

2011 年度 修士論文

メッシュを用いた人口分布の自己同型性に関する  
研究

Research on the self-homomorphic relationships of  
population distribution by using mesh

井上 勝仁  
Katsuhito Inoue

2012 年 1 月 30 日

東京大学大学院 新領域創成科学研究科  
社会文化環境学専攻  
Institute of Environmental Studies,  
Graduate School of Frontier Science, University of Tokyo



# 要旨

本研究は、人口メッシュデータを用いた分布の自己同型性に関する研究である。

ある地域に居住する人口は、その地域の経済や環境に多大な影響を与える。したがって、これまで数多くの研究や報告がなされてきた。しかし、ほとんどの既往研究は実質地域を用いて実証分析がなされてきた。したがって、実証分析が不十分である。ゆえに、本研究では形式地域であるメッシュを用いて実証分析を行う。ある母地域をメッシュを用いて、いくつかの単位地域に分割したとき、単位地域内の人口規模と、その順位の関係の特徴付ける直線または曲線をモデルから統計的に導くことができる。単位地域の大きさを変えたとき、直線または曲線のパラメータが変化する。この変化が全体と一部分で共通していることを自己同型性と定義する。本研究の目的は自己同型性があるか否かを実証的に明らかにすることである。この目的には、地域振興には、他地域と連携した対策をとる必要性があることを示すという動機がある。

本研究では分析対象地域を九州地方とした。メッシュを用いて分割した時、基準地域メッシュ内の人口が0人であるメッシュを66%より多く含む統合メッシュは分析対象外とした。人口分布を特徴付けるモデルは線形モデル、対数正規分布モデル、非線形モデルの三つである。

線形モデルを用いた場合、九州全体を母地域とし、単位地域を、 $2\text{km} \times 2\text{km}$ ,  $4\text{km} \times 4\text{km}$ ,  $8\text{km} \times 8\text{km}$ ,  $16\text{km} \times 16\text{km}$ ,  $32\text{km} \times 32\text{km}$  統合メッシュとしたとき、 $\alpha$  と決定係数  $R^2$  の値は単調に増加した。次に、37個の  $32\text{km} \times 32\text{km}$  統合メッシュのそれぞれを母地域とし、 $2\text{km} \times 2\text{km}$  統合メッシュ、 $4\text{km} \times 4\text{km}$  統合メッシュ、 $8\text{km} \times 8\text{km}$  統合メッシュを単位地域としたとき、同じ大きさの単位地域で、母地域を九州全体としたときのサイズの順位に対する  $\alpha$ , 決定係数  $R^2$  の値について着目すると、母地域を九州とした時の順位が下がる時  $\alpha$  の値は小さくなる傾向があり、決定係数  $R^2$  の値には相関がない。37個の母地域1つずつについて、単位地域の大きさを変化させたときの  $\alpha$ , 決定係数  $R^2$  の値に関して、母地域が九州全体としたときの結果と比較すると両者の推移は共通していない。したがって、自己同型性は検出されない。

対数正規分布モデルを用いた場合、九州全体を母地域とし、単位地域を、 $2\text{km} \times 2\text{km}$ 、 $4\text{km} \times 4\text{km}$ 、 $8\text{km} \times 8\text{km}$ 、 $16\text{km} \times 16\text{km}$ 、 $32\text{km} \times 32\text{km}$  統合メッシュとしたとき、 $\mu$  の値は単調に増加し、 $\sigma$  の値は単調に減少し、決定係数  $R^2$  の値には減少傾向がみられた。次に、37 個の  $32\text{km} \times 32\text{km}$  統合メッシュのそれぞれを母地域とし、 $2\text{km} \times 2\text{km}$  統合メッシュ、 $4\text{km} \times 4\text{km}$  統合メッシュ、 $8\text{km} \times 8\text{km}$  統合メッシュを単位地域としたとき、同じ大きさの単位地域で、母地域を九州全体としたときのサイズの順位に対する  $\mu$ 、 $\sigma$ 、決定係数  $R^2$  の値について着目すると、母地域を九州とした時の順位が下がる時  $\mu$  の値は大きくなる傾向があり、 $\sigma$  の値は小さくなる傾向があり、決定係数  $R^2$  の値には相関がない。37 個の母地域 1 つずつについて、単位地域の大きさを変化させたときの  $\sigma$ 、決定係数  $R^2$  の値に関して、母地域が九州全体としたときの結果と比較すると両者の推移は共通している。したがって、自己同型性が検出された。

非線形モデルを用いた場合、九州全体を母地域とし、単位地域を、 $2\text{km} \times 2\text{km}$ 、 $4\text{km} \times 4\text{km}$ 、 $8\text{km} \times 8\text{km}$ 、 $16\text{km} \times 16\text{km}$ 、 $32\text{km} \times 32\text{km}$  統合メッシュとしたとき、 $\alpha$ 、決定係数  $R^2$  の値に目立った傾向はみられない。次に、37 個の  $32\text{km} \times 32\text{km}$  統合メッシュのそれぞれを母地域とし、 $2\text{km} \times 2\text{km}$  統合メッシュ、 $4\text{km} \times 4\text{km}$  統合メッシュ、 $8\text{km} \times 8\text{km}$  統合メッシュを単位地域としたとき、同じ大きさの単位地域で、母地域を九州全体としたときのサイズの順位に対する  $\alpha$ 、決定係数  $R^2$  の値について着目すると、母地域を九州とした時の順位が下がる時 1 次項の係数  $\alpha_1$  の値は小さくなる傾向があり、2 次項の係数  $\alpha_2$ 、3 次項の係数  $\alpha_3$ 、決定係数  $R^2$  の値には相関がない。37 個の母地域 1 つずつについて、単位地域の大きさを変化させたときの  $\alpha$ 、決定係数  $R^2$  の値に関して、母地域が九州全体としたときの結果と比較すると両者の推移は共通していない。したがって、自己同型性は検出されない。

本研究の結論として、対数正規分布モデルで自己同型性を検出できたことを採用する。したがって、地域振興には、他地域と連携した対策をとる必要性がある。今後の研究課題は動学的な分析に発展させることである。

# 目次

第 1 章	序論	1
1.1	背景	2
1.2	既往研究と本研究の理論的根拠	3
1.3	自己同型性の定義	9
1.4	目的	10
第 2 章	分析方法	11
2.1	対象地域とデータ	12
2.2	分析手法	14
第 3 章	線形モデル	19
3.1	九州全体を母地域とした場合の分析	20
3.2	32km × 32km 統合メッシュを母地域とした場合の分析	22
3.3	自己同型性の分析	32
第 4 章	対数正規分布モデル	33
4.1	九州全体を母地域とした場合の分析	34
4.2	32km × 32km 統合メッシュを母地域とした場合の分析	36
4.3	自己同型性の分析	46
第 5 章	非線形モデル	47
5.1	九州全体を母地域とした場合の分析	48
5.2	32km × 32km 統合メッシュを母地域とした場合の分析	51
5.3	自己同型性の分析	62
第 6 章	総括	63
6.1	結論	64
6.2	今後の課題	66
	参考文献	67

---

付録 A	リーマン・スチルチェス積分	69
付録 B	伊藤積分の定義	73
付録 C	対数正規分布における確率変数の定数倍について	77
謝辞		79

# 第 1 章

## 序論

第 1 章では人口分布が研究テーマとして価値があること，特徴を定式化できること，研究課題があることを示す．第 1 節にて人口分布を説明することは重要な課題であることを述べる．第 2 節では，本研究に関連する既往研究を紹介する．その際，人口分布を取り扱うための準備として，順位規模法則，べき乗則，自己相似性という用語を定義する．第 3 節で本研究のテーマである自己同型性の定義をする．そのために必要な母地域と単位地域という用語を定義する．第 4 節は本研究の目的が自己同型性の有無を実証的に明らかにすること，その際，空間的な分布に焦点を当てることを述べる．

## 1.1 背景

これまで、人口分布について数多くの研究や報告がなされてきた。それは、ある地域に居住する人口がその地域の環境や経済に多大な影響を与えるからだ。例えば、ピューリッツァー賞受賞者のダイヤモンドは、他との交流のない閉じた地域が人口過剰により環境を破壊した歴史を紹介している [4]。また、人口が多いほどイノベーションが速やかに進み都市はより発展していくということを実証的に説明した Luis M. A. Bettencourt らによる論文 [2] など枚挙に暇がない。したがって、人口分布、具体的には、都市の大きさの分布をモデルを用いて特徴付け、人口集中を説明することは永くに渡り、研究者の関心を引き続けてきた。



## 1.2 既往研究と本研究の理論的根拠

人口集中に関する研究の中では、順位と規模の関係が「順位規模法則」に従うかどうか、中心的な関心となっている。順位規模法則とは、それぞれの要素の出現数または要素の規模とその順位との間に観察される経験則である。例えば、ある現象において、 $n$  個の結果が生じたとする。各結果の数値は正であり、大きさの順序は  $x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n > 0$  である。規模  $X$  と順位  $N$  の間に

$$N = AX^{-\alpha} \quad (A, \alpha > 0) \quad (1.1)$$

または、両辺に対数をかけて

$$\ln N = \ln A - \alpha \ln X \quad (A, \alpha > 0) \quad (1.2)$$

の関係があるとき、順位規模法則が成り立つという。特に  $\alpha = 1$  のとき、ジップ則という。一般的に都市システムでは、ジップ則が成立するとされている。ここで、

$$\alpha = \frac{\left(\frac{dX}{X}\right)}{\left(\frac{dN}{N}\right)} \quad (1.3)$$

であるので、 $\alpha$  は順位に関する規模の弾力性を表す。すなわち、1% 順位の数値が上がったときに（1% 順位が落ちたときに）、何 % 規模が小さくなるかを示す。つまり、都市システムへ当てはめると上位地域への人口集中を表す度数ということである。ゆえに、都市システムでの順位規模法則における関心は  $\alpha$  にあり、人口そのものの大きさではなく、他都市の人口と比較したときの相対的な大きさが問題となる。また、順位規模法則の下で、 $X$  を比例的に変化させても  $\alpha$  は変化しない。したがって、規模に関して、全人口に占める第  $i$  都市のシェアとして差し支えない。その相対的な大きさを改めて  $x_i$  とおく。

次に、「べき乗則」を定義する。各  $x_i$  が相対度数または確率  $p_i$  で表されるとき、規模  $x_i$  の順位は確率

$$P(X \geq x_i) = \sum_{n=1}^i p_n \quad (1.4)$$

で表現される。

さらに  $n$  が大きな値をとるとき、離散的確率変数  $X$  は連続型で近似されよう。それにより、式の展開を容易にすることができる。すなわち、現象は連続的確率変数  $X$  で表現される。その分布関数は  $F(x)$ 、確率密度関数は  $f(x)$  とする。値  $x$  の順位は、確率  $P(X \geq x)$  になる。変数  $X$  が

$$P(X \geq x) = Ax^{-\alpha}, \quad x \geq A^{\frac{1}{\alpha}} \quad (1.5)$$

で表わされるとき、 $X$  はべき乗則に従うという。以上の順位規模法則とべき乗則の説明は鈴木論文 [10] より引用し、本研究の主旨に基づいて再構築した。

都市の階層性に関する既往研究は、たとえば Christaller の中心地理論における都市システムを挙げることができる [3]。Christaller によれば、ある財やサービスはその生産拠点を中心に到達範囲があり、その到達範囲の大きさにより各財やサービスが階層性を構成する。Christaller の中心地理論を図 1.1 に示した。Christaller の中心地理論を人口分布に関して類推すれば、ある規模、たとえば人口 30 万人よりも小さい都市によって構成されるサブシステムの空間構造が、それよりもさらに小さい規模、たとえば 5 万人よりも小さい都市によって構成されるサブシステムの空間構造と相似的になるということが出来る。簡単に言えば、全体が部分と入れ子構造状に相似性をもつのである。このことを「自己同型性」をもつという。これまで人口の分布が自己同型性をもつことは理論的に示されてきたが、実証的な研究は十分になされていない。その根拠を続く既往研究の紹介で述べる。

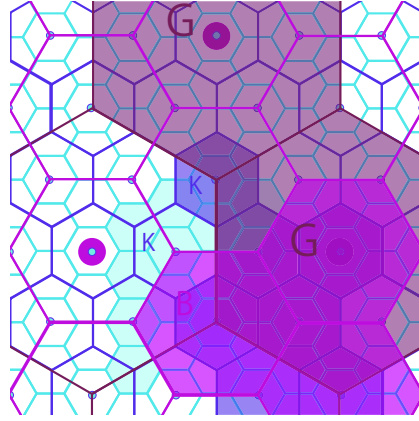


図 1.1 Christaller の中心地理論

本研究では、ある 1 つの地域が完全に順位規模法則に従うときの性質を「自己相似性」と定義する。また、順位規模法則への当てはまりを自己相似性の度合いとする。順位規模法則に従えば、すなわち、べき乗則に従う。ある地域での人口シェアと順位の関係が、式 (1.5) に従ったとする。ある地域における人口シェアから一部分における人口シェアへの変換を  $X \rightarrow \lambda X$  とすると、新しいべき乗則は

$$\begin{aligned} P(\lambda X \geq x) &= A(\lambda x)^{-\alpha} \\ &= \lambda^{-\alpha} A x^{-\alpha}, \quad x \geq \frac{1}{\lambda} A^{\frac{1}{\alpha}} \end{aligned} \quad (1.6)$$

となる。  $A' = \lambda^{-\alpha} A$  とすれば、

$$P(\lambda X \geq x) = A' x^{-\alpha}, \quad x \geq A'^{\frac{1}{\alpha}} \quad (1.7)$$

順位規模法則の形で書けば、

$$N = A' X^{-\alpha} \quad (A', \alpha > 0) \quad (1.8)$$

である．両辺に対数をかけて

$$\ln N = \ln A' - \alpha \ln X \quad (A', \alpha > 0) \quad (1.9)$$

となる．一部分における人口シェアと順位の分布は，全体における人口シェアと順位の分布を平行移動したものに過ぎない．したがって，人口の分布が全体と部分とで，入れ子構造状に相似性をもつといえる．つまり，本研究における自己相似性とは，ある地域が持つ理論上の性質のことであり，順位規模法則の当てはまりで定量化される．以上のことは高安秀樹の著書 [11] に基づいて再構築した．

順位規模法則について注目すべき研究として，鈴木啓祐による研究が挙げられる [9]．この研究では，一国内の各都市の人口を  $S$ ，各都市の人口で降順での順位を  $R$  とするとき，それらの間に

$$\ln S = -a \ln R + b \quad (1.10)$$

という順位規模法則が成立しているとき，その一国内の部分的地域内にある都市人口に対してやはり順位規模法則が同じパラメータで成立しうることとを理論とシミュレーションによって示したものである．

ここで，政治・経済・文化などで周囲の地方と明瞭に区別できる特色をもっている地域を「実質地域」，ある特定の目的や便宜のために人為的に設定した地域を「形式地域」と定義する．鈴木の研究では，実証分析が実質地域である日本国内の都市で行われた．また，実質地域である都市や国家を用いた順位規模法則の実証分析は多数の研究でなされている．しかし，形式地域を用いた研究はほとんど行われてこなかった．空間での分布という観点でみたとき，実質地域を用いた分析では空間への焦点が曖昧となる．これが，人口分布が自己同型性をもつことの実証的な研究が不十分だとする根拠である．ゆえに，本研究では形式地域であるメッシュを用いた分析を行う．詳細については次章で述べる．

続いて，本研究の理論的背景となる，Gabaix による都市人口がべき乗則に従うことを示した「下限のある幾何ブラウン運動を用いたモデル」を，Gabaix の論文 [5] と鈴木武の論文 [10] より引用する．

$t$  時点における第  $i$  都市の人口を  $P_{it}$  とする．各都市の人口変化率は (1) 時間と共に一定の割合  $\gamma_i$  で変化する部分と，(2) 各都市が各時点でそれぞれ独立に，しかし同じ分散  $\sigma^2$  で正規分布にしたがって変化する部分とから構成されていると仮定する．都市人口の規模が連続的に変化し，時間変化も連続的であるとして

$$\frac{dP_{it}}{P_{it}} = \gamma_i dt + \sigma dB_{it} \quad (1.11)$$

が言える．ここで， $B_{it}$  はブラウン運動である．

規模を比例的に変化させても，べき乗則における係数  $\alpha$  は変わらない．したがって，人口そのものではなく，人口シェアで議論する． $G_{it} = P_{it}/(t$  時点における全都市人口の期

待値) とおく. シェアで表した関係式は

$$\frac{dG_{it}}{G_{it}} = \mu_i dt + \sigma dB_{it} \quad (1.12)$$

ここで  $\mu_i = \gamma_i - \bar{\gamma}$  である.  $\gamma_i$  は人口シェア  $G_i$  の都市の変化率であり,  $\bar{\gamma}$  は全都市の平均変化率である.

添え字  $i$  を省略して式 (1.12) を変形すれば

$$dG_t = \mu G_t dt + \sigma G_t dB_t \quad (1.13)$$

積分の形に書き直して

$$G_t = G_0 + \mu \int_0^t G_s ds + \sigma \int_0^t G_s dB_s \quad (1.14)$$

である. 右辺第2項はリーマン・スチルチェス積分で, 第3項は伊藤確率積分で表現される. リーマンスチルチェス積分, 伊藤確率積分については付録にてまとめた.

これを解くと

$$G_t = G_0 e^{(\mu - 0.5\sigma^2)t + \sigma B_t} \quad (1.15)$$

となり, 幾何ブラウン運動になる.

人口シェア  $G_t$  はある値以下にはならない下限が存在すると仮定する. すなわち,  $G_t > G_{\min}$  に対しては式 (1.15) が適用され,  $G_t \leq G_{\min}$  の場合には  $dG_t = G_t \max(\mu dt + \sigma dB_t, 0)$  であるとする.

人口のシェアの対数を取り,  $g_t = \log G_t$  とおく.

$$g_t = \log G_t = g_0 + (\mu - 0.5\sigma^2)t + \sigma B_t \quad (1.16)$$

$B_t$  は標準ブラウン運動なので, 正規分布  $N(0, t)$  に従う. よって, 下限に制約がなければ

$$g_t \sim N[s_0 + (\mu - 0.5\sigma^2)t, \sigma^2 t] \quad (1.17)$$

となり, 人口シェア  $G_t$  は対数正規分布に従う.

しかし, 下限を設けているので,  $t \rightarrow \infty$  のときには以下のようなになる.

$g_t > g_{\min}$  のとき

$$P(g_t < g) \rightarrow 1 - \exp \left[ \left( \frac{2(\mu - 0.5\sigma^2)}{\sigma^2} \right) (g - g_{\min}) \right] \quad (1.18)$$

$$= 1 - \exp \left[ - \left( 1 - \frac{2\mu}{\sigma^2} \right) (g - g_{\min}) \right] \quad (1.19)$$

$$= 1 - e^{-\zeta(g - g_{\min})} \quad (1.20)$$

ここで  $\zeta = 1 - \frac{2\mu}{\sigma^2}$  である. よって,  $g_t$  は指数分布に収束する.

$g_t \leq g_{\min}$  のときは

$$P(g_t \leq g) \rightarrow 0 \quad (1.21)$$

となる。したがって下限のあるモデルでは、 $t \rightarrow \infty$  の極限において

$$P(g_t \geq g) = e^{-\zeta(g-g_{\min})} \quad (1.22)$$

である。

この対数を戻して  $G_t$  でみよう。  $G_t = e^{g_t}$ ,  $G_{\min} = e^{g_{\min}}$  だから

$$P(G_t \geq G) = \left( \frac{G}{G_{\min}} \right)^{-\zeta} \quad (1.23)$$

となり、べき乗則が成り立つ。べき乗則の成立は先に述べたように自己相似性の十分条件である。

本研究では、人口シェア  $G_t$  がある値  $G_b$  を下回った時、人口規模と順位の関係は対数正規分布に従い、 $G_b$  を下回らない時、順位規模法則に従うような境界点  $G_b$  が存在すると仮定する。したがって、人口規模と順位の関係は対数正規分布または順位規模法則のどちらかに従う。

自己相似性についての研究で興味深いものは、P.Bak らによる研究である [1]。

P.Bak らは、ある系を構成する要素が集合して形成する要素群が自己相似性がある状態へと移行していくことを自己組織化とし、自己相似性がある状態を自己組織化臨界状態とした。そして、ある要素が臨界点を越えたとき、その要素群から自己相似性が失われ散逸・崩壊していく状態を記述する手法である自己組織化臨界状態分析を確立した。また、その様子をシンプルな砂山モデルを用いて理論的に示した。ここで二次元砂山モデルについて説明する。まず、 $N \times M$  行列  $A$  を用意する。

$$A_{N,M} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,m} & \cdots & a_{1,M} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,m} & \cdots & a_{n,M} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{N,1} & \cdots & a_{N,m} & \cdots & x_{N,M} \end{bmatrix} \quad (1.24)$$

初期状態は  $a_{n,m} = 0$  とする。ここで、無作為抽出した  $a_{n,m}$  に対して

$$a_{n,m} \rightarrow a_{n,m} + 1 \quad (1.25)$$

という操作を繰り返し加える。ある臨界点  $a_c$  が存在して、 $a_{n,m} > a_c$  のとき、

$$a_{n,m} \rightarrow a_{n,m} - 4 \quad (1.26)$$

$$a_{n\pm 1,m} \rightarrow a_{n\pm 1,m} + 1 \quad (1.27)$$

$$a_{n,m\pm 1} \rightarrow a_{n,m\pm 1} + 1 \quad (1.28)$$

で表わされるような雪崩が発生する。行列の外側については、

$$a_{0,m} = a_{n,0} = a_{N+1,m} = a_{n,M+1} = 0 \quad (1.29)$$

となる．このような操作を十分な回数繰り返す．P.Bak らの論文では十万回であった．その結果，雪崩によってクラスターが形成される．このクラスターの大きさがべき乗則に従う．つまり，自己相似性のある状態となる．この状態が自己組織化臨界状態である．このとき，さらに操作を加え，新たに臨界点を超える  $a_{n,m}$  が現れ，自己相似性の散逸，崩壊が生じたとしても，雪崩が連鎖的に発生することで自己組織化は速やかに行われ，自己組織化臨界状態を保つという結論であった．

このモデルの都市システムへの応用は，クラスターを都市，雪崩を人口流出，臨界点を都市の飽和人口，無作為抽出による操作を人口の時系列変化としてなされてきた．クラスターの大きさとは，人口規模であり，人口規模の分布における自己相似性の生成を説明している．

動的な都市生成モデルを探求することは本研究の課題ではない．本研究では静的な都市構造分析を課題とする．先に本研究ではメッシュを用いると述べたが，メッシュの大きさを変えることで自己相似性の度合いを検証する．本研究では，人口シェア  $G_t$  がある値  $G_b$  を下回った時，人口規模と順位の関係は対数正規分布に従い， $G_b$  を下回らない時，順位規模法則に従うような境界点  $G_b$  が存在すると仮定した．順位規模法則に従うか否か，従わないならば，自己相似性の度合いで都市構造が把握できると考えた．

### 1.3 自己同型性の定義

本研究では、自己同型性を以下のように定義する。

はじめに、分析対象地域全域あるいは任意の大きさのメッシュを「母地域」と定義し、母地域を分割したメッシュを「単位地域」と定義する。すべての単位地域を合わせると母地域になる。

ある母地域をいくつかの単位地域に分割したとき、単位地域内の人口規模と、その順位の特徴付ける直線または曲線  $f$  を導くことができる。実測値  $y_i$  と理論値  $f_i$  との当てはまりは決定係数  $R^2$  にて求められる。決定係数  $R^2$  は  $\bar{y}$  を  $y_i$  の標本平均として

$$R^2 \equiv 1 - \frac{\sum_i (y_i - f_i)^2}{\sum_i (y_i - \bar{y})^2} \quad (1.30)$$

と定義する。

単位地域の大きさを変えると、 $f$  のパラメータが変化する。そのとき、決定係数  $R^2$  も変化する。これらの変化が、分析対象地域全体を母地域とした場合と、分析対象地域の一部を母地域とした場合で共通していることを自己同型性の条件とする。

## 1.4 目的

本研究の目的は、人口規模とその順位の関係において自己同型性があるか否かを実証的に明らかにすることである。人口規模とその順位の関係は人口分布を特徴付ける。本研究の目的には、一部の地域のみでの過疎化対策は効果が薄いことを根拠として、人口流出が著しい過疎地域における地域振興には、他地域と連携した対策をとる必要性があることを示すという動機がある。人口集中による都市化の裏には、人口流出による過疎化がある。自己同型性が明らかになれば、全体と部分で同様に特徴付けられる分布構造を形成しているといえることができる。ゆえに部分での人口の分布構造と、全体での人口の分布構造は、独立ではないといえることができる。すなわち、局所的な対策の効果は薄いということである。したがって、他地域との連携が必要であることを示すことができる。

また、本研究では実証分析を行う際、空間的な分布のみに焦点を当てた分析を行う。これまでの人口規模とその順位の関係についての実証分析では、実質地域を用いた研究のみが行われてきた。実質地域を用いた場合、ある地域の人口規模は、政治的要因、経済的要因、社会的要因、歴史的要因など様々なことが複雑に影響しあって決まる。このような複雑な事象を分析する前提として、事象を単純化した実証分析がなされているべきであるが、現状ではそのような研究はほとんどなされていない。したがって、本研究では、ある地域の人口規模という複雑な事象を単純化するために形式地域であるメッシュを用いるという方法をとる。



## 第 2 章

# 分析方法

第 2 章では本研究の分析対象と分析手段を示す。第 1 節にて分析対象地域を九州地方とした。そして、メッシュを用いて分割した時の分析除外基準を示した。第 2 節にて人口分布を特徴付ける三つのモデルを示した。それは線形モデル、対数正規分布モデル、非線形モデルである。

## 2.1 対象地域とデータ

九州地方を研究の対象とする。ただし、沖縄県および離島群は分析対象外とした。研究の対象の選定には実質地域を用いた。地域ブロックとして曖昧さがなく、ある程度の居住可能な土地の面積と人口を有することが九州地方を研究対象とした理由である。地域ブロックとして曖昧さがなくとは、例えば東海地方とは、三重県、愛知県、岐阜県の三県を指す場合や静岡県を含めた四県を指す場合もある。その点で九州地方には曖昧さがなく、その点で四国地方や北海道も曖昧さがなくと言える。これらの地域の中で、九州地方が最も広い居住可能な土地の面積と多くの人口を有している。したがって、九州地方を分析対象とした。沖縄県および離島群は陸続きでないため分析対象外とした。

本研究では、人口データを県や市町村などの実質地域に基づくデータではなく、形式地域であるメッシュに基づくデータを用いる。平成17年国勢調査の基準地域メッシュデータ（単位区画の1辺の長さが約1kmのもの）を基に、単位区画の1辺の長さが、2km, 4km, 8km, 16km, 32kmの統合メッシュデータを生成した。その際、基準地域メッシュ内の人口が0人であるメッシュを66%より多く含む統合メッシュに関しては、随時、分析対象から外した。66%という数値は九州地方全体を32km×32km統合メッシュに分割したときの分析対象地域となるメッシュ数が表2.1のようになった。

表 2.1 居住不可能であるメッシュの割合による除外基準と分析対象地域数

除外基準	> 25 %	> 34 %	> 50 %	> 66 %	> 75 %
分析対象地域数	5	11	23	37	40

32km×32km 統合メッシュでの分析対象地域の選択に関して、基準の厳しさと、分析対象地域数の最適点が66%であると判断した。この基準を2km×2km, 4km×4km, 8km×8km, 16km×16km 統合メッシュに対しても適用した。

また、本研究ではメッシュを用いた分析を行うため、メッシュ内の人口を、全メッシュに対する基準地域メッシュデータでの居住可能地域の割合にて標準化した。つまり、 $n\text{km} \times n\text{km}$  統合メッシュ内の人口が  $M$ 、統合メッシュ内の人口が1以上である基準地域メッシュの数を  $m$  としたとき、メッシュ内の人口は

$$M \frac{n^2}{m}$$

にて標準化される。以下、メッシュ内の人口を指すときは、全て標準化された人口を指すものとする。

図 2.1 には、研究対象地域における 32km×32km 統合メッシュとそれぞれのメッシュの順位が示されている。参考のために、金本良嗣、徳岡一幸が設定した都市雇用圏を示した [6]。

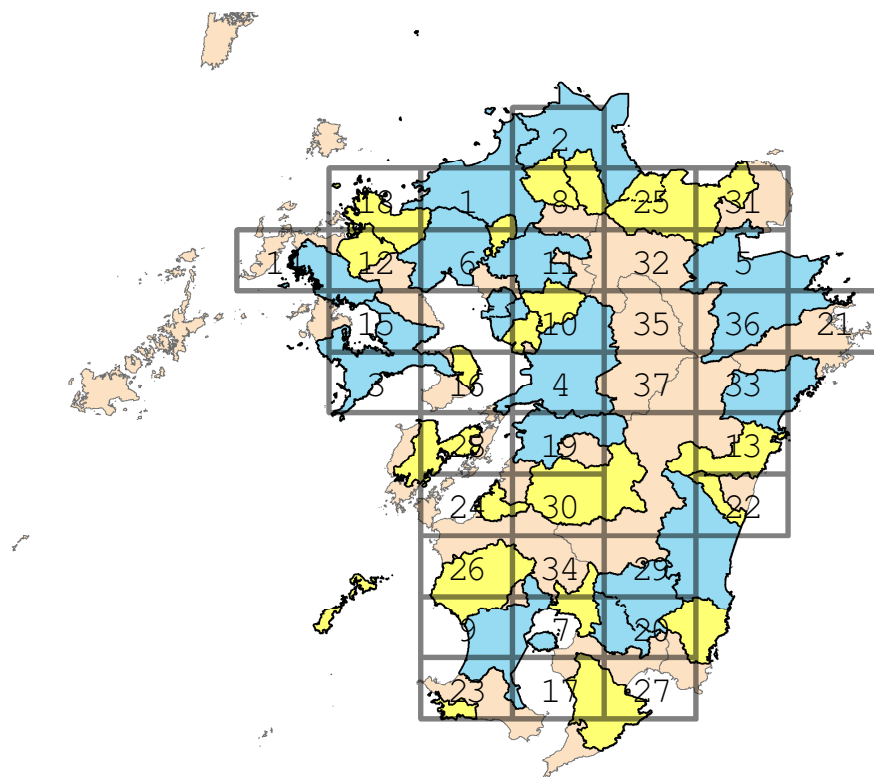


図 2.1 32km×32km 統合メッシュとそれぞれのメッシュの順位

青色で表されているものが大都市雇用圏である。具体的には北九州市，福岡市，大牟田市，久留米市，佐賀市，長崎市，佐世保市，熊本市，八代市，大分市，宮崎市，都城市，延岡市，鹿児島市を中心とした雇用圏である。黄色で表されているものは小都市雇用圏である。具体的には飯塚市，田川市，柳川市，唐津市，鳥栖市，伊万里市，島原市，五島市，人吉市，水俣市，玉名市，本渡市，山鹿市，中津市，日田市，佐伯市，日南市，日向市，高鍋町，鹿屋市，枕崎市，名瀬市，国分市，薩摩川内市を中心とした雇用圏である。

## 2.2 分析手法

ある母地域が与えられたとき、それを構成する単位地域について、以下、二つの分析を行う。

まず、母地域を所与とし、単位地域の大きさを変えたときに、係数、決定係数  $R^2$ 、パラメータがどう変化するかを調べる。具体的には、母地域として九州全域を取り上げ、単位地域を、2km×2km 統合メッシュ、4km×4km 統合メッシュ、8km×8km 統合メッシュ、16km×16km 統合メッシュ、32km×32km 統合メッシュと大きくしていく。

次いで、母地域を小さくしたときに、係数、決定係数  $R^2$ 、パラメータがどう変化するかを調べる。先に、母地域を九州全域とし単位地域を複数の 32km×32km 統合メッシュに分割して分析を行うと述べたが、今度は、複数の 32km×32km 統合メッシュを、それぞれ母地域として分析する。8km×8km 統合メッシュを単位地域とする場合、4km×4km 統合メッシュを単位地域とする場合、2km×2km 統合メッシュを単位地域とする場合の三つについて、先の分析と同様な、同一母地域で単位地域メッシュの大きさを変えたときの係数、決定係数  $R^2$ 、パラメータの変化に加えて、単位地域メッシュの大きさが同一な異なる母地域間での係数、決定係数  $R^2$ 、パラメータについても比較する。

本研究では以下、三つのモデルを用いて人口規模と順位を特徴付ける直線または曲線を求める。算出する係数、決定係数  $R^2$ 、パラメータは下記の通りである。

- 線形モデル

$$\ln\left(\frac{s}{S}\right) = A - \alpha \ln\left(\frac{r}{R}\right) \quad (2.1)$$

$s$ ：単位地域内の人口、 $S$ ：母地域内の人口、 $r$ ：単位地域の順位、 $R$ ：単位地域の数  
最小二乗法により、式 (2.1) の係数を求め、決定係数  $R^2$  を計算する。

- 対数正規分布モデル

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x} e^{-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (2.2)$$

$s$  ( $s$ ：単位地域内の人口) を  $s = X$ ,  $0 < x < \infty$  なる確率変数として考える。この時、 $X \sim \text{LN}(\mu, \sigma^2)$  と仮定する。対数正規分布の確率変数  $X$  は、 $0 < x < \infty$ 、である。しかし、確率変数を定数倍した新しい確率変数もまた対数正規分布に従う。ゆえに、確率変数  $X$  を  $\frac{1}{S}$  ( $S$ ：母地域内の人口) 倍して、人口シェアとして差し支えない。証明は付録にて示す。

改めて  $\left(\frac{s}{S}\right)$  を、 $\left(\frac{s}{S}\right) = X$ ,  $0 < x < 1$  なる確率変数  $X$  として考える。この時、 $X \sim \text{LN}(\mu, \sigma^2)$  であると仮定する。最尤推定法により式 (2.2) のパラメータを推定する。

最尤推定法によりパラメータを求めた場合は、最小二乗法を用いて回帰曲線を導いた場合と異なり回帰曲線が直接求まるわけではない。本研究では最小二乗法の場合と同じ図の中に回帰曲線を示すために以下の方法で対数正規分布の分布曲線を示した。

まず、最尤推定法により求めた  $\mu$ ,  $\sigma$  より、単位地域の個数 ( $= n$ ) と同じだけの対数正規分布に従う乱数を発生させるという試行を 1000 回繰り返して ( $n \times 1000$ ) の行列をつくる。つまり

$$X = \begin{bmatrix} x_{1,1} & \cdots & x_{1,m} & \cdots & x_{1,1000} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{n,1} & \cdots & x_{n,m} & \cdots & x_{n,1000} \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

としたとき、 $X$  の第  $m$  列からなるベクトル  $x_m$  を確率変数  $X_m$  とすれば、

$$X_m \sim \text{LN}(\mu, \sigma^2)$$

であるということだ。

ここで、行列  $X$  の各列ベクトル  $x_m$  を降順に並べ替えた新しい行列  $X'$  をつくる。つまり各列ベクトル  $x'_m$  は  $x'_{1,m} \geq x'_{2,m} \geq \cdots \geq x'_{n,m}$  となっている。

$$X' = \begin{bmatrix} x'_{1,1} & \cdots & x'_{1,m} & \cdots & x'_{1,1000} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x'_{n,1} & \cdots & x'_{n,m} & \cdots & x'_{n,1000} \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

この行列  $X'$  の各行の平均を求めて  $\bar{X}'$  とした。つまり、

$$\bar{X}' = \frac{1}{1000} \begin{bmatrix} \sum_{m=1}^{1000} x'_{1,m} \\ \sum_{m=1}^{1000} x'_{2,m} \\ \vdots \\ \sum_{m=1}^{1000} x'_{n,m} \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

本研究では  $\bar{X}'$  を対数正規分布の分布曲線としてプロットした。この分布曲線との当てはまりを示すために決定係数  $R^2$  を求める。

各パラメータが確率密度関数に与える影響を図 2.2, 2.3 に示す。また、先に述べた分布曲線を用いて人口規模と順位に対応する仮想的な曲線を図 2.4, 2.5 を示す。本研究では、 $X \sim \text{LN}(\mu, \sigma^2)$ ,  $0 < x < 1$ , であるため、 $\mu$  の最尤推定値について、

$$\mu = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln X_k < 0$$

である。ゆえに  $\mu < 0$  の場合のみ示す。

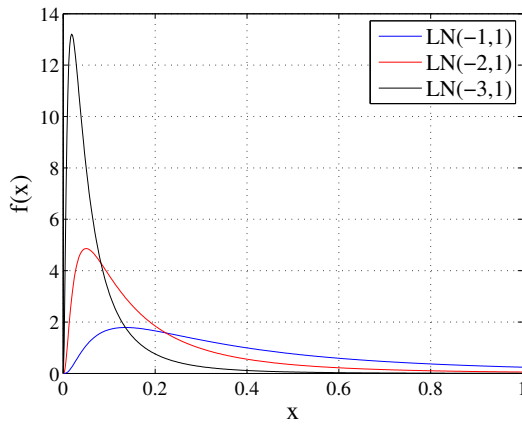


図 2.2 青:  $\text{LN}(-1, 1)$ , 赤:  $\text{LN}(-2, 1)$ , 黒:  $\text{LN}(-3, 1)$

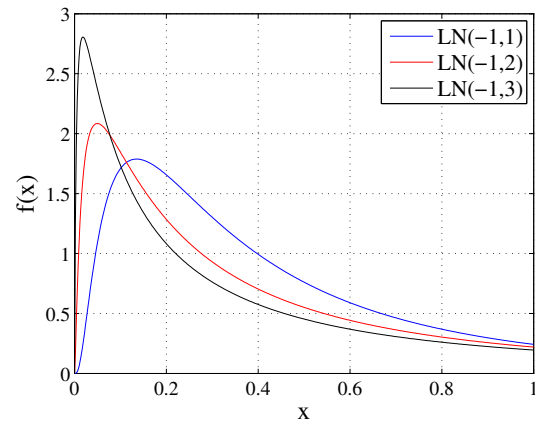


図 2.3 青:  $\text{LN}(-1, 1)$ , 赤:  $\text{LN}(-1, 2)$ , 黒:  $\text{LN}(-1, 3)$

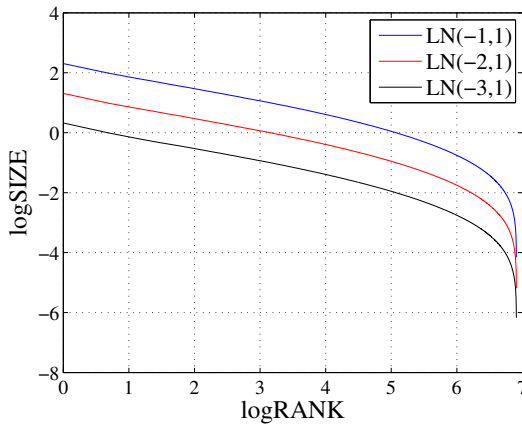


図 2.4 青:  $\text{LN}(-1, 1)$ , 赤:  $\text{LN}(-2, 1)$ , 黒:  $\text{LN}(-3, 1)$

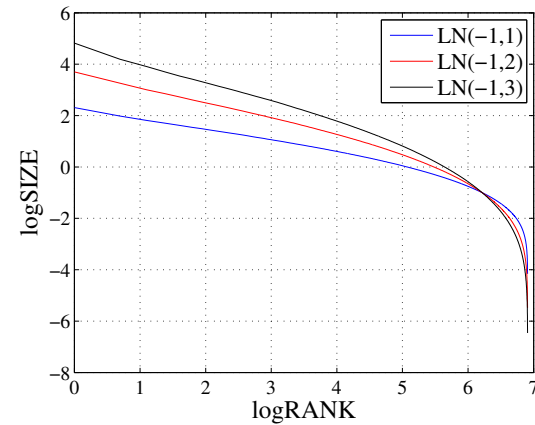


図 2.5 青:  $\text{LN}(-1, 1)$ , 赤:  $\text{LN}(-1, 2)$ , 黒:  $\text{LN}(-1, 3)$

本研究で採用した分布曲線で  $\mu$  が縦軸方向の位置パラメータの役割を果たしていることが明らかである。つまり、 $\mu$  は線形モデルでの  $A$  に対応しているといえる。また、 $\sigma$  はスケールパラメータの役割を果たしている。  $\sigma$  が小さいほど曲線

は水平に近づく。つまり、 $\sigma$  は値が大きいほど少数の都市に人口が集中しているを示す、人口の偏在を表す度数である。つまり、 $\sigma$  は線形モデルの  $\alpha$  に対応している。

- 非線形モデル

$$\ln\left(\frac{s}{S}\right) = \alpha_n \left(\ln\left(\frac{r}{R}\right)\right)^n + \alpha_{n-1} \left(\ln\left(\frac{r}{R}\right)\right)^{n-1} + \dots + \alpha_1 \ln\left(\frac{r}{R}\right) + A \quad (2.6)$$

最小二乗法により、式 (2.6) の係数を求め、決定係数  $R^2$  を計算する。

この時、線形最小二乗法とは異なり  $\alpha$  に特別な意味はない。

以上のように、本研究では、ランク： $\left(\frac{r}{R}\right)$ 、サイズ： $\left(\frac{s}{S}\right)$  ( $s$ : 単位地域内の人口,  $S$ : 母地域内の人口,  $r$ : 単位地域の順位,  $R$ : 単位地域の数) と定義して区間 (0,1) に基準化している。

以上の分析を行い、第3章にて線形モデルを用いた分析、第4章にて対数正規分布モデルを用いた分析、第5章にて非線形モデルを用いた分析を行い、自己同型性の有無について考察する。





## 第3章

# 線形モデル

第3章では線形モデルを用いた場合、人口規模と順位は、どのような分布構造として特徴付けられるかを分析した。第1節で、九州全体を母地域とし、単位地域を、 $2\text{km} \times 2\text{km}$ ,  $4\text{km} \times 4\text{km}$ ,  $8\text{km} \times 8\text{km}$ ,  $16\text{km} \times 16\text{km}$ ,  $32\text{km} \times 32\text{km}$  統合メッシュとしたときの分析結果と考察を示す。第2節では、37個の  $32\text{km} \times 32\text{km}$  統合メッシュのそれぞれを母地域とし、 $2\text{km} \times 2\text{km}$  統合メッシュ,  $4\text{km} \times 4\text{km}$  統合メッシュ,  $8\text{km} \times 8\text{km}$  統合メッシュを単位地域として分析を行う。同じ大きさの単位地域で求めた、 $\alpha$ , 決定係数  $R^2$  の値について、第1節にて母地域を九州全体としたときの人口規模の順位に対してどのように変化しているのかを考察する。第3節にて、線形モデルにおける同型性について考察する。つまり、37個の母地域1つずつについて、単位地域の大きさを変化させたときの  $\alpha$ , 決定係数  $R^2$  の推移に関して、母地域が九州全体としたときの結果と比較する。結果として自己同型性は検出できない。

### 3.1 九州全体を母地域とした場合の分析

この節では、九州全体を母地域とし、単位地域を、 $2\text{km} \times 2\text{km}$ 、 $4\text{km} \times 4\text{km}$ 、 $8\text{km} \times 8\text{km}$ 、 $16\text{km} \times 16\text{km}$ 、 $32\text{km} \times 32\text{km}$  統合メッシュとしたときの分析を行う。

図 3.1, 3.2 で、横軸をランクを対数変換した値、縦軸をサイズを対数変換した値としてプロットし、回帰直線を示した。また、黒色、青色、緑色、紫色、赤色のプロットと回帰直線は、それぞれ単位地域が  $2\text{km} \times 2\text{km}$  統合メッシュ、 $4\text{km} \times 4\text{km}$  統合メッシュ、 $8\text{km} \times 8\text{km}$  統合メッシュ、 $16\text{km} \times 16\text{km}$  統合メッシュ、 $32\text{km} \times 32\text{km}$  統合メッシュであるときの結果を表す。 $\alpha$ 、決定係数  $R^2$ 、 $N$ (単位地域のメッシュ数) の値は表 3.1 にまとめられている。

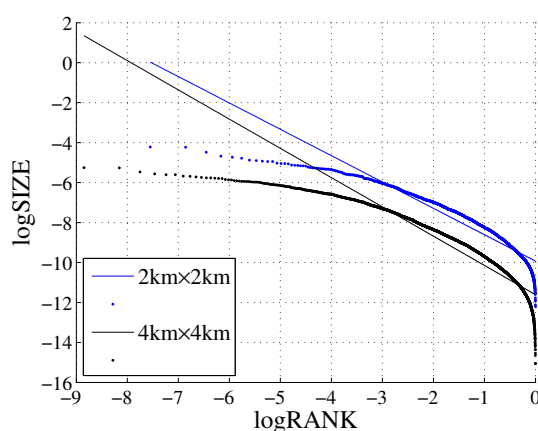


図 3.1 九州全域を母地域、 $2\text{km} \times 2\text{km}$ 、 $4\text{km} \times 4\text{km}$  統合メッシュを単位地域として線形モデルを用いた場合の推定値と実測値

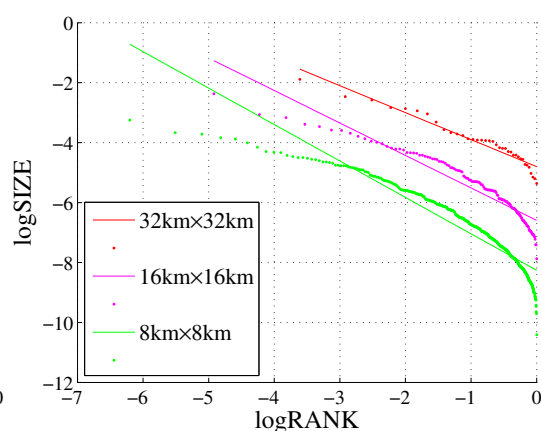


図 3.2 九州全域を母地域、 $8\text{km} \times 8\text{km}$ 、 $16\text{km} \times 16\text{km}$ 、 $32\text{km} \times 32\text{km}$  統合メッシュを単位地域として線形モデルを用いた場合の推定値と実測値

表 3.1 母地域を九州全域、線形モデルを用いた場合の分析結果

	2 k m × 2 k m	4 k m × 4 k m	8 k m × 8 k m	16 k m × 16 k m	32 k m × 32 k m
$\alpha$	1.46	1.32	1.22	1.08	0.900
$R^2$	0.85	0.88	0.89	0.90	0.94
$N$	6971	1903	494	137	37

図 3.1, 3.2 と表 3.1 より 2 つの結果を読み取ることができる。1 つは、単位地域の大きさに対して、 $\alpha$  の値が単調に減少していることである。もう 1 つは、決定係数  $R^2$  の値が単調に増加していることである。

これら 2 つの結果は、同じ事実に基づいている。それは、都市システムを対象とした順

位・規模分析でよく知られている現象と関連がある。ランクが比較的高い都市と中程度の都市については順位規模法則の当てはまりが良いものの、ランクの低い都市については当てはまりが悪くなるという現象である。図 3.1, 3.2 を見れば、統合メッシュを単位にした分析でも、同様に、ランクの低い単位地域に関して、垂れ下がったような分布をすることで直線の当てはまりが悪くなっていることがわかる。それが大きな効果をもつかどうかで、直線の当てはまりが良いか悪いかが決まる。データを対数変換していることから、ランクの値が 0 に近づくほどプロットされるデータ数は多くなるので、上位ランクの外れよりも下位ランクの外れのほうが影響は大きい。したがって、メッシュを粗くするほど当てはまりが良くなるという結果は、ランクの低い単位地域の人口が回帰直線から外れる影響が、次第に小さくなっていくことに拠ると解釈できる。

このようなことが起こる理由は、第 1 章 2 節で述べた、人口シェア  $G_t$  が自己相似性が失われる境界点  $G_b$  を下回るという現象から説明できる。単位地域の大きさを小さくすれば、母地域が同じであれば  $N$  は大きくなる。 $N$  が大きくなれば、最下位ランクでの  $G_t$  が小さくなる。最下位ランクでの  $G_t$  が順位規模分布の成立に必要な境界点  $G_b$  よりも小さくなるので順位規模法則が成立しない。 $G_t$  が境界点  $G_b$  よりも小さくなるとき、 $G_t$  は対数正規分布に従うので垂れ下がったような分布となるのだ。

また、単位地域の大きさを大きくしていくことで、決定係数  $R^2$  の値が単調に増加していることから、順位規模法則への当てはまりの良さが高まっている。すなわち、べき乗則に従い、自己相似性の度合いが高まっている。

## 3.2 32km × 32km 統合メッシュを母地域とした場合の分析

この節では、37 個の 32km×32km 統合メッシュを母地域とし、2km×2km 統合メッシュ、4km×4km 統合メッシュ、8km×8km 統合メッシュを単位地域として分析を行う。

図 3.3 ~ 3.39 は、九州全体を母地域としたときのサイズが 1 位から 37 位までの 32km×32km 統合メッシュ 37 個それぞれを母地域とした分析の結果を示している。図の横軸はランクを対数変換した値、縦軸はサイズを対数変換した値である。黒色、青色、緑色の曲線はそれぞれ単位地域が 2km×2km、4km×4km、8km×8km 統合メッシュであるときの回帰直線を表す。また、それぞれの母地域における  $\alpha$ 、決定係数  $R^2$  の値を表 3.2 にまとめた。

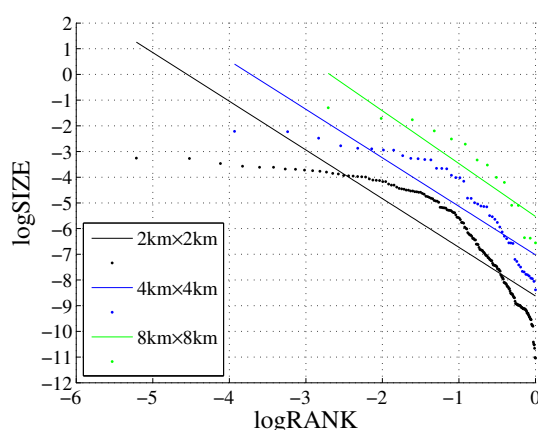


図 3.3 サイズが 1 位の 32km×32km 統合メッシュを母地域として線形モデルを用いた場合の推定値と実測値

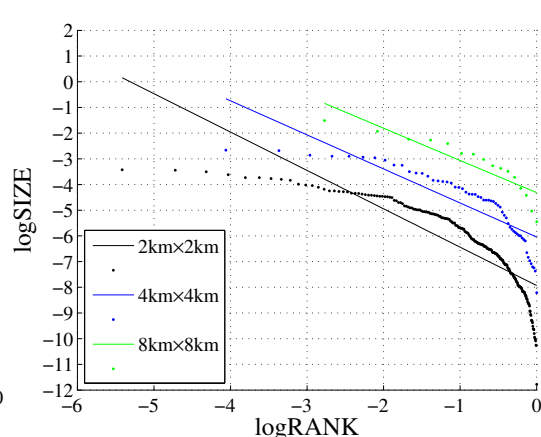


図 3.4 サイズが 2 位の 32km×32km 統合メッシュを母地域として線形モデルを用いた場合の推定値と実測値

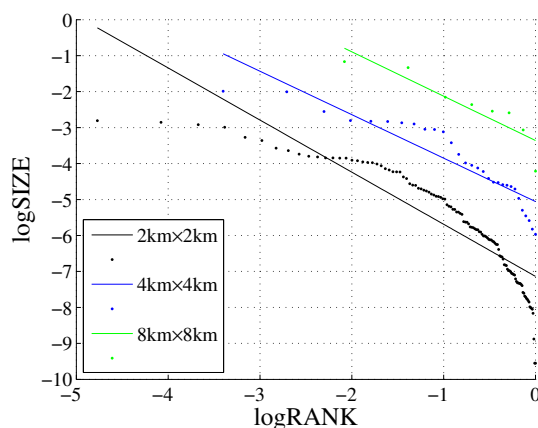


図 3.5 サイズが 3 位の 32km×32km 統合メッシュを母地域として線形モデルを用いた場合の推定値と実測値

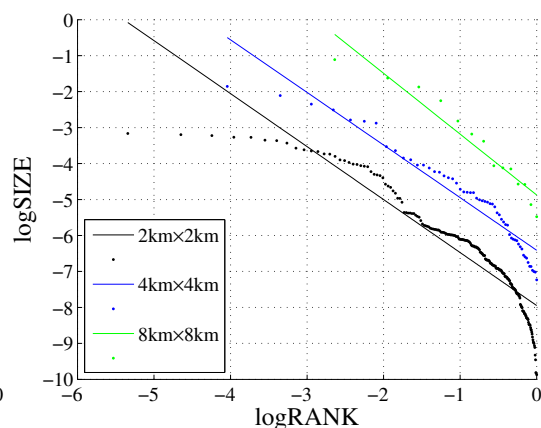


図 3.6 サイズが 4 位の 32km×32km 統合メッシュを母地域として線形モデルを用いた場合の推定値と実測値

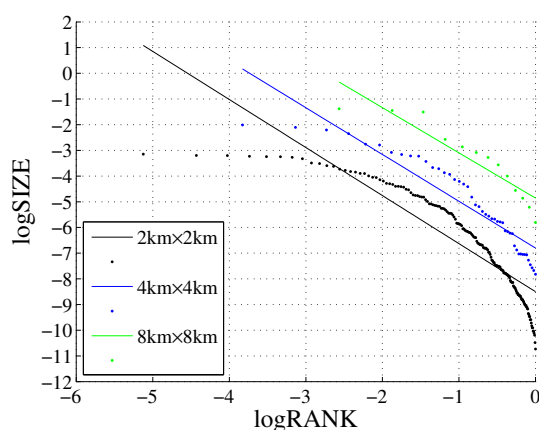


図 3.7 サイズが5位の 32km×32km 統合メッシュを母地域として線形モデルを用いた場合の推定値と実測値

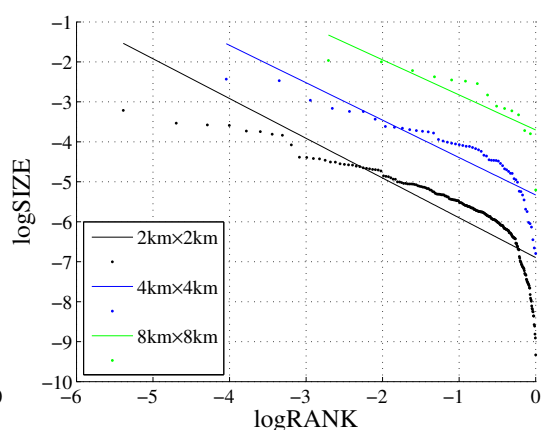


図 3.8 サイズが6位の 32km×32km 統合メッシュを母地域として線形モデルを用いた場合の推定値と実測値

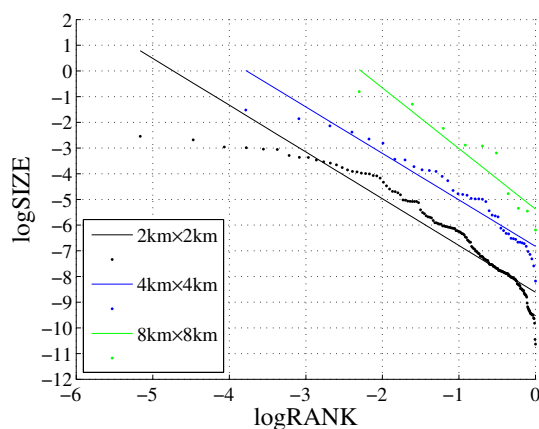


図 3.9 サイズが7位の 32km×32km 統合メッシュを母地域として線形モデルを用いた場合の推定値と実測値

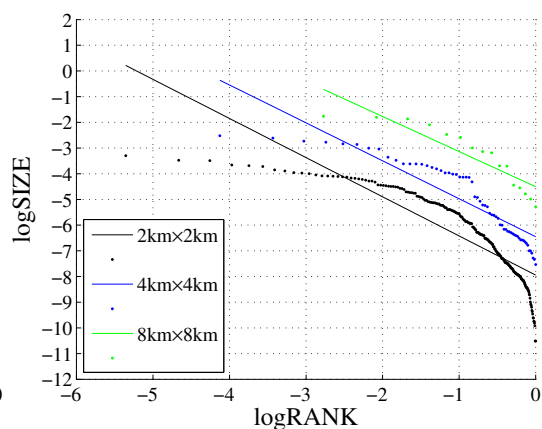


図 3.10 サイズが8位の 32km×32km 統合メッシュを母地域として線形モデルを用いた場合の推定値と実測値

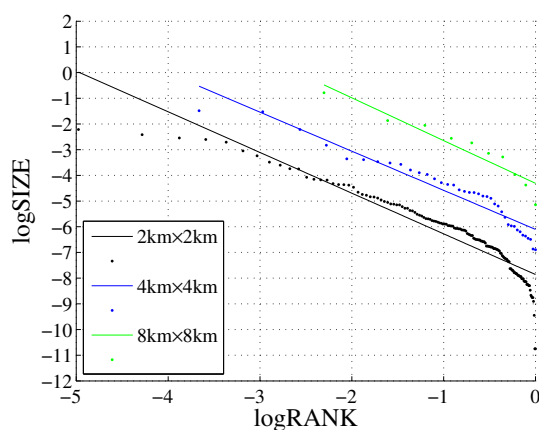


図 3.11 サイズが9位の 32km×32km 統合メッシュを母地域として線形モデルを用いた場合の推定値と実測値

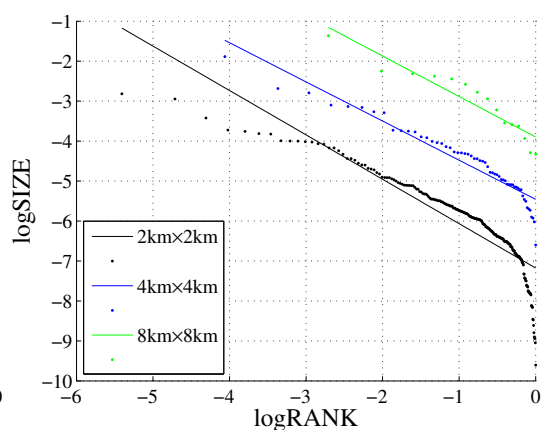


図 3.12 サイズが10位の 32km×32km 統合メッシュを母地域として線形モデルを用いた場合の推定値と実測値

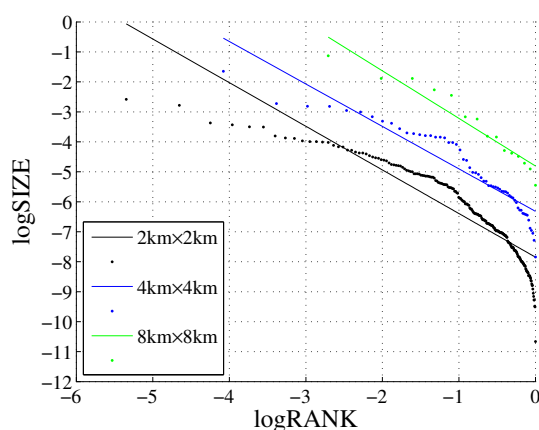


図 3.13 サイズが 11 位の  $32\text{km} \times 32\text{km}$  統合メッシュを母地域として線形モデルを用いた場合の推定値と実測値

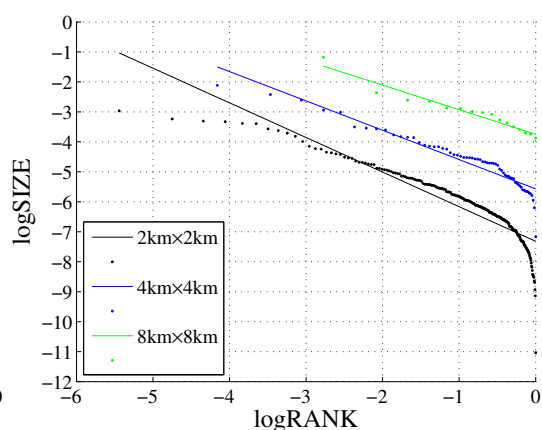


図 3.14 サイズが 12 位の  $32\text{km} \times 32\text{km}$  統合メッシュを母地域として線形モデルを用いた場合の推定値と実測値

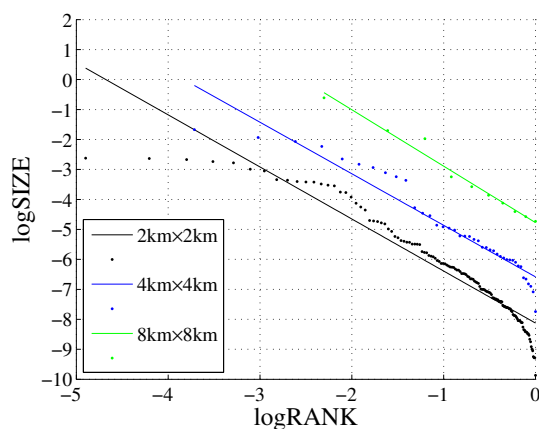


図 3.15 サイズが 13 位の  $32\text{km} \times 32\text{km}$  統合メッシュを母地域として線形モデルを用いた場合の推定値と実測値

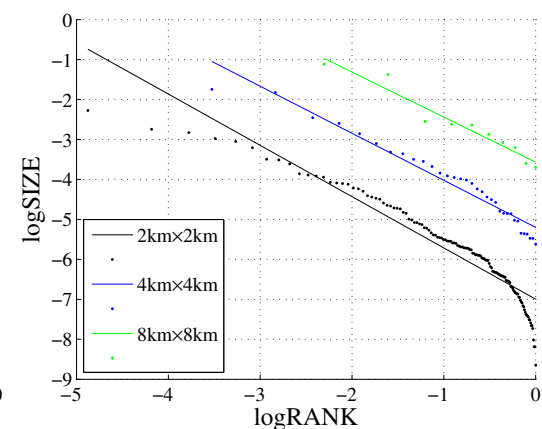


図 3.16 サイズが 14 位の  $32\text{km} \times 32\text{km}$  統合メッシュを母地域として線形モデルを用いた場合の推定値と実測値

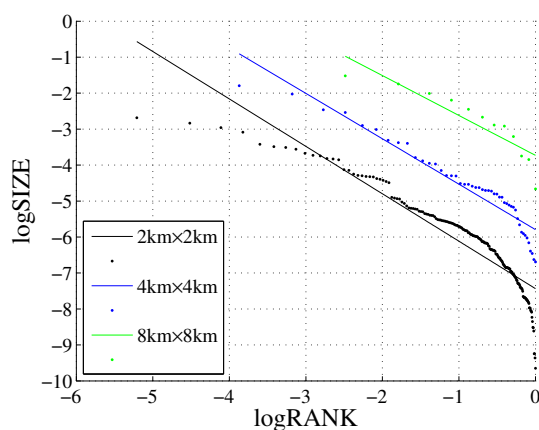


図 3.17 サイズが 15 位の  $32\text{km} \times 32\text{km}$  統合メッシュを母地域として線形モデルを用いた場合の推定値と実測値

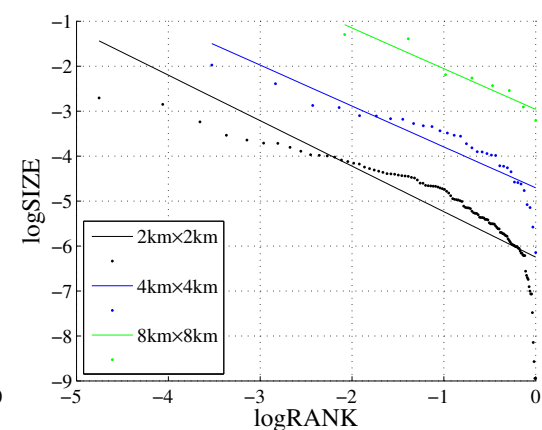


図 3.18 サイズが 16 位の  $32\text{km} \times 32\text{km}$  統合メッシュを母地域として線形モデルを用いた場合の推定値と実測値

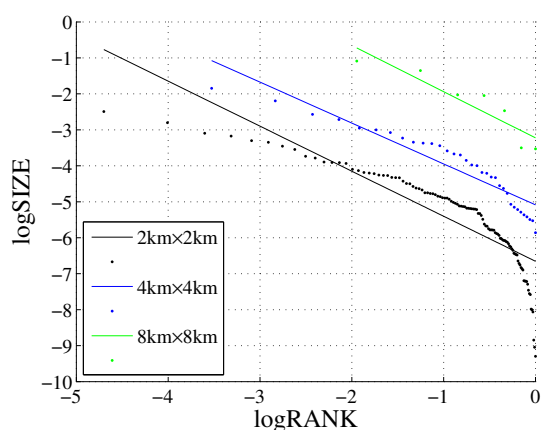


図 3.19 サイズが 17 位の 32km×32km 統合メッシュを母地域として線形モデルを用いた場合の推定値と実測値

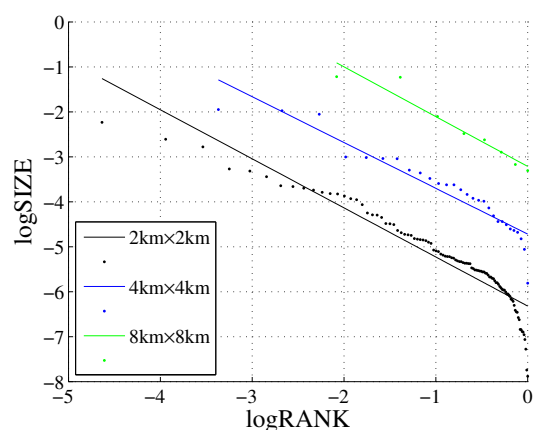


図 3.20 サイズが 18 位の 32km×32km 統合メッシュを母地域として線形モデルを用いた場合の推定値と実測値

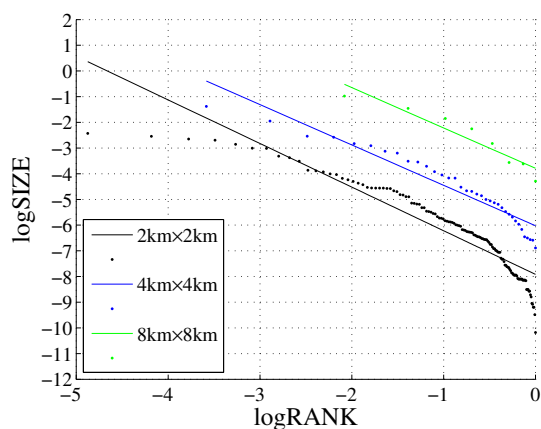


図 3.21 サイズが 19 位の 32km×32km 統合メッシュを母地域として線形モデルを用いた場合の推定値と実測値

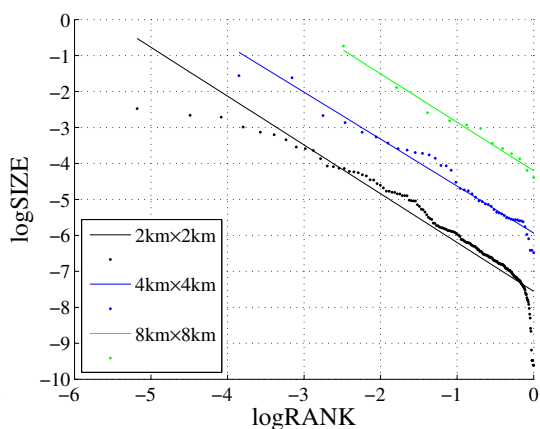


図 3.22 サイズが 20 位の 32km×32km 統合メッシュを母地域として線形モデルを用いた場合の推定値と実測値

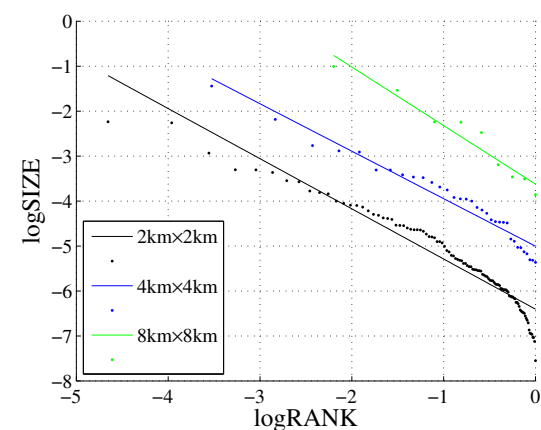


図 3.23 サイズが 21 位の 32km×32km 統合メッシュを母地域として線形モデルを用いた場合の推定値と実測値

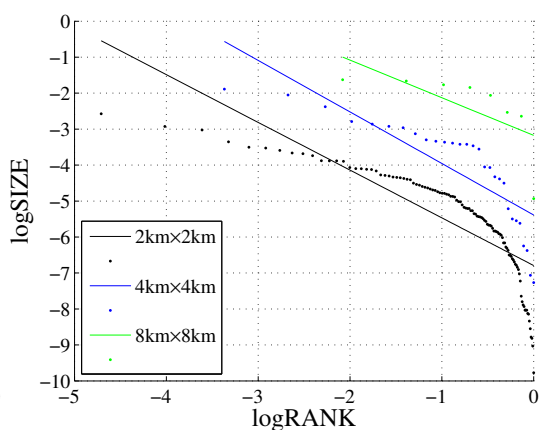


図 3.24 サイズが 22 位の 32km×32km 統合メッシュを母地域として線形モデルを用いた場合の推定値と実測値

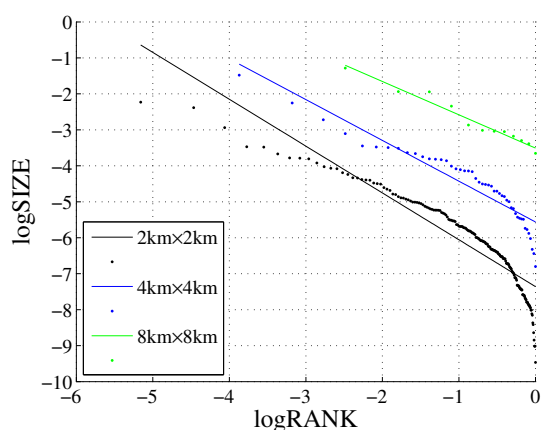


図 3.25 サイズが 23 位の  $32\text{km} \times 32\text{km}$  統合メッシュを母地域として線形モデルを用いた場合の推定値と実測値

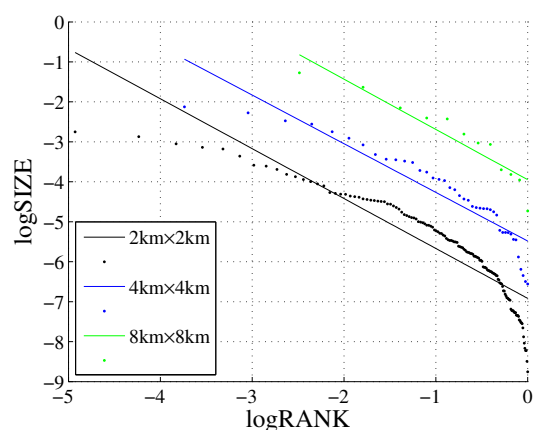


図 3.26 サイズが 24 位の  $32\text{km} \times 32\text{km}$  統合メッシュを母地域として線形モデルを用いた場合の推定値と実測値

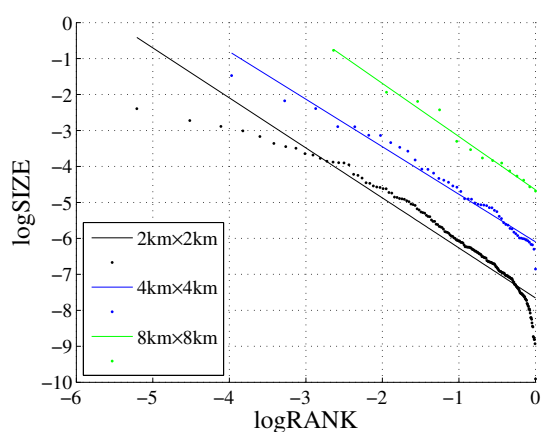


図 3.27 サイズが 25 位の  $32\text{km} \times 32\text{km}$  統合メッシュを母地域として線形モデルを用いた場合の推定値と実測値

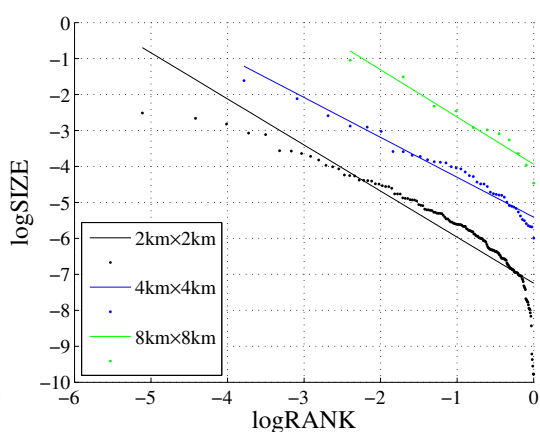


図 3.28 サイズが 26 位の  $32\text{km} \times 32\text{km}$  統合メッシュを母地域として線形モデルを用いた場合の推定値と実測値

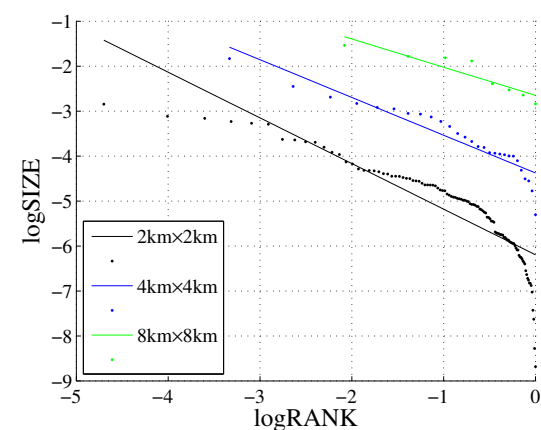


図 3.29 サイズが 27 位の  $32\text{km} \times 32\text{km}$  統合メッシュを母地域として線形モデルを用いた場合の推定値と実測値

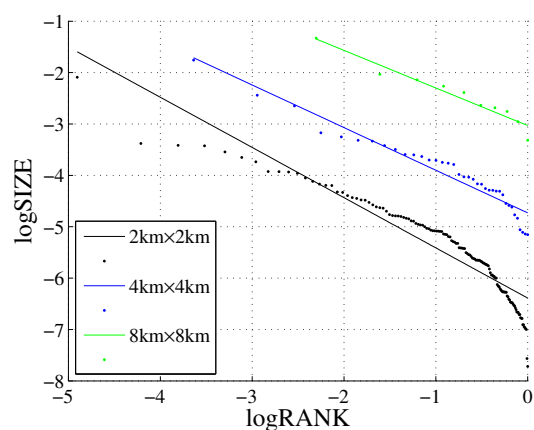


図 3.30 サイズが 28 位の  $32\text{km} \times 32\text{km}$  統合メッシュを母地域として線形モデルを用いた場合の推定値と実測値



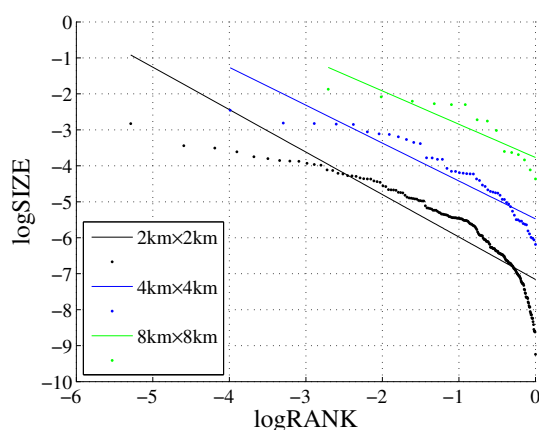


図 3.31 サイズが 29 位の 32km×32km 統合メッシュを母地域として線形モデルを用いた場合の推定値と実測値

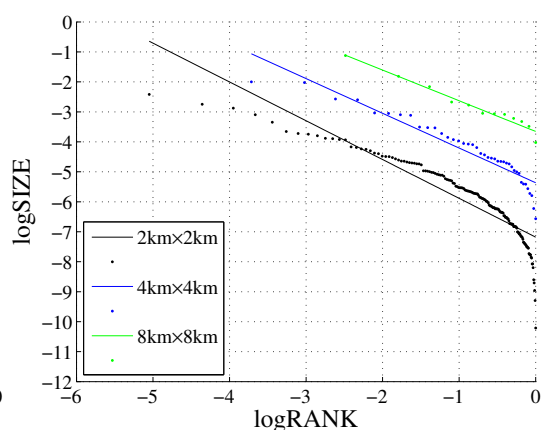


図 3.32 サイズが 30 位の 32km×32km 統合メッシュを母地域として線形モデルを用いた場合の推定値と実測値

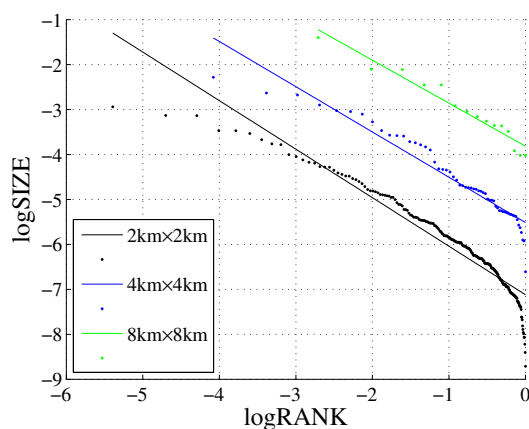


図 3.33 サイズが 31 位の 32km×32km 統合メッシュを母地域として線形モデルを用いた場合の推定値と実測値

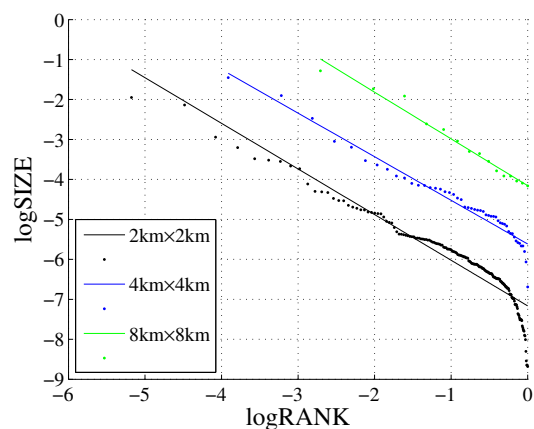


図 3.34 サイズが 32 位の 32km×32km 統合メッシュを母地域として線形モデルを用いた場合の推定値と実測値

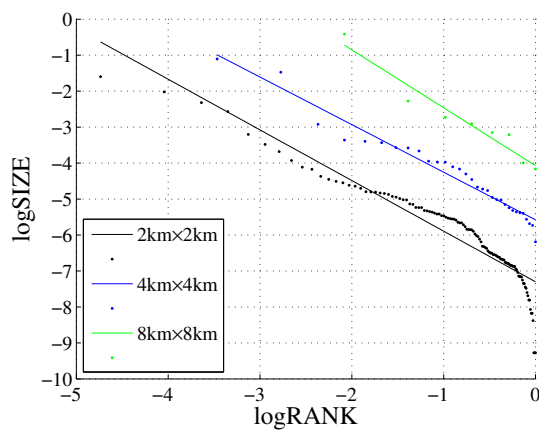


図 3.35 サイズが 33 位の 32km×32km 統合メッシュを母地域として線形モデルを用いた場合の推定値と実測値

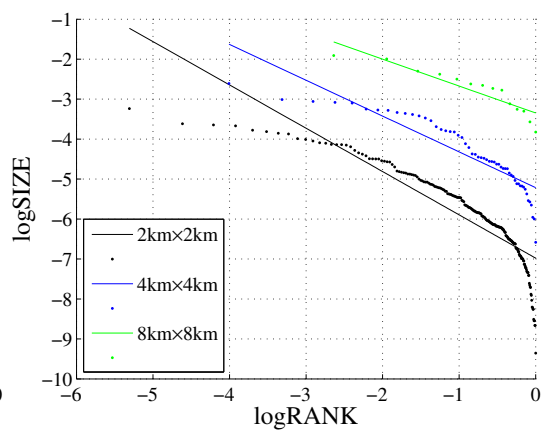


図 3.36 サイズが 34 位の 32km×32km 統合メッシュを母地域として線形モデルを用いた場合の推定値と実測値

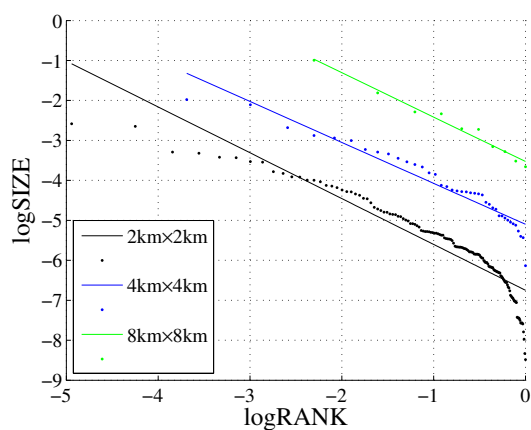


図 3.37 サイズが35位の 32km×32km 統合メッシュを母地域として線形モデルを用いた場合の推定値と実測値

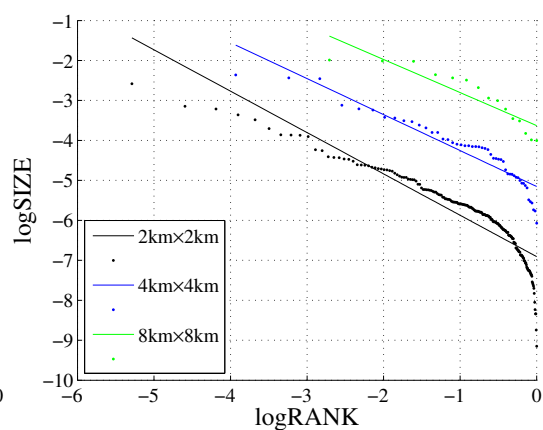


図 3.38 サイズが36位の 32km×32km 統合メッシュを母地域として線形モデルを用いた場合の推定値と実測値

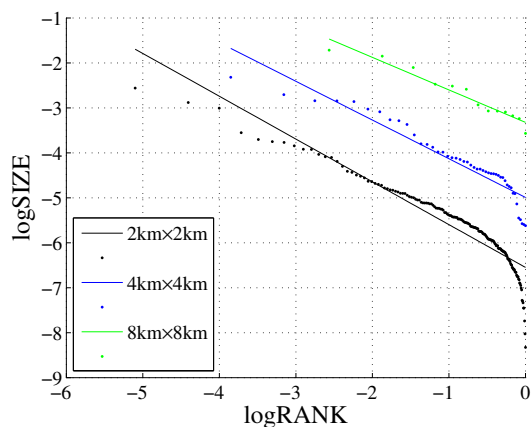


図 3.39 サイズが37位の 32km×32km 統合メッシュを母地域として線形モデルを用いた場合の推定値と実測値

表 3.2 母地域を 32km×32km 統合メッシュ, 線形モデルを用いた場合の分析結果

Rank	1		2		3		4		5	
	$\alpha$	$R^2$	$\alpha$	$R^2$	$\alpha$	$R^2$	$\alpha$	$R^2$	$\alpha$	$R^2$
$2km \times 2km$	1.90	0.766	1.49	0.737	1.47	0.860	0.99	0.735	1.87	0.807
$4km \times 4km$	1.89	0.793	1.32	0.740	1.46	0.918	0.94	0.762	1.82	0.861
$8km \times 8km$	2.06	0.808	1.25	0.799	1.69	0.927	0.88	0.655	1.76	0.854
Rank	6		7		8		9		10	
	$\alpha$	$R^2$	$\alpha$	$R^2$	$\alpha$	$R^2$	$\alpha$	$R^2$	$\alpha$	$R^2$
$2km \times 2km$	1.45	0.792	1.82	0.894	1.52	0.766	1.11	0.815	1.15	0.831
$4km \times 4km$	1.21	0.837	1.81	0.919	1.48	0.817	0.98	0.914	0.98	0.903
$8km \times 8km$	1.23	0.811	2.36	0.878	1.37	0.809	1.01	0.881	0.82	0.946
Rank	11		12		13		14		15	
	$\alpha$	$R^2$	$\alpha$	$R^2$	$\alpha$	$R^2$	$\alpha$	$R^2$	$\alpha$	$R^2$
$2km \times 2km$	1.46	0.838	1.58	0.874	1.32	0.860	1.36	0.883	1.28	0.899
$4km \times 4km$	1.42	0.870	1.52	0.919	1.26	0.913	1.30	0.962	1.18	0.950
$8km \times 8km$	1.59	0.921	1.66	0.900	1.11	0.810	1.35	0.980	1.13	0.941
Rank	16		17		18		19		20	
	$\alpha$	$R^2$	$\alpha$	$R^2$	$\alpha$	$R^2$	$\alpha$	$R^2$	$\alpha$	$R^2$
$2km \times 2km$	1.74	0.907	1.30	0.858	1.01	0.716	1.39	0.913	1.70	0.869
$4km \times 4km$	1.72	0.928	1.13	0.877	0.91	0.793	1.32	0.971	1.57	0.917
$8km \times 8km$	1.88	0.979	0.93	0.964	0.91	0.915	1.48	0.984	1.57	0.901
Rank	21		22		23		24		25	
	$\alpha$	$R^2$	$\alpha$	$R^2$	$\alpha$	$R^2$	$\alpha$	$R^2$	$\alpha$	$R^2$
$2km \times 2km$	1.25	0.758	1.18	0.810	1.28	0.831	1.09	0.890	1.08	0.911
$4km \times 4km$	1.14	0.876	1.05	0.867	1.11	0.957	1.02	0.890	1.01	0.925
$8km \times 8km$	1.28	0.846	0.93	0.777	1.31	0.942	1.11	0.930	0.96	0.947
Rank	26		27		28		29		30	
	$\alpha$	$R^2$	$\alpha$	$R^2$	$\alpha$	$R^2$	$\alpha$	$R^2$	$\alpha$	$R^2$
$2km \times 2km$	1.25	0.831	1.33	0.695	1.29	0.829	1.12	0.924	0.98	0.883
$4km \times 4km$	1.22	0.857	1.43	0.696	1.16	0.891	1.06	0.949	0.83	0.931
$8km \times 8km$	1.26	0.882	1.05	0.449	1.02	0.964	1.30	0.943	0.73	0.941
Rank	31		32		33		34		35	
	$\alpha$	$R^2$	$\alpha$	$R^2$	$\alpha$	$R^2$	$\alpha$	$R^2$	$\alpha$	$R^2$
$2km \times 2km$	1.14	0.902	1.02	0.774	1.08	0.791	1.03	0.843	1.41	0.884
$4km \times 4km$	1.09	0.952	0.84	0.879	0.90	0.811	0.90	0.884	1.32	0.956
$8km \times 8km$	1.17	0.977	0.63	0.850	0.67	0.840	0.83	0.819	1.61	0.941
Rank	36		37							
	$\alpha$	$R^2$	$\alpha$	$R^2$						
$2km \times 2km$	1.15	0.861	0.95	0.879						
$4km \times 4km$	1.02	0.920	0.86	0.893						
$8km \times 8km$	1.11	0.978	0.72	0.943						

図 3.3 ~ 3.39 からランクの低い単位地域にて、サイズの実測値が垂れ下がったような分布をすることで、回帰直線から外れ、当てはまりが悪くなっていることがわかる。単位地域を大きくすると、垂れ下がり方が小さくなり、回帰直線からの外れ方が小さくなる。この特徴は、図 3.2 と共通している。以下、 $\alpha$  と決定係数  $R^2$  の値について詳細に検討する

図 3.40, 3.41 は、横軸を前節での九州全体を母地域としたときの順位、縦軸を 37 個の 32km×32km 統合メッシュのそれぞれを母地域として求めた  $\alpha$ 、決定係数  $R^2$  としてプロットしたものである。黒色、青色、緑色の曲線は、それぞれ単位地域が 2km×2km, 4km×4km, 8km×8km 統合メッシュであるときの結果を表す。

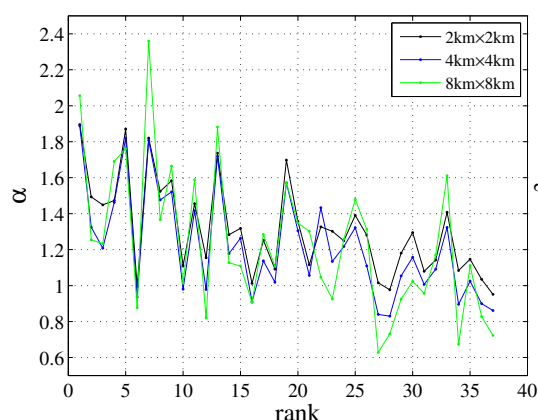


図 3.40 37 個の 32km×32km 統合メッシュを母地域、2km×2km, 4km×4km, 8km×8km 統合メッシュを単位地域としたときの線形モデルの  $\alpha$

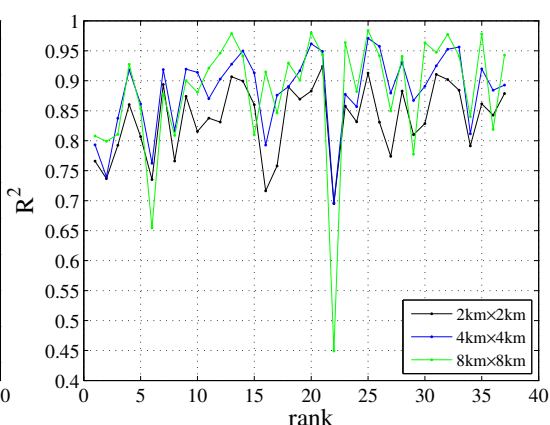


図 3.41 37 個の 32km×32km 統合メッシュを母地域、2km×2km, 4km×4km, 8km×8km 統合メッシュを単位地域としたときの線形モデルの決定係数  $R^2$

同じ大きさの単位地域で、前節にて母地域を九州全体としたときのサイズの順位に対する  $\alpha$ 、決定係数  $R^2$  の値について着目する。つまり、図 3.40, 3.41 にて黒、青、緑の曲線を横軸方向に比較をする。

まず、 $\alpha$  の値について着目する。母地域を九州とした時の順位が下がるとき  $\alpha$  の値は小さくなる傾向がある。つまり、ランクに関するサイズの弾力性は、より大きい母地域での順位に依存することがわかる。したがって、大きな母地域で上中位ランクに位置する地域は下位ランクに位置する地域よりも人口集積が進んでいる傾向があるということである。つまり、集積の経済が働いているということである。

続いて、決定係数  $R^2$  の値について着目する。母地域を九州とした時の順位と決定係数  $R^2$  の値に相関がないことが分かる。このことは、人口シェア  $G_t$  が第 1 章 2 節で述べた自己相似性が失われる境界点  $G_b$  を下回るという現象から説明できる。この現象がそれぞ

れの母地域にて、母地域の人口とは相関なく起きていると考えられる。

これは、自己相似性は、ある母地域内での単位地域同士の相対的な大きさが問題となるので、母地域の大きさが影響を与えないことに因っている。

また、4位、7位、9位などの24の母地域で、適当な単位地域にてランクとサイズを対数変換した値に対して線形最小二乗法を用いて回帰直線を求めたとき、決定係数  $R^2$  の値が0.9以上となる。ゆえにこれらの母地域は順位規模法則への当てはまりが非常に良いことがわかる。すなわち、これらの母地域自己相似性の度合いが高いことを示唆している。

### 3.3 自己同型性の分析

この節では、線形モデルにおける同型性について考察する。つまり、37 個の母地域 1 つずつについて、単位地域の大きさを変化させたときの  $\alpha$ 、決定係数  $R^2$  の推移に関して、母地域が九州全体としたときの結果と比較する。

まず、37 個の母地域 1 つずつについて、単位地域の大きさを変化させたときの  $\alpha$  の値に着目する。つまり、図 3.40 にて、黒、青、緑のプロットを縦軸方向に比較をする。母地域を九州全体とした場合とは異なり、 $\alpha$  の増減は様々である。したがって、自己同型性の条件を満たしていない。

これは、線形モデルによって求めた理論上の直線と実測値のフィッティングが悪いことに因っている。これが原因となり、九州全体を母地域とした場合と比較して、単位地域数  $N$  が少なくなる母地域を 32km×32km 統合メッシュとした場合は、上中位ランクでの直線的な分布に対する下位ランクの地域で垂れ下がったようになる分布の影響が母地域によって様々になっていると考えられる。つまり、下位ランクのサイズに  $\alpha$  の値が敏感に反応するということだ。

つぎに、次に、37 個の母地域 1 つずつについて、単位地域の大きさを変化させたときの決定係数  $R^2$  の値に着目する。つまり、図 3.41 にて、黒、青、緑のプロットを縦軸方向に比較をする。決定係数  $R^2$  の増減は様々である。したがって、自己同型性の条件を満たしていない。

これは線形モデルを用いるには、8km×8km 統合メッシュにて単位地域数である  $N$  が小さいことに因っている。このことが原因で、決定係数  $R^2$  の値が少しの外れに対して過剰に反応する。ゆえに、十分な大きさの  $N$  をもつ 2km×2km 統合メッシュと 4km×4km 統合メッシュを比較すると、全ての地域で 4km×4km 統合メッシュにて高い決定係数  $R^2$  の値を示していることがわかる。

この章の結論として、線形モデルでは自己同型性を検出することができないといえる。これは、単位地域の大きさを変えることで、母地域内での分布の特徴がどのように変化するかを、線形モデルが全ランクについて包括的に説明できていないということに因っている。しかし、九州全体、または、特定の 32km×32km 統合メッシュを母地域とした場合に、自己相似性の度合いが高いことがわかった。なぜなら、ランクとサイズを対数変換した値に対して線形最小二乗法を用いて回帰直線を求めたとき、決定係数  $R^2$  の値が 0.9 以上となったからである。

## 第 4 章

# 対数正規分布モデル

第 4 章は対数正規分布モデルを用いた場合、人口規模と順位は、どのような分布構造となるかを分析した。第 1 節では、九州全体を母地域とし、単位地域を、 $2\text{km} \times 2\text{km}$ ,  $4\text{km} \times 4\text{km}$ ,  $8\text{km} \times 8\text{km}$ ,  $16\text{km} \times 16\text{km}$ ,  $32\text{km} \times 32\text{km}$  統合メッシュとしたときの分析結果と考察を示す。第 2 節では、37 個の  $32\text{km} \times 32\text{km}$  統合メッシュのそれぞれを母地域とし、 $2\text{km} \times 2\text{km}$  統合メッシュ、 $4\text{km} \times 4\text{km}$  統合メッシュ、 $8\text{km} \times 8\text{km}$  統合メッシュを単位地域として分析を行う。同じ大きさの単位地域で求めた、 $\mu$ ,  $\sigma$ , 決定係数  $R^2$  の値について、第 1 節にて母地域を九州全体としたときの人口規模の順位に対してどのように変化しているのかを考察する。第 3 節にて、対数正規分布モデルにおける同型性について考察する。つまり、37 個の母地域 1 つずつについて、単位地域の大きさを変化させたときの  $\sigma$ , 決定係数  $R^2$  の推移に関して、母地域が九州全体としたときの結果と比較する。結果として自己同型性が検出できる。

## 4.1 九州全体を母地域とした場合の分析

この節では、九州全体を母地域とし、単位地域を、 $2\text{km} \times 2\text{km}$ 、 $4\text{km} \times 4\text{km}$ 、 $8\text{km} \times 8\text{km}$ 、 $16\text{km} \times 16\text{km}$ 、 $32\text{km} \times 32\text{km}$  統合メッシュとしたときの分析を行う。

図 4.1, 4.2 で、横軸をランクを対数変換した値、縦軸をサイズを対数変換した値としてプロットし、分布の曲線を示した。また、黒色、青色、緑色、紫色、赤色のプロットと分布の曲線は、それぞれ単位地域が  $2\text{km} \times 2\text{km}$  統合メッシュ、 $4\text{km} \times 4\text{km}$  統合メッシュ、 $8\text{km} \times 8\text{km}$  統合メッシュ、 $16\text{km} \times 16\text{km}$  統合メッシュ、 $32\text{km} \times 32\text{km}$  統合メッシュであるときの結果を表す。 $\mu$ 、 $\sigma$ 、決定係数  $R^2$ 、 $N$ (単位地域のメッシュ数)の値は表 4.1 にまとめられている。

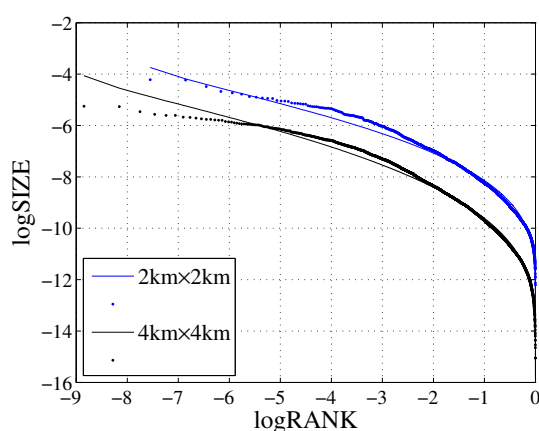


図 4.1 九州全域を母地域、 $2\text{km} \times 2\text{km}$ 、 $4\text{km} \times 4\text{km}$  統合メッシュを単位地域として対数正規分布モデルを用いた場合の推定値と実測値

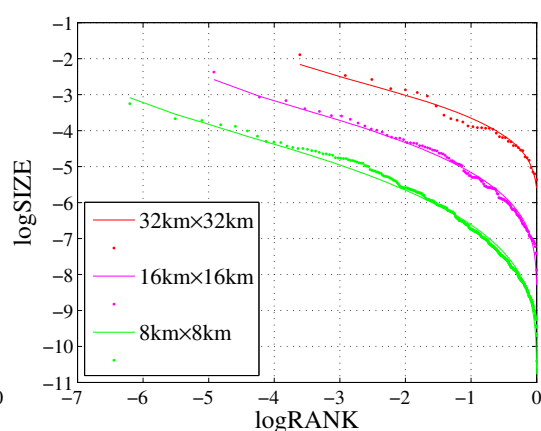


図 4.2 九州全域を母地域、 $8\text{km} \times 8\text{km}$ 、 $16\text{km} \times 16\text{km}$ 、 $32\text{km} \times 32\text{km}$  統合メッシュを単位地域として対数正規分布モデルを用いた場合の推定値と実測値

表 4.1 母地域を九州全域、対数正規分布モデルを用いた場合の分析結果

	2 k m × 2 k m	4 k m × 4 k m	8 k m × 8 k m	16 k m × 16 k m	32 k m × 32 k m
$\mu$	-10.14	-8.61	-7.05	-5.54	-3.67
$\sigma$	1.58	1.39	1.26	1.08	0.806
$R^2$	0.995	0.986	0.986	0.987	0.971
$N$	6971	1903	494	137	37

図 4.1, 4.2, 表 4.1 より、単位地域の大きさに対する、 $\mu$ 、 $\sigma$ 、 $R^2$  の分析結果を述べる。 $\mu$  の値は単位地域の大きさに対して単調に増加している。 $\mu$  は位置パラメータである。母地域が所与であれば、単位地域が大きくなると単位地域数  $N$  は小さくなる。母地域が



所与で  $N$  が小さくなれば、同じランクの単位地域で人口シェア  $G_t$  を比べれば、 $N$  が小さいほうが  $G_t$  は大きくなる。ゆえに、単位地域の大きさに対して  $\mu$  の値が単調に増加する。

$\sigma$  の値は単位地域の大きさに対して単調に減少している。 $\sigma$  はスケールパラメータである。したがって、小さい単位地域ほど、上位地域への人口集中が著しいことが明らかになっている。これは、単位地域が小さくなるほど、人口分布を詳細に特定できる、つまり、単位地域を大きくするほど、大雑把な分布での分析となることに因ると考えられる。単位地域を大きくした結果、上中位ランクでの差が埋められ、下位ランクで極端に人口シェア  $G_t$  の小さい地域も表れなくなってくるのである。ゆえに、単位地域の大きさに対して  $\sigma$  の値が単調に減少する。

$R^2$  の値は単位地域の大きさに対して減少する傾向がある。これは、最下位ランクでの人口シェア  $G_t$  に歩留まりが起こり、対数正規分布モデルから導かれる理論値よりも大きくなっていることに因ると考えられる。その結果、決定係数  $R^2$  の値に減少する傾向が表れる。この歩留まりがある値、すなわち、境界値  $G_b$  よりも大きくなったときに、順位規模法則に従う。つまり、べき乗則が表れると予想することができる。

## 4.2 32km × 32km 統合メッシュを母地域とした場合の分析

この節では、37 個の 32km×32km 統合メッシュを母地域とし、2km×2km 統合メッシュ、4km×4km 統合メッシュ、8km×8km 統合メッシュを単位地域として分析を行う。

図 4.3 ~ 4.39 は、九州全体を母地域としたときのサイズが 1 位から 37 位までの 32km×32km 統合メッシュ 37 個それぞれを母地域とした分析の結果を示している。図の横軸はランクを対数変換した値、縦軸はサイズを対数変換した値である。黒色、青色、緑色の曲線は、それぞれ単位地域が 2km×2km、4km×4km、8km×8km 統合メッシュであるときの結果を表す。また、それぞれの母地域における  $\mu$ ,  $\sigma$ , 決定係数  $R^2$  の値を表 4.2 にまとめた。

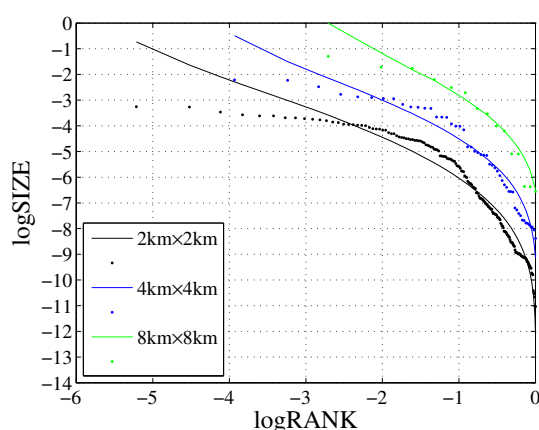


図 4.3 サイズが 1 位の 32km×32km 統合メッシュを母地域として対数正規分布モデルを用いた場合の推定値と実測値

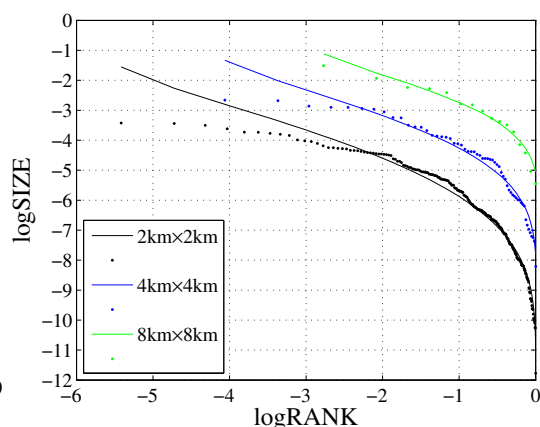


図 4.4 サイズが 2 位の 32km×32km 統合メッシュを母地域として対数正規分布モデルを用いた場合の推定値と実測値

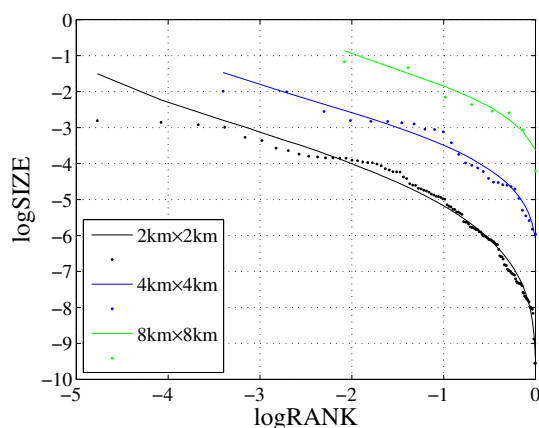


図 4.5 サイズが 3 位の 32km×32km 統合メッシュを母地域として対数正規分布モデルを用いた場合の推定値と実測値

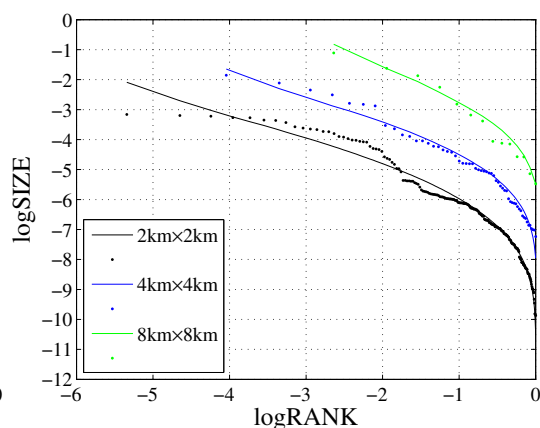


図 4.6 サイズが 4 位の 32km×32km 統合メッシュを母地域として対数正規分布モデルを用いた場合の推定値と実測値

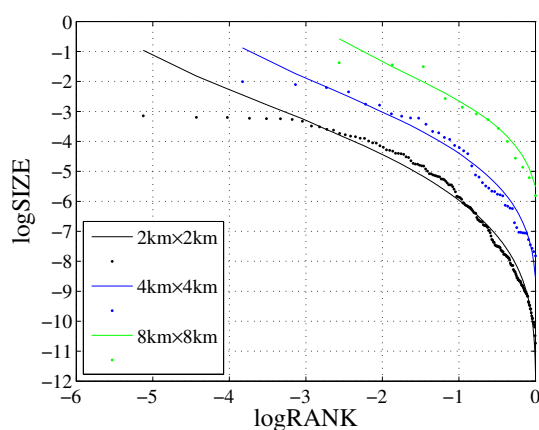


図 4.7 サイズが5位の 32km×32km 統合メッシュを母地域として対数正規分布モデルを用いた場合の推定値と実測値

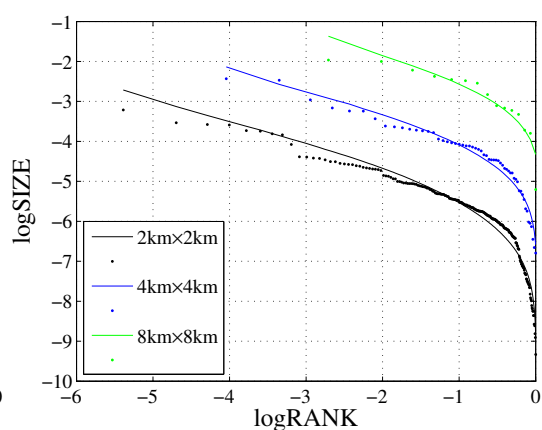


図 4.8 サイズが6位の 32km×32km 統合メッシュを母地域として対数正規分布モデルを用いた場合の推定値と実測値

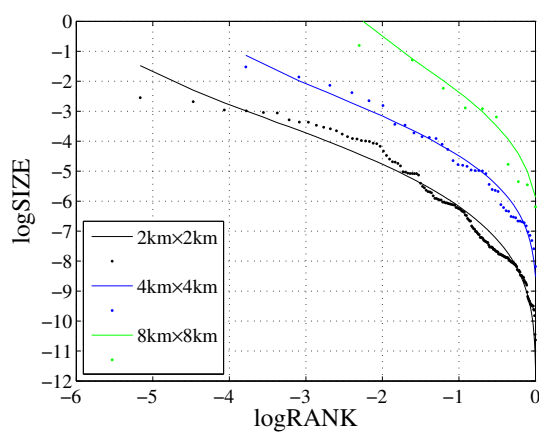


図 4.9 サイズが7位の 32km×32km 統合メッシュを母地域として対数正規分布モデルを用いた場合の推定値と実測値

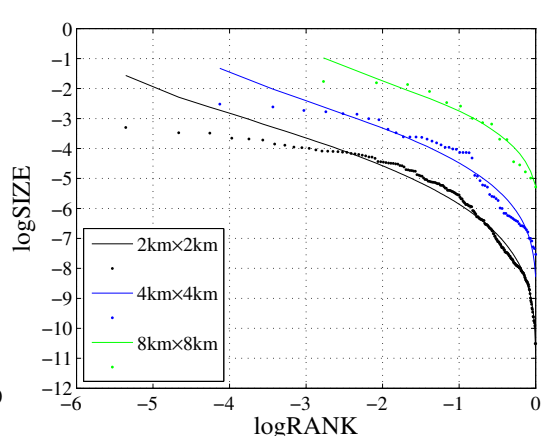


図 4.10 サイズが8位の 32km×32km 統合メッシュを母地域として対数正規分布モデルを用いた場合の推定値と実測値

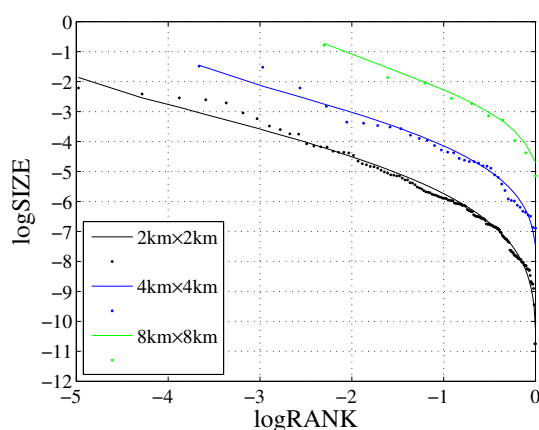


図 4.11 サイズが9位の 32km×32km 統合メッシュを母地域として対数正規分布モデルを用いた場合の推定値と実測値

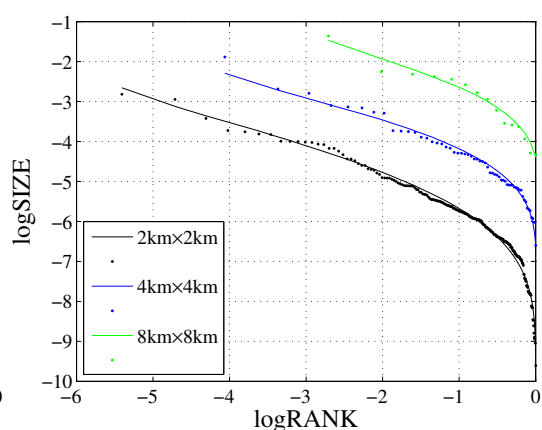


図 4.12 サイズが10位の 32km×32km 統合メッシュを母地域として対数正規分布モデルを用いた場合の推定値と実測値

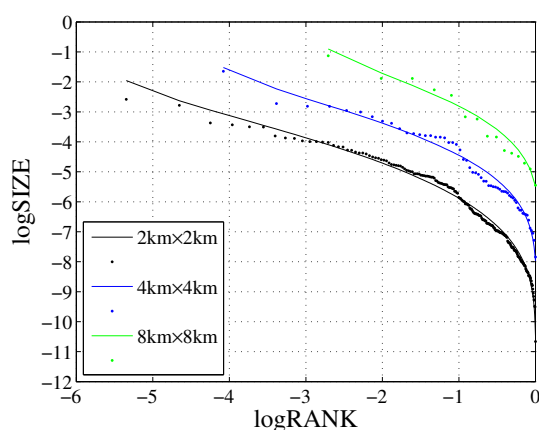


図 4.13 サイズが 11 位の 32km×32km 統合メッシュを母地域として対数正規分布モデルを用いた場合の推定値と実測値

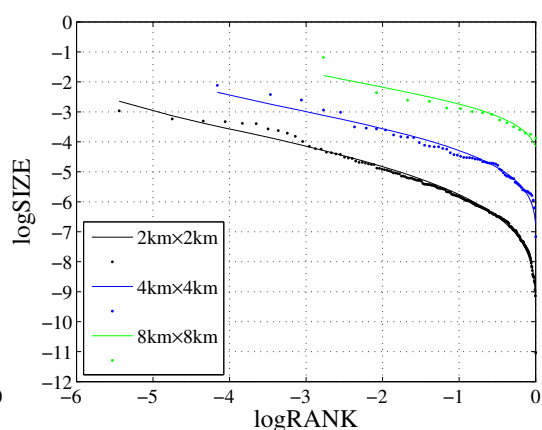


図 4.14 サイズが 12 位の 32km×32km 統合メッシュを母地域として対数正規分布モデルを用いた場合の推定値と実測値

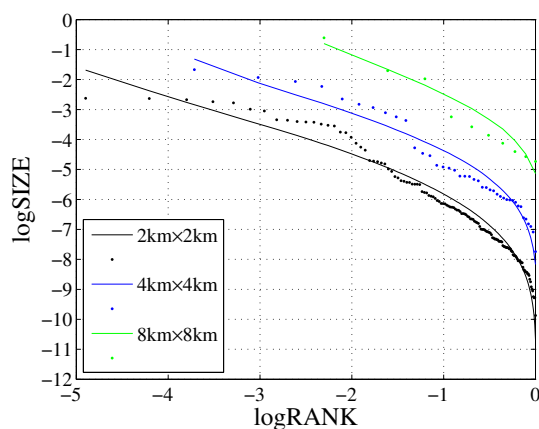


図 4.15 サイズが 13 位の 32km×32km 統合メッシュを母地域として対数正規分布モデルを用いた場合の推定値と実測値

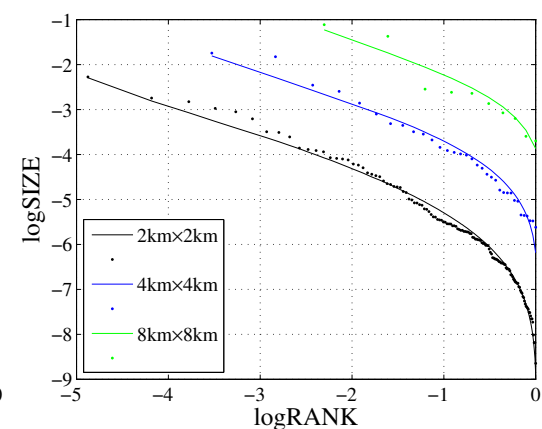


図 4.16 サイズが 14 位の 32km×32km 統合メッシュを母地域として対数正規分布モデルを用いた場合の推定値と実測値

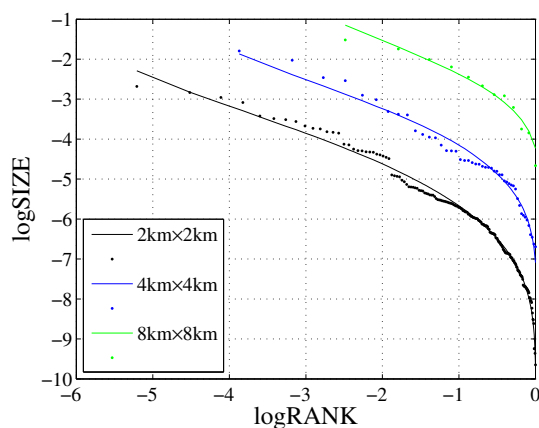


図 4.17 サイズが 15 位の 32km×32km 統合メッシュを母地域として対数正規分布モデルを用いた場合の推定値と実測値

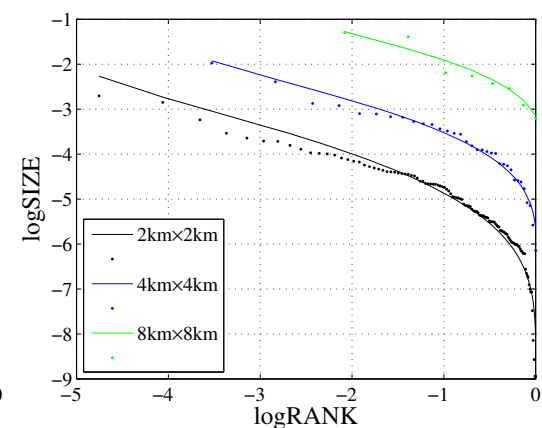


図 4.18 サイズが 16 位の 32km×32km 統合メッシュを母地域として対数正規分布モデルを用いた場合の推定値と実測値

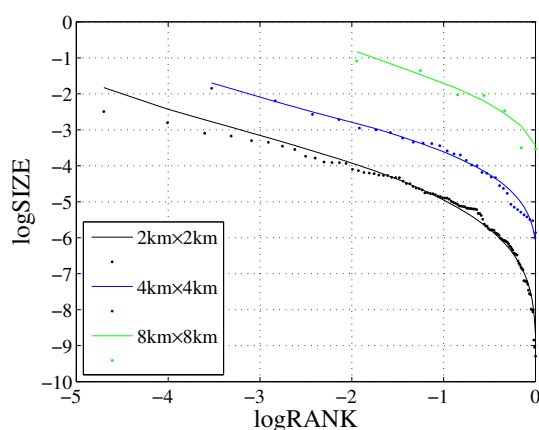


図 4.19 サイズが 17 位の 32km×32km 統合メッシュを母地域として対数正規分布モデルを用いた場合の推定値と実測値

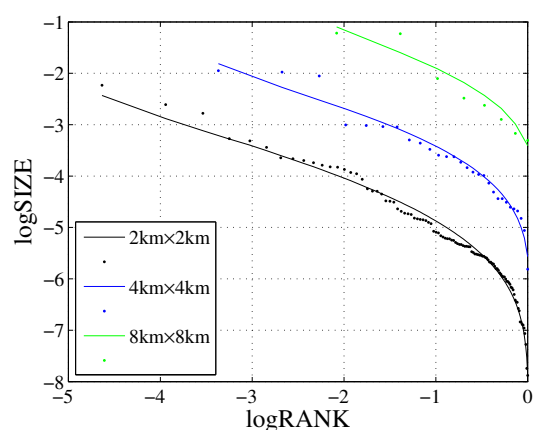


図 4.20 サイズが 18 位の 32km×32km 統合メッシュを母地域として対数正規分布モデルを用いた場合の推定値と実測値

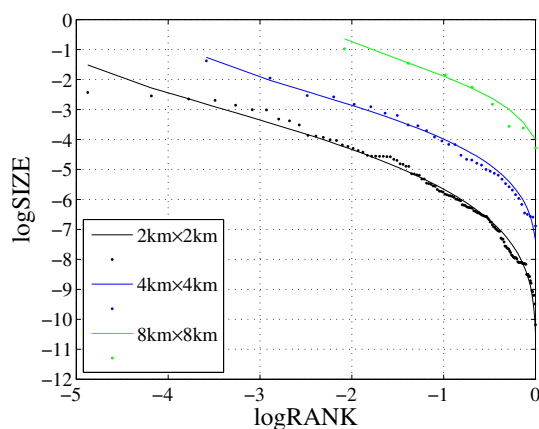


図 4.21 サイズが 19 位の 32km×32km 統合メッシュを母地域として対数正規分布モデルを用いた場合の推定値と実測値

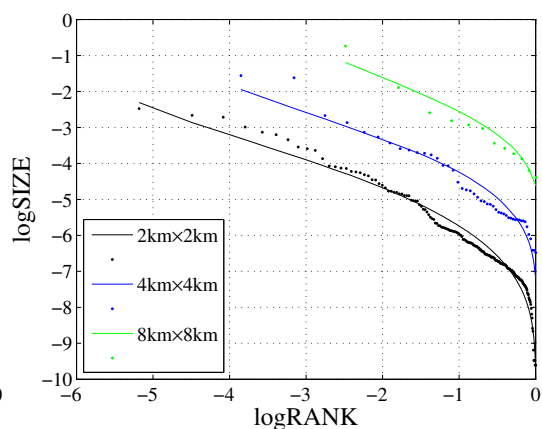


図 4.22 サイズが 20 位の 32km×32km 統合メッシュを母地域として対数正規分布モデルを用いた場合の推定値と実測値

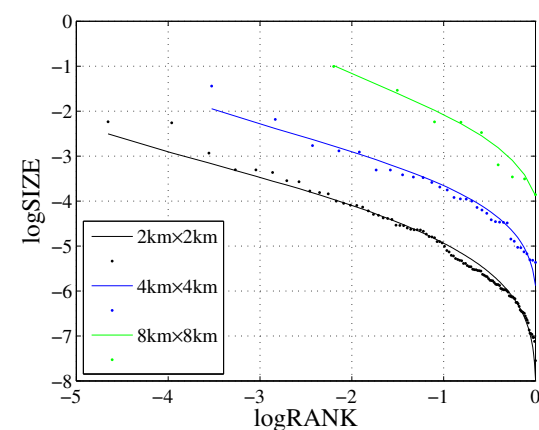


図 4.23 サイズが 21 位の 32km×32km 統合メッシュを母地域として対数正規分布モデルを用いた場合の推定値と実測値

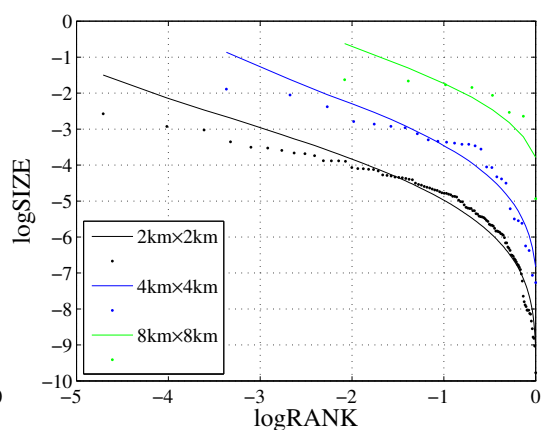


図 4.24 サイズが 22 位の 32km×32km 統合メッシュを母地域として対数正規分布モデルを用いた場合の推定値と実測値

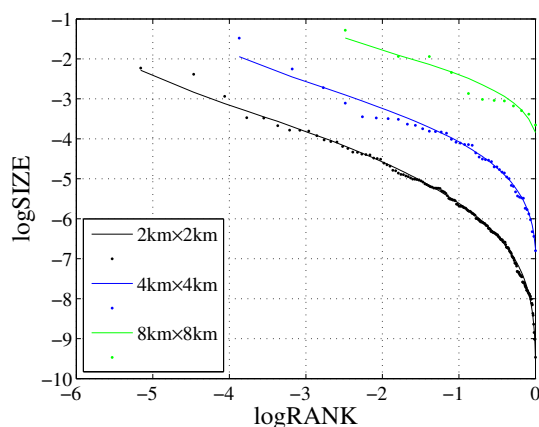


図 4.25 サイズが 23 位の 32km×32km 統合メッシュを母地域として対数正規分布モデルを用いた場合の推定値と実測値

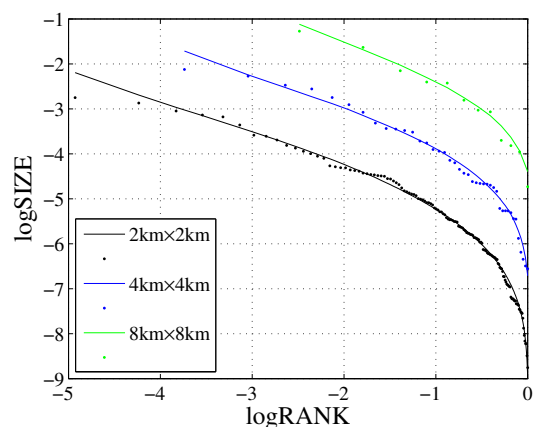


図 4.26 サイズが 24 位の 32km×32km 統合メッシュを母地域として対数正規分布モデルを用いた場合の推定値と実測値

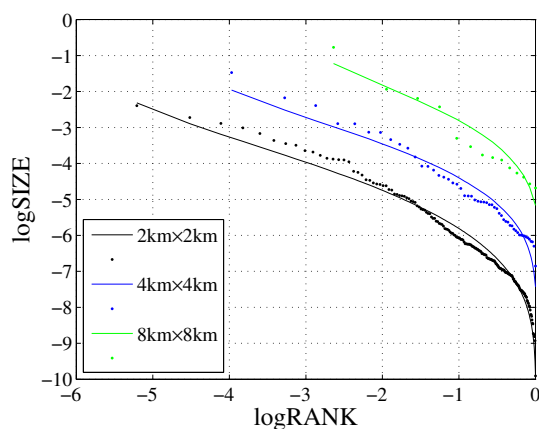


図 4.27 サイズが 25 位の 32km×32km 統合メッシュを母地域として対数正規分布モデルを用いた場合の推定値と実測値

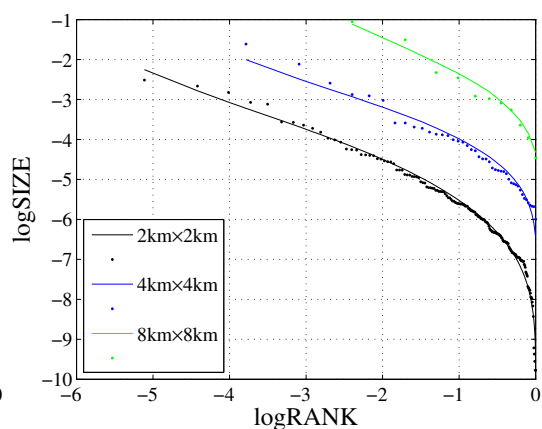


図 4.28 サイズが 26 位の 32km×32km 統合メッシュを母地域として対数正規分布モデルを用いた場合の推定値と実測値

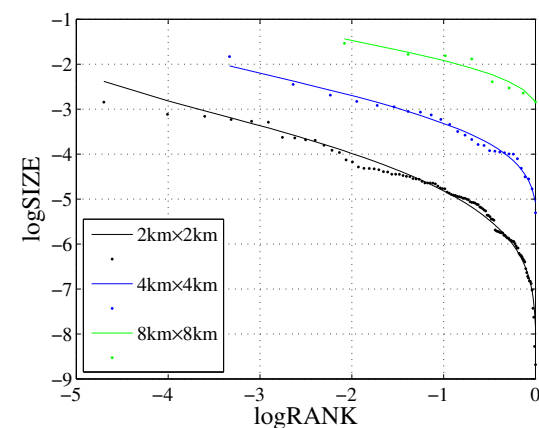


図 4.29 サイズが 27 位の 32km×32km 統合メッシュを母地域として対数正規分布モデルを用いた場合の推定値と実測値

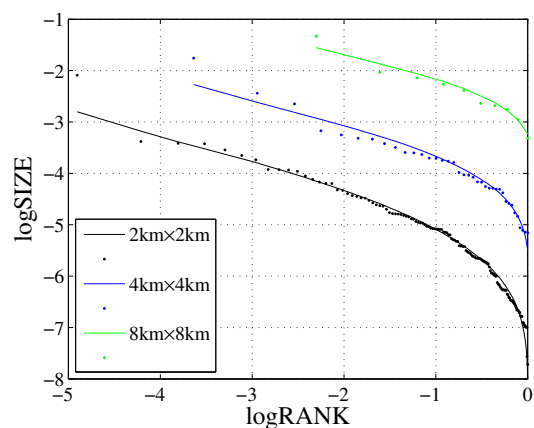


図 4.30 サイズが 28 位の 32km×32km 統合メッシュを母地域として対数正規分布モデルを用いた場合の推定値と実測値

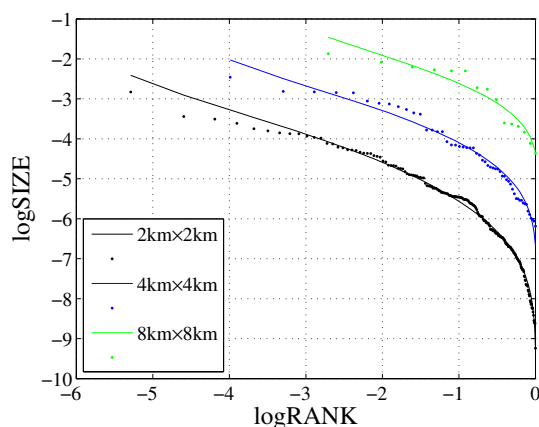


図 4.31 サイズが 29 位の 32km×32km 統合メッシュを母地域として対数正規分布モデルを用いた場合の推定値と実測値

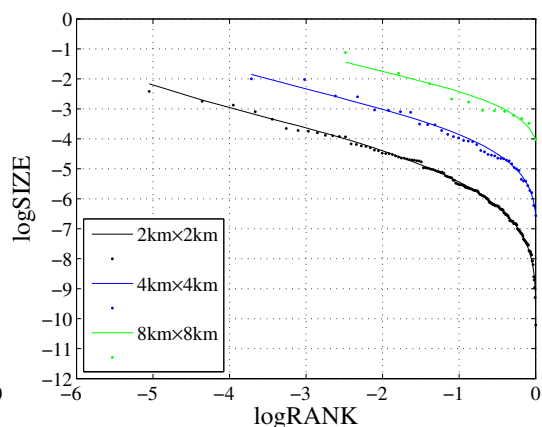


図 4.32 サイズが 30 位の 32km×32km 統合メッシュを母地域として対数正規分布モデルを用いた場合の推定値と実測値

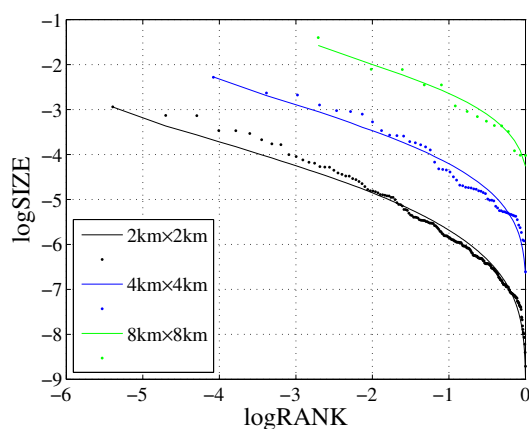


図 4.33 サイズが 31 位の 32km×32km 統合メッシュを母地域として対数正規分布モデルを用いた場合の推定値と実測値

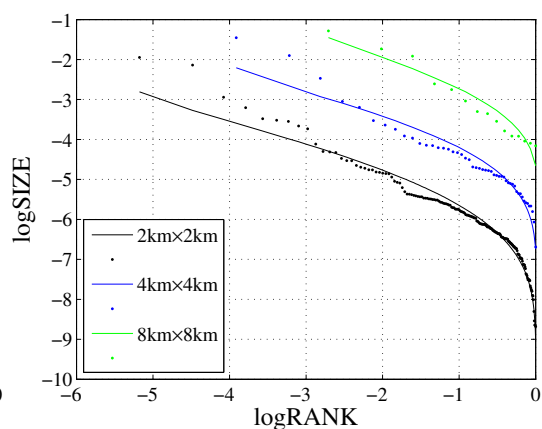


図 4.34 サイズが 32 位の 32km×32km 統合メッシュを母地域として対数正規分布モデルを用いた場合の推定値と実測値

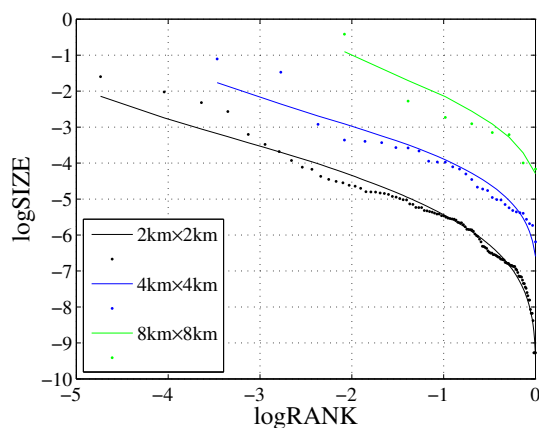


図 4.35 サイズが 33 位の 32km×32km 統合メッシュを母地域として対数正規分布モデルを用いた場合の推定値と実測値

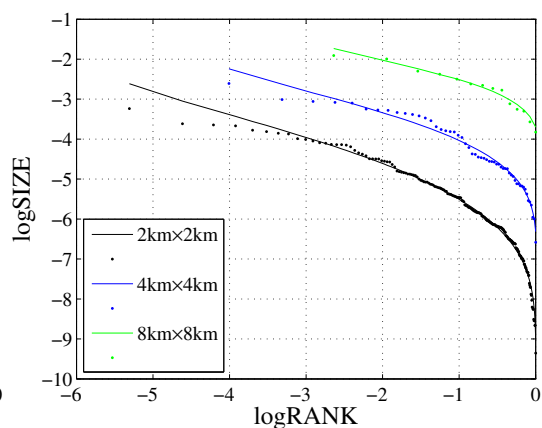


図 4.36 サイズが 34 位の 32km×32km 統合メッシュを母地域として対数正規分布モデルを用いた場合の推定値と実測値

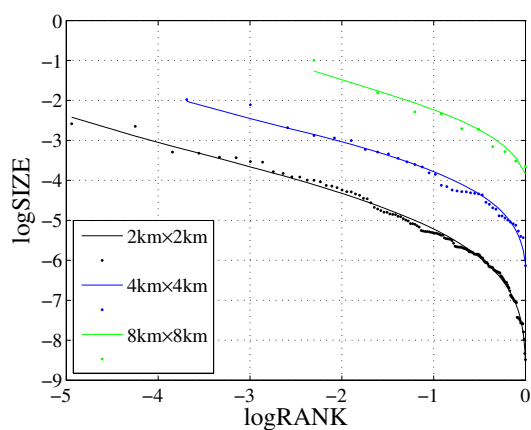


図 4.37 サイズが 35 位の  $32\text{km} \times 32\text{km}$  統合メッシュを母地域として対数正規分布モデルを用いた場合の推定値と実測値

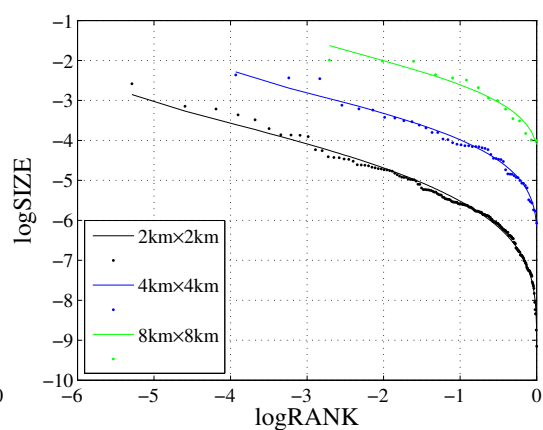


図 4.38 サイズが 36 位の  $32\text{km} \times 32\text{km}$  統合メッシュを母地域として対数正規分布モデルを用いた場合の推定値と実測値

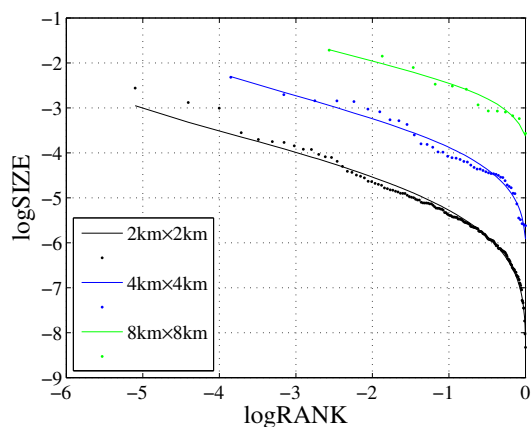


図 4.39 サイズが 37 位の  $32\text{km} \times 32\text{km}$  統合メッシュを母地域として対数正規分布モデルを用いた場合の推定値と実測値



Rank	1			2			3			4			5		
	$\mu$	$\sigma$	$R^2$	$\mu$	$\sigma$	$R^2$	$\mu$	$\sigma$	$R^2$	$\mu$	$\sigma$	$R^2$	$\mu$	$\sigma$	$R^2$
$2km \times 2km$	-6.76	2.06	0.948	-6.46	1.67	0.977	-6.50	1.52	0.980	-5.92	1.11	0.972	-6.67	1.98	0.971
$4km \times 4km$	-5.24	1.89	0.939	-4.79	1.38	0.959	-5.02	1.37	0.974	-4.44	0.96	0.968	-5.09	1.73	0.957
$8km \times 8km$	-3.78	1.79	0.918	-3.24	1.11	0.961	-3.45	1.36	0.959	-2.96	0.85	0.873	-3.39	1.46	0.945
Rank	6			7			8			9			10		
	$\mu$	$\sigma$	$R^2$	$\mu$	$\sigma$	$R^2$	$\mu$	$\sigma$	$R^2$	$\mu$	$\sigma$	$R^2$	$\mu$	$\sigma$	$R^2$
$2km \times 2km$	-5.73	1.52	0.981	-6.83	1.83	0.968	-6.45	1.66	0.975	-6.08	1.18	0.990	-6.18	1.21	0.988
$4km \times 4km$	-3.95	1.12	0.965	-5.13	1.66	0.971	-5.04	1.47	0.942	-4.53	0.92	0.985	-4.64	0.93	0.975
$8km \times 8km$	-2.43	0.96	0.911	-3.51	1.85	0.910	-3.33	1.20	0.937	-3.04	0.84	0.963	-3.05	0.66	0.888
Rank	11			12			13			14			15		
	$\mu$	$\sigma$	$R^2$	$\mu$	$\sigma$	$R^2$	$\mu$	$\sigma$	$R^2$	$\mu$	$\sigma$	$R^2$	$\mu$	$\sigma$	$R^2$
$2km \times 2km$	-6.42	1.52	0.990	-6.31	1.60	0.987	-6.14	1.35	0.992	-6.23	1.37	0.972	-5.75	1.27	0.990
$4km \times 4km$	-4.97	1.37	0.976	-4.69	1.38	0.973	-4.61	1.17	0.976	-4.71	1.18	0.936	-4.11	1.04	0.968
$8km \times 8km$	-3.46	1.29	0.960	-2.99	1.29	0.967	-2.82	0.93	0.953	-3.10	1.03	0.932	-2.67	0.85	0.906
Rank	16			17			18			19			20		
	$\mu$	$\sigma$	$R^2$	$\mu$	$\sigma$	$R^2$	$\mu$	$\sigma$	$R^2$	$\mu$	$\sigma$	$R^2$	$\mu$	$\sigma$	$R^2$
$2km \times 2km$	-6.43	1.72	0.964	-6.08	1.34	0.997	-5.26	1.12	0.953	-6.29	1.39	0.979	-6.26	1.71	0.986
$4km \times 4km$	-4.98	1.56	0.941	-4.50	1.07	0.985	-3.87	0.88	0.973	-4.85	1.20	0.945	-4.57	1.42	0.982
$8km \times 8km$	-3.28	1.39	0.901	-2.75	0.71	0.913	-2.28	0.67	0.937	-3.41	1.15	0.907	-2.60	1.16	0.944
Rank	21			22			23			24			25		
	$\mu$	$\sigma$	$R^2$	$\mu$	$\sigma$	$R^2$	$\mu$	$\sigma$	$R^2$	$\mu$	$\sigma$	$R^2$	$\mu$	$\sigma$	$R^2$
$2km \times 2km$	-5.44	1.34	0.979	-6.00	1.25	0.993	-5.99	1.33	0.986	-5.26	1.08	0.987	-6.06	1.08	0.983
$4km \times 4km$	-4.04	1.05	0.979	-4.48	1.01	0.972	-4.37	1.00	0.965	-3.79	0.92	0.970	-4.56	0.94	0.959
$8km \times 8km$	-2.29	0.96	0.907	-2.98	0.82	0.921	-2.88	1.01	0.969	-2.38	0.81	0.918	-3.00	0.77	0.961
Rank	26			27			28			29			30		
	$\mu$	$\sigma$	$R^2$	$\mu$	$\sigma$	$R^2$	$\mu$	$\sigma$	$R^2$	$\mu$	$\sigma$	$R^2$	$\mu$	$\sigma$	$R^2$
$2km \times 2km$	-5.70	1.29	0.994	-5.51	1.48	0.955	-5.91	1.35	0.995	-5.32	1.08	0.981	-5.44	0.98	0.988
$4km \times 4km$	-4.34	1.15	0.984	-4.08	1.46	0.914	-4.29	1.07	0.989	-4.03	0.93	0.964	-3.96	0.75	0.963
$8km \times 8km$	-2.92	1.01	0.973												

図 4.3 ~ 4.39 から，全母地域について，単位地域の大きさによらず，全ランクで実測値と，人口規模と順位の特徴付ける曲線とのフィッティングが良いことがわかる．この特徴は図 4.2 と共通している．以下， $\mu$ ， $\sigma$  と決定係数  $R^2$  の値について詳細に検討する

図 4.40, 4.41, 4.42 は，横軸を前節での九州全体を母地域としたときの順位，縦軸を 37 個の 32km×32km 統合メッシュのそれぞれを母地域として求めた  $\mu$ ， $\sigma$ ，決定係数  $R^2$  としてプロットしたものである．黒色，青色，緑色の曲線は，それぞれ単位地域が 2km×2km，4km×4km，8km×8km 統合メッシュであるときの結果を表す．

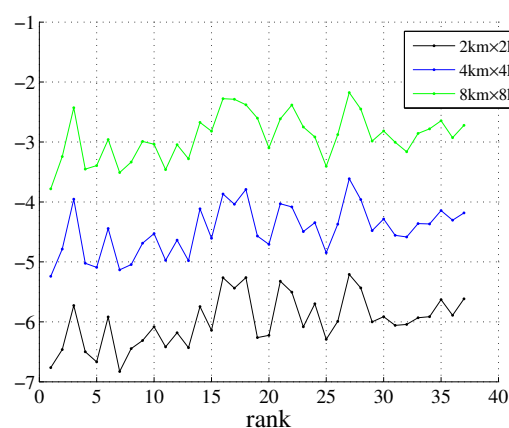


図 4.40 37 個の 32km×32km 統合メッシュを母地域，2km×2km，4km×4km，8km×8km 統合メッシュを単位地域としたときの対数正規分布モデルの  $\mu$

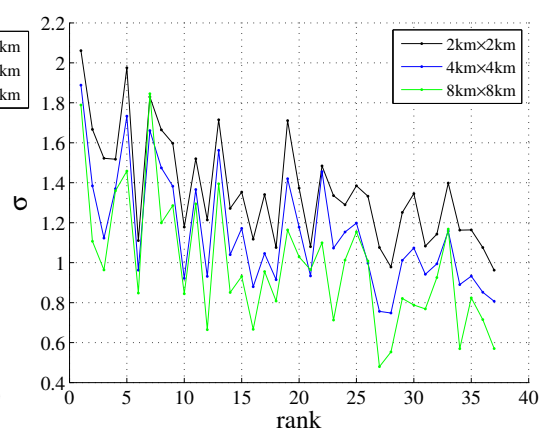


図 4.41 37 個の 32km×32km 統合メッシュを母地域，2km×2km，4km×4km，8km×8km 統合メッシュを単位地域としたときの対数正規分布モデルの  $\sigma$

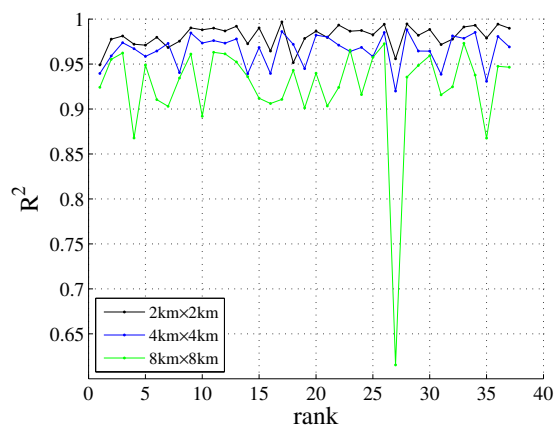


図 4.42 37 個の 32km×32km 統合メッシュを母地域，2km×2km，4km×4km，8km×8km 統合メッシュを単位地域としたときの対数正規分布モデルの  $R^2$

同じ大きさの単位地域で、前節にて母地域を九州全体としたときのサイズの順位に対する  $\mu$ ,  $\sigma$ , 決定係数  $R^2$  の変化について着目する。つまり、図 4.40, 4.41, 4.42 にて黒、青、緑の曲線を横軸方向に比較をする。

まず、 $\mu$  の値について着目する。母地域を九州とした時の順位が下がると  $\mu$  の値は大きくなる傾向があることが分かる。 $X \sim \text{LN}(\mu, \sigma)$  である確率変数  $X$  の中央値は  $e^\mu$  で表わされる。つまり、 $e^\mu$  は上位ランク地域のサイズに依らない中程度のサイズを表わしている。したがって、上位ランク地域のサイズに依らない中程度のサイズは下位ランクの地域ほど大きいということができる。

次に、 $\sigma$  の値について着目する。母地域を九州とした時の順位が下がるとき  $\sigma$  の値は小さくなる傾向がある。 $\sigma$  はスケールパラメーターである。ゆえに、ある母地域での上位ランクへの人口集中を表わす度数である。

これら二つの現象は1つの事実を示唆している。それは、大きな母地域で上中位ランクに位置する地域は下位ランクに位置する地域よりも人口集積が進んでいる傾向があるということである。つまり、集積の経済が働いているということである。

最後に、決定係数  $R^2$  の値について着目する。母地域を九州とした時の順位と決定係数  $R^2$  の値に相関がないことが分かる。このことは、人口シェア  $G_t$  が第1章2節で述べた自己相似性が失われる境界点  $G_b$  を下回るという現象から説明できる。この現象がそれぞれの母地域にて、母地域の人口とは相関なく起きていると考えられる。

これは、自己相似性は、ある母地域内での単位地域同士の相対的な大きさが問題となるので、母地域の大きさが影響を与えないことに因っている。

### 4.3 自己同型性の分析

この節では、対数正規分布モデルにおける同型性について考察する。つまり、37 個の母地域 1 つずつについて、単位地域の大きさを変化させたときの  $\sigma$ 、決定係数  $R^2$  の推移に関して、母地域が九州全体としたときの結果と比較する。

まず、37 個の母地域 1 つずつについて、単位地域の大きさを変化させたときの  $\sigma$  の値に着目する。つまり、図 4.41 にて、黒、青、緑のプロットを縦軸方向に比較をする。7 位、23 位、35 位以外の地域で  $\sigma$  は単調に減少している。これは、九州全体を母地域としたときと同様の結果である。ゆえにほとんどの地域で自己同型性の条件を満たしているといえる。

23 位、35 位の地域に関して前章、表 3.2 によると、いずれの地域も 8km×8km にて、高い決定係数を示している。つまり、線形性が高いゆえに、曲率を示すスケールパラメータでは、特異な値が得られたのだと考えられる。

7 位の地域に関しては図 4.9 より、8km×8km にて特異なプロットが表れている。したがって、傾向に当てはまらない例外的な地域だと考えられる。

次に、37 個の母地域 1 つずつについて、単位地域の大きさを変化させたときの決定係数  $R^2$  の値に着目する。つまり、図 4.42 にて、黒、青、緑のプロットを縦軸方向に比較をする。全ての地域で 8km×8km 統合メッシュにて、2km×2km 統合メッシュより小さい値をとっている。つまり、減少傾向がみられる。したがって、自己同型性の条件を満たしているといえる。

この二つの結果は、単位地域を大きくすると順位規模法則への当てはまりが高くなっていることに因る。単位地域を大きくすると実測値が下位ランクにて垂れ下がったような変化をすることがなくなる。その結果、 $\sigma$  の値は小さくなる。加えて、対数正規分布での垂れ下がり方よりも小さくなるため、決定係数  $R^2$  の値が小さくなることも導いているといえる。

この章の結論として、対数正規分布モデルでは自己同型性を検出することができるといえる。対数正規分布モデルを用いて求めた理論上の曲線は実測値と非常にフィッティングが良い。ゆえに、単位地域の大きさを変えることで、母地域内での分布の特徴がどのように変化するかを、全ランクについて包括的に説明できる。その結果として、対数正規分布モデルを用いた場合での自己同型性の検出を導いている。

## 第 5 章

# 非線形モデル

第 5 章は非線形モデルを用いた場合，人口規模と順位はどのような分布構造となるかを分析した．第 1 節では，九州全体を母地域とし，単位地域を， $2\text{km} \times 2\text{km}$ ， $4\text{km} \times 4\text{km}$ ， $8\text{km} \times 8\text{km}$ ， $16\text{km} \times 16\text{km}$ ， $32\text{km} \times 32\text{km}$  統合メッシュとしたときの分析結果と考察を示す．第 2 節では，37 個の  $32\text{km} \times 32\text{km}$  統合メッシュのそれぞれを母地域とし， $2\text{km} \times 2\text{km}$  統合メッシュ， $4\text{km} \times 4\text{km}$  統合メッシュ， $8\text{km} \times 8\text{km}$  統合メッシュを単位地域として分析を行う．同じ大きさの単位地域で求めた， $\alpha$ ，決定係数  $R^2$  の値について，第 1 節にて母地域を九州全体としたときの人口規模の順位に対してどのように変化しているのかを考察する．第 3 節にて，非線形モデルにおける同型性について考察する．つまり，37 個の母地域 1 つずつについて，単位地域の大きさを変化させたときの  $\alpha$ ，決定係数  $R^2$  の推移に関して，母地域が九州全体としたときの結果と比較する．結果として自己同型性は検出できない．

## 5.1 九州全体を母地域とした場合の分析

この節では、九州全体を母地域とし、単位地域を、 $2\text{km} \times 2\text{km}$ 、 $4\text{km} \times 4\text{km}$ 、 $8\text{km} \times 8\text{km}$ 、 $16\text{km} \times 16\text{km}$ 、 $32\text{km} \times 32\text{km}$  統合メッシュとしたときの分析を行う。

三次多項式についての分析結果を図 5.1, 5.2，四次多項式についての分析結果を図 5.3, 5.4，五次多項式についての分析結果を図 5.5, 5.6 にて、横軸をランクを対数変換した値、縦軸をサイズを対数変換した値としてプロットし、回帰曲線を示した。また、黒色、青色、緑色、紫色、赤色のプロットと回帰曲線は、それぞれ単位地域が  $2\text{km} \times 2\text{km}$ 、 $4\text{km} \times 4\text{km}$ 、 $8\text{km} \times 8\text{km}$ 、 $16\text{km} \times 16\text{km}$ 、 $32\text{km} \times 32\text{km}$  統合メッシュであるときの結果を表す。 $\alpha$ 、決定係数  $R^2$ 、 $N$ (単位地域のメッシュ数) の値はそれぞれ、表 5.1, 5.2, 5.3 にまとめられている。

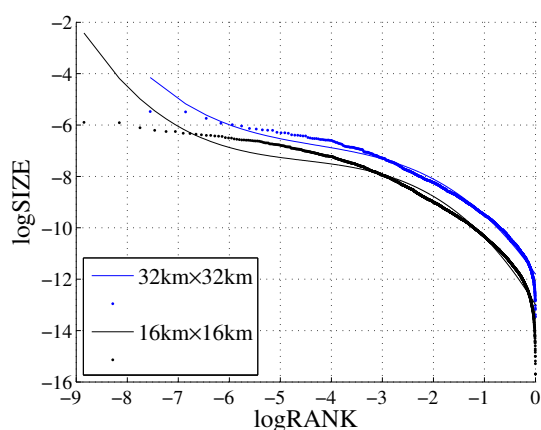


図 5.1 九州全域を母地域、 $2\text{km} \times 2\text{km}$ 、 $4\text{km} \times 4\text{km}$  統合メッシュを単位地域として三次多項式の非線形モデルを用いた場合の推定値と実測値

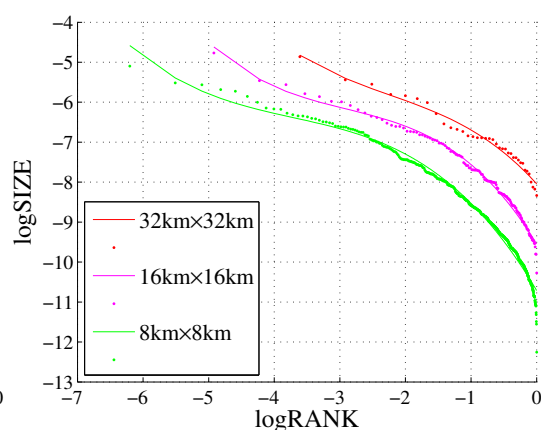


図 5.2 九州全域を母地域、 $8\text{km} \times 8\text{km}$ 、 $16\text{km} \times 16\text{km}$ 、 $32\text{km} \times 32\text{km}$  統合メッシュを単位地域として三次多項式の非線形モデルを用いた場合の推定値と実測値

表 5.1 母地域を九州全域、三次多項式近似を用いた場合の結果

	2 km × 2 km	4 km × 4 km	8 km × 8 km	16 km × 16 km	32 km × 32 km
$\alpha_3$	-0.0487	-0.0449	-0.0582	-0.0897	-0.0810
$\alpha_2$	-0.661	-0.580	-0.649	-0.782	-0.548
$\alpha_1$	-3.24	-2.83	-2.77	-2.68	-1.81
$R^2$	0.97	0.98	0.99	0.99	0.97
$N$	6971	1903	494	137	37

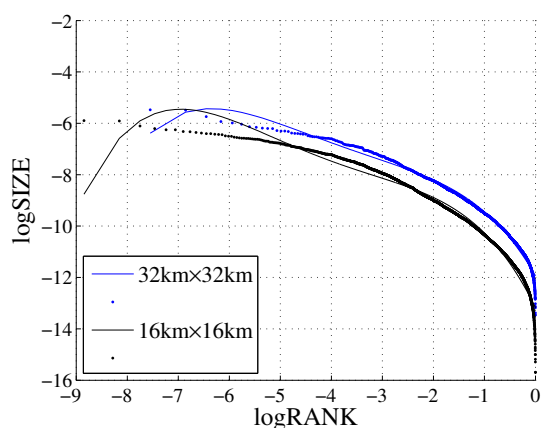


図 5.3 九州全域を母地域，2km×2km，4km×4km 統合メッシュを単位地域として四次多項式の非線形モデルを用いた場合の推定値と実測値

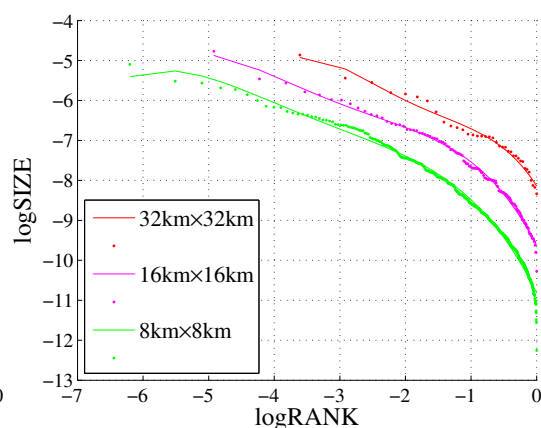


図 5.4 九州全域を母地域，8km×8km，16km×16km，32km×32km 統合メッシュを単位地域として四次多項式の非線形モデルを用いた場合の推定値と実測値

表 5.2 母地域を九州全域，四次多項式近似を用いた場合の結果

	2 km × 2 km	4 km × 4 km	8 km × 8 km	16 km × 16 km	32 km × 32 km
$\alpha_4$	-0.0139	-0.0135	-0.0176	-0.0248	-0.0793
$\alpha_3$	-0.232	-0.207	-0.242	-0.308	-0.620
$\alpha_2$	-1.36	-1.15	-1.22	-1.36	-1.66
$\alpha_1$	-4.04	-3.45	-3.33	-3.17	-2.56
$R^2$	0.98	0.99	0.99	0.99	0.98
$N$	6971	1903	494	137	37

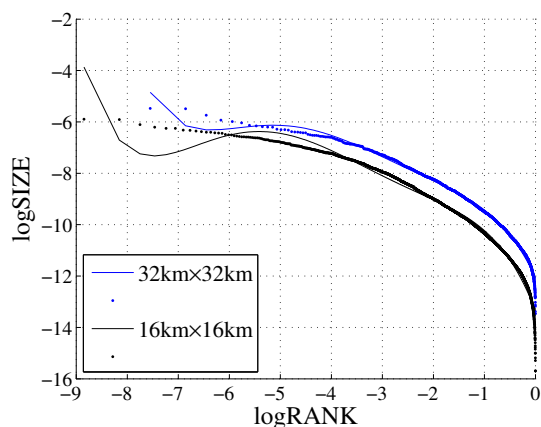


図 5.5 九州全域を母地域，2km×2km，4km×4km 統合メッシュを単位地域として五次多項式の非線形モデルを用いた場合の推定値と実測値

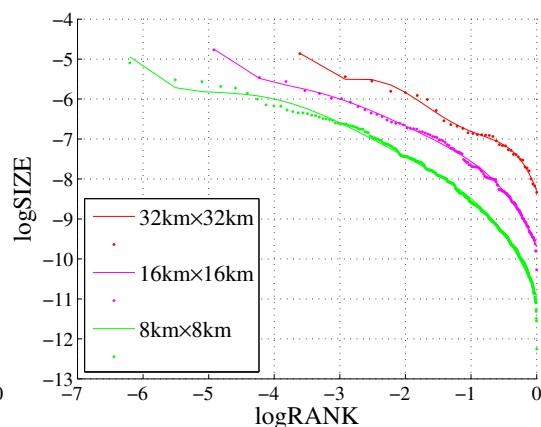


図 5.6 九州全域を母地域，8km×8km，16km×16km，32km×32km 統合メッシュを単位地域として五次多項式の非線形モデルを用いた場合の推定値と実測値

表 5.3 母地域を九州全域, 五次多項式近似を用いた場合の結果

	2 km × 2 km	4 km × 4 km	8 km × 8 km	16 km × 16 km	32 km × 32 km
$\alpha_5$	-0.00529	-0.00599	-0.00902	-0.0166	-0.148
$\alpha_4$	-0.108	-0.109	-0.141	-0.211	-1.33
$\alpha_3$	-0.789	-0.716	-0.814	-1.03	-4.27
$\alpha_2$	-2.65	-2.22	-2.28	-2.47	-5.96
$\alpha_1$	-5.07	-4.23	-4.02	-3.78	-4.37
$R^2$	0.98	0.99	0.99	0.99	0.98
$N$	6971	1903	494	137	37

図 5.1, 5.3, 5.5 と表 5.1, 5.2, 5.3 から, 2km×2km 統合メッシュ, 4km×4km 統合メッシュを用いた分析では, 決定係数  $R^2$  の値が 0.98 前後と非常に高い値で推移しているにもかかわらず, 上位ランクでは非常にフィッティングが悪いということ. そして図 5.2, 5.4, 5.6 と表 5.1, 5.2, 5.3 から, 8km×8km 統合メッシュ, 16km×16km 統合メッシュ, 32km×32km 統合メッシュを用いた分析では決定係数  $R^2$  の値は 0.98 前後と先と同様に非常に高い値で推移しており, 全ランクを通じてフィッティングも良い. このことはデータを対数変換していることからランクの値が 0 に近づくほどプロットされるデータ数は多くなることに起因している. つまり, 非線形最小二乗法を用いたことにより, 上位ランクの外れを打ち消すほどに下位ランクのフィッティングが良くなったということである.

$\alpha$  の値に関しては単位地域の大きさとの関係を見出すことはできない. フィッティングを重視し機械的に求めた値であるため, 変数として本研究での単位地域の大きさを変えてどのような振る舞いをするかを調べるという観点では意味を成さないことの証左となった. つまり, ランクとサイズの間で有意義な多項式で表現できる関係はないということだ.



## 5.2 32km × 32km 統合メッシュを母地域とした場合の分析

この節では、37 個の 32km×32km 統合メッシュを母地域とし、2km×2km 統合メッシュ、4km×4km 統合メッシュ、8km×8km 統合メッシュを単位地域として分析を行う。

図 5.7 ~ 5.43 は、九州全体を母地域としたときのサイズが 1 位から 37 位までの 32km×32km 統合メッシュ 37 個それぞれを母地域とした分析の結果を示している。図の横軸はランクを対数変換した値、縦軸はサイズを対数変換した値である。黒色、青色、緑色の曲線はそれぞれ単位地域が 2km×2km, 4km×4km, 8km×8km 統合メッシュであるときの回帰直線を表す。また、それぞれの母地域における  $\alpha_3$ ,  $\alpha_2$ ,  $\alpha_1$ , 決定係数  $R^2$  の値を表 5.4, 5.5 にまとめた。

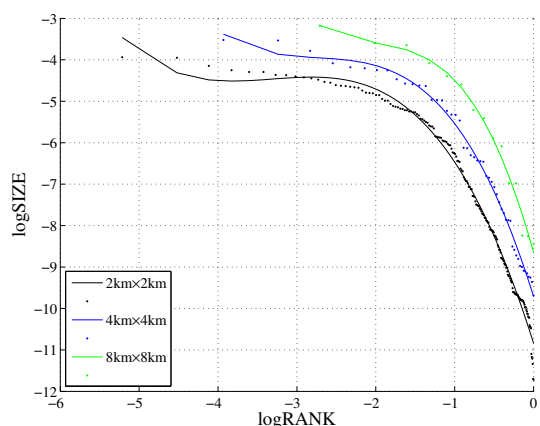


図 5.7 サイズが 1 位の 32km×32km 統合メッシュを母地域として非線形モデルを用いた場合の推定値と実測値

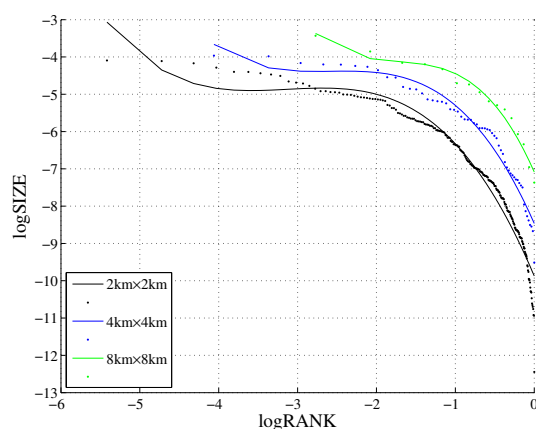


図 5.8 サイズが 2 位の 32km×32km 統合メッシュを母地域として非線形モデルを用いた場合の推定値と実測値

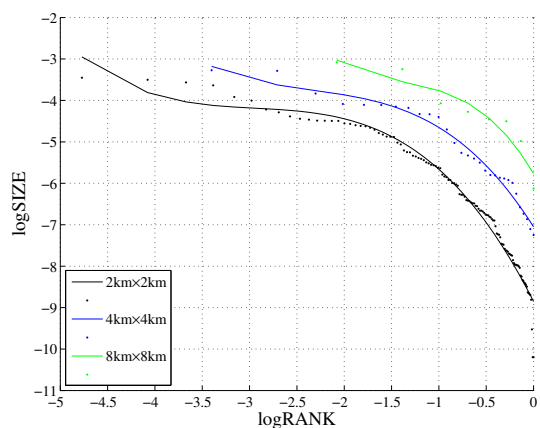


図 5.9 サイズが 3 位の 32km×32km 統合メッシュを母地域として非線形モデルを用いた場合の推定値と実測値

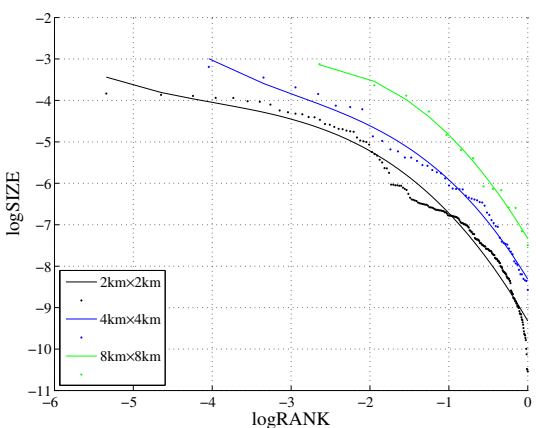


図 5.10 サイズが 4 位の 32km×32km 統合メッシュを母地域として非線形モデルを用いた場合の推定値と実測値

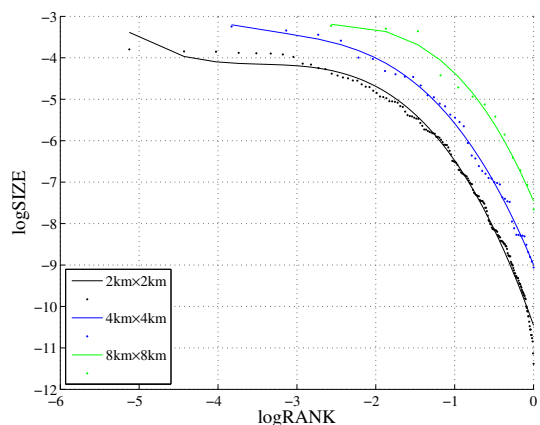


図 5.11 サイズが5位の 32km×32km 統合メッシュを母地域として非線形モデルを用いた場合の推定値と実測値

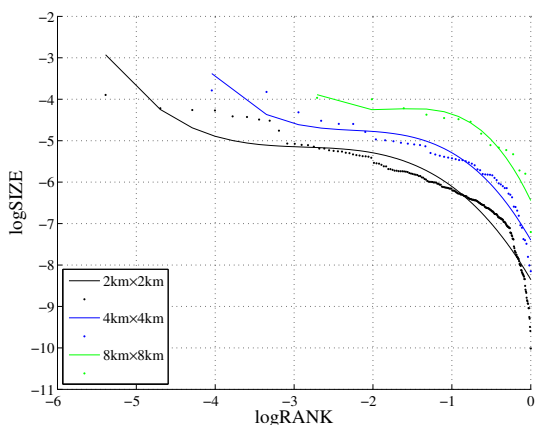


図 5.12 サイズが6位の 32km×32km 統合メッシュを母地域として非線形モデルを用いた場合の推定値と実測値

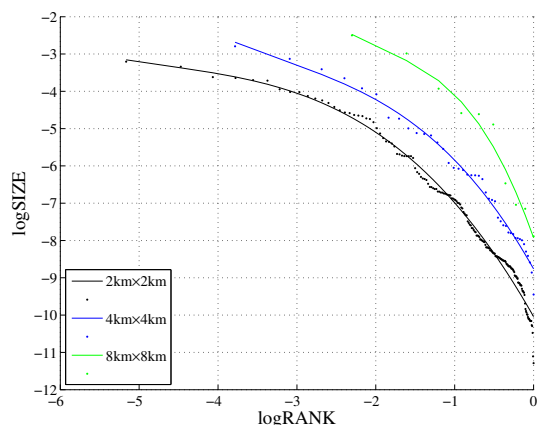


図 5.13 サイズが7位の 32km×32km 統合メッシュを母地域として非線形モデルを用いた場合の推定値と実測値

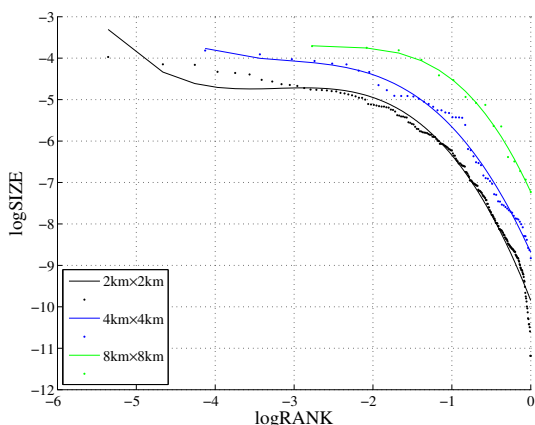


図 5.14 サイズが8位の 32km×32km 統合メッシュを母地域として非線形モデルを用いた場合の推定値と実測値

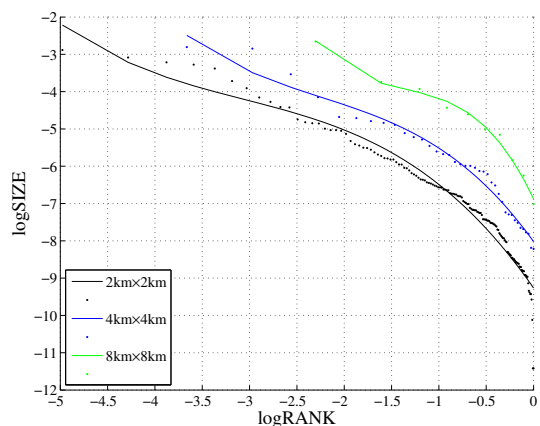


図 5.15 サイズが9位の 32km×32km 統合メッシュを母地域として非線形モデルを用いた場合の推定値と実測値

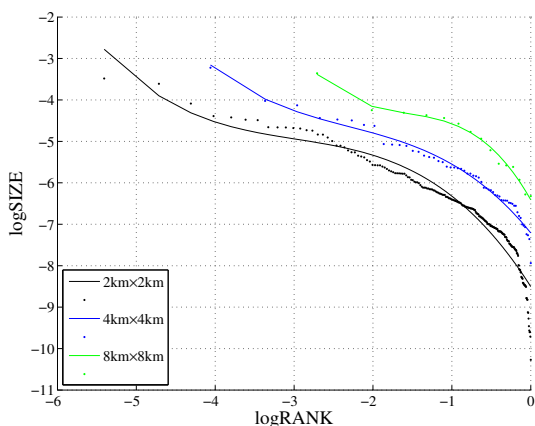


図 5.16 サイズが10位の 32km×32km 統合メッシュを母地域として非線形モデルを用いた場合の推定値と実測値

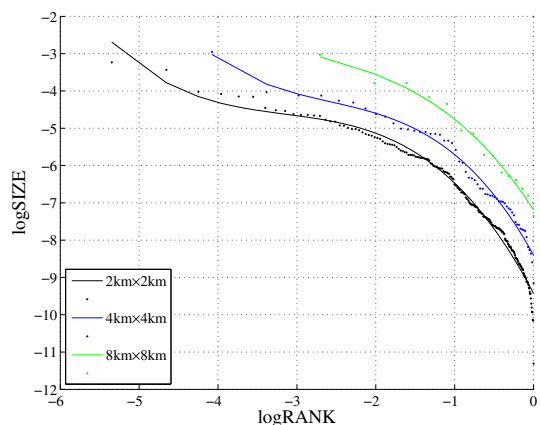


図 5.17 サイズが 11 位の 32km×32km 統合メッシュを母地域として非線形モデルを用いた場合の推定値と実測値

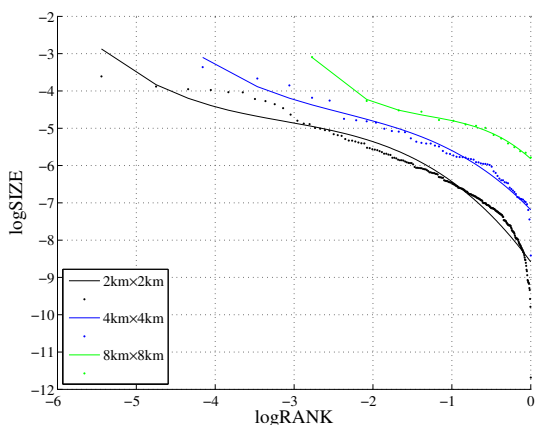


図 5.18 サイズが 12 位の 32km×32km 統合メッシュを母地域として非線形モデルを用いた場合の推定値と実測値

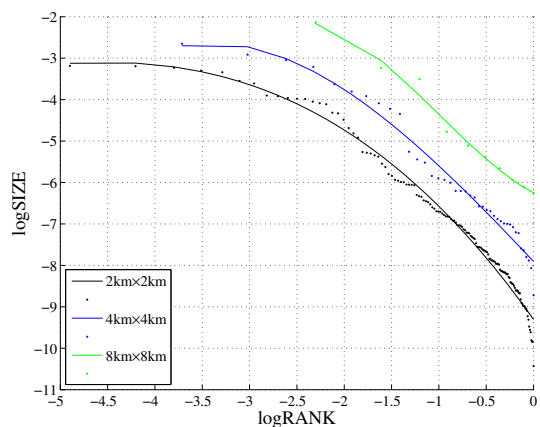


図 5.19 サイズが 13 位の 32km×32km 統合メッシュを母地域として非線形モデルを用いた場合の推定値と実測値

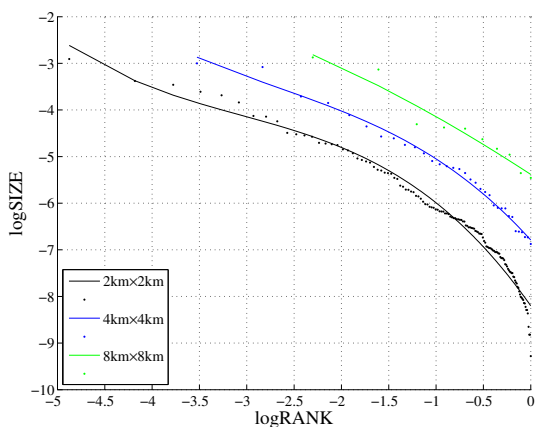


図 5.20 サイズが 14 位の 32km×32km 統合メッシュを母地域として非線形モデルを用いた場合の推定値と実測値

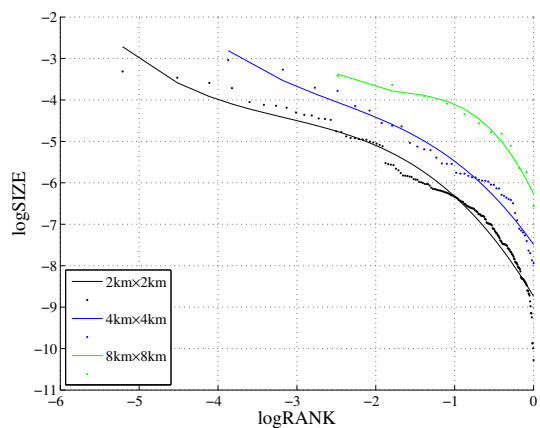


図 5.21 サイズが 15 位の 32km×32km 統合メッシュを母地域として非線形モデルを用いた場合の推定値と実測値

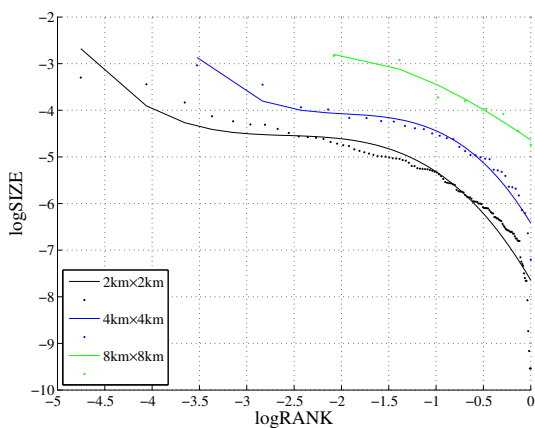


図 5.22 サイズが 16 位の 32km×32km 統合メッシュを母地域として非線形モデルを用いた場合の推定値と実測値

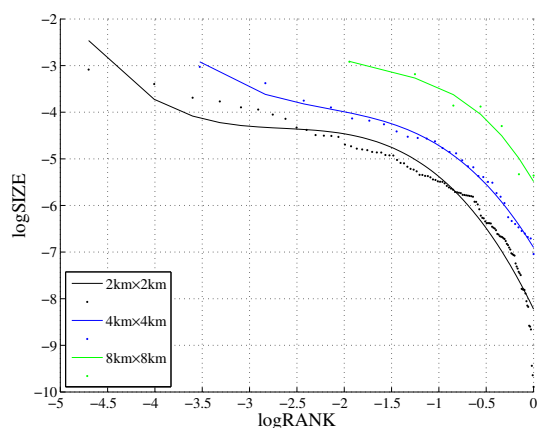


図 5.23 サイズが 17 位の  $32\text{km} \times 32\text{km}$  統合メッシュを母地域として非線形モデルを用いた場合の推定値と実測値

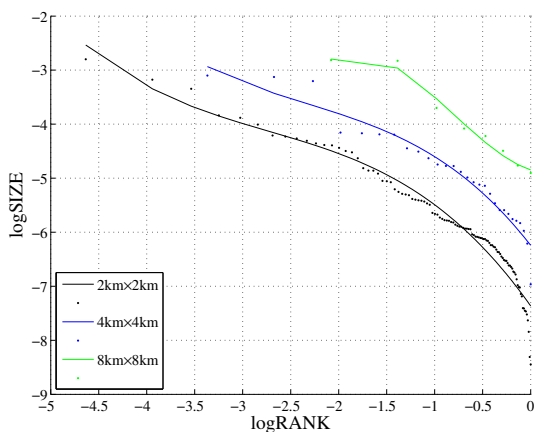


図 5.24 サイズが 18 位の  $32\text{km} \times 32\text{km}$  統合メッシュを母地域として非線形モデルを用いた場合の推定値と実測値

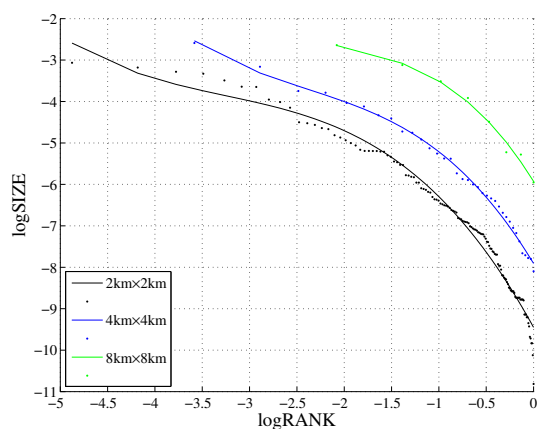


図 5.25 サイズが 19 位の  $32\text{km} \times 32\text{km}$  統合メッシュを母地域として非線形モデルを用いた場合の推定値と実測値

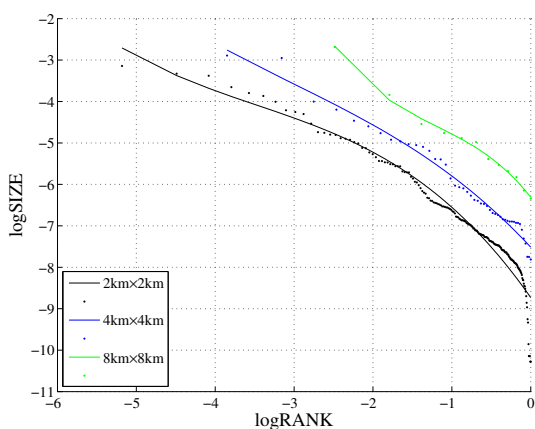


図 5.26 サイズが 20 位の  $32\text{km} \times 32\text{km}$  統合メッシュを母地域として非線形モデルを用いた場合の推定値と実測値

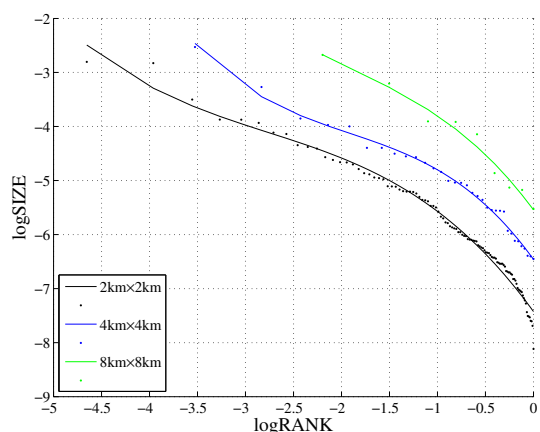


図 5.27 サイズが 21 位の  $32\text{km} \times 32\text{km}$  統合メッシュを母地域として非線形モデルを用いた場合の推定値と実測値

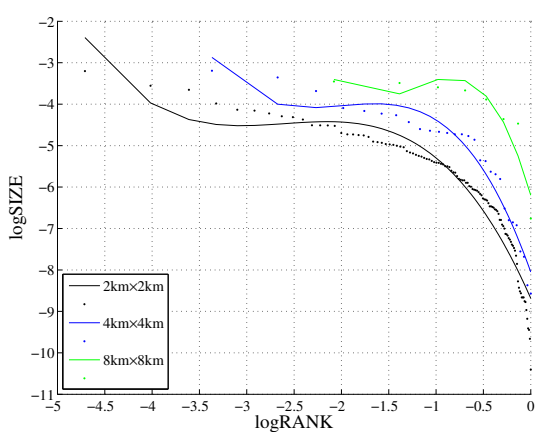


図 5.28 サイズが 22 位の  $32\text{km} \times 32\text{km}$  統合メッシュを母地域として非線形モデルを用いた場合の推定値と実測値

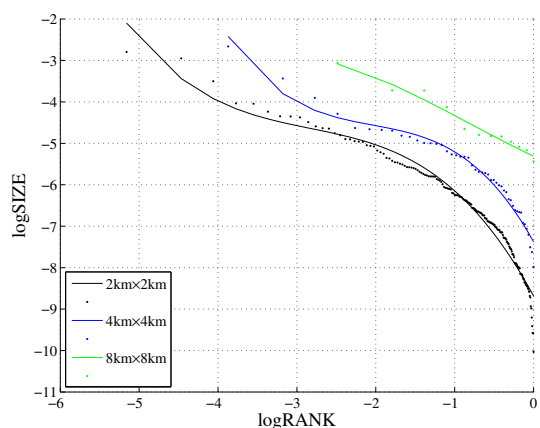


図 5.29 サイズが 23 位の  $32\text{km} \times 32\text{km}$  統合メッシュを母地域として非線形モデルを用いた場合の推定値と実測値

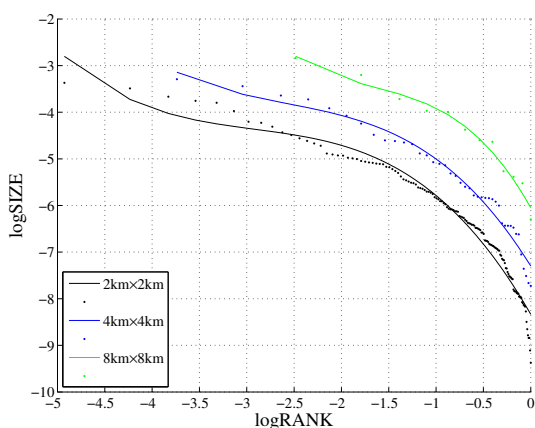


図 5.30 サイズが 24 位の  $32\text{km} \times 32\text{km}$  統合メッシュを母地域として非線形モデルを用いた場合の推定値と実測値

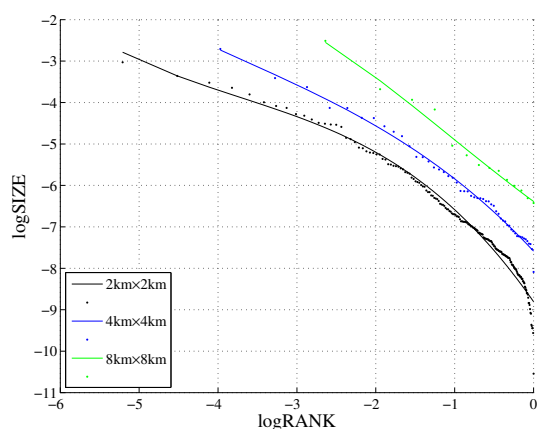


図 5.31 サイズが 25 位の  $32\text{km} \times 32\text{km}$  統合メッシュを母地域として非線形モデルを用いた場合の推定値と実測値

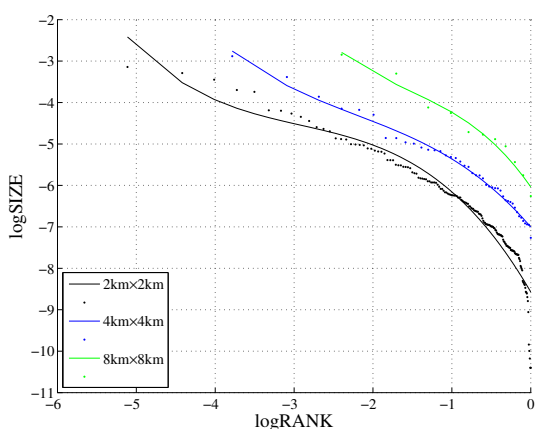


図 5.32 サイズが 26 位の  $32\text{km} \times 32\text{km}$  統合メッシュを母地域として非線形モデルを用いた場合の推定値と実測値

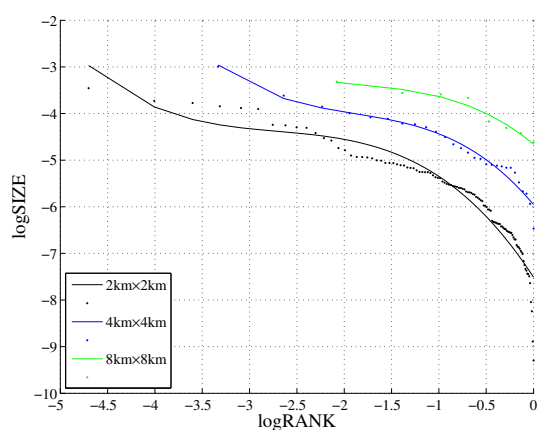


図 5.33 サイズが 27 位の  $32\text{km} \times 32\text{km}$  統合メッシュを母地域として非線形モデルを用いた場合の推定値と実測値

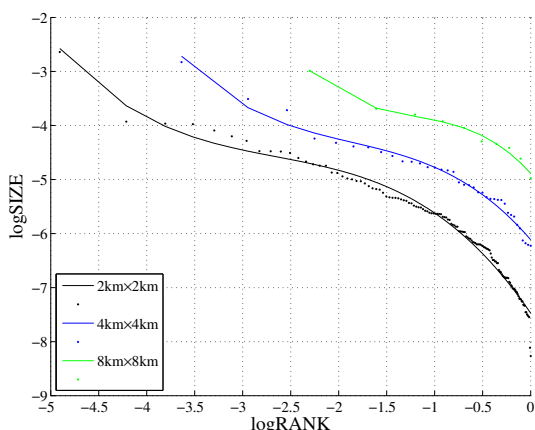


図 5.34 サイズが 28 位の  $32\text{km} \times 32\text{km}$  統合メッシュを母地域として非線形モデルを用いた場合の推定値と実測値

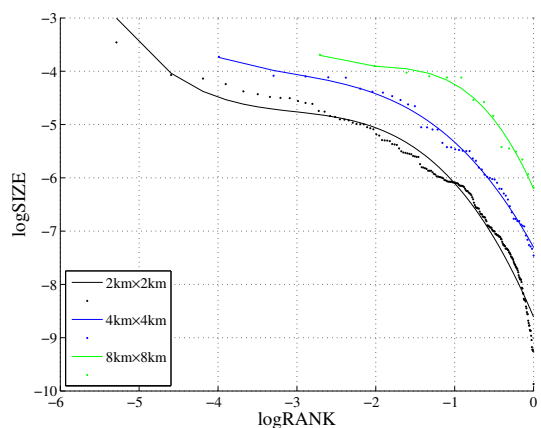


図 5.35 サイズが 29 位の  $32\text{km} \times 32\text{km}$  統合メッシュを母地域として非線形モデルを用いた場合の推定値と実測値

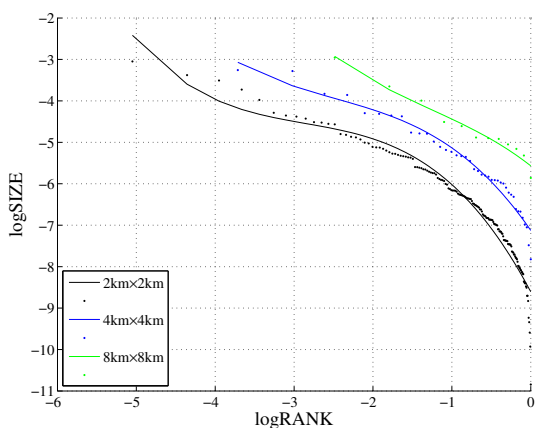


図 5.36 サイズが 30 位の  $32\text{km} \times 32\text{km}$  統合メッシュを母地域として非線形モデルを用いた場合の推定値と実測値

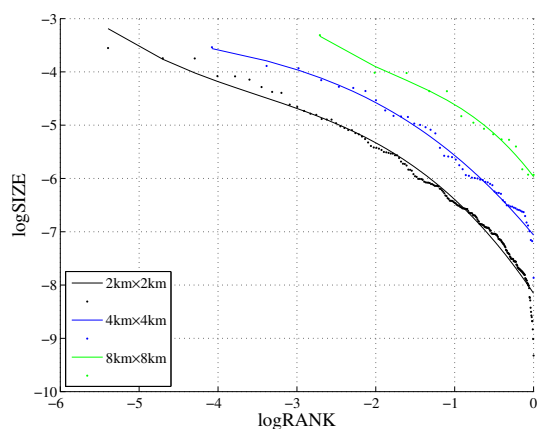


図 5.37 サイズが 31 位の  $32\text{km} \times 32\text{km}$  統合メッシュを母地域として非線形モデルを用いた場合の推定値と実測値

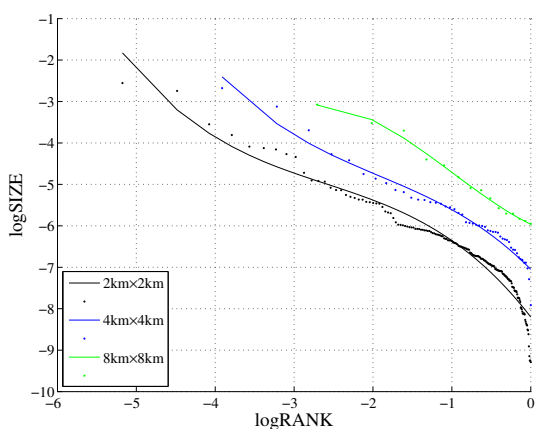


図 5.38 サイズが 32 位の  $32\text{km} \times 32\text{km}$  統合メッシュを母地域として非線形モデルを用いた場合の推定値と実測値

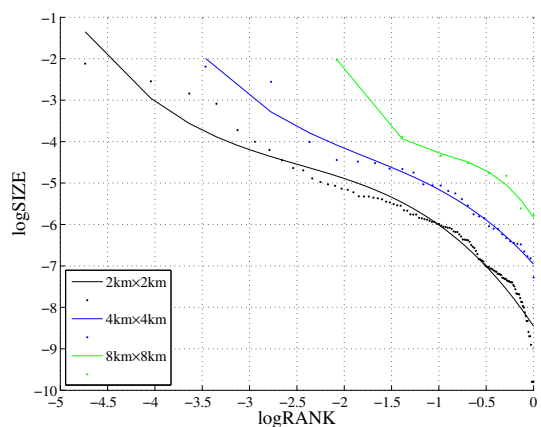


図 5.39 サイズが 33 位の  $32\text{km} \times 32\text{km}$  統合メッシュを母地域として非線形モデルを用いた場合の推定値と実測値

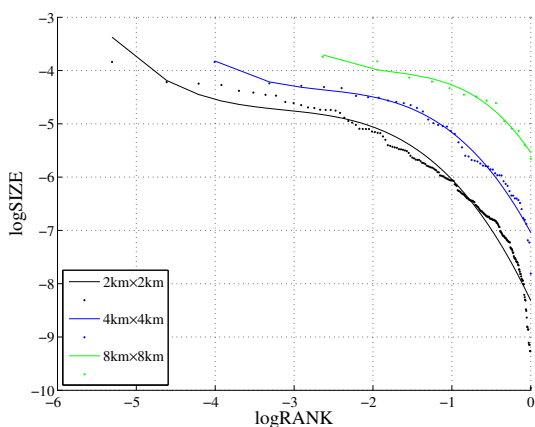


図 5.40 サイズが 34 位の  $32\text{km} \times 32\text{km}$  統合メッシュを母地域として非線形モデルを用いた場合の推定値と実測値

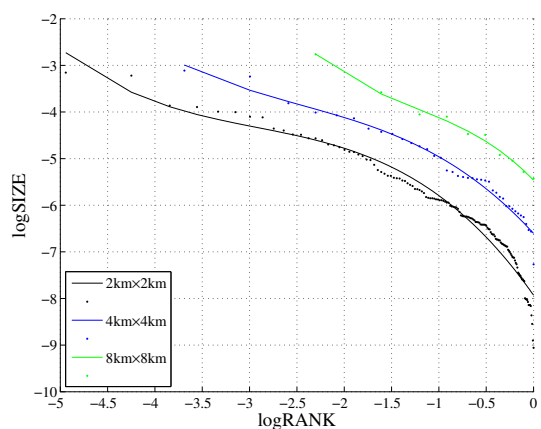


図 5.41 サイズが 35 位の  $32\text{km} \times 32\text{km}$  統合メッシュを母地域として非線形モデルを用いた場合の推定値と実測値

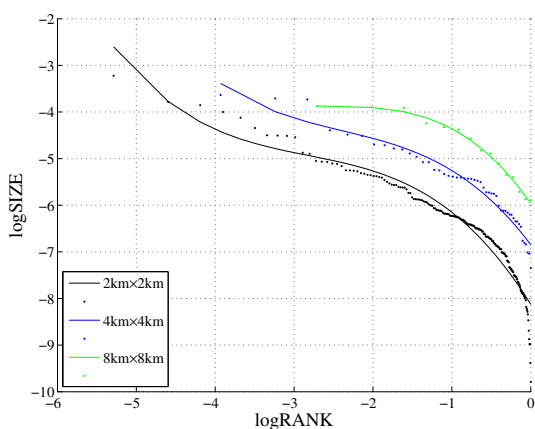


図 5.42 サイズが 36 位の  $32\text{km} \times 32\text{km}$  統合メッシュを母地域として非線形モデルを用いた場合の推定値と実測値

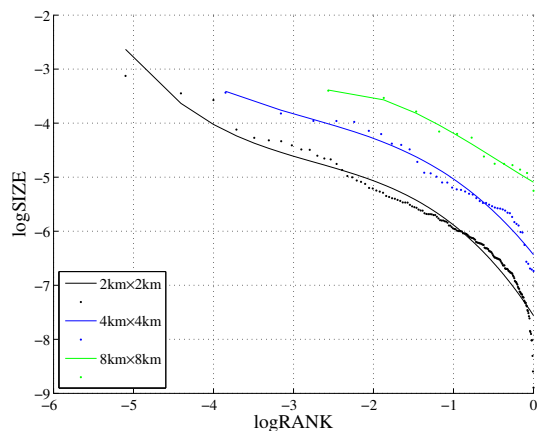


図 5.43 サイズが 37 位の  $32\text{km} \times 32\text{km}$  統合メッシュを母地域として非線形モデルを用いた場合の推定値と実測値

表 5.4 母地域を 32km×32km 統合メッシュ, 非線形モデルを用いた場合の  $\alpha_3$  と  $\alpha_2$  の分析結果

Rank	1		2		3		4		5	
	$\alpha_3$	$\alpha_2$	$\alpha_3$	$\alpha_2$	$\alpha_3$	$\alpha_2$	$\alpha_3$	$\alpha_2$	$\alpha_3$	$\alpha_2$
$2km \times 2km$	-0.1873	-1.865	-0.1729	-1.627	-0.0611	-0.732	-0.1282	-1.101	-0.1479	-1.535
$4km \times 4km$	0.8127	-2.176	-0.2394	-1.859	-0.0936	-0.828	-0.2108	-1.429	-0.1338	-1.317
$8km \times 8km$	1.8127	-3.234	-0.5166	-2.682	-0.0382	-0.695	-0.4560	-2.362	-0.1822	-1.562
Rank	6		7		8		9		10	
	$\alpha_3$	$\alpha_2$	$\alpha_3$	$\alpha_2$	$\alpha_3$	$\alpha_2$	$\alpha_3$	$\alpha_2$	$\alpha_3$	$\alpha_2$
$2km \times 2km$	-0.1683	-1.489	-0.0530	-0.739	-0.1586	-1.533	-0.1006	-0.899	-0.0849	-0.796
$4km \times 4km$	-0.2010	-1.410	-0.0978	-0.938	-0.1401	-1.306	-0.1154	-0.800	-0.0953	-0.683
$8km \times 8km$	-0.5958	-2.474	-0.4615	-2.647	-0.2240	-1.662	-0.4123	-1.950	-0.3097	-1.194
Rank	11		12		13		14		15	
	$\alpha_3$	$\alpha_2$	$\alpha_3$	$\alpha_2$	$\alpha_3$	$\alpha_2$	$\alpha_3$	$\alpha_2$	$\alpha_3$	$\alpha_2$
$2km \times 2km$	-0.1252	-1.184	-0.1059	-0.974	-0.0907	-0.861	-0.0568	-0.594	-0.0823	-0.758
$4km \times 4km$	-0.1664	-1.292	-0.1786	-1.207	-0.1039	-0.785	-0.0399	-0.363	-0.0700	-0.565
$8km \times 8km$	-0.1093	-0.940	-0.8759	-3.554	-0.4437	-2.220	-0.3428	-1.235	0.0032	-0.084
Rank	16		17		18		19		20	
	$\alpha_3$	$\alpha_2$	$\alpha_3$	$\alpha_2$	$\alpha_3$	$\alpha_2$	$\alpha_3$	$\alpha_2$	$\alpha_3$	$\alpha_2$
$2km \times 2km$	-0.0232	-0.513	-0.1298	-1.103	-0.1698	-1.318	-0.0510	-0.569	-0.1147	-1.125
$4km \times 4km$	0.0588	-0.056	-0.2449	-1.503	-0.2764	-1.636	-0.0288	-0.319	-0.1754	-1.267
$8km \times 8km$	0.3419	1.037	0.0552	0.136	0.0468	-0.145	0.0430	0.136	-0.2382	-1.515
Rank	21		22		23		24		25	
	$\alpha_3$	$\alpha_2$	$\alpha_3$	$\alpha_2$	$\alpha_3$	$\alpha_2$	$\alpha_3$	$\alpha_2$	$\alpha_3$	$\alpha_2$
$2km \times 2km$	-0.1945	-1.546	-0.1201	-1.092	-0.1117	-0.977	-0.0887	-0.728	-0.0463	-0.487
$4km \times 4km$	-0.2046	-1.344	-0.0857	-0.788	-0.1015	-0.672	-0.1058	-0.740	-0.0214	-0.315
$8km \times 8km$	-0.3729	-1.837	-0.2884	-1.677	-0.2583	-1.199	0.5262	1.286	-0.1398	-0.740
Rank	26		27		28		29		30	
	$\alpha_3$	$\alpha_2$	$\alpha_3$	$\alpha_2$	$\alpha_3$	$\alpha_2$	$\alpha_3$	$\alpha_2$	$\alpha_3$	$\alpha_2$
$2km \times 2km$	-0.1276	-1.119	-0.2609	-2.042	-0.1327	-1.138	-0.0813	-0.677	-0.1073	-0.852
$4km \times 4km$	-0.1427	-1.109	-0.5581	-3.338	-0.1193	-0.894	-0.1687	-0.971	-0.1562	-0.879
$8km \times 8km$	-0.3795	-1.881	-1.8764	-7.112	-0.1254	-0.481	-0.1415	-0.814	-0.3778	-1.372
Rank	31		32		33		34		35	
	$\alpha_3$	$\alpha_2$	$\alpha_3$	$\alpha_2$	$\alpha_3$	$\alpha_2$	$\alpha_3$	$\alpha_2$	$\alpha_3$	$\alpha_2$
$2km \times 2km$	-0.0903	-0.705	-0.1336	-1.085	-0.1008	-0.948	-0.0998	-0.845	-0.1491	-1.107
$4km \times 4km$	-0.1006	-0.580	-0.1941	-1.108	-0.1237	-0.977	-0.1075	-0.773	-0.1724	-0.919
$8km \times 8km$	0.1613	0.487	-0.1477	-0.812	-0.2148	-1.134	-0.1251	-0.952	-1.0666	-3.027
Rank	36		37							
	$\alpha_3$	$\alpha_2$	$\alpha_3$	$\alpha_2$						
$2km \times 2km$	-0.0969	-0.851	-0.0826	-0.677						
$4km \times 4km$	-0.0909	-0.674	-0.0589	-0.501						
$8km \times 8km$	-0.2740	-1.034	0.0699	0.094						



表 5.5 母地域を 32km×32km 統合メッシュ, 非線形モデルを用いた場合の  $\alpha_1$  と  $R^2$  の分析結果

Rank	1		2		3		4		5	
	$\alpha_1$	$R^2$	$\alpha_1$	$R^2$	$\alpha_1$	$R^2$	$\alpha_1$	$R^2$	$\alpha_1$	$R^2$
$2km \times 2km$	-6.05	0.992	-5.00	0.959	-3.27	0.963	-3.22	0.903	-5.36	0.993
$4km \times 4km$	-6.08	0.993	-4.78	0.965	-3.13	0.986	-3.32	0.927	-4.59	0.994
$8km \times 8km$	-6.86	0.988	-4.81	0.978	-3.16	0.989	-4.00	0.894	-4.47	0.982
Rank	6		7		8		9		10	
	$\alpha_1$	$R^2$	$\alpha_1$	$R^2$	$\alpha_1$	$R^2$	$\alpha_1$	$R^2$	$\alpha_1$	$R^2$
$2km \times 2km$	-4.51	0.976	-3.74	0.986	-4.88	0.981	-2.98	0.930	-2.86	0.930
$4km \times 4km$	-3.61	0.978	-3.75	0.987	-4.20	0.986	-2.34	0.975	-2.18	0.952
$8km \times 8km$	-3.88	0.913	-6.02	0.971	-4.16	0.991	-3.37	0.989	-1.91	0.996
Rank	11		12		13		14		15	
	$\alpha_1$	$R^2$	$\alpha_1$	$R^2$	$\alpha_1$	$R^2$	$\alpha_1$	$R^2$	$\alpha_1$	$R^2$
$2km \times 2km$	-4.01	0.982	-3.64	0.955	-3.18	0.957	-2.72	0.942	-2.88	0.977
$4km \times 4km$	-3.82	0.982	-3.53	0.978	-2.69	0.964	-2.04	0.980	-2.23	0.990
$8km \times 8km$	-3.26	0.985	-5.38	0.992	-3.94	0.973	-2.42	0.994	-1.33	0.945
Rank	16		17		18		19		20	
	$\alpha_1$	$R^2$	$\alpha_1$	$R^2$	$\alpha_1$	$R^2$	$\alpha_1$	$R^2$	$\alpha_1$	$R^2$
$2km \times 2km$	-3.22	0.986	-3.51	0.970	-3.47	0.885	-2.74	0.976	-4.16	0.982
$4km \times 4km$	-2.42	0.976	-3.43	0.977	-3.34	0.949	-2.03	0.992	-3.79	0.995
$8km \times 8km$	-1.20	0.986	-0.90	0.967	-1.39	0.951	-1.39	0.984	-3.70	0.989
Rank	21		22		23		24		25	
	$\alpha_1$	$R^2$	$\alpha_1$	$R^2$	$\alpha_1$	$R^2$	$\alpha_1$	$R^2$	$\alpha_1$	$R^2$
$2km \times 2km$	-4.19	0.934	-3.48	0.969	-3.28	0.930	-2.51	0.958	-2.20	0.976
$4km \times 4km$	-3.33	0.991	-2.67	0.991	-2.21	0.989	-2.28	0.948	-1.79	0.977
$8km \times 8km$	-3.49	0.952	-3.35	0.979	-2.74	0.972	-0.59	0.982	-1.95	0.979
Rank	26		27		28		29		30	
	$\alpha_1$	$R^2$	$\alpha_1$	$R^2$	$\alpha_1$	$R^2$	$\alpha_1$	$R^2$	$\alpha_1$	$R^2$
$2km \times 2km$	-3.54	0.972	-5.17	0.932	-3.59	0.952	-2.45	0.985	-2.60	0.982
$4km \times 4km$	-3.26	0.972	-6.45	0.952	-2.77	0.968	-2.46	0.992	-2.06	0.982
$8km \times 8km$	-3.64	0.977	-8.02	0.870	-1.48	0.967	-2.41	0.975	-1.98	0.986
Rank	31		32		33		34		35	
	$\alpha_1$	$R^2$	$\alpha_1$	$R^2$	$\alpha_1$	$R^2$	$\alpha_1$	$R^2$	$\alpha_1$	$R^2$
$2km \times 2km$	-2.46	0.948	-3.11	0.920	-3.12	0.946	-2.72	0.943	-3.40	0.948
$4km \times 4km$	-1.92	0.967	-2.43	0.965	-2.73	0.971	-2.26	0.962	-2.55	0.975
$8km \times 8km$	-0.93	0.993	-1.69	0.960	-2.19	0.975	-2.43	0.992	-3.51	0.990
Rank	36		37							
	$\alpha_1$	$R^2$	$\alpha_1$	$R^2$						
$2km \times 2km$	-2.89	0.961	-2.27	0.951						
$4km \times 4km$	-2.23	0.976	-1.84	0.956						
$8km \times 8km$	-2.10	0.992	-0.88	0.975						

図 5.7 ~ 5.43 から、全母地域について、単位地域の大きさによらず、全ランクで実測値と、回帰曲線とのフィッティングが良いことがわかる。この特徴は、図 5.2 と共通している。以下、 $\alpha$  と決定係数  $R^2$  の値について詳細に検討する

図 5.44, 5.45, 5.46, 5.47 は、横軸を前節での九州全体を母地域としたときの順位、縦軸を 37 個の 32km 統合メッシュのそれぞれを母地域として求めた  $\alpha_3$ ,  $\alpha_2$ ,  $\alpha_1$ , 決定係数  $R^2$  としてプロットしたものである。黒色、青色、緑色の曲線は、それぞれ単位地域が 2km $\times$ 2km, 4km $\times$ 4km, 8km $\times$ 8km 統合メッシュであるときの結果を表す。

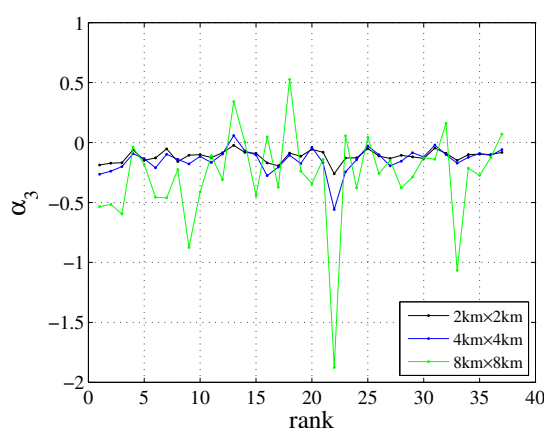


図 5.44 37 個の 32km $\times$ 32km 統合メッシュを母地域、2km $\times$ 2km, 4km $\times$ 4km, 8km $\times$ 8km 統合メッシュを単位地域としたときの非線形モデルの  $\alpha_3$

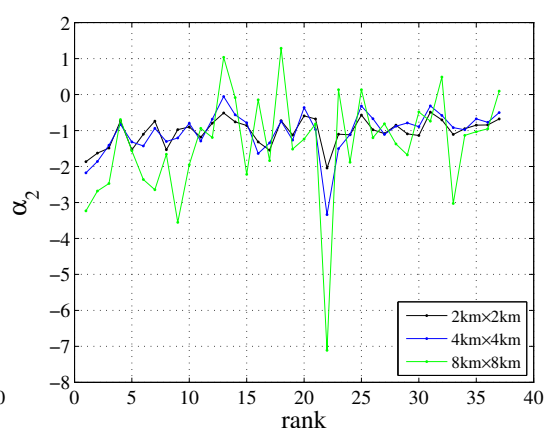


図 5.45 37 個の 32km $\times$ 32km 統合メッシュを母地域、2km $\times$ 2km, 4km $\times$ 4km, 8km $\times$ 8km 統合メッシュを単位地域としたときの非線形モデルの  $\alpha_2$

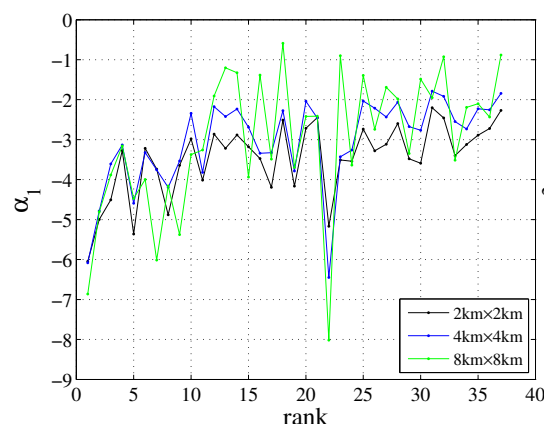


図 5.46 37 個の 32km $\times$ 32km 統合メッシュを母地域、2km $\times$ 2km, 4km $\times$ 4km, 8km $\times$ 8km 統合メッシュを単位地域としたときの非線形モデルの  $\alpha_1$

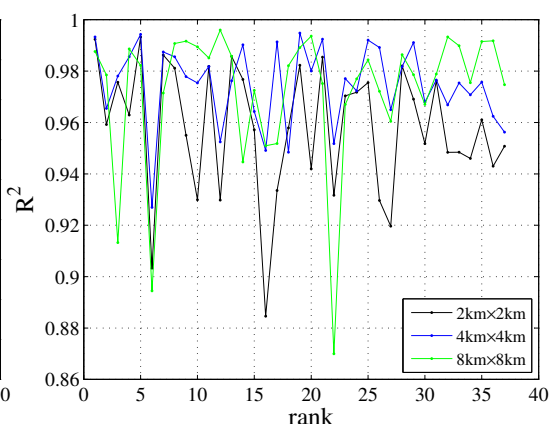


図 5.47 37 個の 32km $\times$ 32km 統合メッシュを母地域、2km $\times$ 2km, 4km $\times$ 4km, 8km $\times$ 8km 統合メッシュを単位地域としたときの非線形モデルの  $R^2$

同じ大きさの単位地域で、前節にて母地域を九州全体としたときのサイズの順位に対する  $\alpha_3$ ,  $\alpha_2$ ,  $\alpha_1$ , 決定係数  $R^2$  の値について着目する。つまり、図 5.44, 5.45, 5.46, 5.47 に

て黒、青、緑の曲線を横軸方向に比較をする。

$\alpha_1$  の値ついて着目すると、図 5.46 より、母地域を九州とした時の順位が下がるとき  $\alpha_1$  の絶対値も下がる傾向がある。これは、第 3 章の線形最小二乗法での結果が影響しているため、このような結果を得たと考えられる。つまり、一次の係数が全体の変化の方向性を定めることに因っているということがいえる。

また、図 5.44, 5.45, 5.47 より、母地域を九州とした時の順位と  $\alpha_3$ ,  $\alpha_2$ , 決定係数  $R^2$  の値に相関がないことが分かる。

これは係数がフィッティングが良くなることだけを目的に、機械的に求められた値であることに因っている。 $\alpha_3$ ,  $\alpha_2$  の値はそれぞれの母地域の分布を特徴付けるものではないため、相関がみられない。

決定係数  $R^2$  の値についても  $\alpha_3$ ,  $\alpha_2$  の値と同様である。つまり、機械的に当てはめた曲線であるため相関はない。

### 5.3 自己同型性の分析

この節では、非線形モデルにおける同型性について考察する。つまり、37 個の母地域 1 つずつについて、単位地域の大きさを変化させたときの  $\alpha_3$ ,  $\alpha_2$ ,  $\alpha_1$ , 決定係数  $R^2$  の推移に関して、母地域が九州全体としたときの結果と比較する。

図 5.44, 5.45, 5.46, 5.47 にて、黒、青、緑のプロットを縦軸方向に比較をする。 $\alpha_3$ ,  $\alpha_2$ ,  $\alpha_1$ , 決定係数  $R^2$  の推移に関して、全ての値が九州全体を母地域とした時と同様に単位地域の大きさに対して推移する地域は存在しない。したがって、自己同型性の条件を満たしていない。

この章の結論として、非線形モデルでは自己同型性を検出できないといえる。この章の結果と第 4 章の結果より、自己同型性は回帰曲線との当てはまりが良ければ表れるというものではないということが分かる。つまり、それぞれの係数やパラメータに意味があることが必要であるということである。

## 第 6 章

### 総括

第 6 章は自己同型性の有無に関する結論と今後の研究課題を述べた。第 1 節で対数正規分布モデルでは自己同型性を検出できることを述べる。加えて、それが示唆する過疎化地域での対策のありかたに言及する。第 2 節にて今後の研究課題を述べる。それは動学的な分析に発展させることである。

## 6.1 結論

本研究は、人口分布に自己同型性があるか否かを明らかにすることを目的として実証分析を行った。その際、形式地域であるメッシュを用いることで空間的な分布のみに焦点を当てた分析を行ってきた。

分析対象地域とした九州地方について、形式地域を用いた場合、採用するモデルによって自己同型性がある場合とない場合に分かれるということがわかった。

本研究では、人口分布に自己同型性があると結論付ける。それは、対数正規分布モデルによる分析結果を最重要視するからである。根拠は二つある。一つは、対数正規分布モデルを用いた分析では、理論上の曲線と実測値のフィッティングが最も良いので、単位地域を大きくしたとき、表れている分布の特徴が変化する様子を最も良く説明していると考えられることである。もう一つは、第1章2節で述べたとおり、対数正規分布モデルが生じる動学的な理論的根拠があることだ。したがって、自己同型性という観点からは、全体での人口の分布構造と部分での人口の分布構造が独立でないといえる。

そして、分析対象地域とした九州地方について、形式地域を用いて単位地域を大きくしていくことで、全体と部分の両方で自己相似性を示す度合いが高まることが明らかになった。なぜなら、単位地域を大きくしていくと、対数正規分布モデルの決定係数  $R^2$  の値が小さくなり、線形モデルの決定係数  $R^2$  の値が大きくなるという結果を得たからである。32km×32km 統合メッシュを用いた分析の一部の母地域では、対数正規分布モデルの決定係数  $R^2$  の値よりも、線形モデルの決定係数  $R^2$  の値が高くなるという結果を得た。これらの地域は人口シェア  $G_t$  が順位規模法則が失われる境界値  $G_b$  を下回っていないといえることができる。

しかし、32km×32km 統合メッシュを母地域としたとき、線形モデルにて対数正規分布モデルよりも高い決定係数  $R^2$  の値を得た地域での  $\alpha$  の値と、母地域を九州全体としたときの  $\alpha$  の値を比較すると、等しくはなっていない。異なる 32km×32km 統合メッシュを比較した場合も、 $\alpha$  の値は等しくなっていない。したがって、これらの地域に関しては形式地域を用いた場合では、実質地域を用いた既往研究での結果と異なり、自己相似性は理論上の性質に留まり、実現するとは限らないことが明らかになった。すなわち、全体と任意の一部分の人口規模と順位の分布を比較したとき、実際に相似性を示してはいないといえることができる。したがって、自己相似性という観点からは、全体での人口の分布構造と部分での人口の分布構造が独立であるといえる。これは、37 個の 32km×32km 統合メッシュを母地域としたとき、すべての母地域で順位規模法則に従う結果が得られなかったことに関連している。順位規模法則に従うか否かさえ、母地域によって独立に起こる事象である。すなわち、人口の集中のみに関して言えば、それぞれの地域の特徴があり、その現実を  $\alpha$  の値は反映している。したがって、自己相似性は理論上の性質に留まり、現実の人

口分布構造が全体と部分で独立であるか否かを判断するには、過度に理想化していると言える。ゆえに、本研究では自己同型性での結論、全体での人口の分布構造と部分での人口の分布構造が独立でないという結論を採用する。

また、本研究の線形モデルでの  $\alpha$  の値について、実質地域を用いた既往研究では、 $\alpha = 1$  となるジップ則が都市システムにおいて成立するとの報告がなされている。本研究では  $\alpha \simeq 1$  となる母地域が確認された。しかし、多くの地域は  $\alpha \neq 1$  であった。ジップ則が表れるためには、空間的な情報のみでは不十分であり、実質地域のように複雑な要因で人口が形成されていなければならないということがわかった。

そして、ある地域が、それが構成要素となる、より広域な地域の中で上位に位置するための必要条件は人口集積が他の構成要素と比較して高くあることだと分かった。線形モデルでの  $\alpha$  の値、対数正規分布モデルでの  $\sigma$  の値、どちらの場合でみたときも、母地域を九州全体としたときのサイズの順位に対する変化は、順位が低くなると減少する傾向があることが根拠である。なぜなら、 $\alpha$ ,  $\sigma$  は、値が大きいくほど少数の都市に人口が集中しているを示す、人口の偏在を表す度数であるからだ。

本研究により、全体での人口の分布構造と部分での人口の分布構造が独立でないことが明らかになった。ゆえに、人口流出が著しい過疎地域の地域振興はその地域のみでの対策は効果が薄いということが出来る。したがって、今後の対策は他地域と連携してなされるべきであると示すことができた。

## 6.2 今後の課題

今後の課題は自己組織化に関する研究を行うことである。それにより、自己相似性を生成する過程を動的に確認することができる。さらに、自己相似性が失われる自己組織化臨界状態における臨界点を導出することができれば、自己相似性が確認できなかった地域の説明もすることができる。その際、経済指標を用いた多変量解析により、臨界点の導出が求められる。これらのために必要なことが、時系列のデータを用いて分析を行うことである。本研究では平成 17 年の国勢調査のデータのみを取り扱ったので、静的な分布状況のみしか分析することができなかった。

また、本研究に用いたメッシュデータは、平成 17 年国勢調査の基準地域メッシュデータ（単位区画の 1 辺の長さが約 1km のもの）を基に作成したものである。したがって、同じ手法で別の地域ブロックを分析することができる。今回の研究結果が一般に成り立つ結果であるかどうかをケーススタディを重ねることで検証するという課題が残されている。



## 参考文献

- [1] Bak, Per , Tang, Chao , Wiesenfeld, Kurt , (1988) , “Self-organized criticality” , *Physical Review A* 38-1 pp.364-374.
- [2] Bettencourt, Luís M. A. , Lobo, José , Helbing, Dirk , Kühnert, Christian , and West, Geoffrey B. , (2007) , “Growth, innovation, scaling, and the pace of life in cities” , *Proceedings of the National Academy of Sciences* vol.104 issue 17 pp.7301-7306.
- [3] Christaller, W. , (1933) , *Die Zentralen Orte in Suddeutschland* , Gustav Fischer. (クリスタラー , 『都市の立地と発展』 , 江沢譲爾訳 , 大明堂 , (1969))
- [4] Diamond, Jared Mason , (2005) , *Collapse: How Societies Choose to Fail or Succeed* , Viking. (ジャレド・ダイアモンド , 『文明崩壊——滅亡と存続の命運を分けるもの (上・下)』 , 草思社 , (2005))
- [5] Gabaix, X , (1999) , “Zipf’s law for cities : an explanation” , *The Quarterly Journal of Economics* vol.114 issue 3 pp.739-767.
- [6] 金本良嗣 , 徳岡一幸 , (2002) , 「日本の都市圏設定基準」 , 『応用地域学研究』 No.7 pp.1-15.
- [7] 森村英典 , (1974) , 『確率・統計 (理工学基礎講座 4)』 , 朝倉書店
- [8] Øksendal, Bernt , (1998) , *Stochastic Differential Equations: An Introduction With Applications* , Springer. (ベアレント・エクセンダール , 『確率微分方程式 入門から応用まで』 , 谷口説男訳 , シュプリング・フェアクラーク東京株式会社 , (1999))
- [9] Suzuki Keisuke , (1983) , “Decomposability and Composability of the Zipf’s Rank-size Rule” , 『流通経済大学論集』 17(3) pp.33-62.
- [10] 鈴木武 , (2006) , 「連続確率変数を用いたエントロピー最大化によるベキ乗則の成立条件」 , 『経営志林』 43(3) pp.1-12.
- [11] 高安秀樹 , (1986) , 『フラクタル』 , 朝倉書店.



## 付録 A

# リーマン・スチルチェス積分

リーマン・スチルチェス積分の概念について，参考文献 [7] より引用する．

確率変数  $X$  が離散的のときその期待値は

$$E(X) = \sum_{k=1}^n x_k f_k \quad (\text{A.1})$$

で与えられたし，連続的ならば，それは

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx \quad (\text{A.2})$$

となった．式 (A.2) は，確率素分  $f(x) dx$  を  $f_k$  のかわりに使い， $x_k$  のかわりに  $x$  として

$$x f(x) dx \quad (\text{A.3})$$

を加え合わせたものに他ならない．図 (A.1) の  $f_k$  を図 (A.2) の  $F(x)$  を使って表現す

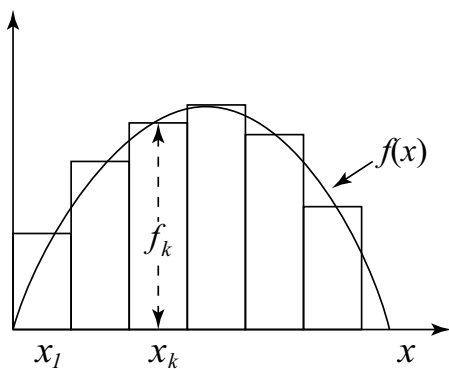


図 A.1 積分のウェイト

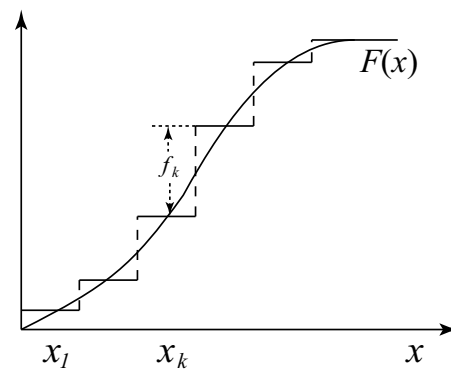


図 A.2 ウェイトの分布関数による表現

るならば、式 (A.1) は

$$E(X) = \sum_{k=1}^n x_k (F(x_{k+1}) - F(x_k)) \quad (\text{A.4})$$

と書ける。まったく同様に、式 (A.2) は

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \left( \frac{d}{dx} F(x) \right) dx \quad (\text{A.5})$$

と表せる。

ところで、式 (A.2) の積分は、リーマン積分とよばれるふつうの積分であるが、これは、一般的には、

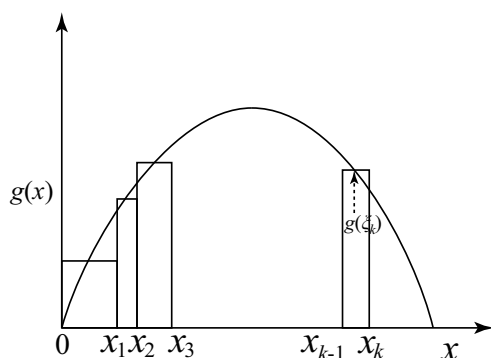


図 A.3 リーマン積分の分割

図 (A.3) のように、 $x$  軸を適当な微小区間に分け、その区間の長さ  $x_k - x_{k-1}$  とその区間内の 1 点  $\xi_k$  における関数値  $g(\xi_k)$  との積の和

$$\sum_{k=1}^n g(\xi_k) (x_k - x_{k-1}) \quad (\text{A.6})$$

を作り、その  $\max_k |x_k - x_{k-1}| \rightarrow 0$  としたときの極限として定義される。そこで、極限をとる前の和、式 (A.6) の形で式 (A.2) を書き直すと、 $|x_k - x_{k-1}|$  が十分小さく、 $x_{k-1} \leq \xi_k \leq x_k$  であることに注意して、

$$\sum_{k=1}^n \xi_k f(\xi_k) (x_k - x_{k-1}) \doteq \sum_{k=1}^n x_k \frac{F(x_k) - F(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}} (x_k - x_{k-1}) \quad (\text{A.7})$$

と書ける。この形は式 (A.4) と全く同じであるから、この極限と式 (A.1) とが同じ表記法で書けるように積分を定義しなおせばぐあいがよい。

式 (A.7) を直接作るには、図 (A.3) のように  $x$  軸を適当な微小区間に分割したとき、 $F(x)$  の差を使って

$$\sum_{k=1}^n x_k \{F(x_k) - F(x_{k-1})\} \quad (\text{A.8})$$

とすればよい。この和は  $\max_k |x_k - x_{k-1}| \rightarrow 0$  のとき収束する。それで、その極限を  $F(x)$  の差という意味を持たせて

$$\int_{-\infty}^{\infty} x dF(x) \quad (\text{A.9})$$

のように書く。これがリーマン・スチルチェス積分である。

このように積分を定義すると、 $F(x)$  が離散分布の場合、式 (A.4) の右辺において、 $F(x)$  がジャンプしていないところは 0 になるため、 $x$  の区間をどんなに細かくしても、ジャンプのあるところだけが残る、いつも同じ値になる。つまり、極限も式 (A.4) もそのままであるから、式 (A.4) も

$$\int_{-\infty}^{\infty} x dF(x)$$

と書くことが許されるのである。

結局、 $F(x)$  の連続・離散のいずれの場合でも、リーマン・スチルチェス積分を使えば式 (A.9) によって期待値が表される。なお、式 (A.9) の形は  $x$  のみならず  $x^k$  や、もっと一般な関数  $g(x)$  についても適用できる。また、一般のリーマン・スチルチェス積分の定義には、もう少し細かい議論が必要であるがここでは省略し、概念的な話に止めてある。



## 付録 B

# 伊藤積分の定義

一次元ブラウン運動における伊藤積分の定義について、参考文献 [8] より引用する.

**定義 1**  $B_t(\omega)$  を  $n$  次元ブラウン運動とする.  $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_t^{(n)}$  を確率変数の族  $\{B_s(\cdot); s < t\}$  により生成される  $\sigma$ -加法族と定義する. すなわち,  $\mathcal{F}_t$  は,  $t_j < t$  とボレル集合  $F_j \subset \mathbf{R}^n$  により

$$\{\omega; B_{t_1}(\omega) \in F_1, \dots, B_{t_k}(\omega) \in F_k\}$$

と表わされる集合を全て含む最小の  $\sigma$ -加法族である. (すべての零集合が  $\mathcal{F}_t$  に含まれていると仮定する).

しばしば  $\mathcal{F}$  を “ $B_s$  の時刻  $t$  までの履歴” と考える. 関数  $h(\omega)$  が  $\mathcal{F}_t$ -可測となるのは,  $h$  が, 誘拐連続関数  $g_1, \dots, g_k$  と  $t_j < t, j \leq k$  により

$$g_1(B_{t_1}) g_2(B_{t_2}) \cdots g_k(B_{t_k})$$

と表わされる関数の列の概収束極限となるとき, およびそのときに限る.

$s \leq t$  ならば  $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$  となる. (つまり,  $\{\mathcal{F}_t\}$  はひげんしょうである). さらに, すべての  $t$  について  $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}$  である.

**定義 2**  $\{\mathcal{N}_t\}_{n \geq 0}$  は  $\Omega$  の  $\sigma$ -加法族の非減少族とする. 確率過程  $g(t, \omega) : [0, \infty) \times \Omega \rightarrow \mathbf{R}^n$  は, 各  $t$  についての写像

$$\omega \mapsto g(t, \omega)$$

が  $\mathcal{N}_t$ -可測となるとき  $\mathcal{N}_t$ -適合であると言う.

**定義 3**  $\mathcal{V} = \mathcal{V}(S, T)$  で, 次の 3 条件を満たす関数

$$f(t, \omega) : [0, \infty) \times \Omega \rightarrow \mathbf{R}$$

の全体を表す.

- (i).  $(t, \omega) \mapsto g(t, \omega)$  は  $\mathcal{B} \times \mathcal{F}$ -可測. ただし,  $\mathcal{B}$  は  $[0, \infty)$  のボレル集合族,
- (ii).  $f(t, \omega)$  は  $\mathcal{F}_t$ -適合である,
- (iii).  $E \left[ \int_S^T f(t, \omega)^2 dt \right] < \infty$ .

関数  $\phi \in \mathcal{V}$  は

$$\phi(t, \omega) = \sum_j e_j(\omega) \cdot \mathcal{X}_{[t_j, t_{j+1})}(t) \quad (\text{B.1})$$

なる表現を持つとき, 初等的であると言う.  $\phi \in \mathcal{V}$  であるから,  $e_j$  は  $\mathcal{F}_{t_j}$ -可測となる.

初等的な関数  $\phi(t, \omega)$  に対して, 伊藤積分を次のように定義する.

$$\int_S^T \phi(t, \omega) dB_t(\omega) = \sum_{j \geq 0} e_j(\omega) [B_{t_{j+1}} - B_{t_j}](\omega) \quad (\text{B.2})$$

次の関係式が重要である

補題 (伊藤積分の等長性) もし  $\phi(t, \omega)$  が有界かつ初等的ならば, 次の等式が成り立つ.

$$E \left[ \left( \int_S^T \phi(t, \omega) dB_t \right)^2 \right] = E \left[ \int_S^T \phi(t, \omega)^2 dt \right] \quad (\text{B.3})$$

[証明]  $\Delta B_j = B_{t_{j+1}} - B_{t_j}$  とおく.  $i < j$  ならば  $e_i e_j \Delta B_i$  と  $\Delta B_j$  は独立であるから,

$$E \left[ \left( \int_S^T \phi dB_t \right)^2 \right] = \begin{cases} 0, & i \neq j \text{ のとき,} \\ E[e_j^2] \cdot (t_{j+1} - t_j), & i = j \text{ のとき,} \end{cases}$$

が成り立つ. したがって,

$$\begin{aligned} E \left[ \left( \int_S^T \phi dB_t \right)^2 \right] &= \sum_{i,j} E[e_i e_j \Delta B_i \Delta B_j] = \sum_j E[e_j^2] \cdot (t_{j+1} - t_j) \\ &= E \left[ \int_S^T \phi^2 dt \right] \end{aligned}$$

となる.  $\square$

等長性 (B.3) を利用して伊藤積分の定義を初等的な関数から一般の  $\mathcal{V}$  に属する関数に拡張しよう. このための準備をいくつかの段階に分けて行う.

第 1 段階  $g \in \mathcal{V}$  は有界で, 各  $\omega$  について  $g(\cdot, \omega)$  は連続であるとする. このとき初等的な関数  $\phi_n \in \mathcal{V}$  がとれて

$$E \left[ \int_S^T (g - \phi_n)^2 dt \right] \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

とできる.



[証明]  $\phi_n(t, \omega) = \sum_j g(t_j, \omega) \cdot \mathcal{X}_{t_j, t_{j+1}}(t)$  とおく. このとき,  $g \in \mathcal{V}$  ゆえ  $\phi_n$  は初等的である. さらに  $g(\cdot, \omega)$  が連続ゆえ, すべての  $\omega$  について

$$\int_S^T (g - \phi_n)^2 dt \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

が成り立つ. したがって,  $E \left[ \int_S^T (g - \phi_n)^2 dt \right] \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$  となる.  $\square$

**第 2 段階** 有界な  $h \in \mathcal{V}$  をとる. このとき, 有界な  $g_n \in \mathcal{V}$  で, すべての  $\omega$  と  $n$  に対し  $g_n(\cdot, \omega)$  は連続となり, かつ

$$E \left[ \int_S^T (h - g_n)^2 dt \right] \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

となるものが存在する.

[証明] すべての  $(t, \omega)$  について  $|h(t, \omega)| \leq M$  が成り立つ定数  $M$  を選ぶ.  $\mathbf{R}$  上の非負の連続関数  $\psi_n$  で

- (i).  $x \leq -\frac{1}{n}$  もしくは  $x \geq 0$  ならば  $\psi_n(x) = 0$ , かつ
- (ii).  $\int_{-\infty}^{\infty} \psi_n(x) dx = 1$

を満たすものを取り,

$$g_n(t, \omega) = \int_0^t \psi_n(s - t) h(s, \omega) ds$$

とおく. このとき, 任意の  $\omega$  に対し  $g_n(\cdot, \omega)$  は連続で,  $|g_n(t, \omega)| \leq M$  が成り立つ.  $h \in \mathcal{V}$  であるから, すべての  $t$  について  $g_n(t, \cdot)$  は  $\mathcal{V}_t$ -可測である. さらに,  $\{\psi_n\}$  は合成積における単位元に収束するから, 各  $\omega$  について

$$\int_S^T (g_n(s, \omega) - h(s, \omega))^2 ds \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

となる. 有界収束定理より,

$$E \left[ \int_S^T (h - g_n)^2 dt \right] \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

を得る.  $\square$

**第 3 段階**  $f \in \mathcal{V}$  とせよ. それぞれの  $h_n$  は有界で, さらに

$$E \left[ \int_S^T (f - h_n)^2 dt \right] \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

となる  $\{h_n\} \subset \mathcal{V}$  が存在する.

[証明]

$$h_n(t, \omega) = \begin{cases} -n, & f(t, \omega) < -n \text{ のとき,} \\ f(t, \omega), & -n \leq f(t, \omega) \leq n \text{ のとき,} \\ n, & f(t, \omega) \geq n \text{ のとき,} \end{cases}$$

とする。優収束定理を用いて望む収束を得る。□

以上で  $f \in \mathcal{V}$  の近似列の構成が完了した。

定義 4 (伊藤積分)  $f \in \mathcal{V}(S, T)$  とする。  $f$  の (時間  $S$  から  $T$  までの) 伊藤積分は

$$\int_S^T f(t, \omega) dB_t(\omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_S^T \phi_n(t, \omega) dB_t(\omega) \quad (L^2(P) - \text{極限}) \quad (\text{B.4})$$

で定義される。ここで、 $\{\phi_n\}$  は初等的な関数の列で

$$E \left[ \int_S^T |f(t, \omega) - \phi_n(t, \omega)|^2 dt \right] \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \quad (\text{B.5})$$

を満たすものである。

(B.5) を満たす  $\{\phi_n\}$  の存在は先の第 1~3 段階の考察で見た。さらに、(B.3) より、(B.4) の極限值は (B.5) を満たす  $\{\phi_n\}$  のとり方によらない。

## 付録 C

# 対数正規分布における確率変数の定数倍について

対数正規分布に従う確率変数  $X$  について,  $X$  を定数倍したものも, また対数正規分布に従うことを証明する.

[証明]  $X \sim \text{LN}(\mu, \sigma)$  のとき,  $X$  の確率密度関数は

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x} e^{-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (\text{C.1})$$

で表わすことができる. このとき, 確率変数  $X$  を定数倍した確率変数  $Y$ ,  $y = ax$  が対数正規分布に従うことを証明する.

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dy} &= \frac{1}{a} \\ f(y) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma \frac{y}{a}} e^{-\frac{(\ln \frac{y}{a} - \mu)^2}{2\sigma^2}} \frac{dx}{dy} \\ &= \frac{a}{\sqrt{2\pi}\sigma y} e^{-\frac{(\ln y - \ln a - \mu)^2}{2\sigma^2}} \frac{1}{a} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma y} e^{-\frac{(\ln y - (\mu + \ln a))^2}{2\sigma^2}} \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

したがって,

$$Y \sim \text{LN}(\mu + \ln a, \sigma)$$

となり確率変数  $X$  を定数倍した確率変数  $Y$  もまた, 対数正規分布に従う.  $\square$



## 謝辞

謝辞本論文を執筆するにあたり、多数の方々のお力添えが合ったことを著者はここに感謝し、謝辞を述べさせていただきたいと思います。

本論文は著者の指導教官である、東京大学大学院新領域創成科学研究科社会文化環境学専攻の高橋孝明教授の下で2年間にわたり研究を行ってきたものをまとめたものです。表現力の乏しい著者の考えを、他人が理解できるように表現することを指導していただきました。本論文でも、著者の拙い文章を数度にわたり御校閲の労をとっていただきました。心から感謝を申し上げます。

同専攻の河端瑞樹准教授には、地理情報システムの活用法などをご指導していただきました。また本論文の副査も快く担当していただきました。誠に感謝しております。

同専攻の丸山祐造准教授には、本論文の副査を快く担当していただきました。見落とししていた数学的な曖昧さを指摘していただきました。誠に感謝しております。

本論文は早稲田大学在学時に大学院への進学を勧めて下さった、早稲田大学商学学術院の毛利裕昭准教授のご指導により実現したものです。在学中、卒業後で公私にわたり面倒をみていただきました。先生のご指導には深く感謝いたしております。

同時期に同じ院生室で修士論文を執筆した東京大学大学院新領域創成科学研究科社会文化環境学専攻修士課程の井上尚久氏、楠井尚貴氏には計算機の使用法、図表の作成、LaTeX 原稿の作成についてご助言を頂きました。改めて、感謝の意を表したいと思います。

最後に、家族への感謝を記したいと思います。家族のたゆまない励まし、愛情、支援がなければ本論文は執筆されることさえありませんでした。深く感謝を申し上げます。

2012年1月30日

井上勝仁