。また  $\{\xi\}$  の各要素は  $[\mathbf{T}]$  内の列ベクトルそれぞれの係数を意味する。

##### 4.1 固有モード解析

非減衰の微小自由振動は以下の式で与えられる。

$$[\mathbf{M}]\{\ddot{\mathbf{u}}\} + [\mathbf{K}]\{\mathbf{u}\} = 0 \quad (7)$$

ここで解を

$$\{\mathbf{u}\} = \{\mathbf{q}\} \cos \omega t \quad (8)$$

と仮定して(7)に代入すると、

$$(-\omega^2[\mathbf{M}] + [\mathbf{K}])\{\mathbf{q}\} = 0 \quad (9)$$

となる。 $\{\mathbf{q}\}$  が 0 でない条件から

$$|-\omega^2[\mathbf{M}] + [\mathbf{K}]| = 0 \quad (10)$$

が得られ、振動数  $\omega$  が求まる。このとき  $\omega$  は実数となることが知られている。問題の自由度を  $n$  とすると式(10)から一般に  $n$  個の振動数が求まり、式(9)から各振動数に対応する固有振動モードが求まる。この固有振動モードを固有振動数が小さい順に  $m$  個選び並べたものを

$$[\mathbf{T}] = [\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_m] \quad (11)$$

とする。

##### 4.2 2次Arnoldi法

数学の分野で研究が盛んに行なわれている Krylov Subspace を用いた MOR の概要を説明する。

減衰行列  $[\mathbf{C}]$  を設定し、

$$[\mathbf{A}] = -[\mathbf{M}]^{-1}[\mathbf{C}] \quad (12)$$

$$[\mathbf{B}] = -[\mathbf{M}]^{-1}[\mathbf{K}] \quad (13)$$

$$\{\mathbf{r}_0\} = [\mathbf{K}]^{-1}\{\mathbf{f}\} / \|[\mathbf{K}]^{-1}\{\mathbf{f}\}\| \quad (14)$$

$$\{\mathbf{r}_1\} = [\mathbf{A}]\{\mathbf{r}_0\} \quad (15)$$

$$\{\mathbf{r}_i\} = [\mathbf{A}]\{\mathbf{r}_{i-1}\} + [\mathbf{B}]\{\mathbf{r}_{i-2}\} \quad (16)$$

により定義される 2 次の Krylov Subspace は

$$g_n(\mathbf{A}, \mathbf{B}; \mathbf{u}) = \text{span}\{\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_{n-1}\} \quad (17)$$

と定義される。さらにベクトル  $\{\mathbf{r}_i\}$  を 2 次 Arnoldi 法(以下: SOAR)により直交化する。

この方法で求めた  $m$  個のベクトルを並べ  $[\mathbf{T}]$  とする。

##### 4.3 非線形 FEM への応用

ここでは式(2)で表される問題の自由度を  $m$  に落としていく。式(6)を式(2)に代入して左から  $[\mathbf{T}]^T$  を掛けると式(18)を得る。

$$[\mathbf{T}]^T[\mathbf{K}_T(\xi)][\mathbf{T}]\{\Delta\xi\} = [\mathbf{T}]^T(\{\mathbf{f}\} - \{\mathbf{Q}(\xi)\}) \quad (18)$$

ここでさらに、

$$[\mathbf{K}_{mor}] = [\mathbf{T}]^T[\mathbf{K}_T][\mathbf{T}] \quad (19)$$

$$\{\mathbf{f}_{mor}\} = [\mathbf{T}]^T(\{\mathbf{f}\} - \{\mathbf{Q}\}) \quad (20)$$

とすれば(18)式は(21)式と書ける。

$$[\mathbf{K}_{mor}]\{\Delta\xi\} = \{\mathbf{f}_{mor}\} \quad (21)$$

次に強制変位解析での定式化を示す。強制変位解析も荷重解析と同様、増分解析で求める。今、強制変位として

$$[\mathbf{A}]\{\Delta\xi\} = \{\Delta\bar{\mathbf{u}}\} \quad (22)$$

が与えられているとする。ポテンシャルエネルギーは

$$\Pi = \frac{1}{2}\{\Delta\mathbf{u}\}^T[\mathbf{K}_T]\{\Delta\mathbf{u}\} - \{\Delta\mathbf{u}\}^T(\{\mathbf{f}\} - \{\mathbf{Q}\}) \quad (23)$$

で表される。式(23)に式(5)を代入し、式(19)と式(20)を用いて整理することで式(24)を得る。

$$\Pi = \frac{1}{2}\{\Delta\xi\}^T[\mathbf{K}_{mor}]\{\Delta\xi\} - \{\Delta\xi\}^T\{\mathbf{f}_{mor}\} \quad (24)$$

式(22)を制約条件としてラグランジュ乗数を用いて(24)式を最小化する。H を

$$H = \frac{1}{2}\{\Delta\xi\}^T[\mathbf{K}_{mor}]\{\Delta\xi\} - \{\Delta\xi\}^T\{\mathbf{f}_{mor}\} + \{\lambda\}^T([\mathbf{A}]\{\Delta\xi\} - \{\Delta\bar{\mathbf{u}}\}) \quad (25)$$

とおくと H の変分は

$$\begin{aligned} \delta H = & \\ \delta\{\Delta\xi\}([K_{mor}]\{\Delta\xi\} - \{f_{mor}\} + [A]^T\{\lambda\}) & \quad (26) \\ + \delta\{\lambda\}([A]\{\Delta\xi\} - \{\Delta\bar{u}\}) & \end{aligned}$$

となる.  $\delta H = 0$  とすると式(27)が得られる.

$$\begin{pmatrix} K_{mor} & A^T \\ A & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta\xi \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{mor} \\ \Delta\bar{u} \end{pmatrix} \quad (27)$$

荷重解析の場合は式(21)を, 強制変位解析の場合は式(27)を用いて  $\{\Delta\xi\}$  を求めていくことで解を計算することが出来る.

動的解析では次式で変位を近似する.

$$\{u\}_t = [T]\{\xi\}_t \quad (28)$$

式(5)に式(28)を代入し, 左から  $[T]^T$  を掛けることで

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta t^2} [M_{mor}]\{\xi\}_{t+\Delta t} = & \\ \{f_{mor}\}_t + \frac{1}{\Delta t^2} [M_{mor}](2\{\xi\}_t - \{\xi\}_{t-\Delta t}) & \quad (29) \end{aligned}$$

を得る. ただし

$$[M_{mor}] = [T]^T [M] [T] \quad (30)$$

$$\{f_{mor}\}_t = [T]^T (\{f\}_t - \{q\}_t) \quad (31)$$

である.

続いて強制変位の定式化を示す. 強制変位として

$$[A]\{\xi\}_t = \{\bar{u}\}_t \quad (32)$$

が与えられているとする. この運動のラグランジアンは式(30)と式(31)を用いて

$$L = \frac{1}{2} \{\dot{\xi}\}_t^T [M_{mor}]\{\dot{\xi}\}_t + \{\xi\}_t^T \{f_{mor}\} \quad (33)$$

と表される. いま式(32)の制約条件のもとでラグランジアンを積分を最小化する.

$$\begin{aligned} H = & \frac{1}{2} \{\dot{\xi}\}_t^T [M_{mor}]\{\dot{\xi}\}_t + \{\xi\}_t^T \{f_{mor}\} \\ & + \{\lambda\}_t^T ([A]\{\xi\}_t - \{\bar{u}\}_t) \end{aligned} \quad (34)$$

とおきその変分をとると式(35)になる.

$$\begin{aligned} \delta H = & \delta\{\dot{\xi}\}_t^T [M_{mor}]\{\dot{\xi}\}_t \\ & + \delta\{\xi\}_t^T (\{f_{mor}\}_t + [A]^T\{\lambda\}_t) \\ & + \delta\{\lambda\}_t^T ([A]\{\xi\}_t - \{\bar{u}\}_t) \end{aligned} \quad (35)$$

式(35)を積分し 0 とおくことで式(36)を得る.

$$\begin{pmatrix} M_{mor} & A^T \\ A & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_{t+\Delta t} \\ -\Delta t^2 \lambda_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\xi_t - \xi_{t-\Delta t} + \Delta t^2 f_{mort} \\ \bar{u}_{t+\Delta t} \end{pmatrix} \quad (36)$$

#### 4.4 応答曲面法

計算時間を短縮するために, 本論では実装時に応答曲面を用いている. 応答曲面とは複数の変数とそこから予測される応答との関係式を近似したものである.

本研究では式(19)および式(20)における  $[K_{mor}]$  と  $\{f_{mor}\}$  を, 予め用意しておいた応答曲面から計算している. 応答曲面を用いることで, 反復するまでステップ毎にオーダーを落とす前の  $[K_T]$  や  $\{Q\}$  を計算する必要がなくなり, 大幅な計算時間の短縮が可能となる.

### 5 静的シミュレーションの検証

式(21)と式(27)を用いてシミュレーションの実装を行った. なお解析に用いた PC の CPU は Intel Core i7-2600 3.4GHz, メモリは 8GB である. またプログラムの実装には MATLAB を用いている. Fig.3 は非線形 FEM による解析結果である.

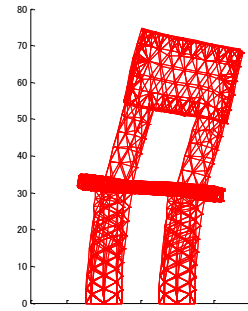


Fig.3 Result of nonlinear FEM

この条件に対し, 非線形解析の結果を  $u_{FEM}$ ,  $m=10$  としたときの固有モードによる MOR の荷重解析, 強制変位解析および SOAR による MOR の荷重解析, 強制変位解析の計算結果を  $u_{MOR}$ ,  $A$  を  $u_{FEM}$  の各成分の 2 乗を対角項にもつ対角行列とし, それぞれを式(37)で評価したものをまとめたものが Table.1 である. また Fig.4 はその中の固有モードを用いた強制変位 MOR の結果である. 計算時間は応答曲面を用いることでどれも 0.1s ほどまで短縮できた.

$$E = \sqrt{\frac{\{u_{FEM} - u_{MOR}\}^T [A] \{u_{FEM} - u_{MOR}\}}{\{u_{FEM}\}^T [A] \{u_{FEM}\}}} \quad (37)$$

Table.1 から荷重解析は誤差が大きくなることがわかる. これは自由度を落としたことによって構造が堅くなっているからだと考えられる. 一方で強制変位解析は厳密に入

力された条件を満たすので、CG という用途を考えると狙った変形を再現できる強制変位解析のほうが望ましいと考えられる。

SOAR による強制変位解析は線形解析の結果を用いているため任意の変形に対応していないという欠点がある。固有モードを用いると任意の変形に対応できるという利点があるため、固有モードによる強制変位解析が最も望ましい手法だと言える。

Table.1 Summary of error

	E
固有モード 荷重解析	0.7205
固有モード 強制変位解析	0.1517
SOAR 荷重解析	0.7486
SOAR 強制変位解析	0.1399

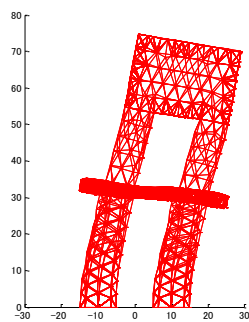


Fig.4 result of displacement MOR

## 6 動的シミュレーションの検証

動的シミュレーションとして、固有モードを用いた強制変位解析を用いた MOR の実装を行なった。解析モデルは静的シミュレーションのときと同じで、1秒かけて強制変位を線形的に与えた。時間刻みは  $\Delta t=0.001$  とした。Fig.5 は非線形 FEM による結果で左上から順に 0.25, 0.5, 0.75, 1 秒後の図である。

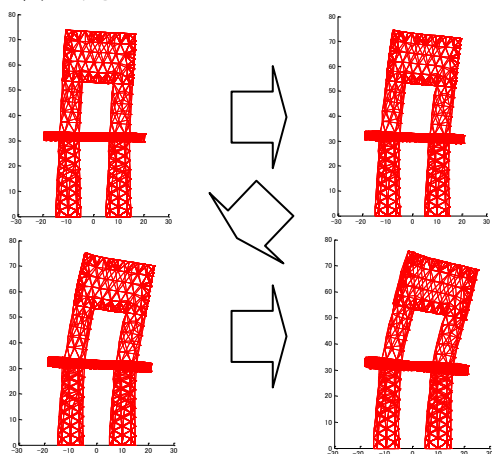


Fig.5 result of Nonlinear FEM

MOR でのシミュレーションとして  $m=10$  と式(38)を用いて実装を行なった。その結果が Fig.6 である。計算時間は 0.23s ほどであった。また非線形 FEM の結果を  $\mathbf{u}_{FEM}^i$ 、MOR の結果を  $\mathbf{u}_{MOR}^i$ 、 $\mathbf{A}^i$  を  $\mathbf{u}_{FEM}^i$  の各成分を対角項にもつ対角行列、総ステップ数を  $n_{step}$  としたとき

式(38)により定義された誤差の値を計算すると 0.1787 であった。動的解析においても固有モードの強制変位の MOR を実装することで、実時間よりも早く変位を計算でき、見た目の精度も十分なシミュレーションを行なうことが出来た。

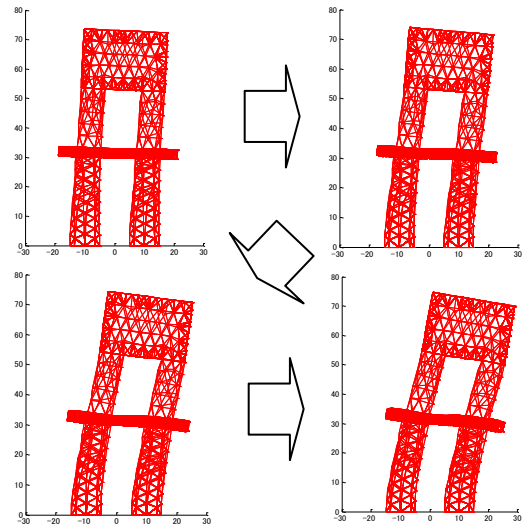


Fig.6 result of displacement MOR

$$E = \sum_{i=1}^{n_{step}} \frac{\left\{ \mathbf{u}_{FEM}^{i\Delta t} - \mathbf{u}_{MOR}^{i\Delta t} \right\}^T [\mathbf{A}^i] \left\{ \mathbf{u}_{FEM}^{i\Delta t} - \mathbf{u}_{MOR}^{i\Delta t} \right\}}{\left\{ \mathbf{u}_{FEM}^{i\Delta t} \right\}^T [\mathbf{A}^i] \left\{ \mathbf{u}_{FEM}^{i\Delta t} \right\}} \bigg/ n_{step} \quad (38)$$

このモデルはヤング率を 0.05GPa で計算していたが変形の CG アニメーションという用途を考えると剛性はもっと小さくてよいと考えられる。実際にヤング率を 0.001GPa 程度で自由振動させると自然なアニメーションとなった。このとき時間刻みはさらに大きくとることができ時間刻みを  $\Delta t=0.01$  としても計算することが出来た。このとき計算時間は 0.0312s であった。この手法の計算時間の支配的な部分は連立方程式を解く部分であり  $O(n^3)$  である。いま、リアルタイムで計算するためには実時間の半分以上で変位計算が終了している必要があると仮定すると、今のモード数の場合、そのボーダーの 1/16 程度で計算出来ている。連立方程式のサイズは用いたモードの数と等しいので理論的にはモード数を 25 としても実時間の半分以上で計算が終わることになる。ただしモード数を増やすと陽解法の場合時間刻みを小さくとる必要が生じ、本例の場合はモード数 23 で  $\Delta t=0.01$  では発散するようになったため、モード数の限界は 22 ということになる。

## 7 結論

本研究では大変形シミュレーションのリアルタイム化を実現するために、非線形解析に Model Order Reduction の考えを導入した。接線剛性マトリクスや応力ベクトルを応答曲面として計算しておくことでさらに大幅な時間短縮を実現した。様々な変形に対して狙った入力を再現できる固有モードを用いた強制変位解析が最も今回の用途にあっていることについて言及し、本手法が見た目の精度が十分出せることを示した。また CG で要求されるであろう剛性の大きさとそのときのモード数の限界についても考察を行なった。