

2011 年度 修士論文

積層防音材料の吸遮音特性の数値予測に関する研究

Study on the numerical prediction of  
absorption/insulation characteristics of layered  
materials

井上 尚久  
Naohisa Inoue

2012 年 1 月 30 日

東京大学大学院 新領域創成科学研究科  
社会文化環境学専攻  
Institute of Environmental Studies,  
Graduate School of Frontier Science, University of Tokyo

# 目次

<b>第 1 章</b>	<b>序論</b>	<b>4</b>
1.1	研究の背景 . . . . .	4
1.2	本研究の目的 . . . . .	5
1.3	多孔質材を表す物理量 . . . . .	6
1.4	論文の構成 . . . . .	7
<b>第 2 章</b>	<b>音場・振動場の支配方程式</b>	<b>9</b>
2.1	弾性体を記述する諸量の定義 . . . . .	9
2.1.1	変位-歪み関係 . . . . .	9
2.1.2	弾性体内の応力の定義 . . . . .	10
2.1.3	歪み-応力関係 . . . . .	11
2.2	弾性体の運動 . . . . .	12
2.2.1	流体中の波動方程式 . . . . .	12
2.2.2	固体中の波動方程式 . . . . .	13
2.3	多孔質弾性体の運動 . . . . .	15
2.3.1	応力-歪み関係 . . . . .	15
2.3.2	慣性力 . . . . .	15
2.3.3	多孔質弾性体中の波動方程式 . . . . .	15
2.3.4	gedanken experiments . . . . .	16
2.3.5	定常状態における支配方程式 . . . . .	19
2.4	膜の振動 . . . . .	22
<b>第 3 章</b>	<b>有限要素法による音響振動連成解析</b>	<b>23</b>
3.1	各物理場の数値解析理論 . . . . .	23
3.1.1	音場の定式化 . . . . .	23
3.1.2	膜振動場の定式化 . . . . .	27
3.1.3	弾性体場の定式化 . . . . .	29
3.1.4	多孔質弾性体場の定式化 . . . . .	32
3.2	各物理場の連成条件 . . . . .	37
3.2.1	音場と弾性体場の連成 . . . . .	37

3.2.2	音場と多孔質弾性体場の連成 . . . . .	38
3.2.3	弾性体場と多孔質弾性体場の連成 . . . . .	39
3.2.4	多孔質弾性体場同士の連成 . . . . .	39
3.2.5	音場・膜振動場・多孔質弾性体場の連成 . . . . .	40
3.3	要素形状と内挿関数 . . . . .	42
3.3.1	四面体要素 . . . . .	42
3.3.2	三角形要素 . . . . .	46
<b>第 4 章</b>	<b>単層多孔質材料の吸遮音特性解析</b>	<b>49</b>
4.1	はじめに . . . . .	49
4.1.1	音響管計測について . . . . .	49
4.1.2	伝達関数法 need to modify the equations . . . . .	51
4.2	音響管問題における準備的検討 . . . . .	53
4.2.1	側壁緩支持条件 . . . . .	53
4.2.2	管断面形状に関する検討 . . . . .	53
4.2.3	管径に関する検討 . . . . .	54
4.3	多孔質材料の吸音特性 . . . . .	57
4.3.1	後壁密着 . . . . .	57
4.3.2	背後空気層の影響 . . . . .	59
4.3.3	流れ抵抗による影響 . . . . .	60
4.3.4	針固定測定に関する検討 . . . . .	61
4.4	多孔質材料の遮音特性 . . . . .	62
4.4.1	多孔質材厚みの関係 . . . . .	62
4.4.2	流れ抵抗による影響 . . . . .	66
4.4.3	嵩密度による影響 . . . . .	67
<b>第 5 章</b>	<b>複層材料の吸遮音特性解析</b>	<b>68</b>
5.1	多孔質材・膜材の積層:吸音率の同定 . . . . .	69
5.1.1	後壁密着条件 . . . . .	69
5.1.2	背後空気層の影響 . . . . .	71
5.1.3	膜が接着されない場合 . . . . .	75
5.1.4	流れ抵抗による影響 . . . . .	77
5.2	多孔質材・膜材の積層:透過損失の同定 . . . . .	78
5.2.1	膜が接着されない場合 . . . . .	85
5.2.2	流れ抵抗による影響 . . . . .	86
5.2.3	嵩密度による影響 . . . . .	87
5.3	複数多孔質材・膜・厚板の積層 . . . . .	88
5.3.1	吸音材としての適用 . . . . .	88

5.3.2	遮音材料としての適用 . . . . .	95
<b>第 6 章</b>	<b>総括</b>	<b>101</b>
<b>付録 A</b>	<b>伝達マトリックス法</b>	<b>103</b>
A.1	各物理場の伝達マトリックス . . . . .	103
A.1.1	膜モデル . . . . .	103
A.1.2	弾性体モデル . . . . .	103
A.1.3	流体モデル . . . . .	104
A.1.4	多孔質弾性体モデル . . . . .	106
A.2	各物理場の境界マトリックス . . . . .	107
A.2.1	多孔質弾性体モデル同士の境界 . . . . .	107
A.2.2	弾性体モデルと多孔質弾性体モデルの境界 . . . . .	108
A.2.3	膜モデルと多孔質弾性体モデルの境界 . . . . .	109
A.2.4	流体モデルと多孔質弾性体モデルの境界 . . . . .	110
A.2.5	弾性体モデル流体モデルの境界 . . . . .	111
A.2.6	膜モデルと流体モデルの境界 . . . . .	112
A.2.7	入射の取り扱い . . . . .	112
A.3	各物理場の終端マトリックス . . . . .	113
A.3.1	後壁密着条件の場合 . . . . .	113
A.3.2	半無限厚み空気層の場合 . . . . .	114
A.4	全体伝達マトリックスの構築 . . . . .	114
A.4.1	剛壁終端条件 . . . . .	115
A.4.2	半無限空気層終端条件 . . . . .	115
A.5	吸音率・透過損失の算出 . . . . .	116
<b>参考文献</b>		<b>117</b>

# 第 1 章

## 序論

### 1.1 研究の背景

近年音響設計の範囲が広範囲化していることで、荷重負荷の軽減の要請や、構造的な設計変更が困難な場面における音響設計の機会が多くなっている。高層建築の上層部や、自動車内、航空機内などがその例として挙げられる。このような場面では軽量で吸遮音性能の高い材料が強く望まれることは言うまでもない。

そのような材料として、近年自動車産業の分野では積層防音材料と呼ばれる複層構造の材料が開発・実用化されている。

このような材料の設置時の効果や、基本的な音響特性の予測手法は縮尺模型実験、音響管計測をはじめとした実験的手法と、コンピュータを用い、仮想的に設定した空間での物理シミュレーションである数値解析手法に大別される。前者は設計変更やサンプル作成に時間的、経済的に大きなコストを伴うことから、パラメトリックに仕様を変更しながら改良を加えることが難しいため、適用はある程度構造が決定している場合に限られるという難点がある。また、境界条件などの不確定要因により、実大モデルや無限大モデルと等価でなくなり実験値が意味を持たなくなることも少なくない。

これは特に音響管計測において非常に問題となっている。音響管計測は小さいサンプルで計測が行え、材料の開発段階では非常に有効な実験・実測手法であるが、測定試料が弾性を持つ場合には、その側壁での支持条件により測定結果が大きく変化することが報告されている [12]。

次に後者の数値解析手法は計算機コストの問題から、適用は限定されるものの、以下の3つのメリットを主に挙げることができる。

1. 大掛かりな実験設備が不要,
2. 任意形状, 任意条件が扱える,
3. 設計変更への対応が容易,

材料開発, 部位性能予測に関する音響分野での数値解析は専ら波動音響的手法により行われる。波動音響的手法は有限差分法 (Finite Difference Method:FDM), 有限要素法 (Finite Element Method:FEM), 境界要素法 (Boundary Element Method:BEM) などが古典的手法として挙げられる。これらの3つの手法はいずれも微分方程式, あるいはそれと等

価な積分方程式を近似的に解く手法である。いずれの手法も適切なモデル化を行うことで高精度に音場を予測することができる手法である。

さらに近年では、単純な空気伝搬の音場の予測に留まらず、多孔質材料、弾性体など異質媒質の内部音場、振動場との連成を考慮した物理モデルを構築し、音響振動連成問題として与条件での物理場を予測する手法が構築されている。これらは音響透過、音響放射、材料内部伝搬や内部減衰などをより現実に応じた形で現象をモデル化することができるため、材料の吸遮音予測においては非常に有用な手法と言え、計算機能力の向上からようやく実用段階に入っていると言える。

これらは非常に有効な手段である一方、モデル化によっては現象を十分に表すことが出来ず、逆に非効率となってしまう恐れがある。特に多孔質材料のモデル化手法は多岐にわたり、多くの研究がなされ、状況によるモデルの選択が非常に重要となっている。そのモデル化の流れは多孔質材を形成する骨格の振動の有無により大きく二分される。

第一に多孔質材の骨格は振動しない剛骨格モデル、または等価流体モデルと呼ばれるものがある。多孔質材料の内部空気のみを減衰性の流体として取り扱うことで、定常問題においては通常空気と同じ形式の支配方程式で内部の音響伝搬を記述できることから、取り扱いが簡便になる。

第二に多孔質材の骨格が振動し、固体伝搬音、空気伝搬音とその相互作用を考慮する弾性骨格モデル、または Biot モデルと呼ばれるものがある。Biot はこの固体流体混合体の振動、波動の伝搬を記述し [7], Allard らはこれを音響分野に適用してきた。先に示した積層材料は、膜や板が音響加振され、多孔質材の骨格を振動させるものであることが容易に想像されるため、これらの弾性骨格モデルを用いた検討が必要となる。

しかし、弾性骨格モデルは多くの適用が理想化した条件の元での適用であり、有限性を考慮したものや、数値解析手法による解析例は少なく、一般的な多層構造に関する知見は未だに少ないと言える。また、理想化した状況を想定した予測が行われるため、積層防音材料の吸遮音メカニズムについては未解明な部分が多い。

以上のように音響振動連成問題としての数値解析手法は実用段階に進みつつあるが、現時点では多孔質弾性体を解析した例は少ないといえる。

また、音響管計測における支持条件による問題も不明な部分は非常に多い。

## 1.2 本研究の目的

上述した背景を踏まえ、本論文の目的を以下のように設定する。

- 音響管計測において単層・複層材料が支持条件によりその測定値にいかなる影響を及ぼすかを把握すること
- 数値解析を用いた可視化を通し、積層防音材料の吸遮音メカニズムを明らかにすること

但し、本論文では扱う入射条件はすべて垂直入射条件とする。これは特に吸遮音メカニズムの把握という点で、問題を簡略化し基礎的な検討を行うためである。

これらの検討により得られた知見から、実測における正確な性能評価や、吸遮音メカニズムの解明から積層防音材料の高性能化が期待される。

### 1.3 多孔質材を表す物理量

Biot theory だけでなく、内部流体のみを扱うモデルにおいても、多孔質材料を表現するパラメータが必要となり、本論文においても多くのパラメータが登場する。ここではそれらをまとめる。

#### 内部細孔のモデル

多孔質材料は古くから、細い円筒管の集合としてモデル化されてきた。Fig.1.1 に示すような多孔質材内部の細孔のモデルを考える。

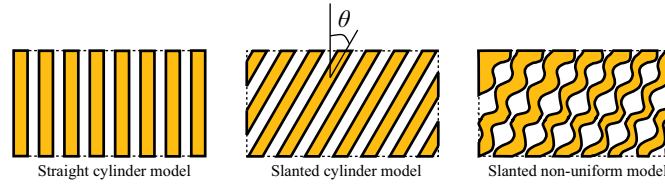


Fig. 1.1: Model of the porous material.

#### ポロシティ

ポロシティ  $\phi$  は多孔質材全体のみかけの体積に対する空気の体積の比である。これは多孔質材を構成する物質の密度  $\rho_s$  と嵩密度  $\rho_1$  との間に次のような関係がある。

$$\phi = 1 - \frac{\rho_1}{\rho_s} \quad (1.1)$$

#### トーチュオシティ

トーチュオシティは Fig.1.1 中央における円筒管の傾き  $\theta$  のモデルでは、次のように与えられる。

$$\phi = \frac{1}{\cos^2 \theta} \quad (1.2)$$

トーチュオシティは内部流体のみかけの密度の増加に関わっている [8]。

### 粘性特性長／熱的特性長

近年では Champoux-Allard のモデル [4] に代表されるように構造パラメータと呼ばれる粘性特性長，熱的特性長を導入したモデルが提案されてきた。これは Fig.1.1 右のように細孔を断面を円筒管のような一様な太さではなく，ある分布を持って太くなったり細くなったりしているとモデル化したものである。

Fig.1.2 に示すような細孔内を音が伝搬する際，細孔から細孔へ繋がる細い部分では粘性による減衰，細孔内では熱伝導による減衰が起きると考え，それらの影響をそれぞれ，粘性特性長  $\Lambda$ ，熱的特性長  $\Lambda'$  としてパラメータ化したものである。

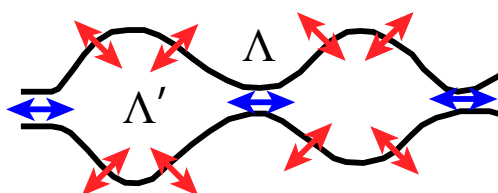


Fig. 1.2: Structure of the pore

### 流れ抵抗

ここまでの細孔の構造により，多孔質材内部を流れる空気には抵抗がかかる。この抵抗を流れ抵抗と呼び  $\sigma$  と表される。流れ抵抗は多孔質材を表す上で最も重要なパラメータであり，単純なモデルではこのパラメータのみから多孔質材内部の空気伝搬特性を算出する [2]。

Fig.1.1 において，右に位置するモデルほど正確に多孔質材の空気伝搬特性を表すが，パラメータが増えることが難点となる。本論文ではこれらの値は既知な入力パラメータとして扱う。

## 1.4 論文の構成

以上を研究の目的とした本論文の構成を以下に示す。

第二章では，弾性振動力学を概説し，本論文において核となる Biot theory における多孔質弾性体の支配方程式を導出する。

第三章では，第二章に示した有限要素法による数値解析の基礎理論について述べる。第一節では各物理場について，有限要素法の定式化を述べる。第二節では各物理場の連成条件について述べる，第三節では要素マトリックスの算出法について具体的に述べる。

第四章では，単層多孔質材料の垂直入射条件における吸遮音特性について考察する。第一節では音響管内での吸音率，透過損失の測定法について解説し，第二節では有限要素法



に基づき音響管形状，寸法と支持条件に関し準備的な検討を行う。第三節では多孔質材の吸音特性について，第四節では遮音特性について，寸法，物性値などの条件を変え，従来までに用いられてきた剛骨格モデルと本論文で導入する弾性骨格モデルとの差異を把握するとともに，音響管計測における支持条件の影響について考察を加える。

第五章では，積層防音材料の垂直入射条件における吸遮音特性について考察する。第一節では多孔質材に膜を接着した場合の吸音メカニズムの考察を行うとともに，これらを音響管内で測定する際の側壁支持条件についても検討を行う。第二節では引き続き膜付き多孔質材の遮音メカニズムについて考察を行うとともに音響管内での支持条件による基本的な影響について検討を行う。第三節では膜付き多孔質材を吸音材，遮音材としての適用に分類し，さらに他の材料を加えた場合の特性について検討を行う。

第六章は得られた知見を整理し，今後の展望を述べる。

## 第 2 章

# 音場・振動場の支配方程式

本論文では、流体、固体、さらにその両方を含んだ固体気体二相系である多孔質弾性体を伝搬する波動現象を扱う。本章ではそれらの波動の支配方程式の導出を詳述する。またこれらの式は以降の章で用いる有限要素法の出発となり、界面における適切な連続条件によりそれぞれの音場・振動場の連成系を定式化することが出来る。本章と次章で用いる数式表現はベクトル表記法、縮約記法を用いる。

### 2.1 弾性体を記述する諸量の定義

はじめに以降の章節での数式の展開を明確にするため、弾性体の運動を記述するための物理量である、変位、歪み、応力を定義する。

#### 2.1.1 変位-歪み関係

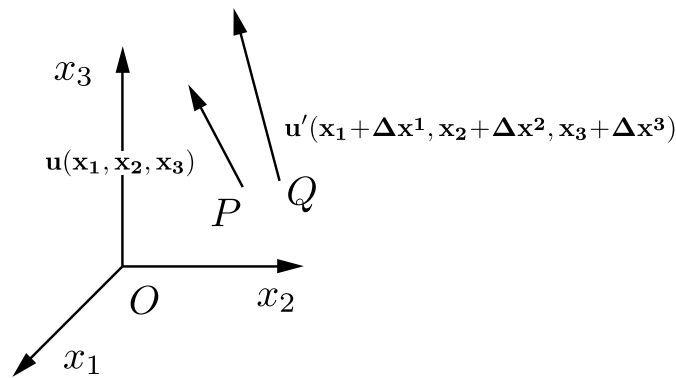


Fig. 2.1: The displacement of P and Q.

点  $P$  における変位ベクトル  $\mathbf{u}$  の成分は  $(u_1, u_2, u_3)$  と書くことができ、点  $P$  の近傍点  $Q$  における変位ベクトル  $\mathbf{u}'$  の各成分は多変数のテイラー展開の一次項を取り下式のように線形近似することが出来る。

$$u'_i = u_i + u_{i,j} \Delta x^j \quad (2.1)$$

但し,  $u_{i,j}$  は以下のように定義する。

$$u_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \quad (2.2)$$

また, 同じ項で下付き添字と上付き添字の乗算はその添字がとり得るすべての数字に関する和をとることとする。従って, 三次元問題における式 (2.1) 第二項は次式のように書ける。

$$u_{i,j} \Delta x^j = u_{i,1} \Delta x^1 + u_{i,2} \Delta x^2 + u_{i,3} \Delta x^3 \quad (2.3)$$

(i,j,k) は (1,2,3) の値をとり、この順で循環するとすると、点 P における回転ベクトルは下式に定義される。

$$\Omega_i = \frac{1}{2}(u_{k,j} - u_{j,k}) \quad (2.4)$$

また点 P での歪みテンソルは以下のように定義される。(i,j) はそれぞれ 1,2,3 の値を独立にとる。

$$e_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (2.5)$$

更に  $e_{ij}, \Omega_k$  の加減算より  $u_{i,j}$  が得られることを利用すると式 (2.1) は

$$u'_i = u_i + (\Omega_j \Delta x^k - \Omega_k \Delta x^j) + (e_{il} \Delta x^l) \quad (2.6)$$

と書き換えることができる。この時、(i,j,k) は (1,2,3) の値をとり、この順で循環するとし、1 は 1,2,3 の値をとる。

ここで、式 (2.6) の最初の括弧内は P 回りの回転変位を、次の括弧内は変形変位を意味する。

また膨張変形  $\theta$  にたいして、下式を定義する。

$$\theta = \nabla \cdot \mathbf{u} = u_{1,1} + u_{2,2} + u_{3,3} = e_{11} + e_{22} + e_{33} \quad (2.7)$$

### 2.1.2 弾性体内の応力の定義

ある体積 V の境界面 S 内の点 P で、点 P を含む微小面積  $\Delta S$  に力  $\Delta \mathbf{F}$  が働いているとすると、その点 P における応力ベクトルは下式に定義される。

$$\mathbf{T}(P) = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{F}}{\Delta S} \quad (2.8)$$

応力ベクトル  $\mathbf{T}$  の各成分 ( $T_1, T_2, T_3$ ) は次式で表される。

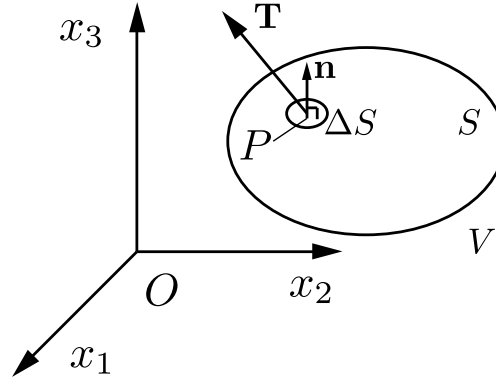


Fig. 2.2: The tensor of P.

$$T_i = \sigma_{ji} n^j \quad (2.9)$$

ここで、 $n^j$  は点 P における法ベクトル  $\mathbf{n}$  に対する方向余弦、 $\sigma_{ji}$  は点 P での応力テンソルの各成分である。

### 2.1.3 歪み-応力関係

等方性の弾性体内部で歪みと応力はフックの法則により以下のように関係づけられる。

$$\sigma_{ij} = \lambda \theta \delta_{ij} + 2\mu e_{ij} \quad (2.10)$$

$\lambda, \mu$  はラメの定数であり、弾性体の物性値を表す一般的なパラメーターであるヤング率  $E$ 、ポアソン比  $\nu$ 、剪断弾性率  $G$  とは以下のような関係にある。

$$\lambda = \frac{2G}{(1-2\nu)} = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (2.11)$$

$$\mu = G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (2.12)$$

式 (2.10) は二階のテンソルの数学的な表現であるが、対称であることから独立な変数は 6 つに限定される。従って、工学の分野や、次章で示す有限要素法では以下のように表すことが多い。

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{12} & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{11} \\ e_{22} \\ e_{33} \\ 2e_{13} \\ 2e_{23} \\ 2e_{12} \end{pmatrix} \quad (2.13)$$

ここで,  $C_{11} = \lambda + 2\mu$ ,  $C_{12} = \lambda$ ,  $C_{44} = \mu$  である。

式 (2.13) 左辺を応力ベクトル, 右辺マトリックスを弾性マトリックス, 右辺ベクトルを歪みベクトルと呼ぶこととする。

## 2.2 弾性体の運動

Fig(2.2) において、体積  $V$  の境界面  $S$  に働く全表面力は次式で書くことが出来る。

$$\mathbf{F}_v = \iint_S \mathbf{T} dS \quad (2.14)$$

これを  $x_i$  方向への成分表示形式にすると次のように書ける。

$$F_{v_i} = \iint_S (\sigma_{ji} n^j) dS \quad (2.15)$$

発散定理 (divergence theorem) より、式 (2.15) の面積分は以下の体積積分へと変換することが出来る。

$$F_{v_i} = \iiint_V (\nabla_j \cdot \sigma_{ji}) dV = \iiint_V (\sigma_{ji,j}) dV \quad (2.16)$$

ここで、微小体積  $dV$  に体積力  $X_i$  と慣性力  $\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}$  が働くとする。対象体積全体に関して以下の恒等式が成立する。

$$\iiint_V (\sigma_{ji,j} + X_i - \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}) dV = 0 \quad (2.17)$$

従って微小体積において、 $x_i$  方向に以下の方程式が成立する。

$$\sigma_{ji,j} + X_i - \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = 0 \quad (2.18)$$

式 (2.10) より、応力に関する式 (2.18) を変位に関する形に記述とすると、

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = (\lambda + \mu) \frac{\partial \nabla \cdot \mathbf{u}}{\partial x_i} + \mu \nabla^2 u_i + X_i \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.19)$$

さらに変位ベクトルの形で以下のように記述できる。

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = (\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} + \mu \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{X} \quad (2.20)$$

### 2.2.1 流体中の波動方程式

式 (2.20) をもとに流体中の波動方程式を導くことを考える。流体は剪断に対する保存力の働かない固体であり、剪断応力が常に 0 と考えてよい ( $\mu = 0$ )。多くの参考書では定式化の初期段階から剪断応力を省いくことが多い。(j-参考文献を出す)

$$\sigma_{ij} = \begin{cases} \lambda\theta & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases} \quad (2.21)$$

この時、直応力  $\sigma_{ii}$  は音圧  $-p$  と等しい。従って、lame の第一係数は体積弾性率  $K$  と等しい。

$$K = \lambda \quad (2.22)$$

ここで、変位ポテンシャルなる量を用いて以下のように変位を表す。

$$\mathbf{u} = \nabla\varphi \quad (2.23)$$

式 (2.22)(2.23),  $\mu = 0, \mathbf{X} = 0$  を用いると式 (2.20) は以下のように書ける。

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \nabla\varphi}{\partial t^2} = K \nabla \nabla \cdot \nabla\varphi \quad (2.24)$$

さらに以下のように書ける。

$$\nabla \left[ K \nabla \cdot \nabla\varphi - \rho_0 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \right] = 0 \quad (2.25)$$

$$K \nabla^2 \varphi - \rho_0 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0 \quad (2.26)$$

また音圧  $p$  と変位ポテンシャル  $\varphi$ , 角周波数  $\omega$ , 媒質密度  $\rho$  は以下の関係にある。

$$p = \rho_0 \omega^2 \varphi \quad (2.27)$$

従って音圧  $p$  に関して波動方程式は同様に以下のように書ける。

$$\nabla^2 p - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0 \quad (2.28)$$

ここで  $c_0 = \sqrt{K/\rho_0}$  であり、流体中の音速である。

### 2.2.2 固体中の波動方程式

固体の波動方程式は式 (2.20) そのものであるが、ここでは変位スカラーポテンシャル  $\varphi$ , 変位ベクトルポテンシャル  $\Psi(\psi_1, \psi_2, \psi_3)$  を用いて、固体内では縦波と横波の二種類の波が伝搬することを示す。

固体内部の変位は以下のように表せる。

$$\mathbf{u} = \nabla\varphi + \nabla \times \Psi \quad (2.29)$$

式 (2.29),  $\mathbf{X} = 0$  より式 (2.20) は

$$\mu \nabla^2 [\nabla \varphi + \nabla \times \Psi] + (\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot [\nabla \varphi + \nabla \times \Psi] = \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} [\nabla \varphi + \nabla \times \Psi] \quad (2.30)$$

これを整理すると次のように書ける。

$$\nabla \left[ (\lambda + 2\mu) \nabla^2 \varphi - \rho \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \right] + \nabla \times \left[ \mu \nabla^2 \Psi - \rho \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} \right] = 0 \quad (2.31)$$

これらが恒等的に成立することから以下の二つの微分方程式が得られる。

$$\nabla^2 \varphi = \frac{\rho}{(\lambda + 2\mu)} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \quad (2.32)$$

$$\nabla^2 \Psi = \frac{\rho}{\mu} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} \quad (2.33)$$

式 (2.32) は固体中を伝搬する疎密波を表し，式 (2.33) は剪断波を表している。従って固体中ではこれらの二種類の振動が伝搬する。

## 2.3 多孔質弾性体の運動

繊維集合体や、発泡材料に代表される多孔質材料内部の空気伝搬音だけでなく、材料の骨格中の固体伝搬音を考慮したモデルが必要となる。このようなモデルは **Biot theory** と呼ばれる理論により定式化される。Biot theory においては、固体の変位  $\mathbf{u}^s$ 、流体の変位  $\mathbf{u}^f$  により多孔質弾性体の運動が記述される。ここでは、応力-歪み関係式、慣性力を新たに定義し、式 (2.20) を修正する形で多孔質弾性体中の波動方程式を導く。

### 2.3.1 応力-歪み関係

Biot theory において、固体、流体の応力-歪み関係式はそれぞれ以下の式で表される。

$$\sigma_{ij}^s = [(P - 2N)\theta^s + Q\theta^f]\delta_{ij} + 2Ne_{ij}^s \quad (2.34)$$

$$\sigma_{ij}^f = [Q\theta^s + R\theta^f]\delta_{ij} \quad (2.35)$$

ここで、 $P, Q, R, N$  は Biot の弾性係数であり、"gedanken experiment" と呼ばれる理想的な条件の下での考察から導かれる。

### 2.3.2 慣性力

Biot theory において運動エネルギーは以下の式で与えられる。

$$E_c = \frac{1}{2}\rho_{11}|\dot{\mathbf{u}}^s|^2 + \rho_{12}\dot{\mathbf{u}}^s \cdot \dot{\mathbf{u}}^f + \frac{1}{2}\rho_{22}|\dot{\mathbf{u}}^f|^2 \quad (2.36)$$

従って、固体、流体の各相に働く慣性力は次のように表すことができる。

$$q_i^s = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial E_c}{\partial \dot{u}_i^s} = \rho_{11}\ddot{u}_i^s + \rho_{12}\ddot{u}_i^f \quad (2.37)$$

$$q_i^f = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial E_c}{\partial \dot{u}_i^f} = \rho_{12}\ddot{u}_i^s + \rho_{22}\ddot{u}_i^f \quad (2.38)$$

ここで  $\rho_{11}, \rho_{12}, \rho_{22}$  は Biot theory の慣性係数であり、"gedanken experiment" と呼ばれる理想的な条件の下での考察から、多孔質材の嵩密度、構造パラメータ、空気の密度などにより決定される。

### 2.3.3 多孔質弾性体中の波動方程式

ここで、固体中の波動方程式を  $\lambda = K_c - 2\mu$  とし体積力を省略し再掲する。

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = (K_c - \mu)\nabla\nabla \cdot \mathbf{u} + \mu\nabla^2 \mathbf{u} \quad (2.39)$$



まず、固体の応力-歪み関係式から、流体との相互作用を考慮した項が右辺に追加される。

$$(K_c - \mu)\nabla\nabla \cdot \mathbf{u} + \mu\nabla^2 \mathbf{u} \rightarrow (P - N)\nabla\nabla \cdot \mathbf{u}^s + Q\nabla\nabla \cdot \mathbf{u}^f + N\nabla^2 \mathbf{u}^s \quad (2.40)$$

また慣性力に関する左辺は式 (2.32) となるから、最終的に多孔質弾性体固体相の波動方程式は下式で表される。

$$\rho_{11} \frac{\partial^2 \mathbf{u}^s}{\partial t^2} + \rho_{12} \frac{\partial^2 \mathbf{u}^f}{\partial t^2} = (P - N)\nabla\nabla \cdot \mathbf{u}^s + Q\nabla\nabla \cdot \mathbf{u}^f + N\nabla^2 \mathbf{u}^s \quad (2.41)$$

同様に流体中の波動方程式を  $\lambda = K$  とし再掲する。

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = K\nabla\nabla \cdot \mathbf{u} \quad (2.42)$$

流体の応力-歪み関係式から、固体との相互作用を考慮した項が右辺に追加される。

$$K\nabla\nabla \cdot \mathbf{u} \rightarrow R\nabla\nabla \cdot \mathbf{u}^f + Q\nabla\nabla \cdot \mathbf{u}^s \quad (2.43)$$

また慣性力に関する左辺は式 (2.33) となるから、最終的に多孔質弾性体流体相の波動方程式は下式で表される。

$$\rho_{12} \frac{\partial^2 \mathbf{u}^s}{\partial t^2} + \rho_{22} \frac{\partial^2 \mathbf{u}^f}{\partial t^2} = R\nabla\nabla \cdot \mathbf{u}^f + Q\nabla\nabla \cdot \mathbf{u}^s \quad (2.44)$$

以上より、Biot theory における多孔質弾性体中の波動方程式は式 (2.41),(2.44) の連立方程式として表される。これらを同時に解くことで、固体と流体の相互作用を考慮した、波動の伝搬を扱うことが出来る。

$$\begin{cases} \rho_{11} \frac{\partial^2 \mathbf{u}^s}{\partial t^2} + \rho_{12} \frac{\partial^2 \mathbf{u}^f}{\partial t^2} = (P - N)\nabla\nabla \cdot \mathbf{u}^s + Q\nabla\nabla \cdot \mathbf{u}^f + N\nabla^2 \mathbf{u}^s \\ \rho_{12} \frac{\partial^2 \mathbf{u}^s}{\partial t^2} + \rho_{22} \frac{\partial^2 \mathbf{u}^f}{\partial t^2} = R\nabla\nabla \cdot \mathbf{u}^f + Q\nabla\nabla \cdot \mathbf{u}^s \end{cases} \quad (2.45)$$

### 2.3.4 gedanken experiments

”gedanken experiment” について詳述し、Biot theory における剛性係数、慣性に関する係数が多孔質材料の物性値から表されることを示す。

#### First experiment

多孔質弾性体は純粋な剪断変形のみすると仮定する。従って  $\theta^s = \theta^f = 0$  である。この時式 (2.34)(2.35) から各相の応力は下式で表される。

$$\sigma_{ij}^s = 2Ne_{ij}^s \quad (2.46)$$

$$\sigma_{ij}^f = 0 \quad (2.47)$$

ここで、空気には剪断に対し保存力が働かないことから、 $N$  は材料 (骨材) の剪断弾性率であることがわかる。

### Second experiment

Fig(2.3) に示すように多孔質弾性体を柔軟な膜で覆い、水中に設置する。この時、多孔質弾性体内部は外部空気と連続になるように通気口を設けている。

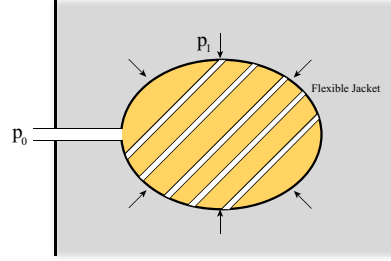


Fig. 2.3: Jacketed porous material. Frame is subjected to hydrostatic pressure  $p_1$ . Pressure of air in the jacket remains  $p_0$

この時、固体相の圧縮を  $\theta_1^s$  とすると、多孔質弾性体骨格の体積弾性率は次式で表される。

$$K_b = -\frac{p_1}{\theta_1^s} \quad (2.48)$$

またこの時、多孔質弾性体は純粋に圧縮を受ける。流体相の圧縮  $\theta^f$  は固体相の圧縮によりポロシティ  $\phi$  が変化することで発生する体積の変化であり、多孔質弾性体内部の圧力は  $p_0$  で保たれているため、流体相に応力は生じない。

$$-p_1 = (P - \frac{4}{3}N)\theta_1^s + Q\theta_1^f \quad (2.49)$$

$$0 = Q\theta_1^s + R\theta_1^f \quad (2.50)$$

式 (2.48)(2.50) より

$$P - \frac{4}{3}N - \frac{Q^2}{R} = K_b \quad (2.51)$$

### Third experiment

多孔質弾性体周辺の圧力が上昇する場合を考える。

この時、固体相、流体相のそれぞれが圧縮  $\theta_2^s, \theta_2^f$  を受ける。骨格を形成する物質の体積弾性率  $K_s$ 、内部流体の体積弾性率  $K_f$  はそれぞれ下式で表される。

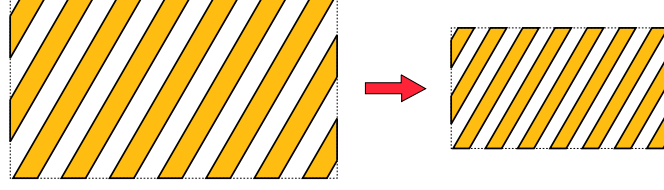


Fig. 2.4: Non-jacketed porous material. Both frame and air inside material are subjected to pressure fluctuation,  $p_f$ .

$$K_s = -\frac{p_f}{\theta_2^s} \quad (2.52)$$

$$K_f = -\frac{p_f}{\theta_2^f} \quad (2.53)$$

また各相で生じる応力は次式となる。

$$-p_f(1 - \phi) = (P - \frac{4}{3}N)\theta_2^s + Q\theta_2^f \quad (2.54)$$

$$-\phi p_f = Q\theta_2^s + R\theta_2^f \quad (2.55)$$

式 (2.46)(2.47)(2.48)(2.49) より

$$(P - \frac{4}{3}N)/K_s + Q/K_f = 1 - \phi \quad (2.56)$$

$$Q/K_s + R/K_f = \phi \quad (2.57)$$

式 (2.51),(2.50),(2.57) より  $P, Q, R$  は次式であらわされる。

$$P = \frac{(1 - \phi)[1 - \phi - \frac{K_b}{K_s}]K_s + \phi \frac{K_s}{K_f} K_b}{1 - \phi - K_b/K_s + \phi K_s/K_f} + \frac{4}{3}N \quad (2.58)$$

$$Q = \frac{[1 - \phi - K_b/K_s]\phi K_s}{1 - \phi - K_b/K_s + \phi K_s/K_f} \quad (2.59)$$

$$R = \frac{\phi^2 K_s}{1 - \phi - K_b/K_s + \phi K_s/K_f} \quad (2.60)$$

また,  $K_s \gg K_b, K_s \gg K_f$  であると考えたと  $P, Q, R$  は次式に近似される。

$$P = \frac{4}{3}N + K_b + \frac{(1 - \phi)^2}{\phi} K_f \quad (2.61)$$

$$Q = (1 - \phi)K_f \quad (2.62)$$

$$R = \phi K_f \quad (2.63)$$

## Fourth experiment

多孔質弾性体の骨格と内部空気が同じ速度で振動する場合を考える。すなわち  $\dot{u}^s = \dot{u}^f$  であるとする。この時、各相の相互作用はなく、多孔質弾性体は一体として振動する。従って、運動エネルギーは骨格と内部空気の質量を合わせた次式であらわされる。

$$E_c = \frac{1}{2}(\rho_1 + \phi\rho_0)|\dot{\mathbf{u}}^s|^2 \quad (2.64)$$

運動エネルギーは式 (2.36) でも表されることから、次式が成立する。

$$\rho_{11} + 2\rho_{12} + \rho_{22} = \rho_1 + \phi\rho_0 \quad (2.65)$$

一方、流体相に働く慣性力は次式で表される。

$$q_i^f = \phi\rho_0 \frac{\partial^2 u_i^f}{\partial t^2} \quad (2.66)$$

同様に慣性力は式 (2.38) でも表されることから、次式が成立する。

$$\phi\rho_0 = \rho_{22} + \rho_{12} \quad (2.67)$$

従って、次式が成立する。

$$\rho_1 = \rho_{11} + \rho_{12} \quad (2.68)$$

ここで、骨格が剛である場合を考える。この時式 (2.38) において、固体振動変位に関する項はなくなる。また、多孔質材料内部の非粘性流体では密度はみかけ上  $\rho \rightarrow \rho\alpha_\infty$  に増加していると考えることが出来る [8]。従って、 $\rho_{22}$  について、内部流体が空気の場合次式が成り立つ。

$$\rho_{22} = \alpha_\infty\phi\rho_0 \quad (2.69)$$

以上の関係から、 $\rho_{12}$  は次のように表される。

$$\rho_{12} = -\phi\rho_0(\alpha_\infty - 1) \quad (2.70)$$

## 2.3.5 定常状態における支配方程式

## 流体相の減衰の考慮

ここまでは内部流体は非粘性流体としてあつかってきたが、定常状態において粘性の効果はトーチュオシティ  $\alpha_\infty$  を次式に置き換えることで考慮することができる。

$$\alpha(\omega) = \left( \alpha_\infty + \frac{\phi\sigma}{j\omega\rho_0} G(\omega) \right) \quad (2.71)$$

ここで、式 (2.71) 中の  $G(\omega)$ 、多孔質材内部流体の実効密度  $\rho_{\text{eff}}$  と複素体積弾性率  $K_f$  は以下の Champoux-Allard のモデル式 [4] を用いて評価する。

$$G(\omega) = \left[ 1 + \left( j\omega \frac{4\alpha_\infty^2 \eta_0 \rho_0}{\phi^2 \Lambda^2 \sigma^2} \right) \right]^{\frac{1}{2}} \quad (2.72)$$

$$G'(\omega) = \left[ 1 + j\omega \frac{p_r \rho_0}{\eta_0} \left( \frac{\Lambda'}{4} \right)^2 \right] \quad (2.73)$$

$$\rho_{\text{eff}} = \rho_0 \alpha(\omega) \quad (2.74)$$

$$K_f = \gamma P_0 / \left[ \gamma - \frac{\gamma - 1}{1 + \frac{8\eta_0}{j\omega p_r \rho_0 \Lambda'^2} G'(\omega)} \right] \quad (2.75)$$

ここで  $\eta_0, p_r$  はそれぞれ空気の粘性係数、プラントル数である。

### 支配方程式の記述

これを用いると、 $\rho_{11}, \rho_{12}, \rho_{22}$  を次式の  $\tilde{\rho}_{11}, \tilde{\rho}_{12}, \tilde{\rho}_{22}$  に置き換える。

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}_{12} &= -\phi \rho_0 (\alpha(\omega) - 1) \\ \tilde{\rho}_{11} &= \rho_1 - \tilde{\rho}_{12} \\ \tilde{\rho}_{22} &= \phi \rho_0 - \tilde{\rho}_{12} \end{aligned}$$

これらを用い、時間因子を  $e^{j\omega t}$  とすると、式 (2.45) は次式で書ける。

$$\begin{cases} -\omega^2 (\tilde{\rho}_{11} \mathbf{u}^s + \tilde{\rho}_{12} \mathbf{u}^f) = (P - N) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u}^s + Q \nabla \nabla \cdot \mathbf{u}^f + N \nabla^2 \mathbf{u}^s \\ -\omega^2 (\tilde{\rho}_{12} \mathbf{u}^s + \tilde{\rho}_{22} \mathbf{u}^f) = R \nabla \nabla \cdot \mathbf{u}^f + Q \nabla \nabla \cdot \mathbf{u}^s \end{cases} \quad (2.76)$$

### 二種類の疎密波に関して

流体中の波動方程式を記述した場合と同様に固体変位  $\mathbf{u}^s$ 、流体変位  $\mathbf{u}^f$  を次式で表す。

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^s &= \nabla \varphi^s \\ \mathbf{u}^f &= \nabla \varphi^f \end{aligned}$$

これを式 (2.76) へ代入すると次式のようにスカラー量で表すことができる。

$$\begin{cases} -\omega^2(\tilde{\rho}_{11}\varphi^s + \tilde{\rho}_{12}\varphi^f) = P\nabla^2\varphi^s + Q\nabla^2\varphi^f \\ -\omega^2(\tilde{\rho}_{12}\varphi^s + \tilde{\rho}_{22}\varphi^f) = R\nabla^2\varphi^f + Q\nabla^2\varphi^s \end{cases} \quad (2.77)$$

これらをマトリックス形式で書くと次のように書ける。

$$-\omega^2[M]\{\varphi\} = [K]\nabla^2\{\varphi\} \quad (2.78)$$

ここでベクトル  $\varphi$ , マトリックス  $[M], [K]$  を以下のように定義する

$$\{\varphi\} = \{\varphi^s, \varphi^f\}^T \quad (2.79)$$

$$[M] = \begin{bmatrix} \tilde{\rho}_{11} & \tilde{\rho}_{12} \\ \tilde{\rho}_{12} & \tilde{\rho}_{22} \end{bmatrix} \quad (2.80)$$

$$[K] = \begin{bmatrix} P & Q \\ Q & R \end{bmatrix} \quad (2.81)$$

ここで

$$-\omega^2[K]^{-1}[M]\{\varphi\} = \nabla^2\{\varphi\} \quad (2.82)$$

と書き, さらに (2.82) の左辺の行列の固有値  $\delta_1^2, \delta_2^2$  と固有ベクトル  $\{\varphi_1\}, \{\varphi_2\}$  を用いると, 次のようにあらわすことが出来る。

$$\begin{aligned} -\delta_1^2\{\varphi_1\} &= \nabla^2\{\varphi_1\} \\ -\delta_2^2\{\varphi_2\} &= \nabla^2\{\varphi_2\} \end{aligned}$$

ただし, 固有値は波数の2乗の値に対応している。

これらは固体相, 流体相に対し, それぞれ二つの波数を持つ波が伝搬することを意味している。固有値の小さいものを速い波, 大きいものを遅い波と呼ぶ。

例として, 一次元伝搬する Biot theory における一般解は次のように書くことができる。

$$\begin{aligned} u^s(x) &= A^1 e^{-j\delta_1 x} + B^1 e^{j\delta_1 x} + A^2 e^{-j\delta_2 x} + B^2 e^{j\delta_2 x} \\ u^f(x) &= \mu_1 (A^1 e^{-j\delta_1 x} + B^1 e^{j\delta_1 x}) + \mu_2 (A^2 e^{-j\delta_2 x} + B^2 e^{j\delta_2 x}) \end{aligned}$$

ここで,  $\mu_1, \mu_2$  は速度比と呼ばれ,  $\{\varphi_1\}, \{\varphi_2\}$  を (2.76) へ代入することで得られる。以下にその結果のみ示す。

$$\mu_i = \frac{\varphi_i^f}{\varphi_i^s} = \frac{P\delta_i^2 - \omega^2\tilde{\rho}_{12}}{\omega^2\tilde{\rho}_{12} - Q\delta_i^2} = \frac{Q\delta_i^2 - \omega^2\tilde{\rho}_{12}}{\omega^2\tilde{\rho}_{22} - R\delta_i^2} \quad i = 1, 2 \quad (2.83)$$

## 2.4 膜の振動

膜は非常にしなやかで、曲げに対する抵抗が無いものとし、張力のみが膜の振動の復元力として働く。

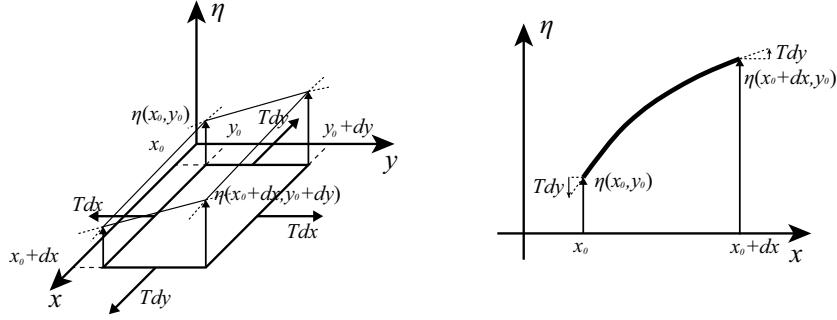


Fig. 2.5: Formulation of the membrane vibration.

Fig(2.5) のように振動する膜と、 $x\eta$  断面を想定し、幅  $dy$  当りで考えると

$$Tdy \left[ \frac{\partial \eta(x+dx, y)}{\partial x} - \frac{\partial \eta(x, y)}{\partial x} \right] = Tdy \frac{\partial^2 \eta(x, y)}{\partial x^2} dx \quad (2.84)$$

が復元力として働き、同様に  $y\eta$  断面についても下式で表される復元力が働く。

$$Tdx \left[ \frac{\partial \eta(x, y+dy)}{\partial y} - \frac{\partial \eta(x, y)}{\partial y} \right] = Tdx \frac{\partial^2 \eta(x, y)}{\partial y^2} dy \quad (2.85)$$

これらの力の和が膜の微小要素  $dx dy$  に働く慣性力と等しくなる。

$$Tdy \frac{\partial^2 \eta(x, y)}{\partial x^2} dx + Tdx \frac{\partial^2 \eta(x, y)}{\partial y^2} dy = m_a dx dy \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} \quad (2.86)$$

従って、膜面外変位  $\eta$  に対して下式の振動方程式が得られる。

$$\nabla_m^2 \eta = m_a \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} \quad (2.87)$$

$\nabla_m^2$  は膜面内のラプラである。

## 第 3 章

# 有限要素法による音響振動連成解析

本論文では三次元の有限要素法 (Finite Element Method : FEM) と呼ばれる数値解析手法を用いて、材料の音響振動連成解析を行う。FEM は第 2 章において示した各物理場の支配方程式を弱形式で表し、さらに離散化することで考える場の解を連立一次方程式を解く問題へと帰着させる数値解析手法である。

### 3.1 各物理場の数値解析理論

#### 3.1.1 音場の定式化

定常状態において流体の波動方程式 (2.28) は以下のように書ける。

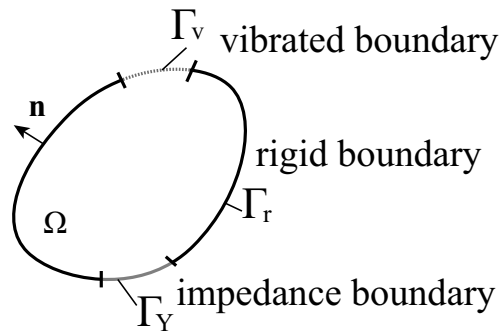


Fig. 3.1: Analysis model for acoustic field.

$$\nabla^2 p + k^2 p = 0 \quad (3.1)$$

式 (3.1) に重み関数  $w$  を掛け、領域  $\Omega$  内で積分すると次のように書ける。

$$\iiint_{\Omega} w(\nabla^2 p + k^2 p) dV = 0 \quad (3.2)$$

式 (3.2) の左辺積分内の第 1 項は Green の定理より次式のように表される。



$$\iiint_{\Omega} w \nabla^2 p dV = - \iiint_{\Omega} \nabla w \cdot \nabla p dV + \iint_{\Gamma} w \frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}} dS \quad (3.3)$$

また図に示すような音場内で、音圧の境界での法線方向微分は次のような関係式が成り立つ。

$$\frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}} = \begin{cases} \rho_0 \omega^2 r_n & (\text{on } \Gamma_v) \\ -jk\beta_n p & (\text{on } \Gamma_Y) \\ 0 & (\text{on } \Gamma_r) \end{cases} \quad (3.4)$$

ここで、 $r_n$  は内向き法線方向粒子変位、 $\beta_n$  は壁面の比音響アドミッタンス比である。これらの関係より式 (3.3) は次のように変形される。

$$\iiint_{\Omega} \text{grad } w \cdot \text{grad } p dV - \frac{\omega^2}{c_0^2} \iiint_{\Omega} w p dV + jk \iint_{\Gamma_Y} \beta_n w p dS - \rho_0 \omega^2 \iint_{\Gamma_v} w r_n dS = 0 \quad (3.5)$$

式 (3.5) に有限要素法を適用し、数値的に解くことができる形へ変形することを考える。

領域を  $N_{\text{elm}}$  個の要素に分割する。この時、各要素内で式 (3.5) が成立する。 $n$  番目の要素内の任意点で音圧  $p$  は要素節点で代表される値  $p_n^i$  と内挿関数  $N_i^a$  を用いて次式で表されるものとする。これを試験関数と呼ぶ。

$$p = N_i^a p_e^i \quad (3.6)$$

ここで  $\{\mathbf{N}^a\}, \{\mathbf{P}_e\}$  なるベクトルを次式のように定義する。

$$\{\mathbf{N}^a\} = \{N_1^a, N_2^a, \dots, N_I^a\} \quad (3.7)$$

$$\{\mathbf{P}_e\} = \{p_n^1, p_n^2, \dots, p_n^I\}^T \quad (3.8)$$

これらを用いると式 (3.6) は次式のようにベクトルの積として表すことが出来る。

$$p = \{\mathbf{N}^a\} \{\mathbf{P}_e\} \quad (3.9)$$

さらに重み関数  $w$  を試験関数と同一にとる Galerkin 法を採用し次式で表す。

$$\begin{aligned} w &= N_i p_e^i \\ &= \{\mathbf{N}^a\} \{\mathbf{P}_e\} \end{aligned} \quad (3.10)$$

これらの式を用い、各要素内で式 (3.5) をマトリックス形式に分解し、最終的に全体マトリックスを構築する仮定を示す。

まず式 (3.5) の左辺第一項目は

$$\begin{aligned}
 \iiint_{\Omega_e} \nabla w \cdot \nabla p dV &= \iiint_{\Omega_e} \nabla N_i p_n^i \cdot \nabla N_j p_n^j dV \\
 &= \iiint_{\Omega_e} \left( \frac{\partial N_i}{\partial x_1} p_n^i \frac{\partial N_j}{\partial x_1} p_n^j + \frac{\partial N_i}{\partial x_2} p_n^i \frac{\partial N_j}{\partial x_2} p_n^j + \frac{\partial N_i}{\partial x_3} p_n^i \frac{\partial N_j}{\partial x_3} p_n^j \right) dV \\
 &= \iiint_{\Omega_e} \{\mathbf{P}_e\}^T \{\mathbf{N}^a\}^T \{\mathbf{L}^a\}^T \{\mathbf{L}^a\} \{\mathbf{N}^a\} \{\mathbf{P}_e\} dV \\
 &= \{\mathbf{P}_e\}^T \iiint_{\Omega_e} [\mathbf{B}^a]^T [\mathbf{B}^a] dV \{\mathbf{P}_e\} \\
 &= \{\mathbf{P}_e\}^T [\mathbf{K}_{Ac,n}] \{\mathbf{P}_e\}
 \end{aligned} \tag{3.11}$$

となる。 $\Omega_e$  は要素内部全体を表す。ここでベクトル  $\{\mathbf{L}^a\}$ , マトリックス  $[\mathbf{B}^a], [\mathbf{K}_{Ac,n}]$  は下式のように定義する。

$$\{\mathbf{L}^a\} = \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \end{array} \right\} \tag{3.12}$$

$$[\mathbf{B}^a] = \{\mathbf{L}^a\} \{\mathbf{N}^a\} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1^a}{\partial x_1} & \frac{\partial N_2^a}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial N_I^a}{\partial x_1} \\ \frac{\partial N_1^a}{\partial x_2} & \frac{\partial N_2^a}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial N_I^a}{\partial x_2} \\ \frac{\partial N_1^a}{\partial x_3} & \frac{\partial N_2^a}{\partial x_3} & \cdots & \frac{\partial N_I^a}{\partial x_3} \end{bmatrix} \tag{3.13}$$

$$[\mathbf{K}_{Ac,n}] = \iiint_{\Omega_e} [\mathbf{B}^a]^T [\mathbf{B}^a] dV \tag{3.14}$$

次に第二項目は

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{c_0^2} \iiint_{\Omega_e} p w dV &= \frac{1}{c_0^2} \iiint_{\Omega_e} N_i p_n^i N_j p_n^j dV \\
 &= \frac{1}{c_0^2} \iiint_{\Omega_e} \{\mathbf{P}_e\}^T \{\mathbf{N}^a\}^T \{\mathbf{N}^a\} \{\mathbf{P}_e\} dV \\
 &= \{\mathbf{P}_e\}^T [\mathbf{M}_{Ac,n}] \{\mathbf{P}_e\}
 \end{aligned} \tag{3.15}$$

と書ける。ここでマトリックス  $[\mathbf{M}_{Ac,n}]$  は下式で定義する。

$$[\mathbf{M}_{Ac,n}] = \frac{1}{c_0^2} \iiint_{\Omega_e} \{\mathbf{N}^a\}^T \{\mathbf{N}^a\} dV \tag{3.16}$$

続いて、第三項目について

$$\begin{aligned}
\iiint_{\Gamma_{Y,e}} \beta_0 p w dS &= \iiint_{\Gamma_{Y,e}} \beta_0 N_i p_n^i N_j p_n^j dS \\
&= \iiint_{\Gamma_{Y,e}} \beta_0 \{\mathbf{P}_e\}^T \{\mathbf{N}^a\}^T \{\mathbf{N}^a\} \{\mathbf{P}_e\} dS \\
&= \{\mathbf{P}_e\}^T \iiint_{\Gamma_{Y,e}} \beta_0 \{\mathbf{N}^a\}^T \{\mathbf{N}^a\} dS \{\mathbf{P}_e\} \\
&= \{\mathbf{P}_e\}^T [\mathbf{C}_{Ac,n}] \{\mathbf{P}_e\}
\end{aligned} \tag{3.17}$$

と書ける。ここで、マトリックス  $[\mathbf{C}_{Ac,n}]$  は下式で定義する。

$$[\mathbf{C}_{Ac,n}] = \iiint_{\Omega_e} \beta \{\mathbf{N}^a\}^T \{\mathbf{N}^a\} dV \tag{3.18}$$

最後に第四項について、本節では境界上で定常駆動される場合を考える。すなわち  $r_n = \hat{r}$  とすると

$$\begin{aligned}
\iint_{\Gamma_v} w r_n dS &= \hat{r} \iint_{\Gamma_v} N_i p_n^i dS \\
&= \{\mathbf{P}_e\} \hat{r} \iint_{\Gamma_v} \{\mathbf{N}^a\}^T dS \\
&= \{\mathbf{P}_e\} \{\mathbf{R}_{Ac,n}\}
\end{aligned} \tag{3.19}$$

ここでベクトル  $\mathbf{R}_{Ac,n}$  を以下のように定義する。

$$\{\mathbf{R}_{Ac,n}\} = \iint_{\Gamma_v} \hat{r} \{\mathbf{N}^a\}^T dS \tag{3.20}$$

以上、式(3.5)の全ての項を以下のようにマトリックス形式に換えて表すことができる。

$$([\mathbf{K}_{Ac,e}] - \omega^2 [\mathbf{M}_{Ac,e}] + jk [\mathbf{C}_{Ac,e}]) \{\mathbf{P}_e\} = \rho_0 \omega^2 \{\mathbf{R}_{Ac,e}\} \tag{3.21}$$

この要素毎のマトリックス方程式は要素の数だけ形成することができる。最後にそれらを合成して全体行列を形成する。

各要素は節点を共有し合っている。式(3.21)の各値は共有し合う節点同士で加算される。つまり音響系全体の節点数を  $N_{\text{DOF}}$  とすると、 $N_{\text{DOF}} \times N_{\text{DOF}}$  のサイズをもつ全体行列が構成され、要素を構成する通し節点番号に対応した部分に各要素の値は加算される。こうして構成された音響系全体のマトリックス方程式を以下のように書く。

$$([\mathbf{K}_{Ac}] - \omega^2 [\mathbf{M}_{Ac}] + jk [\mathbf{C}_{Ac}]) \{\mathbf{P}\} = \rho_0 \omega^2 \{\mathbf{R}\} \tag{3.22}$$

## 3.1.2 膜振動場の定式化

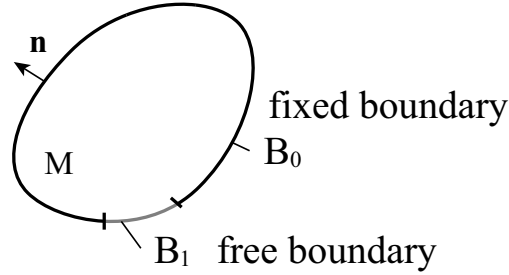


Fig. 3.2: Analysis model for membrane vibration field.

外力  $f$  を受ける場合、定常状態における膜振動方程式は次式で書ける。

$$-T\nabla_m^2\eta - \omega^2 m_a \eta = f \quad (3.23)$$

ここで、 $\nabla_m^2$  は膜面内のラプラシアンである。膜振動における境界条件は固定境界  $B_0$ 、自由境界  $B_1$  の二種類を想定する。各々の境界条件式は以下のように表される。

$$\begin{cases} \eta = 0 & (\text{on } B_0) \\ \frac{\partial \eta}{\partial \mathbf{n}} = 0 & (\text{on } B_1) \end{cases} \quad (3.24)$$

音場の場合と同様に重み関数  $w_m$  を掛け、領域  $M$  内で積分すると次のように書ける。

$$\iint_M w_m (-T\nabla_m^2\eta - \omega^2 m_a \eta) dS = \iint_M w_m f dS \quad (3.25)$$

積分内第一項は Green の定理より

$$\iint_M \nabla_m^2 w_m \eta dS = - \iint_M \nabla_m w_m \cdot \nabla_m \eta dS + \int_B w_m \frac{\partial \eta}{\partial \mathbf{n}} dL \quad (3.26)$$

と表すことが出来る。

膜面内を有限要素に分割する。 $n$  番目の要素内の任意点で振動変位および外力は、要素節点で代表される値  $\eta_n^i$ ,  $f_n^i$  と内挿関数  $N_i$  を用いてそれぞれ式 (3.27)(3.28) で表す。

$$\eta = N_i^m \eta_n^i = \{\mathbf{N}^m\} \{\boldsymbol{\eta}_e\} \quad (3.27)$$

$$f = N_i^m f_n^i = \{\mathbf{N}^m\} \{\mathbf{f}^m\} \quad (3.28)$$

ここで、ベクトル  $\{\mathbf{N}^m\}, \{\boldsymbol{\eta}_e\}, \{\mathbf{f}^m\}$  を以下のように定義する。

$$\{\mathbf{N}^m\} = \{N_1^m, N_2^m, \dots, N_I^m\} \quad (3.29)$$

$$\{\boldsymbol{\eta}_e\} = \{\eta_n^1, \eta_n^2, \dots, \eta_n^I\}^T \quad (3.30)$$

$$\{\mathbf{f}_e\} = \{f_n^1, f_n^2, \dots, f_n^I\}^T \quad (3.31)$$

さらに重み関数  $w$  を試験関数と同一にとる Galerkin 法を採用し、式 (3.32) で表す。

$$w_m = N_i^m \eta_n^i = \{\mathbf{N}^m\} \{\boldsymbol{\eta}_e\} \quad (3.32)$$

また境界条件を適用すると、自由境界  $B_1$  では境界積分項は 0 となる。一方、固定境界では振動変位が既知であることから、固定境界上の節点に対応する内挿関数を重み関数に採用しない。また、固定境界上では、境界外の節点に対応する内挿関数の値は 0 である。従って、固定境界上でも境界積分項は 0 となる。

以上のことから、式 (3.25) は次のように書ける。

$$\iint_M \nabla_m w_m \cdot \nabla_m \eta dS - \omega^2 m_a \iint_M w_m \eta dS = \iint_M w_m f dS \quad (3.33)$$

音響系と同様に次のように有限要素に対するマトリックス  $[\mathbf{K}_{m,n}]$ ,  $[\mathbf{M}_{m,n}]$ ,  $[\mathbf{Q}_{m,n}]$  を定める。

$$\begin{aligned} [\mathbf{K}_{m,n}] &= T \iint_M \{\mathbf{N}^m\}^T \{\mathbf{L}^m\}^T \{\mathbf{L}^m\} \{\mathbf{N}^m\} dS \\ &= T \iint_M [\mathbf{B}^m]^T [\mathbf{B}^m] dS \end{aligned} \quad (3.34)$$

$$[\mathbf{M}_{m,n}] = m_a \iint_M \{\mathbf{N}^m\}^T \{\mathbf{N}^m\} dS \quad (3.35)$$

$$[\mathbf{Q}_{m,n}] = \iint_M \{\mathbf{N}^m\}^T \{\mathbf{N}^m\} dS \quad (3.36)$$

ここで、ベクトル  $\{\mathbf{L}^m\}$ 、マトリックス  $[\mathbf{B}^m]$  は次のように定義する。

$$\{\mathbf{L}^m\} = \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2} \right\} \quad (3.37)$$

$$[\mathbf{B}^m] = \{\mathbf{L}^a\} \{\mathbf{N}^a\} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1^m}{\partial x_1} & \frac{\partial N_2^m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial N_I^m}{\partial x_1} \\ \frac{\partial N_1^m}{\partial x_2} & \frac{\partial N_2^m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial N_I^m}{\partial x_2} \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

音場と同様に共有する節点値に対応する値を加算して次のように全体行列を計算することが出来る。

$$([\mathbf{K}_m] - \omega^2 [\mathbf{M}_m]) \{\boldsymbol{\eta}\} = [\mathbf{Q}_m] \{\mathbf{f}\} \quad (3.39)$$

外力ベクトルが既知の場合、式 (3.39) を解くことにより節点振動変位が求められる。

### 3.1.3 弾性体場の定式化

前節までは有限要素法の中でも Galerkin 法により定式化を行ったが、本節と次節では最小ポテンシャルエネルギーの原理に基づいて定式化を行う。

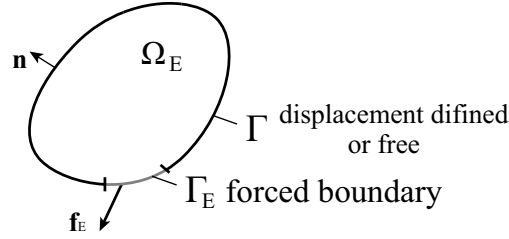


Fig. 3.3: Analysis model for elastic body field.

弾性振動における変位ベクトルは各軸方向への変位で表される。要素節点  $i$  における変位は次式で表される。

$$\{\mathbf{W}_e^i\} = \begin{Bmatrix} w_{1,e}^i \\ w_{2,e}^i \\ w_{3,e}^i \end{Bmatrix} \quad (3.40)$$

要素内の任意の点における変位  $\{\delta_e\}$  の各成分  $\{w_{1,e}, w_{2,e}, w_{3,e}\}$  は内挿関数  $N_i$  と、 $i$  節点変位の各成分  $w_{1,e}^i, w_{2,e}^i, w_{3,e}^i$  を用いて次式のように表す。

$$\begin{cases} w_{1,e} &= N_i^E w_{1,e}^i \\ w_{2,e} &= N_i^E w_{2,e}^i \\ w_{3,e} &= N_i^E w_{3,e}^i \end{cases} \quad (3.41)$$

これらをマトリックス形式で表すと次式で書くことができる。

$$\{\mathbf{W}_e\} = [\mathbf{N}]\{\mathbf{W}_e'\} \quad (3.42)$$

ここで、マトリックス  $[\mathbf{N}]$ , ベクトル  $\{\mathbf{W}_e'\}$  は次式で定義される。

$$[\mathbf{N}^E] = \begin{bmatrix} N_1^E & 0 & 0 & N_2^E & 0 & 0 & \dots & N_i^E & 0 & 0 \\ 0 & N_1^E & 0 & 0 & N_2^E & 0 & \dots & 0 & N_i^E & 0 \\ 0 & 0 & N_1^E & 0 & 0 & N_2^E & \dots & 0 & 0 & N_i^E \end{bmatrix} \quad (3.43)$$

$$\{\mathbf{W}_e'\}^T = \{w_{1,e}^1 \quad w_{2,e}^1 \quad w_{3,e}^1 \quad w_{1,e}^2 \quad w_{2,e}^2 \quad w_{3,e}^2 \quad \dots \quad w_{1,e}^I \quad w_{2,e}^I \quad w_{3,e}^I\} \quad (3.44)$$

これより、任意点での歪みベクトルは式 (2.5), (2.13) より、下式のように書くことができる。

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial w_{1,e}}{\partial x_1} \\ \frac{\partial w_{2,e}}{\partial x_2} \\ \frac{\partial w_{3,e}}{\partial x_3} \\ \frac{\partial w_{2,e}}{\partial x_1} + \frac{\partial w_{1,e}}{\partial x_2} \\ \frac{\partial w_{3,e}}{\partial x_1} + \frac{\partial w_{1,e}}{\partial x_3} \\ \frac{\partial w_{3,e}}{\partial x_2} + \frac{\partial w_{2,e}}{\partial x_3} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_3} & \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} & 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} \end{bmatrix} \{\mathbf{W}_e\} = [\mathbf{L}][\mathbf{N}^E]\{\mathbf{W}'_e\} \\ = [\mathbf{B}]\{\mathbf{W}'_e\} \quad (3.45)$$

ここで,

$$[\mathbf{L}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_3} & \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} & 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} \end{bmatrix} \quad (3.46)$$

であり,  $[\mathbf{B}] = [\mathbf{L}][\mathbf{N}^E]$  である。

また, 応力ベクトルは式 (2.13), (3.45) より次式で表すことができる。

$$\{\sigma\} = [\mathbf{D}][\mathbf{B}]\{\mathbf{W}'_e\} \quad (3.47)$$

これらの関係を用いて, 要素が持つエネルギーについて考える。まず, 歪みエネルギーは次式で与えられる。

$$\begin{aligned} V_e &= \frac{1}{2} \iiint_{\Omega_{E,e}} \{\varepsilon\}^T \{\sigma\} dV \\ &= \frac{1}{2} \iiint_{\Omega_{E,e}} \{\mathbf{W}'_e\}^T [\mathbf{B}]^T [\mathbf{D}] [\mathbf{B}] \{\mathbf{W}'_e\} dV \\ &= \frac{1}{2} \{\mathbf{W}'_e\}^T \iiint_{\Omega_{E,e}} [\mathbf{B}]^T [\mathbf{D}] [\mathbf{B}] dV \{\mathbf{W}'_e\} \\ &= \frac{1}{2} \{\mathbf{W}'_e\}^T [\mathbf{K}_{E,e}] \{\mathbf{W}'_e\} \end{aligned} \quad (3.48)$$

ここで  $[\mathbf{K}_{E,e}]$  は剛性マトリックスであり次式で定義される。

$$[\mathbf{K}_{E,e}] = \iiint_{\Omega_{E,e}} [\mathbf{B}]^T [\mathbf{D}] [\mathbf{B}] dV \quad (3.49)$$

次に運動エネルギーは密度を  $\rho_s$  とすると下式で与えられる。

$$\begin{aligned}
T_e &= \frac{1}{2} \rho_s \iiint_{\Omega_{E,e}} \{\dot{\mathbf{W}}_e\}^2 dV \\
&= \frac{1}{2} \rho_s \omega^2 \iiint_{\Omega_{E,e}} \{\mathbf{W}'_e\}^T [\mathbf{N}^E]^T [\mathbf{N}^E] \{\mathbf{W}'_e\} dV \\
&= \frac{1}{2} \{\mathbf{W}'_e\}^T \iiint_{\Omega_{E,e}} [\mathbf{N}^E]^T [\mathbf{N}^E] dV \{\mathbf{W}'_e\} \\
&= \frac{1}{2} \omega^2 \{\mathbf{W}'_e\}^T [\mathbf{M}_{E,e}] \{\mathbf{W}'_e\}
\end{aligned} \tag{3.50}$$

ここで  $[\mathbf{M}_{E,e}]$  は慣性マトリックスであり次式で定義される。

$$[\mathbf{M}_{E,e}] = \rho_s \iiint_{\Omega_{E,e}} [\mathbf{N}^E]^T [\mathbf{N}^E] dV \tag{3.51}$$

次に境界上で外力よりなされる仕事は、加わる力を  $p[\text{N/m}^2]$  とすると下式で表される。

$$\begin{aligned}
W_e &= \iint_{\Gamma_{E,n}} \{\mathbf{W}_e\} p dS \\
&= \iint_{\Gamma_{E,n}} \{\mathbf{W}'_e\} [\mathbf{N}] p dS \\
&= \{\mathbf{W}'_e\}^T \iint_{\Gamma_{E,n}} [\mathbf{N}^E] p dS \\
&= \{\mathbf{W}'_e\}^T \{\mathbf{f}_{E,e}\}
\end{aligned} \tag{3.52}$$

ここで  $\{\mathbf{f}_{E,e}\}$  は節点力ベクトルであり次式で定義される。

$$\{\mathbf{f}_{E,e}\} = \iint_{\Gamma_{E,e}} [\mathbf{N}^E] dS \tag{3.53}$$

以上より、要素の全ポテンシャルエネルギーは下式で表される。

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_e &= V_e - T_e - W_e \\
&= \frac{1}{2} \{\mathbf{W}'_e\}^T [\mathbf{K}_{E,e}] \{\mathbf{W}'_e\} - \frac{1}{2} \omega^2 \{\mathbf{W}'_e\}^T [\mathbf{M}_{E,e}] \{\mathbf{W}'_e\} - \{\mathbf{W}'_e\}^T \{\mathbf{f}_{E,e}\}
\end{aligned} \tag{3.54}$$

最小ポテンシャルエネルギーの原理より

$$\frac{\partial \mathcal{L}_e}{\partial \{\mathbf{W}'_e\}^T} = 0 \tag{3.55}$$

であるから、有限要素に対し、以下のマトリックス方程式が成立する。

$$([\mathbf{K}_{E,e}] - \omega^2 [\mathbf{M}_{E,e}]) \{\mathbf{W}'_e\} = \{\mathbf{f}_{E,e}\} \tag{3.56}$$

これらを全ての要素について重ね合わせることで系の全体行列が得られる。

$$([\mathbf{K}_E] - \omega^2 [\mathbf{M}_E]) \{\mathbf{W}\} = \{\mathbf{f}_E\} \tag{3.57}$$



### 3.1.4 多孔質弾性体場の定式化

本節においても最小ポテンシャルエネルギーの原理に基づいて定式化を行う。

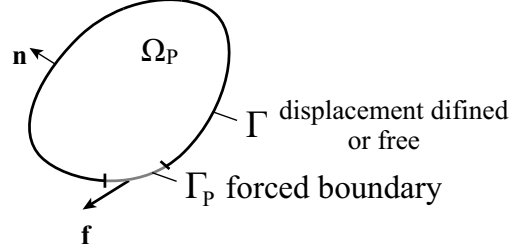


Fig. 3.4: Analysis model for poroelastic body field.

多孔質弾性体振動は固体変位ベクトル  $\{u\}$  と流体変位ベクトル  $\{U\}$  を用いて表される。それぞれ、要素  $e$  の節点  $i$  において次式のように表す。

$$\{\mathbf{u}_e^i\} = \begin{Bmatrix} u_{1,e}^i \\ u_{2,e}^i \\ u_{3,e}^i \end{Bmatrix} \quad (3.58)$$

$$\{\mathbf{U}_e^i\} = \begin{Bmatrix} U_{1,e}^i \\ U_{2,e}^i \\ U_{3,e}^i \end{Bmatrix} \quad (3.59)$$

要素内任意点において固体変位  $\{\mathbf{u}_e\}$ 、流体変位  $\{\mathbf{U}_e\}$  の各成分

要素内の任意の点における固体変位  $\{\mathbf{u}_e\}$ 、流体変位  $\{\mathbf{U}_e\}$  の各成分  $\{u_{1,e}, u_{2,e}, u_{3,e}\}$ ,  $\{U_{1,e}, U_{2,e}, U_{3,e}\}$  は内挿関数  $N_i^s, N_i^f$  と、 $i$  節点変位の各成分  $\{u_{1,e}^i, u_{2,e}^i, u_{3,e}^i\}, \{U_{1,e}^i, U_{2,e}^i, U_{3,e}^i\}$  を用いて次式のように表す。

$$\begin{cases} u_{1,e} &= N_i^s u_{1,e}^i \\ u_{2,e} &= N_i^s u_{2,e}^i \\ u_{3,e} &= N_i^s u_{3,e}^i \end{cases} \quad (3.60)$$

$$\begin{cases} U_{1,e} &= N_i^f U_{1,e}^i \\ U_{2,e} &= N_i^f U_{2,e}^i \\ U_{3,e} &= N_i^f U_{3,e}^i \end{cases} \quad (3.61)$$

これらをマトリックス形式で表すと次式で書くことができる。

$$\{\mathbf{u}_e\} = [\mathbf{N}^s] \{\mathbf{u}_e'\} \quad (3.62)$$

$$\{\mathbf{U}_e\} = [\mathbf{N}^f] \{\mathbf{U}_e'\} \quad (3.63)$$

ここで、マトリックス  $[N]$ , ベクトル  $\{\delta_n\}$  は次式で定義される。

$$[\mathbf{N}^s] = \begin{bmatrix} N_1^s & 0 & 0 & N_2^s & 0 & 0 & \dots & N_i^s & 0 & 0 \\ 0 & N_1^s & 0 & 0 & N_2^s & 0 & \dots & 0 & N_i^s & 0 \\ 0 & 0 & N_1^s & 0 & 0 & N_2^s & \dots & 0 & 0 & N_i^s \end{bmatrix} \quad (3.64)$$

$$[\mathbf{N}^f] = \begin{bmatrix} N_1^f & 0 & 0 & N_2^f & 0 & 0 & \dots & N_i^f & 0 & 0 \\ 0 & N_1^f & 0 & 0 & N_2^f & 0 & \dots & 0 & N_i^f & 0 \\ 0 & 0 & N_1^f & 0 & 0 & N_2^f & \dots & 0 & 0 & N_i^f \end{bmatrix} \quad (3.65)$$

$$\{\mathbf{u}'_e\}^T = \{u_{1,e}^1 \quad u_{2,e}^1 \quad u_{3,e}^1 \quad u_{1,e}^2 \quad u_{2,e}^2 \quad u_{3,e}^2 \quad \dots \quad u_{1,e}^i \quad u_{2,e}^i \quad u_{3,e}^i\} \quad (3.66)$$

$$\{\mathbf{U}'_e\}^T = \{U_{1,e}^1 \quad U_{2,e}^1 \quad U_{3,e}^1 \quad U_{1,e}^2 \quad U_{2,e}^2 \quad U_{3,e}^2 \quad \dots \quad U_{1,e}^i \quad U_{2,e}^i \quad U_{3,e}^i\} \quad (3.67)$$

これより、任意点での歪みベクトルは弾性体の場合と同様に下式のように固体歪み、流体歪みについて表される。

$$\{\epsilon_s\} = [\mathbf{L}][\mathbf{N}^s]\{\mathbf{u}'_e\} = [\mathbf{B}^s]\{\mathbf{u}'_e\} \quad (3.68)$$

$$\{\epsilon_f\} = [\mathbf{L}][\mathbf{N}^f]\{\mathbf{U}'_e\} = [\mathbf{B}^f]\{\mathbf{U}'_e\} \quad (3.69)$$

これを用いて、式 (2.34), (2.35) に対応する応力ベクトルは次のようにマトリックス形式で書ける。

$$\{\sigma_s\} = [\mathbf{D}_s]\{\epsilon_s\} + [\mathbf{D}_{sf}]\{\epsilon_f\} = [\mathbf{D}_s][\mathbf{B}^s]\{\mathbf{u}'_e\} + [\mathbf{D}_{sf}][\mathbf{B}^f]\{\mathbf{U}'_e\} \quad (3.70)$$

$$\{\sigma_f\} = [\mathbf{D}_{sf}]\{\epsilon_s\} + [\mathbf{D}_f]\{\epsilon_f\} = [\mathbf{D}_{sf}][\mathbf{B}^s]\{\mathbf{u}'_e\} + [\mathbf{D}_f][\mathbf{B}^f]\{\mathbf{U}'_e\} \quad (3.71)$$

ここで、 $[\mathbf{D}_s]$ ,  $[\mathbf{D}_{sf}]$ ,  $[\mathbf{D}_f]$  は固体相、流体相の弾性マトリックス及び相間の連成で以下のように表される。

$$[\mathbf{D}_s] = \begin{bmatrix} P+2N & P & P & 0 & 0 & 0 \\ P & P+2N & P & 0 & 0 & 0 \\ P & P & P+2N & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N \end{bmatrix} \quad (3.72)$$

$$[\mathbf{D}_{sf}] = \begin{bmatrix} Q & Q & Q & 0 & 0 & 0 \\ Q & Q & Q & 0 & 0 & 0 \\ Q & Q & Q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.73)$$

$$[\mathbf{D}_f] = \begin{bmatrix} R & R & R & 0 & 0 & 0 \\ R & R & R & 0 & 0 & 0 \\ R & R & R & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.74)$$

これらの関係を用いて、要素が持つエネルギーについて考える。まず歪みエネルギーは次式で与えられる。

$$\begin{aligned} V_{P,e} &= \frac{1}{2} \iiint_{\Omega_{P,e}} (\{\epsilon_s\}^T \{\sigma_s\} + \{\epsilon_f\}^T \{\sigma_f\}) dV \\ &= \frac{1}{2} \iiint_{\Omega_{P,e}} (\{\mathbf{u}'_e\}^T [\mathbf{B}^s]^T [\mathbf{D}_s] [\mathbf{B}^s] \{\mathbf{u}'_e\} \\ &\quad + 2\{\mathbf{u}'_e\}^T [\mathbf{B}^s]^T [\mathbf{D}_{sf}] [\mathbf{B}^f] \{\mathbf{U}'_e\} + \{\mathbf{U}'_e\}^T [\mathbf{B}^f]^T [\mathbf{D}_f] [\mathbf{B}^f] \{\mathbf{U}'_e\}) dV \\ &= \frac{1}{2} \{\mathbf{u}'_e\}^T [\mathbf{K}_{P,e}^{ss}] \{\mathbf{u}'_e\} + \{\mathbf{u}'_e\}^T [\mathbf{K}_{P,e}^{sf}] \{\mathbf{U}'_e\} + \frac{1}{2} \{\mathbf{U}'_e\}^T [\mathbf{K}_{P,e}^{ff}] \{\mathbf{U}'_e\} \end{aligned} \quad (3.75)$$

ここで  $[\mathbf{K}_{P,e}^{ss}]$ ,  $[\mathbf{K}_{P,e}^{sf}]$ ,  $[\mathbf{K}_{P,e}^{ff}]$  はそれぞれ以下のように定義される。

$$[\mathbf{K}_{P,e}^{ss}] = \iiint_{\Omega_{P,e}} [\mathbf{B}^s]^T [\mathbf{D}_s] [\mathbf{B}^s] dV \quad (3.76)$$

$$[\mathbf{K}_{P,e}^{sf}] = \iiint_{\Omega_{P,e}} [\mathbf{B}^s]^T [\mathbf{D}_{sf}] [\mathbf{B}^f] dV \quad (3.77)$$

$$[\mathbf{K}_{P,e}^{ff}] = \iiint_{\Omega_{P,e}} [\mathbf{B}^f]^T [\mathbf{D}_f] [\mathbf{B}^f] dV \quad (3.78)$$

次に運動エネルギーは次のように与えられる。

$$\begin{aligned} T_{P,e} &= \frac{1}{2} \iiint_{\Omega_{P,e}} (\rho_{11} \{\dot{\mathbf{u}}_e\}^T \{\dot{\mathbf{u}}_e\} + 2\rho_{12} \{\dot{\mathbf{u}}_e\}^T \{\dot{\mathbf{U}}_e\} + \rho_{22} \{\dot{\mathbf{U}}_e\}^T \{\dot{\mathbf{U}}_e\}) dV \\ &= \frac{1}{2} \omega^2 \iiint_{\Omega_{P,e}} (\{\mathbf{u}'_e\}^T [\mathbf{N}^s]^T [\mathbf{N}^s] \{\mathbf{u}'_e\} \\ &\quad + 2\{\mathbf{u}'_e\}^T [\mathbf{N}^s]^T [\mathbf{N}^f] \{\mathbf{U}'_e\} + \{\mathbf{U}'_e\}^T [\mathbf{N}^f]^T [\mathbf{N}^f] \{\mathbf{U}'_e\}) dV \\ &= \omega^2 \left( \frac{1}{2} \{\mathbf{u}'_e\}^T [\mathbf{M}_{P,e}^{ss}] \{\mathbf{u}'_e\} + \{\mathbf{u}'_e\}^T [\mathbf{M}_{P,e}^{sf}] \{\mathbf{U}'_e\} + \frac{1}{2} \{\mathbf{U}'_e\}^T [\mathbf{M}_{P,e}^{ff}] \{\mathbf{U}'_e\} \right) \end{aligned} \quad (3.79)$$

ここで  $[\mathbf{M}_{P,e}^{ss}]$ ,  $[\mathbf{M}_{P,e}^{sf}]$ ,  $[\mathbf{M}_{P,e}^{ff}]$  はそれぞれ以下のように定義される。

$$[\mathbf{M}_{P,e}^{ss}] = \rho_{11} \iiint_{\Omega_{P,e}} [\mathbf{N}]^T [\mathbf{N}^s] dV \quad (3.80)$$

$$[\mathbf{M}_{P,e}^{sf}] = \rho_{12} \iiint_{\Omega_{P,e}} [\mathbf{N}^s]^T [\mathbf{N}^f] dV \quad (3.81)$$

$$[\mathbf{M}_{P,e}^{ff}] = \rho_{22} \iiint_{\Omega_{P,e}} [\mathbf{N}^f]^T [\mathbf{N}^f] dV \quad (3.82)$$

続いて、消散エネルギーは次のように与えられる。

$$\begin{aligned}
 D_{P,e} &= \frac{1}{2} \iiint_{\Omega_{P,e}} \left( \frac{j b(\omega)}{\omega} (\{\dot{\mathbf{u}}_e\} - \{\dot{\mathbf{U}}_e\})^T (\{\dot{\mathbf{u}}_e\} - \{\dot{\mathbf{U}}_e\})^T \right) dV \\
 &= -\frac{1}{2} j \omega \iiint_{\Omega_{P,e}} (\{\mathbf{u}'_e\}^T [\mathbf{N}^s]^T [\mathbf{N}^s] \{\mathbf{u}'_e\} \\
 &\quad - 2 \{\mathbf{u}'_e\}^T [\mathbf{N}^s]^T [\mathbf{N}^f] \{\mathbf{U}'_e\} + \{\mathbf{U}'_e\}^T [\mathbf{N}^f]^T [\mathbf{N}^f] \{\mathbf{U}'_e\}) dV \\
 &= j \omega \left( -\frac{1}{2} \{\mathbf{u}'_e\}^T [\mathbf{C}_{P,e}^{ss}] \{\mathbf{u}'_e\} + \{\mathbf{u}'_e\}^T [\mathbf{C}_{P,e}^{sf}] \{\mathbf{U}'_e\} - \frac{1}{2} \{\mathbf{U}'_e\}^T [\mathbf{C}_{P,e}^{ff}] \{\mathbf{U}'_e\} \right) \quad (3.83)
 \end{aligned}$$

ここで  $[\mathbf{C}_{P,e}^{ss}]$ ,  $[\mathbf{C}_{P,e}^{sf}]$ ,  $[\mathbf{C}_{P,e}^{ff}]$  はそれぞれ以下のように定義される。

$$[\mathbf{C}_{P,e}^{ss}] = b(\omega) \iiint_{\Omega_{P,e}} [\mathbf{N}]^T [\mathbf{N}^s] dV \quad (3.84)$$

$$[\mathbf{C}_{P,e}^{sf}] = b(\omega) \iiint_{\Omega_{P,e}} [\mathbf{N}^s]^T [\mathbf{N}^f] dV \quad (3.85)$$

$$[\mathbf{C}_{P,e}^{ff}] = b(\omega) \iiint_{\Omega_{P,e}} [\mathbf{N}^f]^T [\mathbf{N}^f] dV \quad (3.86)$$

最後に境界上において外力によりなされる仕事は加わる力を  $\mathbf{f}[N/m^2]$  とすると下式で表される。

$$\begin{aligned}
 W_{P,e} &= \iint_{\Gamma_{P,n}} (\{\mathbf{u}_e\}^T (\{\mathbf{f}\} - \phi \{\mathbf{f}_n\}) + \phi \{\mathbf{U}_e\}^T \{\mathbf{f}_n\}) dS \\
 &= \iint_{\Gamma_{P,n}} \{\mathbf{u}'_e\}^T [\mathbf{N}^s]^T (\{\mathbf{f}\} - \phi \{\mathbf{f}_n\}) + \phi \{\mathbf{U}'_e\}^T [\mathbf{N}^f]^T \{\mathbf{f}_n\} dS \\
 &= \{\mathbf{u}'_e\}^T \{\mathbf{F}_{P,e}^s\} + \{\mathbf{U}'_e\}^T \{\mathbf{F}_{P,e}^f\} \quad (3.87)
 \end{aligned}$$

ここで  $\{\mathbf{F}_{P,e}^s\}$ ,  $\{\mathbf{F}_{P,e}^f\}$  は節点力ベクトルであり次式で定義される。

$$\{\mathbf{F}_{P,e}^s\} = \iint_{\Gamma_{P,e}} [\mathbf{N}^s]^T (\{\mathbf{f}\} - \phi \{\mathbf{f}_n\}) dS \quad (3.88)$$

$$\{\mathbf{F}_{P,e}^f\} = \iint_{\Gamma_{P,e}} [\mathbf{N}^f]^T \phi \{\mathbf{f}_n\} dS \quad (3.89)$$

以上より、要素の全ポテンシャルエネルギーは下式で表される。

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_e &= V_{P,e} - T_{P,e} - W_{P,e} - D_{P,e} \\
 &= \frac{1}{2} \{\mathbf{u}'_e\}^T [\mathbf{K}_{P,e}^{ss}] \{\mathbf{u}'_e\} + \{\mathbf{u}'_e\}^T [\mathbf{K}_{P,e}^{sf}] \{\mathbf{U}'_e\} + \frac{1}{2} \{\mathbf{U}'_e\}^T [\mathbf{K}_{P,e}^{ff}] \{\mathbf{U}'_e\} \\
 &\quad - \omega^2 \left( \frac{1}{2} \{\mathbf{u}'_e\}^T [\mathbf{M}_{P,e}^{ss}] \{\mathbf{u}'_e\} - \{\mathbf{u}'_e\}^T [\mathbf{M}_{P,e}^{sf}] \{\mathbf{U}'_e\} - \frac{1}{2} \{\mathbf{U}'_e\}^T [\mathbf{M}_{P,e}^{ff}] \{\mathbf{U}'_e\} \right) \\
 &\quad + j \omega \left( \frac{1}{2} \{\mathbf{u}'_e\}^T [\mathbf{C}_{P,e}^{ss}] \{\mathbf{u}'_e\} - \{\mathbf{u}'_e\}^T [\mathbf{C}_{P,e}^{sf}] \{\mathbf{U}'_e\} + \frac{1}{2} \{\mathbf{U}'_e\}^T [\mathbf{C}_{P,e}^{ff}] \{\mathbf{U}'_e\} \right) \\
 &\quad - \{\mathbf{u}'_e\}^T \{\mathbf{F}_{P,e}^s\} - \{\mathbf{U}'_e\}^T \{\mathbf{F}_{P,e}^f\} \quad (3.90)
 \end{aligned}$$

最小ポテンシャルエネルギーの原理より, 固体変位, 流体変位それぞれについて以下の式が成り立つ。

$$\frac{\partial \mathcal{L}_e}{\partial \{\mathbf{u}'_e\}^T} = 0 \quad (3.91)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}_e}{\partial \{\mathbf{U}'_e\}^T} = 0 \quad (3.92)$$

であるから, 有限要素に対し, 以下のマトリックス方程式が成立する。

$$\begin{aligned} & \left( \begin{bmatrix} [\mathbf{K}_{P,e}^{ss}] & [\mathbf{K}_{P,e}^{sf}] \\ [\mathbf{K}_{P,e}^{sf}] & [\mathbf{K}_{P,e}^{ff}] \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} [\mathbf{M}_{P,e}^{ss}] & [\mathbf{M}_{P,e}^{sf}] \\ [\mathbf{M}_{P,e}^{sf}] & [\mathbf{M}_{P,e}^{ff}] \end{bmatrix} \right. \\ & \quad \left. + j\omega \begin{bmatrix} [\mathbf{C}_{P,e}^{ss}] & -[\mathbf{C}_{P,e}^{sf}] \\ -[\mathbf{C}_{P,e}^{sf}] & [\mathbf{C}_{P,e}^{ff}] \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \{\mathbf{u}_e\} \\ \{\mathbf{U}_e\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{\mathbf{F}_{P,e}^s\} \\ \{\mathbf{F}_{P,e}^f\} \end{Bmatrix} \quad (3.93) \end{aligned}$$

これらを全ての要素について重ね合わせることで系の全体行列が得られる。

$$\begin{aligned} & \left( \begin{bmatrix} [\mathbf{K}_P^{ss}] & [\mathbf{K}_P^{sf}] \\ [\mathbf{K}_P^{sf}] & [\mathbf{K}_P^{ff}] \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} [\mathbf{M}_P^{ss}] & [\mathbf{M}_P^{sf}] \\ [\mathbf{M}_P^{sf}] & [\mathbf{M}_P^{ff}] \end{bmatrix} \right. \\ & \quad \left. + j\omega \begin{bmatrix} [\mathbf{C}_P^{ss}] & -[\mathbf{C}_P^{sf}] \\ -[\mathbf{C}_P^{sf}] & [\mathbf{C}_P^{ff}] \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \{\mathbf{u}\} \\ \{\mathbf{U}\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{\mathbf{F}_P^s\} \\ \{\mathbf{F}_P^f\} \end{Bmatrix} \quad (3.94) \end{aligned}$$

以上の定式化では固体変位, 流体変位のそれぞれにかかるマトリックスは分離した形で得られるため, 以降では下式のように略記することとする。

$$[\mathbf{K}_P] - \omega^2 [\mathbf{M}_P] + j\omega [\mathbf{C}_P] \{\mathbf{W}_P\} = \{\mathbf{F}_P\} \quad (3.95)$$

## 3.2 各物理場の連成条件

### 3.2.1 音場と弾性体場の連成

音場と弾性場の境界面で連続条件は次式で表される。

$$\sigma_{ij}n_j = -p\delta_{ij}n_j \quad (3.96)$$

$$\frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}} = \rho_0 \omega^2 W_n \quad (3.97)$$

$\{n\}$  は音場に対して外向き法線であり、次式のように書ける。

$$\{\mathbf{n}\} = \begin{Bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{Bmatrix} \quad (3.98)$$

式 (3.96) は境界での法線方向応力の連続、式 (3.97) は振動変位の連続を表す。

弾性体場から音場との境界面を見る場合、音場からの音圧により外力がかかると見なすことが出来る。よって、式 (3.52) より、下式の外力項が加わる。

$$\begin{aligned} W_a &= \iint_{\Gamma_{AcE,e}} \{\mathbf{W}_e\}^T \{\mathbf{n}\} p dS \\ &= \{\mathbf{W}'_e\}^T \iint_{\Gamma_{AcE,e}} [\mathbf{N}^E]^T \{\mathbf{n}\} \{\mathbf{N}^a\}^T dS \{\mathbf{P}_e\} \\ &= \{\mathbf{W}'_e\}^T [\mathbf{C}_{AcE}] \{\mathbf{P}_e\} \end{aligned} \quad (3.99)$$

ここで  $[\mathbf{C}_{AcE}]$  は下式で定義される。

$$[\mathbf{C}_{AcE}] = \iint_{\Gamma_{AcE,e}} [\mathbf{N}^E]^T \{\mathbf{n}\} \{\mathbf{N}^a\}^T dS \quad (3.100)$$

一方、音場から見ると弾性場との境界面は振動境界と見ることができ、式 (3.97) から式 (3.3) の右辺第二項は次式のように表される。

$$\begin{aligned} \iint_{\Gamma} w \frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}} dS &= \iint_{\Gamma} w \rho_0 \omega^2 W_n dS \\ &= \rho_0 \omega^2 \iint_{\Gamma} \{\mathbf{P}_e\}^T \{\mathbf{N}^a\} \{\mathbf{n}\}^T [\mathbf{N}^E] \{\mathbf{W}'_e\} dS \\ &= \{\mathbf{P}_e\}^T \rho_0 \omega^2 [\mathbf{C}_{AcE}]^T \{\mathbf{W}'_e\} \end{aligned} \quad (3.101)$$

ここで、 $W_n = \{\mathbf{n}\}^T \{\mathbf{W}_e\}$  である。

以上の項を含めると、音場-弾性体連成系の全体マトリックスは下式のように書ける。

$$\begin{bmatrix} [\mathbf{K}_E] - \omega^2 [\mathbf{M}_E] & -[\mathbf{C}_{AcE}] \\ -[\mathbf{C}_{AcE}]^T & \frac{1}{\rho_0 \omega^2} [\mathbf{K}_{Ac}] - \frac{1}{\rho_0} [\mathbf{M}_{Ac}] + \frac{jk}{\rho_0 \omega^2} [\mathbf{C}_{Ac}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\mathbf{W}\} \\ \{\mathbf{P}\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{\mathbf{f}_E\} \\ \{\mathbf{R}\} \end{Bmatrix} \quad (3.102)$$

### 3.2.2 音場と多孔質弾性体場の連成

音場と多孔質弾性体の境界面で連続条件は次式で表される。

$$\sigma_{ij}^s n_j = -(1 - \phi)p \quad (3.103)$$

$$\sigma_{ij}^f n_j = -\phi p \quad (3.104)$$

$$\frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}} = \rho_0 \omega^2 ((1 - \phi)u_n + \phi U_n) \quad (3.105)$$

式 (3.103), (3.104) はそれぞれ境界での音場-固体相, 音場-流体相の法線方向応力の連続, 式 (3.105) は振動変位の連続を表す。

多孔質弾性体場から音場との境界面を見る場合, 音場からの音圧により外力がかかると見なすことが出来る。よって, 式 (3.52) より, 下式の外力項が加わる。

$$\begin{aligned} W_a &= \iint_{\Gamma_{AcP,e}} ((1 - \phi)\{\mathbf{u}_e\}^T + \phi\{\mathbf{U}_e\}^T)\{\mathbf{n}\}p dS \\ &= \{\mathbf{u}'_e\}^T \iint_{\Gamma_{AcP,e}} (1 - \phi)[\mathbf{N}^s]^T\{\mathbf{n}\}\{\mathbf{N}^a\}^T dS \{\mathbf{P}_e\} \\ &\quad + \{\mathbf{U}'_e\}^T \iint_{\Gamma_{AcP,e}} \phi[\mathbf{N}^f]^T\{\mathbf{n}\}\{\mathbf{N}^a\}^T dS \{\mathbf{P}_e\} \\ &= \{\mathbf{u}'_e\}^T [\mathbf{C}_{sa}] \{\mathbf{P}_e\} + \{\mathbf{U}'_e\}^T [\mathbf{C}_{fa}] \{\mathbf{P}_e\} \end{aligned} \quad (3.106)$$

ここで  $[\mathbf{C}_{sa}]$ ,  $[\mathbf{C}_{fa}]$  は下式で定義される。

$$[\mathbf{C}_{sa}] = (1 - \phi) \iint_{\Gamma_{AcP,e}} [\mathbf{N}^s]^T\{\mathbf{n}\}\{\mathbf{N}^a\} dS \quad (3.107)$$

$$[\mathbf{C}_{fa}] = \phi \iint_{\Gamma_{AcP,e}} [\mathbf{N}^f]^T\{\mathbf{n}\}\{\mathbf{N}^a\} dS \quad (3.108)$$

$$(3.109)$$

一方, 音場から見ると多孔質弾性体との境界面は振動境界と見ることができ, 式 (3.105) から式 (3.3) の右辺第二項は次式のように表される。

$$\begin{aligned} \iint_{\Gamma} w \frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}} dS &= \iint_{\Gamma} w \rho_0 \omega^2 ((1 - \phi)u_n + \phi U_n) dS \\ &= \rho_0 \omega^2 \left( \iint_{\Gamma} \{\mathbf{P}_e\}^T \{\mathbf{N}^a\} \{\mathbf{n}\}^T [\mathbf{N}^s] \{\mathbf{u}'_e\} dS + \iint_{\Gamma} \{\mathbf{P}_e\}^T \{\mathbf{N}^a\} \{\mathbf{n}\}^T [\mathbf{N}^f] \{\mathbf{U}'_e\} dS \right) \\ &= \{\mathbf{P}_e\}^T \rho_0 \omega^2 [\mathbf{C}_{sa}] \{\mathbf{u}'_e\} + \{\mathbf{P}_e\}^T \rho_0 \omega^2 [\mathbf{C}_{fa}] \{\mathbf{U}'_e\} \end{aligned} \quad (3.110)$$

ここで,  $u_n = \{n\}^T \{\delta u_e\}$ ,  $U_n = \{n\}^T \{\delta U_e\}$  である。

以上の項を含めると, 音場-多孔質弾性体連成系の全体マトリックスは下式のように書ける。

$$\begin{bmatrix} [\mathbf{K}_P] - \omega^2 [\mathbf{M}_P] + j\omega [\mathbf{C}_P] & -[\mathbf{C}_{AcP}] \\ -[\mathbf{C}_{AcP}]^T & \frac{1}{\rho_0 \omega^2} [\mathbf{K}_{Ac}] - \frac{1}{\rho_0} [\mathbf{M}_{Ac}] + \frac{jk}{\rho_0 \omega^2} [\mathbf{C}_{Ac}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\mathbf{W}_P\} \\ \{\mathbf{P}\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{\mathbf{F}_P\} \\ \{\mathbf{R}\} \end{Bmatrix} \quad (3.111)$$

ここで,

$$[\mathbf{C}_{AcP}] = \begin{bmatrix} [\mathbf{C}_{sa}] \\ [\mathbf{C}_{fa}] \end{bmatrix} \quad (3.112)$$

である。

### 3.2.3 弾性体場と多孔質弾性体場の連成

弾性体-多孔質弾性体の境界面での連続条件は次式で与えられる。

$$\{\mathbf{u}\} = \{\mathbf{W}\} \quad (3.113)$$

$$(\{\mathbf{U}\} - \{\mathbf{u}\})^T \{\mathbf{n}\} = 0 \quad (3.114)$$

式 (3.113) は固体変位の連続, 式 (3.114) は境界上で固体変位, 流体変位の法線方向成分は等しく, 相対流れが生じないことを表す。これらは連成系の全体マトリックスを構築する際に共有節点に対応するマトリックスの値を加算することで達成される。また, 法線方向応力の連続は変位を用いた振動の有限要素解析においては自然に変位の連続を課すことで自然に満たされる。

### 3.2.4 多孔質弾性体場同士の連成

多孔質弾性体同士の境界面での連続条件は次式で与えられる。

$$\{\mathbf{u}_1\} = \{\mathbf{u}_2\} \quad (3.115)$$

$$\phi_1(\{\mathbf{U}_1\} - \{\mathbf{u}_1\})^T \{\mathbf{n}\} = \phi_2(\{\mathbf{U}_2\} - \{\mathbf{u}_2\})^T \{\mathbf{n}\} \quad (3.116)$$

式 (3.115) は固体変位の連続, 式 (3.116) は境界上で相対流れの法線方向成分が等しいことを意味する。これらも同様に固体変位, 流体変位の自由度を消去することで達成され, 有限要素法では連成系の全体マトリックスを算出する際, 対応する値を加算することとなる。



### 3.2.5 音場・膜振動場・多孔質弾性体場の連成

#### 膜が音場に挟まれる場合

膜に対し、両側の音場から受ける音圧差  $p_1 - p_2$  が外力  $f$  として働く。従って、式 (3.33) の右辺外力項は次式のように書ける。

$$\begin{aligned} \iint_M w_m f dS &= \iint_M w_m (p_1 - p_2) dS \\ &= \iint_M \{\boldsymbol{\eta}_e\}^T \{\mathbf{N}^m\} \{\mathbf{N}_1^a\}^T \{\mathbf{P}_{1,e}\} dS - \iint_M \{\boldsymbol{\eta}_e\}^T \{\mathbf{N}^m\} \{\mathbf{N}_2^a\}^T \{\mathbf{P}_{2,e}\} dS \\ &= \{\boldsymbol{\eta}_e\}^T [\mathbf{C}_{ma}] \{\mathbf{P}_{1,e}\} - \{\boldsymbol{\eta}_e\}^T [\mathbf{C}_{ma}] \{\mathbf{P}_{2,e}\} \end{aligned} \quad (3.117)$$

ここで  $[\mathbf{C}_{ma}]$  は下式で定義される。

$$[\mathbf{C}_{ma}] = \iint_M \{\mathbf{N}^m\} \{\mathbf{N}^a\}^T dS \quad (3.118)$$

一方膜表面の音場から見ると、膜は振動境界と見なすことができ、下式の関係が膜面上で成り立つ。

$$\frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}} = \rho_0 \omega^2 \eta$$

弾性体の場合と同様に式 (3.3) の右辺第二項は次式のように表される。

$$\begin{aligned} \iint_{\Gamma} w \frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}} dS &= \iint_{\Gamma} w \rho_0 \omega^2 \eta dS \\ &= \rho_0 \omega^2 \iint_{\Gamma} \{\mathbf{P}_{1,e}\}^T \{\mathbf{N}^a\} \{\mathbf{N}^m\} \{\boldsymbol{\eta}_e\} dS \\ &= \{\mathbf{P}_{1,e}\}^T \rho_0 \omega^2 [\mathbf{C}_{ma}]^T \{\boldsymbol{\eta}_e\} \end{aligned} \quad (3.119)$$

裏面では膜面の音圧傾度と振動変位の関係は下式のように書ける。

$$\frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}} = -\rho_0 \omega^2 \eta$$

従って式 (3.3) の右辺第二項は次式のように表される。

$$\begin{aligned} \iint_{\Gamma} w \frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}} dS &= - \iint_{\Gamma} w \rho_0 \omega^2 \eta dS \\ &= -\rho_0 \omega^2 \iint_{\Gamma} \{\mathbf{P}_{2,e}\}^T \{\mathbf{N}^a\} \{\mathbf{N}^m\} \{\boldsymbol{\eta}_e\} dS \\ &= -\{\mathbf{P}_{2,e}\}^T \rho_0 \omega^2 [\mathbf{C}_{ma}]^T \{\boldsymbol{\eta}_e\} \end{aligned} \quad (3.120)$$

以上の項を含めると、膜が音場に挟まれる場合の連成系のマトリックスは下式のように書ける。

$$\begin{bmatrix}
[\mathbf{K}_m] - \omega^2[\mathbf{M}_m] & -[\mathbf{C}_{ma}] & 0 \\
-[\mathbf{C}_{ma}] & \frac{1}{\rho_0\omega^2}[\mathbf{K}_{Ac,1}] - \frac{1}{\rho_0}[\mathbf{M}_{Ac,1}] + \frac{jk}{\rho_0\omega^2}[\mathbf{C}_{Ac,1}] & 0 \\
[\mathbf{C}_{ma}] & 0 & \frac{1}{\rho_0\omega^2}[\mathbf{K}_{Ac,2}] - \frac{1}{\rho_0}[\mathbf{M}_{Ac,2}] + \frac{jk}{\rho_0\omega^2}[\mathbf{C}_{Ac,2}]
\end{bmatrix}
\begin{Bmatrix}
\{\eta\} \\
\{\mathbf{P}_1\} \\
\{\mathbf{P}_2\}
\end{Bmatrix}
=
\begin{Bmatrix}
\{\mathbf{R}_m\} \\
\{\mathbf{R}_1\} \\
\{\mathbf{R}_2\}
\end{Bmatrix}
\quad (3.121)$$

#### 膜が音場と多孔質弾性体場に挟まれる場合

膜と多孔質弾性体の連成条件は式 (3.113), (3.114) で表される。一方音場から見た膜振動場は、弾性体の振動場と同等の条件であると考えられる。また、膜振動場に対しては片面で課される音圧に対する仕事を考えればよい。式 (3.117) の片面の音圧のみを考慮すれば良い。

#### 膜が多孔質弾性体場に挟まれる場合

両面の多孔質弾性体と膜について式 (3.113), (3.114) の連成条件が課されることとなる。

### 3.3 要素形状と内挿関数

ここでは先の節までに述べてきた内挿関数について詳しく述べる。先にも述べたように、要素内部の物理量は、要素節点での代表値から内挿 (補間) される。この時、内挿に用いる節点数により補間の次数が変わる。本論文においては、要素内部は二次補間することとする。従って、以下では特に 6 節点三角形要素、10 節点四面体要素について説明する。

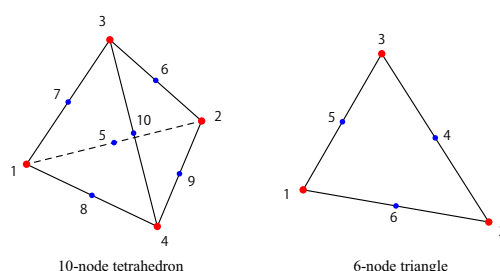


Fig. 3.5: Shapes to divide the physical field.

ここで、特に四面体要素の中間節点の番号付けについては多少の任意性があることに注意する必要がある。本論文では解析の要素分割を行う際、Gmsh というフリーソフト [15] を用いたため、それらによる番号付けにより、以降の理論を展開する。

#### 3.3.1 四面体要素

本論文において音場、弾性体場、多孔質弾性体場は 10 節点四面体により要素分割を行う。四面体要素を用いて分割を行う場合、境界要素は 6 節点三角形要素となる。

#### 局所座標

Fig.3.6 のように四面体の各辺に沿った座標系を考える。

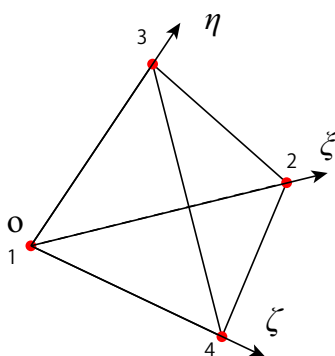


Fig. 3.6: Local coordinate for a tetrahedron.

### 体積座標

下式で定義される座標  $(L_1, L_2, L_3, L_4)$  を導入する。

$$\begin{aligned} x'_1 &= L_1 x_1^1 + L_2 x_1^2 + L_3 x_1^3 + L_4 x_1^4 \\ x'_2 &= L_1 x_2^1 + L_2 x_2^2 + L_3 x_2^3 + L_4 x_2^4 \\ x'_3 &= L_1 x_3^1 + L_2 x_3^2 + L_3 x_3^3 + L_4 x_3^4 \\ 1 &= L_1 + L_2 + L_3 + L_4 \end{aligned} \quad (3.122)$$

$(x_1^i, x_2^i, x_3^i)$  は四面体の頂点節点である。これらの座標  $L_1 \sim L_4$  は物理的には要素内の点  $P(x'_1, x'_2, x'_3)$  が作る四面体と要素四面体の体積比を表している。

体積座標は局所座標とは次のような関係にある。

$$\begin{aligned} L_1 &= 1 - \xi - \eta - \zeta \\ L_2 &= \xi \\ L_3 &= \eta \\ L_4 &= \zeta \end{aligned} \quad (3.123)$$

### 内挿関数

体積座標は物理的意味からも分かるよう、各頂点における値 1 から、相対面上での値 0 までをとる。これらの特徴から、10 節点四面体においては、内挿関数を次式のようにとる。

$$\begin{aligned} N_1 &= L_1(2L_1 - 1) \\ N_2 &= L_2(2L_2 - 1) \\ N_3 &= L_3(2L_3 - 1) \\ N_4 &= L_4(2L_4 - 1) \\ N_5 &= 4L_1L_2 \\ N_6 &= 4L_2L_3 \\ N_7 &= 4L_3L_1 \\ N_8 &= 4L_1L_4 \\ N_9 &= 4L_4L_3 \\ N_{10} &= 4L_2L_4 \end{aligned} \quad (3.124)$$

内挿関数は対応する節点上で 1, その他の節点上では 0 をとるという特徴がある。

ここで、要素内の座標  $(x_1, x_2, x_3)$  は下式のように表されるものとする。

$$\begin{aligned}x_1 &= N_i x_1^i \\x_2 &= N_i x_2^i \\x_3 &= N_i x_3^i\end{aligned}$$

### 内挿関数の微分形

以上の内挿関数は体積座標を用いて表されている。先に示した剛性マトリックスの計算には全体座標系での空間偏微分値を算出する必要がある。しかし、この値は陽な形で表示することは大変な労力であり、有限要素法のプログラムを構築する際に必ずしも効率的であるとは限らない。ここでは座標変換を用い、局所座標系で数値積分を行うことで積分を処理する手法を説明する。

局所座標系と全体座標系での内挿関数の微分形は次のような関係が成り立つ。

$$\begin{aligned}\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \xi} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi} & \frac{\partial x_3}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x_1}{\partial \eta} & \frac{\partial x_2}{\partial \eta} & \frac{\partial x_3}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x_1}{\partial \zeta} & \frac{\partial x_2}{\partial \zeta} & \frac{\partial x_3}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x_1} \\ \frac{\partial N_i}{\partial x_2} \\ \frac{\partial N_i}{\partial x_3} \end{Bmatrix} = [\mathbf{J}] \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x_1} \\ \frac{\partial N_i}{\partial x_2} \\ \frac{\partial N_i}{\partial x_3} \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x_1} \\ \frac{\partial N_i}{\partial x_2} \\ \frac{\partial N_i}{\partial x_3} \end{Bmatrix} &= [\mathbf{J}]^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} \end{Bmatrix} \quad (3.125)\end{aligned}$$

ヤコビアン  $[\mathbf{J}]$  は局所座標系での偏微分と各節点座標値から下式で計算することができる。

$$[\mathbf{J}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} x_1^i & \frac{\partial N_i}{\partial \xi} x_2^i & \frac{\partial N_i}{\partial \xi} x_3^i \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} x_1^i & \frac{\partial N_i}{\partial \eta} x_2^i & \frac{\partial N_i}{\partial \eta} x_3^i \\ \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} x_1^i & \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} x_2^i & \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} x_3^i \end{bmatrix}$$

チェインルールより以下の関係式が成り立つ。

$$\begin{aligned}\frac{\partial N_i}{\partial \xi} &= \frac{\partial L_1}{\partial \xi} \frac{\partial N_i}{\partial L_1} + \frac{\partial L_2}{\partial \xi} \frac{\partial N_i}{\partial L_2} + \frac{\partial L_3}{\partial \xi} \frac{\partial N_i}{\partial L_3} + \frac{\partial L_4}{\partial \xi} \frac{\partial N_i}{\partial L_4} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} &= \frac{\partial L_1}{\partial \eta} \frac{\partial N_i}{\partial L_1} + \frac{\partial L_2}{\partial \eta} \frac{\partial N_i}{\partial L_2} + \frac{\partial L_3}{\partial \eta} \frac{\partial N_i}{\partial L_3} + \frac{\partial L_4}{\partial \eta} \frac{\partial N_i}{\partial L_4} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} &= \frac{\partial L_1}{\partial \zeta} \frac{\partial N_i}{\partial L_1} + \frac{\partial L_2}{\partial \zeta} \frac{\partial N_i}{\partial L_2} + \frac{\partial L_3}{\partial \zeta} \frac{\partial N_i}{\partial L_3} + \frac{\partial L_4}{\partial \zeta} \frac{\partial N_i}{\partial L_4}\end{aligned}$$

従って式 (3.123) より以下のように表すことができる。

$$\begin{aligned}\frac{\partial N_i}{\partial \xi} &= \frac{\partial N_i}{\partial L_2} - \frac{\partial N_i}{\partial L_1} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} &= \frac{\partial N_i}{\partial L_3} - \frac{\partial N_i}{\partial L_1} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} &= \frac{\partial N_i}{\partial L_4} - \frac{\partial N_i}{\partial L_1}\end{aligned}$$

形状関数  $N_1 \sim N_{10}$  に対し上式を計算すると

$\frac{\partial N_1}{\partial \xi} = 1 - 4L_1$	$\frac{\partial N_1}{\partial \eta} = 1 - 4L_1$	$\frac{\partial N_1}{\partial \zeta} = 1 - 4L_1$
$\frac{\partial N_2}{\partial \xi} = 4L_2 - 1$	$\frac{\partial N_2}{\partial \eta} = 0$	$\frac{\partial N_2}{\partial \zeta} = 0$
$\frac{\partial N_3}{\partial \xi} = 0$	$\frac{\partial N_3}{\partial \eta} = 4L_3 - 1$	$\frac{\partial N_3}{\partial \zeta} = 0$
$\frac{\partial N_4}{\partial \xi} = 0$	$\frac{\partial N_4}{\partial \eta} = 0$	$\frac{\partial N_4}{\partial \zeta} = 4L_4 - 1$
$\frac{\partial N_5}{\partial \xi} = 4(L_1 - L_2)$	$\frac{\partial N_5}{\partial \eta} = -4L_2$	$\frac{\partial N_5}{\partial \zeta} = -4L_2$
$\frac{\partial N_6}{\partial \xi} = 4L_3$	$\frac{\partial N_6}{\partial \eta} = 4L_2$	$\frac{\partial N_6}{\partial \zeta} = 0$
$\frac{\partial N_7}{\partial \xi} = -4L_3$	$\frac{\partial N_7}{\partial \eta} = 4(L_1 - L_3)$	$\frac{\partial N_7}{\partial \zeta} = -4L_3$
$\frac{\partial N_8}{\partial \xi} = -4L_4$	$\frac{\partial N_8}{\partial \eta} = -4L_4$	$\frac{\partial N_8}{\partial \zeta} = 4(L_1 - L_4)$
$\frac{\partial N_9}{\partial \xi} = 0$	$\frac{\partial N_9}{\partial \eta} = 4L_4$	$\frac{\partial N_9}{\partial \zeta} = 4L_3$
$\frac{\partial N_{10}}{\partial \xi} = 4L_4$	$\frac{\partial N_{10}}{\partial \eta} = 0$	$\frac{\partial N_{10}}{\partial \zeta} = 4L_2$

### 数値積分

以上に示した関係から、局所座標系における形状関数の微分形を用いて全体座標系での微分を表現することができる。ただし、先にも述べたようにこれらは高次要素においては一般的に陽な形式で書き下すことが難しいため、数値積分を行うことになる。

本論文では Hammer の積分点 [20] を用いた Gauss の求積法により数値積分を行う。この場合、積分点において、局所座標での形状関数の微分形の値が計算されれば良い。

積分点は体積座標を用いて表される。従って、各積分点において、内挿関数の局所座標系での微分値が数値的に求められることとなる。

例えば、弾性体の剛性マトリックスは式 (3.125) により各積分点での全体座標系での内挿関数の微分値を算出し、重みを掛け、次式のように級数の形で求められる。

$$\iiint_{\Omega_{E,e}} [\mathbf{B}]^T [\mathbf{D}] [\mathbf{B}] dV = \frac{1}{6} \sum_i w_i [\mathbf{B}_i]^T [\mathbf{D}] [\mathbf{B}_i] \det |\mathbf{J}| \quad (3.126)$$

また同様に慣性マトリックスについても以下のように書ける。

$$\iiint_{\Omega_{E,e}} [\mathbf{N}]^T [\mathbf{N}] dV = \frac{1}{6} \sum_i w_i [\mathbf{N}_i]^T [\mathbf{N}_i] \det |\mathbf{J}| \quad (3.127)$$

### 3.3.2 三角形要素

三角形要素は四面体要素の一部でもあり、以上の議論により自然に類推される。

#### 局所座標

Fig.3.7 のように三角形の辺に沿った座標系を考える。

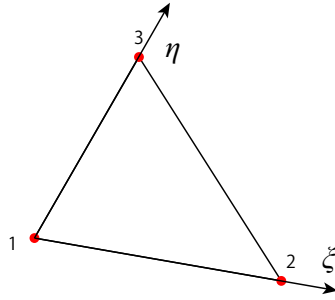


Fig. 3.7: Local coordinate for a triangle

#### 面積座標

下式で定義される座標  $(L_1^t, L_2^t, L_3^t)$  を導入する。

$$\begin{aligned} x'_1 &= L_1^t x_1^1 + L_2^t x_1^2 + L_3^t x_1^3 \\ x'_2 &= L_1^t x_2^1 + L_2^t x_2^2 + L_3^t x_2^3 \\ 1 &= L_1^t + L_2^t + L_3^t \end{aligned} \quad (3.128)$$

$(x_1^i, x_2^i, x_3^i)$  は三角形の頂点節点である。これらの座標  $L_1^t \sim L_3^t$  は物理的には要素内の点  $P(x'_1, x'_2, x'_3)$  が作る三角形と要素三角形の面積比を表している。

面積座標は局所座標とは次のような関係にある。

$$\begin{aligned} L_1^t &= 1 - \xi - \eta \\ L_2^t &= \xi \\ L_3^t &= \eta \end{aligned} \quad (3.129)$$

#### 内挿関数

6 節点三角形要素においては、内挿関数を次式のようにとる。

$$\begin{aligned}
N_1 &= L_1(2L_1 - 1) \\
N_2 &= L_2(2L_2 - 1) \\
N_3 &= L_3(2L_3 - 1) \\
N_4 &= 4L_1L_2 \\
N_5 &= 4L_2L_3 \\
N_6 &= 4L_3L_1
\end{aligned}$$

ここで、要素内の座標  $(x_1, x_2)$  は下式のように表されるものとする。

$$\begin{aligned}
x_1 &= N_i x_1^i \\
x_2 &= N_i x_2^i
\end{aligned}$$

### 内挿関数の微分形

局所座標系と全体座標系での内挿関数の微分形は次のような関係が成り立つ。

$$\begin{aligned}
\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \xi} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x_1}{\partial \eta} & \frac{\partial x_2}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x_1} \\ \frac{\partial N_i}{\partial x_2} \end{Bmatrix} = [\mathbf{J}_t] \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x_1} \\ \frac{\partial N_i}{\partial x_2} \end{Bmatrix} \\
\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x_1} \\ \frac{\partial N_i}{\partial x_2} \end{Bmatrix} &= [\mathbf{J}_t]^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \tag{3.130}
\end{aligned}$$

ヤコビアン  $[\mathbf{J}_t]$  は局所座標系での偏微分と各節点座標値から下式で計算することができる。

$$[\mathbf{J}_t] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} x_1^i & \frac{\partial N_i}{\partial \xi} x_2^i \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} x_1^i & \frac{\partial N_i}{\partial \eta} x_2^i \end{bmatrix}$$

チェインルールより以下の関係式が成り立つ。

$$\begin{aligned}
\frac{\partial N_i}{\partial \xi} &= \frac{\partial L_1}{\partial \xi} \frac{\partial N_i}{\partial L_1} + \frac{\partial L_2}{\partial \xi} \frac{\partial N_i}{\partial L_2} + \frac{\partial L_3}{\partial \xi} \frac{\partial N_i}{\partial L_3} \\
\frac{\partial N_i}{\partial \eta} &= \frac{\partial L_1}{\partial \eta} \frac{\partial N_i}{\partial L_1} + \frac{\partial L_2}{\partial \eta} \frac{\partial N_i}{\partial L_2} + \frac{\partial L_3}{\partial \eta} \frac{\partial N_i}{\partial L_3}
\end{aligned}$$

従って式 (3.123) より以下のように表すことができる。

$$\begin{aligned}
\frac{\partial N_i}{\partial \xi} &= \frac{\partial N_i}{\partial L_2} - \frac{\partial N_i}{\partial L_1} \\
\frac{\partial N_i}{\partial \eta} &= \frac{\partial N_i}{\partial L_3} - \frac{\partial N_i}{\partial L_1}
\end{aligned}$$

形状関数  $N_1 \sim N_6$  に対し上式を計算すると



$$\begin{aligned}
\frac{\partial N_1}{\partial \xi} &= 1 - 4L_1 & \frac{\partial N_1}{\partial \eta} &= 1 - 4L_1 \\
\frac{\partial N_2}{\partial \xi} &= 4L_2 - 1 & \frac{\partial N_2}{\partial \eta} &= 0 \\
\frac{\partial N_3}{\partial \xi} &= 0 & \frac{\partial N_3}{\partial \eta} &= 4L_3 - 1 \\
\frac{\partial N_4}{\partial \xi} &= 4(L_1 - L_2) & \frac{\partial N_4}{\partial \eta} &= -4L_2 \\
\frac{\partial N_5}{\partial \xi} &= 4L_3 & \frac{\partial N_5}{\partial \eta} &= 4L_2 \\
\frac{\partial N_6}{\partial \xi} &= -4L_3 & \frac{\partial N_6}{\partial \eta} &= 4(L_1 - L_3)
\end{aligned}$$

### 数値積分

三角形要素においても同様に Hammer の積分点と重みを用いて数値積分を行う。例えば、膜要素の剛性マトリックスは次のように書ける。

$$\iint\int_M [\mathbf{B}^m]^T [\mathbf{B}^m] dS = \frac{1}{2} \sum_i w_i [\mathbf{B}_i^m]^T [\mathbf{B}_i^m] \det|\mathbf{J}_t| \quad (3.131)$$

また同様に慣性マトリックスについても以下のように書ける。

$$\iint\int_M \{\mathbf{N}^m\}^T \{\mathbf{N}^m\} dS = \frac{1}{2} \sum_i w_i \{\mathbf{N}_i^m\}^T \{\mathbf{N}_i^m\} \det|\mathbf{J}_t| \quad (3.132)$$

## 第 4 章

# 単層多孔質材料の吸遮音特性解析

### 4.1 はじめに

本章では、積層材料の吸遮音特性を解析する以前の検討として、単層多孔質材料の吸遮音特性について検討を行う。

本論文において多孔質材は第二章に示した Biot theory により記述される多孔質弾性体として取り扱うため、吸音率や透過損失の特性は音響問題において頻繁に利用される剛骨格モデル (等価流体モデル) とは異なる複雑な挙動となる。ここでは剛骨格モデルとの比較を通して、弾性骨格モデルによる吸遮音特性の振る舞いを整理する。

また、音響管問題を扱うことで、多孔質弾性体の解析の妥当性を検証するとともに、本研究の第一の目的と定めた、音響管計測における音響管計測における弾性材料の測定において、支持条件が測定値に与える影響を考察する。

#### 4.1.1 音響管計測について

吸遮音特性を測定する方法として古くから音響管を用いた計測が行われている。それらの初期の手法としては定在波比法と呼ばれる計測手法であった。定在波比法は管内で音圧を計測し、定在波の最大振幅と最小振幅の音圧比から吸音率を算出する方法である。その後、デジタル信号処理技術の発展により、伝達関数法と呼ばれる手法が確立され、JIS A 1405-2:2007 に規格が制定されている [11]。その理論は本章 2 節に譲ることとする。この伝達関数法を用いた音響管計測の特徴を、通常製品の仕様や、室内音響設計に用いられるデータを測定する手法である残響室法と比較して Tab(4.1) にまとめる。

このような特徴から、音響管計測が材料開発の初期段階で広く利用されることは容易に想像できる。また、それらの精度向上が、製品開発における時間的・経済的コストの削減に繋がることは言うまでも無い。

また、基本的かつ非常に重要な前提であるが、音響管計測において得られるデータは、音響管内の測定誌料が支持条件を含め、鏡像で無限に広がりを持つ場合の試料面に対し垂直入射する条件と等価なデータが得られる (Fig4.1)。従って、弾性材料は音響管壁面でスリップ条件である場合のみ、無限大面積試料に対する垂直入射と等価な条件となる。一

Tab. 4.1: Comparison between the impedance tube method and reverberation room method.

	音響管法	残響室法
試料サイズ	音響管断面程度の小さいサイズ	吸音率，透過損失共に $10[\text{m}^2]$ 以上
測定点の選定	試料面近傍以外なら柔軟に対応可能であり，最大 4 点の計測で十分である。	音場の拡散性に依じて，測定点とその数が結果に大きく影響する。
入射条件	垂直入射	ランダム入射
周辺支持条件	多孔質材料の骨格の弾性率が大きい場合は影響が無いが，弾性材料では大きな影響を受ける。	試料面積が大きい分，音響管法に比べ影響は少ないが，試料端部は面積効果により場の変化が大きく結果に大きく影響する。
測定データ	複素反射率，複素透過率，材料内部の特性インピーダンス，伝搬定数などが得られる。また，非常に細かい周波数分解能で結果が得られる。	スカラー量をベースとした測定理論であるため，最終的な吸音率，透過損失が測定できる。周波数分解能は通常 1/1 または 1/3 オクターブ中心周波数である。


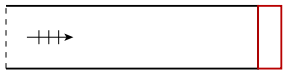
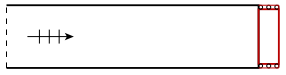
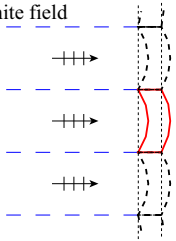
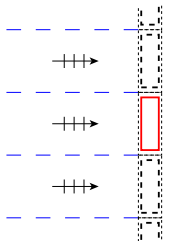
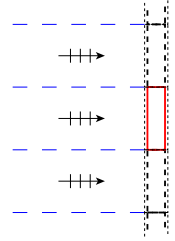
Elastic Material with Fixed Edge	Elastic Material with Free Edge	Elastic Material with Slip Edge
In Tube Configuration 		
Equivalent infinite field 		

Fig. 4.1: Support conditions and their equivalent fields.

方，管内における流体の振動場は境界目での粘性や熱伝導を考慮しなければ，自然に無限大面積試料への垂直入射条件と等価となる。

しかしながら，実際にスリップ条件を達成することは難しく，JIS においても音響管計測において測定可能な試料は剛骨格と見なせる多孔質材のみに適用可能であるとされている [11]。

## 4.1.2 伝達関数法 need to modify the equations

## 理論

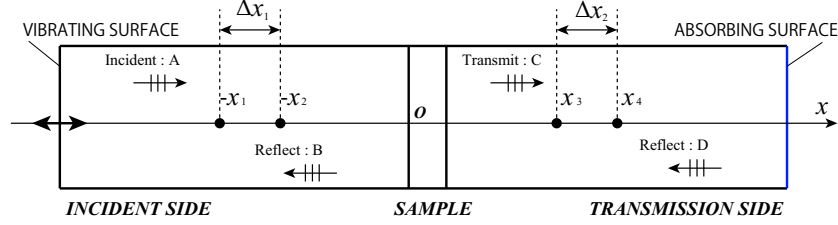


Fig. 4.2: Impedance tube .

有限要素法により算出される各点  $p_1 \sim p_4$  の複素音圧が式 (4.1)~(4.4) で記述されると仮定する。但し、計算の便宜上材料厚みを 0 とする。

$$p_1 = Ae^{-jk(-x_1)} + Be^{jk(-x_1)} \quad (4.1)$$

$$p_2 = Ae^{-jk(-x_2)} + Be^{jk(-x_2)} \quad (4.2)$$

$$p_3 = Ce^{-jk(x_3)} + De^{jk(x_3)} \quad (4.3)$$

$$p_4 = Ce^{-jk(x_4)} + De^{jk(x_4)} \quad (4.4)$$

これらを用いて、入射側、透過側で進行波と後退波を分離することができ、その複素振幅は式 (4.5)~(4.8) のように表すことができる。

$$A = (p_1e^{-jkx_2} - p_2e^{-jkx_1})/2j \sin k\Delta x_1 \quad (4.5)$$

$$B = (p_2e^{jkx_1} - p_1e^{jkx_2})/2j \sin k\Delta x_1 \quad (4.6)$$

$$C = (p_3e^{jkx_4} - p_4e^{jkx_3})/2j \sin k\Delta x_2 \quad (4.7)$$

$$D = (p_4e^{-jkx_3} - p_3e^{-jkx_4})/2j \sin k\Delta x_2 \quad (4.8)$$

これより、入射波振幅  $A$ 、反射波振幅  $B$ 、透過波振幅  $C$  を用いて複素音圧反射率  $r_n$ 、音響透過率  $\tau_n$ 、垂直入射吸音率  $\alpha_n$ 、透過損失  $R_n$  を下式のように算出することが出来る。

$$r_n = \frac{B}{A} = \frac{p_2e^{jkx_1} - p_1e^{jkx_2}}{p_1e^{-jkx_2} - p_2e^{-jkx_1}} \quad (4.9)$$

$$\tau_n = \left| \frac{C}{A} \right|^2 = \left| \frac{\sin k\Delta x_1}{\sin k\Delta x_2} \frac{p_3e^{jkx_4} - p_4e^{jkx_3}}{p_1e^{-jkx_2} - p_2e^{-jkx_1}} \right|^2 \quad (4.10)$$

$$\alpha_n = 1 - |r_n|^2 \quad (4.11)$$

$$R_n = 10 \log_{10}(1/\tau_n) \quad (4.12)$$

### 適用限界周波数

一般に広く用いられる音響管は円筒管であることが多い。しかし、音響管自体の作成の容易さから方形断面の音響管が用いられることも少なくない。

伝達関数法による音響管計測には主に2つの測定上限周波数が存在する。

第一に管の断面方向に定在波が存在せず、音響管内では0次モードで伝搬することが条件となる。

円形、方形断面管の測定限界周波数は円筒管の内径、または方形管の長辺の長さを  $r_d$  とするとこの上限周波数  $f_{ul}^1$  は下式で与えられる。

$$f_{ul}^1 = \begin{cases} 0.58 \cdot c_0 / r_d & (\text{for Cylindrical tube}) \\ 0.50 \cdot c_0 / r_d & (\text{for Rectangular tube}) \end{cases}$$

この周波数以下では音波は音響管内を0次モードで伝搬し、先に示した理論が適用可能となる。

第2に、マイクロフォン間隔による制限がある。この上限周波数  $f_{ul}^2$  は、最も大きいマイクロフォン間隔を  $\Delta x$  とすると下式で与えられる。

$$f_{ul}^2 = 0.50 \cdot c_0 / \Delta x$$

$f_{ul}^1, f_{ul}^2$  の内小さいものが測定上限周波数となる。

## 4.2 音響管問題における準備的検討

本説では構築した有限要素法プログラムの計算精度に関する検討を行うとともに、試料を側壁固定支持とする場合、音響管の形状や寸法による基本的な結果の差異を明らかにする。

### 4.2.1 側壁緩支持条件

先にも述べたように、弾性体、多孔質弾性体が側壁で緩支持条件にある場合、音響管内で観測される吸音率、透過損失は無限大面積試料に対し垂直入射する条件と等価である。

ここでは有限要素法において、側壁緩支持条件の多孔質弾性体の吸音率、透過損失、膜・弾性体の透過損失について、計算の妥当性の検証を行う。

ここでは、音響管は半径 25mm の円筒管を模擬した 16 角形管、円筒管と等断面積の正方形管 (一辺 44mm) を用いる。

側壁緩支持条件においては流体・固体共にスリップ条件であるが、スリップ条件を正方形管は側壁で面外方向変位拘束とし、16 角形管は断面内変位拘束とした。16 角形断面管において拘束条件を断面内変位拘束としたのは、一般に全体座標形における座標軸と直交しない面に対して面外への変位拘束を導入することが煩雑であるためである。従って、16 角形管では材料厚み方向への変位のみを自由としているため、この影響も検討することとする。最大長 1.25[cm] となるよう、要素分割は行った。

多孔質弾性体の吸音率、透過損失の計算結果をそれぞれ Fig. 4.3, 4.4, 4.5 に示す。

どちらの管においても、上記の支持条件で解析することで、TMM の結果と良く一致した。またこれは、多孔質弾性体要素の解析が妥当に計算されていることを意味する。

この場合、円筒管における拘束条件は妥当なものであると考えられる。音響管内での材料への入射波は一次元的な平面波の垂直入射であるため、面内で加振力の分布は無いと考えられ、厚み方向に対する自由度のみで現象を表すには十分であると推察される。

### 4.2.2 管断面形状に関する検討

ここでは管の断面形状により、固定支持条件に対しどのような測定値の変化が現れるかについて考察する。

先の 2 つの形状に加え、8 角形管、等断面積アスペクト比 1:2, 1:4, 1:8 の扁平な方形管、また断面円と等周長のアスペクト比 1:1 の計 7 つの形状の音響管について、固定支持される条件の計算結果を Fig. 4.6 に示す。

16 角形管が周長、断面積、側面積において最も円筒形に近く、実務の場では円筒管が多く用いられることから、実測との比較を念頭に入れ、ここでは 16 角形管とその他の形状を比較する。

吸音率について、多孔質材が側壁に固定される事により、みかけの剛性が大きくなり、

固体共振による吸音率のピークがより高周波数域にシフトしている。固定支持による影響を見るという意味で、このピークのシフト量が同程度であることが好ましい。

アスペクト比 1:1, 8 角形管, 等周長管, アスペクト比 1:2, 1:4, 1:8 の順に 16 角形管に近い周波数で吸音率にピークが現れている。

アスペクト比が大きいほど固体のピークが高周波数域へシフトしている。これは板の周辺支持に見られる等価剛性の上昇と同様に、短辺がその剛性の上昇に大きく関わっていると考えられる。

アスペクト比に関しては透過損失についても同様のことが言える。但し、透過損失のディップは後の節で詳しく述べるが、剪断モードの共振による影響である。このディップはアスペクト比 1:1 とした方形管では多角形管よりも低い周波数で現れている。

以上の議論から、極端なアスペクト比は円筒形音響管との比較という点においては避けるべきであり、剪断モードについてはアスペクト比 1:1 としても、わずかに方形管では低く現れることに留意する必要がある。

### 4.2.3 管径に関する検討

次に断面積による固定支持の影響を考察するため、正方形断面管の一辺を 25, 50, 100[mm] と変化させた場合の計算を行った。結果を Fig.4.7 示す。図中の  $f_{ul}$  は管径 100[mm] に対するものを記している。

一方多孔質材料が側壁に固定される事により、管径が小さいほどみかけの剛性が大きくなり、固体共振による吸音率のピークがより高周波数域にシフトすることが確認される。

透過損失についても、管径が小さいほど剪断共振のディップの現れる周波数は高周波数域へシフトする。

従って、円筒断面の音響管と同等の値を得るためにはアスペクト比だけでなく、断面積についても同等の値とする必要があるといえる。

また同時に音響管計測について、次のようなことが言える。

管径の異なる複数の音響管を用いる場合は、多孔質材料側面を緩支持条件とする必要がある。しかし一般に理想的な緩支持条件は実現され難いため、固体共振による影響を考慮した測定を行う場合には、大きい管径の音響管で測定することで相対的に支持条件の影響を低減できるといえる。

以上の議論より、側壁固定における、FEM におけるモデル作成の簡単のため、以降の検討では正方形断面管を用いることとする。剪断モードによる影響は等断面積の円筒管にくらべわずかに低く現れていると考えられることは再び述べておく。

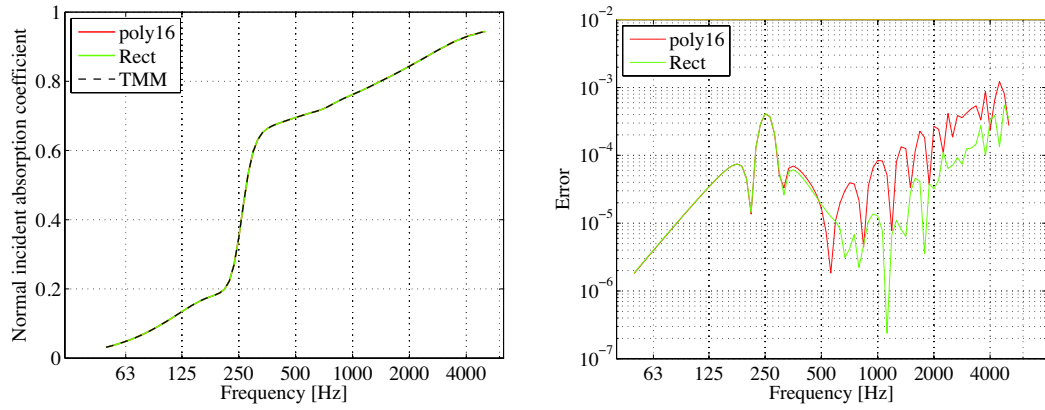


Fig. 4.3: Comparison between the tube shapes. Material is supported loosely on the side wall.  
Left:  $\alpha_n$  Right: Error compared to TMM.

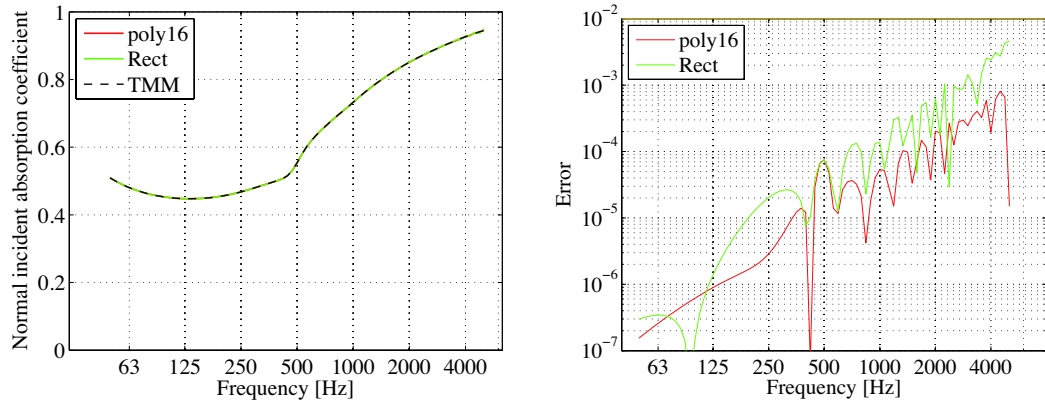


Fig. 4.4: Comparison between the tube shapes. Material is supported loosely on the side wall.  
Left:  $\alpha_n$  seen from incident side Right: Error compared to TMM.

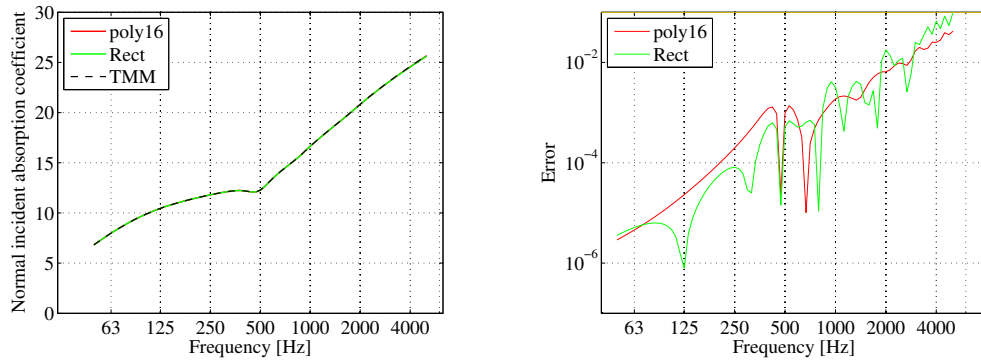


Fig. 4.5: Comparison between the tube shapes. Material is supported loosely on the side wall.  
Left:  $R_n$  Right: Error compared to TMM.



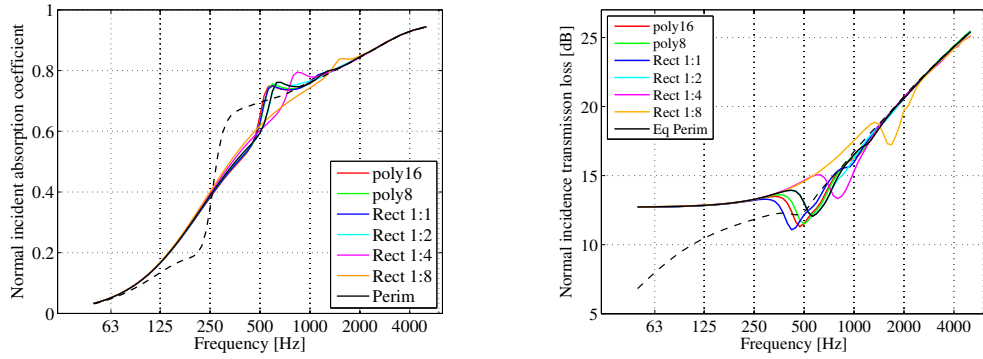


Fig. 4.6: Comparison of the results among the different tube shapes. Material is supported rigidly on the side wall. Left:  $\alpha_n$ , Right:  $R_n$

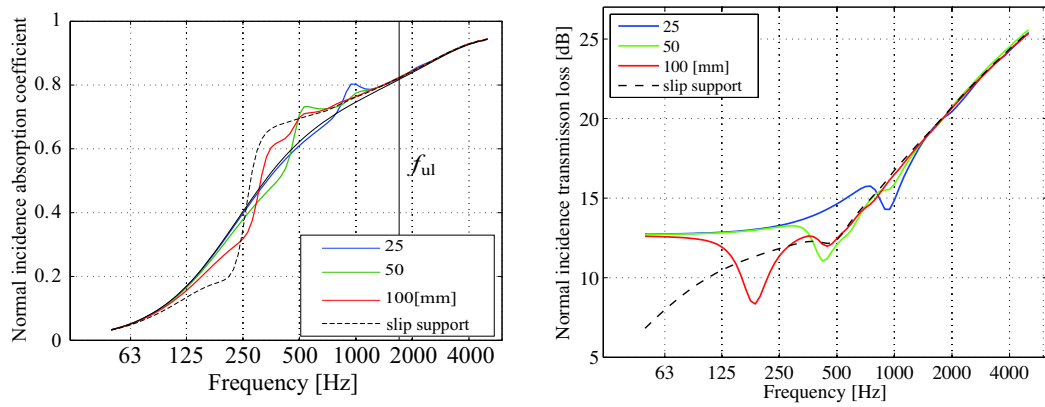


Fig. 4.7: Comparison of the results among the different tube area. Material is supported rigidly on the side wall. Left:  $\alpha_n$  Right:  $R_n$ .

### 4.3 多孔質材料の吸音特性

先にも述べたが，多孔質材料単層の支持条件は実測において最も重要なファクターの一つであると言える。ここでは音響管側壁での支持条件をスリップ支持，固定支持の2条件を想定する。但し，スリップ支持条件の場合，無限大面積試料に対する垂直入射条件と等価となるため，本説以降ではスリップ条件を伝達マトリックス法，固定条件を有限要素法により計算する。

計算に用いたグラスウール 96K の物性値を Table.4.2 に示す。

Tab. 4.2: Physical properties and dimensions of the poroelastic material

	$\alpha_\infty$	$\rho_1$	$\sigma$	$\phi$	$\eta$	$\nu$	$\Lambda$	$\Lambda'$	$N$
		[kg/m <sup>3</sup> ]	[Ns/m <sup>4</sup> ]				[μm]	[μm]	[N/m <sup>2</sup> ]
GW	1.07	96	55000	0.96	0.25	0	50	100	$1.0 \times 10^5$

#### 4.3.1 後壁密着

音響管後壁に GW が密着させた場合の吸音率を Fig.4.8 に示す。

音響管内における多孔質材の振動は音響系と同様に一次元振動系であるので，多孔質材の骨格共振は厚み方向の共振である。従って，材料が薄くなることで，この共振はより高周波数域で現れることが剛骨格モデルと弾性骨格モデルの TMM の結果から見られる。

また，多孔質材料が側壁で固定される場合，この骨格共振のピークが高周波数へとシフトする。これは先の管形状・寸法の検討の節でもふれたが，固定支持されることで材料のみかけの剛性が上昇するためである。

後壁密着条件においては薄い多孔質材においてはその体積に対し，固定される表面積の割り合いが，増えることで，材料全体のみかけの剛性がよりおおきくなっていると考えられる。

従って音響管計測においても，材料厚が薄い場合には骨格共振が大きく影響することは少ないと結論づけられる。

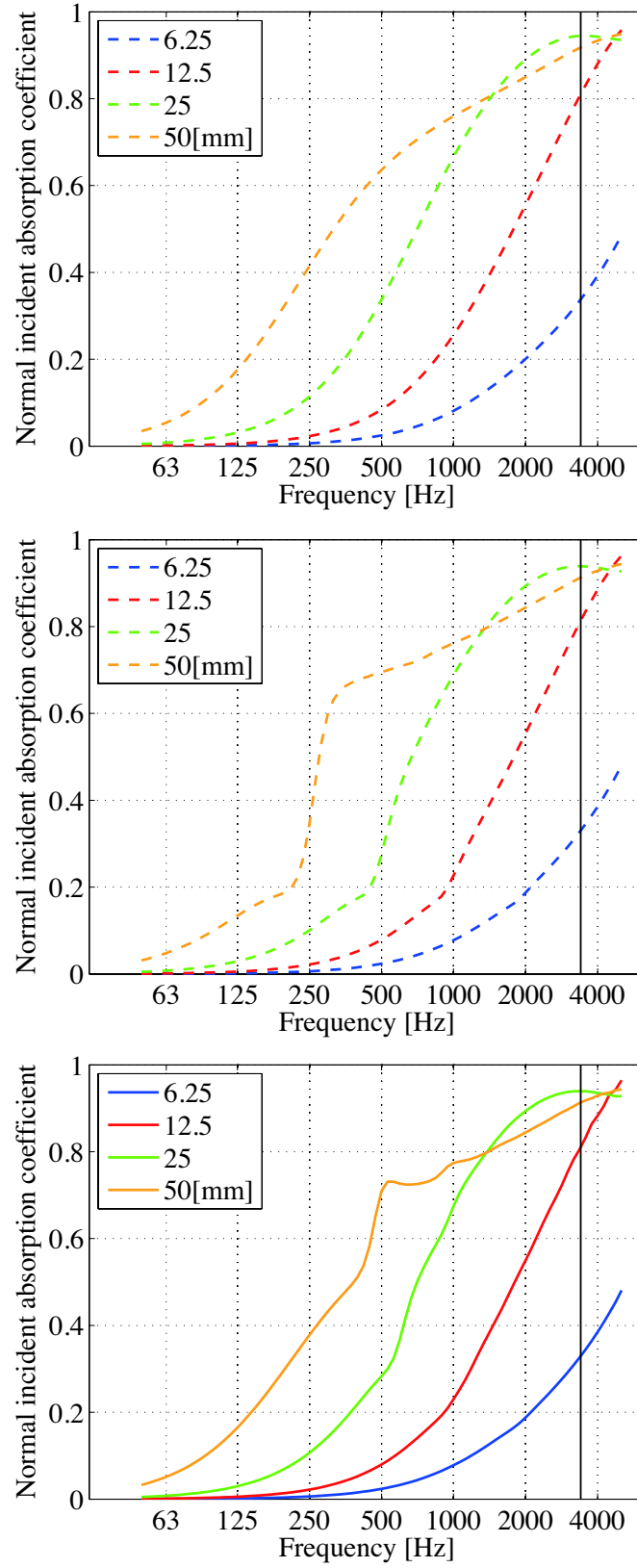


Fig. 4.8:  $\alpha_n$  of the GW in different thickness. Top: Rigid frame model, Middle: Elastic frame model, Bottom: Elastic frame model supported rigidly on the side wall.

### 4.3.2 背後空気層の影響

GW50mm 厚とし、背後空気層を設けた場合の吸音率特性を Fig.4.9 に示す。

多孔質弾性体が非通気で、固体のみを考慮した場合の吸音率を (a) に、剛骨格として流体のみを考慮した場合の吸音率を (b) に表す。

弾性骨格モデルの場合、剛骨格モデルに対して特に空気層が厚い場合低周波数域に大きな吸音率を示す。これは背後空気層がバネ、多孔質材料がマスとなる振動系を形成するためであると考えられる (c)。

側壁が固定されることにより、このようなマクロなバネマス振動系は生じにくくなることから分かる (d)。固体の共振と考えられる吸音率のピークは全ての背後空気層厚において 500Hz 付近に現れていることから、この共振は剪断によるものであると考えられる。

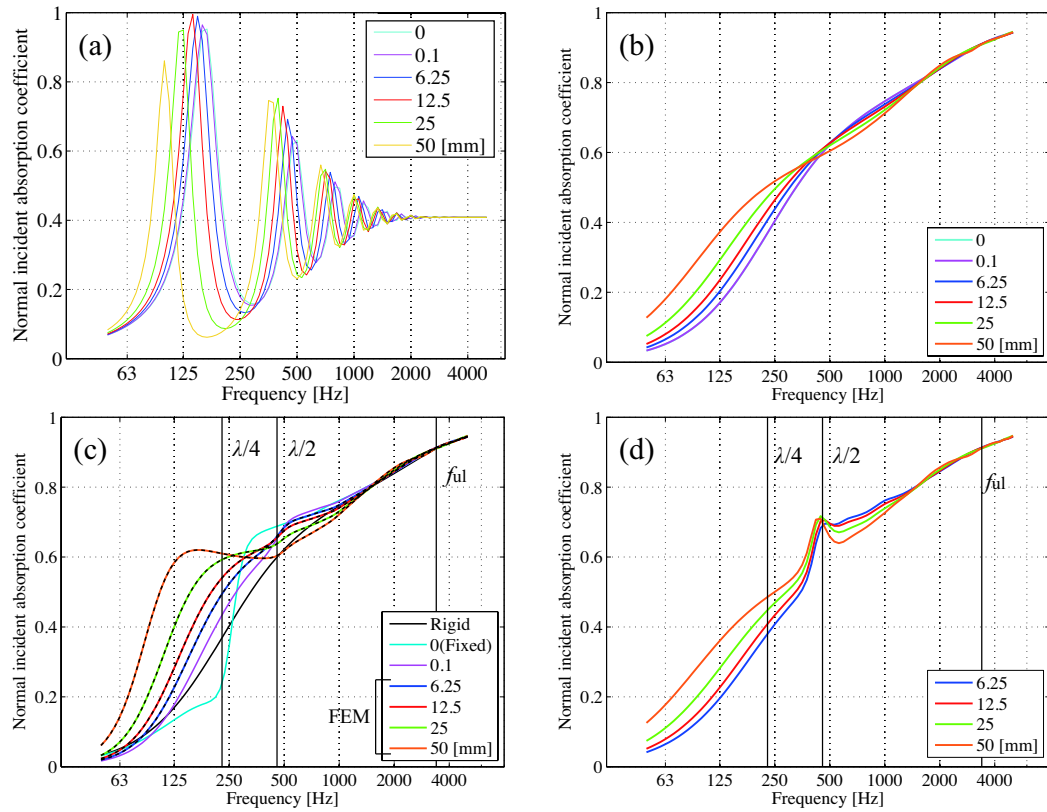


Fig. 4.9: Effect of back gap of the GW which regarded as (a): unbreathable elastic material, (b):Rigid frame model (c) elastic frame model with loosely supported and (d) poroelastic material with rigidly supported on the side wall.

### 4.3.3 流れ抵抗による影響

管径 50mm, 側壁固定支持で流れ抵抗を変化させた場合の垂直入射吸音率の値を Fig.4.10 に示す。また流れ抵抗の変化に伴う粘性特性長と熱的特性長の変化については Johnson のモデル [8] における下の関係式を用い,  $c = 1$  として評価する。

$$\Lambda = \left( \frac{8\eta_0\alpha_\infty}{\sigma\phi} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{c} \quad (4.13)$$

$$\Lambda' = 2\Lambda \quad (4.14)$$

一般に流れ抵抗の小さい多孔質材料においては, 骨格振動の影響は少ないとされている。流れ抵抗が小さい場合 ( $\sigma = 5 \times 10^3$ ) は GW,UF のどちらの材料においても, TMM による弾性骨格モデルと剛骨格モデルの吸音率の値に大きな差がないことから, 骨格振動の影響は小さいことが分かる。流れ抵抗が大きくなるにつれ骨格振動の影響が大きくなり, 側面の固定条件による変化も顕著になる結果となった。

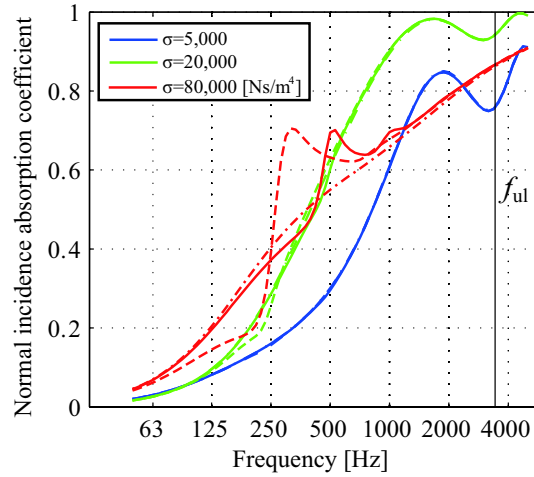


Fig. 4.10:  $\alpha_n$  of the GW supported rigidly on the side wall for flow resistivities variation.

#### 4.3.4 針固定測定に関する検討

骨格振動を抑える目的で測定試料を針固定する場合がある。ここでは多孔質材料の剛性，流れ抵抗の大小と針固定の効果に関する検討を行った結果を示す。ここでは現実的にこれらの値を変更可能な発泡材料を想定し，計算を行った。用いた物性値を Tab.4.3 に示す。

Tab. 4.3: Physical properties and dimensions of the poroelastic material

	$\alpha_\infty$	$\rho_1$ [kg/m <sup>3</sup> ]	$\sigma$ [Ns/m <sup>4</sup> ]	$\phi$	$\eta$	$\nu$	$\Lambda$ [ $\mu$ m]	$\Lambda'$ [ $\mu$ m]	$N$ [N/m <sup>2</sup> ]
GW	1.6	40	100,000	0.99	0.15	0.1	10	30	$2.5 \times 10^4$

針固定の位置は Fig.4.11 左に示す通りである。針上節点の固体変位は固定，流体変位は自由 (音響的に透明) となる条件とした。多孔質材料は側壁で固定支持，後壁に密着されるものとした。

針の本数を増やすに従って，低周波数域から徐々に剛骨格モデルの吸音率へと近づき，固体共振による吸音率のピークがより高周波数域にシフトすることが分かる。また針固定の効果は流れ抵抗よりも骨格自体の剛性に大きく左右されることが分かる。剛骨格モデルと見なせる針の本数について，一般的な十分条件を示すことは，発泡材料の剛性と対象周波数によって異なるため難しいと考えられる。また管径にも左右されることが考えられる。

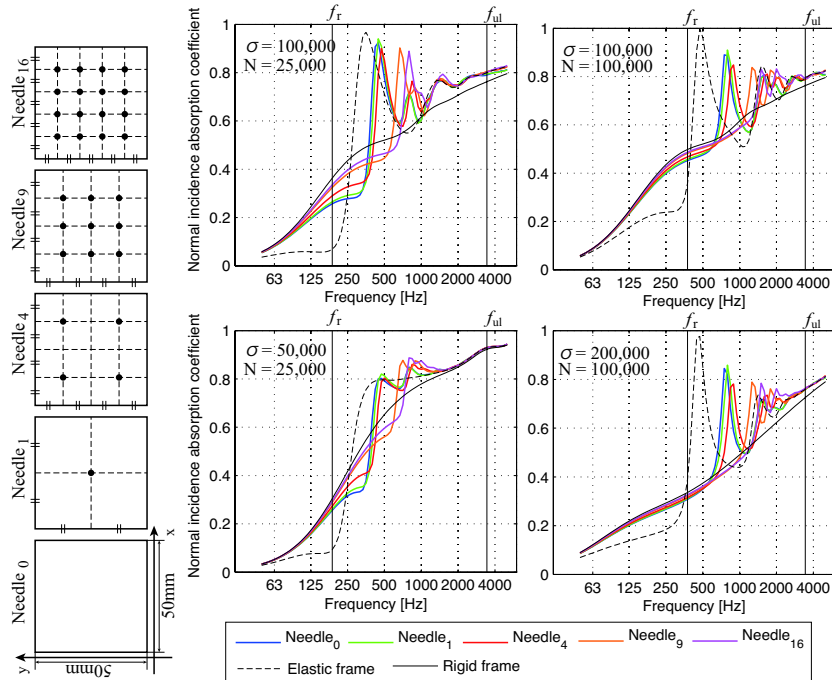


Fig. 4.11:  $\alpha_n$  of the needled UF supported rigidly on the side and back wall. Back wall is also perfectly reflective to the acoustic wave.

## 4.4 多孔質材料の遮音特性

### 4.4.1 多孔質材厚みの関係

GWの厚みを変化させた場合の透過損失の値を Fig.4.12 に示す。

無限大面積試料における特性として、低周波数をのぞき、弾性骨格モデルの透過損失は剛骨格モデルのものと比べ大きな変化は無い。しかし、低周波数域においては、弾性骨格モデルの透過損失が剛骨格モデルに比べ小さくなっている。これは、低周波数域においては、材料全体が一体として振動しているため、骨格の質量則に近い透過損失の値を示していると考えられる。また 50mm 厚のものにおいては 500Hz 付近に骨格共振の影響で、透過損失にもわずかなディップが見られる。

一方管内において、側壁固定支持される場合には、入射側から見た吸音率、透過損失にそれぞれピーク、ディップが見られる。これは材料が側壁固定されることにより、固体の剪断共振を招きやすくなるためである。厚さ 25mm, 375Hz での多孔質弾性体の各相の振動変位を可視化したものを、側壁緩支持、固定支持の場合についてそれぞれ Fig.4.13, 4.14 に示す。

緩支持される場合、固体はほぼ一体となって振動し、その振動変位は流体の変位に比べ小さいことが分かる Fig.4.13。一方固定支持される場合、材料中央部においては流体と同程度の変位が見られ、流体変位についても、固体相との相互作用により、材料中央部で大きな変位となる分布となっている。

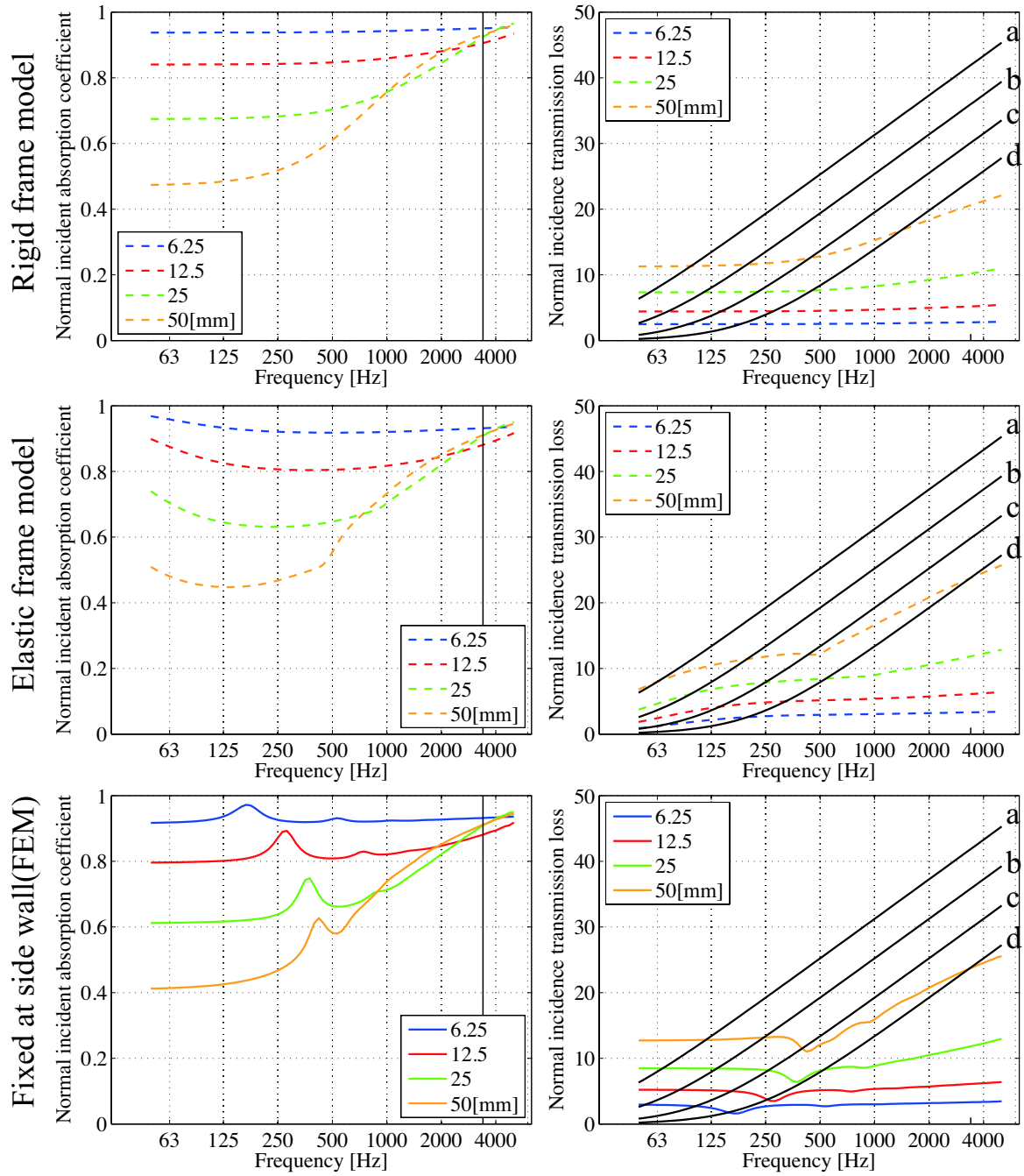


Fig. 4.12: Calculation result of the GW for thickness variation. Left:  $\alpha_n$  seen from the incident side, Right :  $R_n$ . Above: Rigid frame model, middle: elastic frame model supported loosely, Bottom: elastic frame model supported rigidly on the side wall. Area density of the each thickness materials are (a)4.8, (b)2.4, (c) 1.2 and (d) 0.6 respectively.



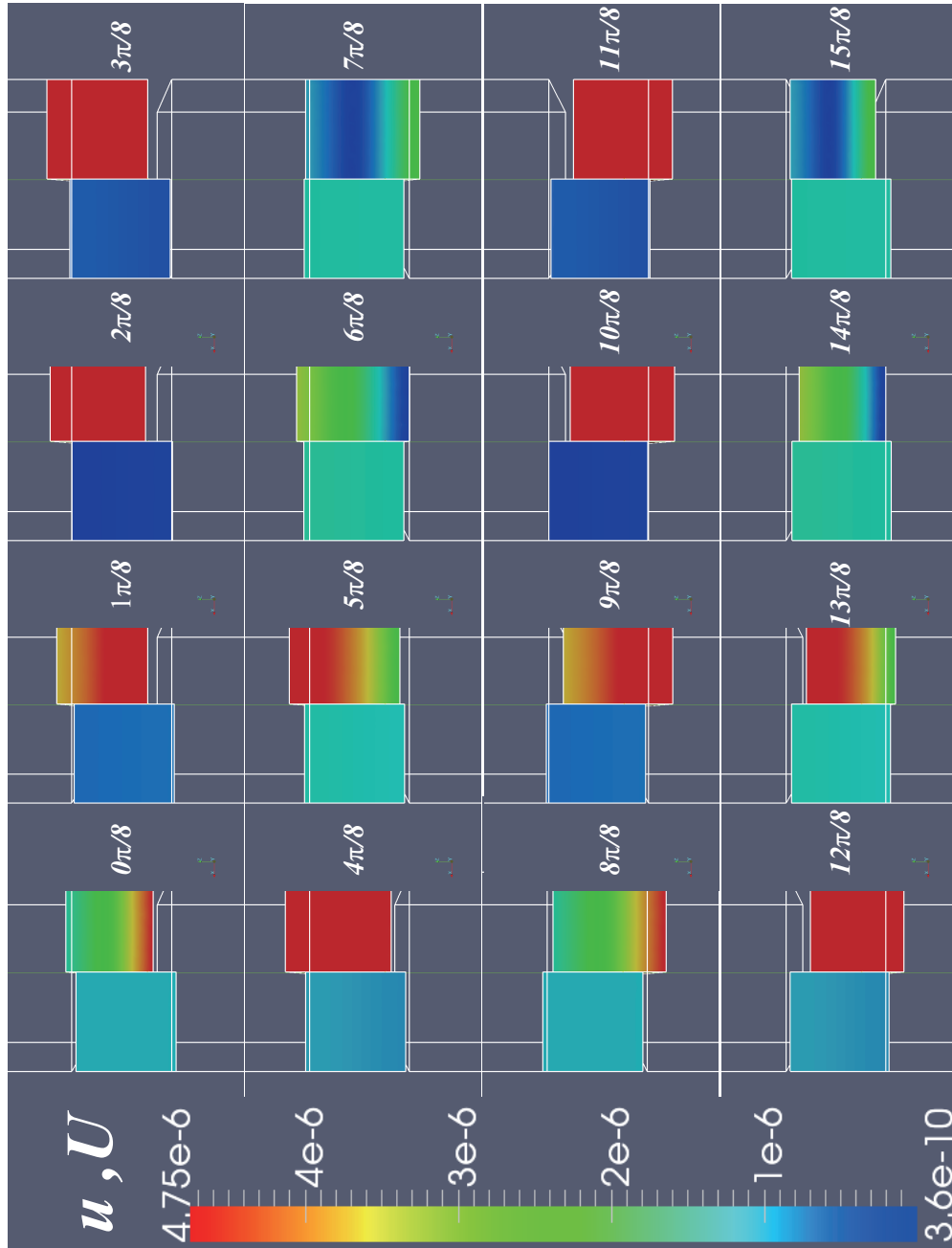


Fig. 4.13: Displacement field of the GW supported loosely at 375 Hz. Fluid displacement on the right side, Solid displacement on the left side are exaggerated by magnifying 1,000 times.

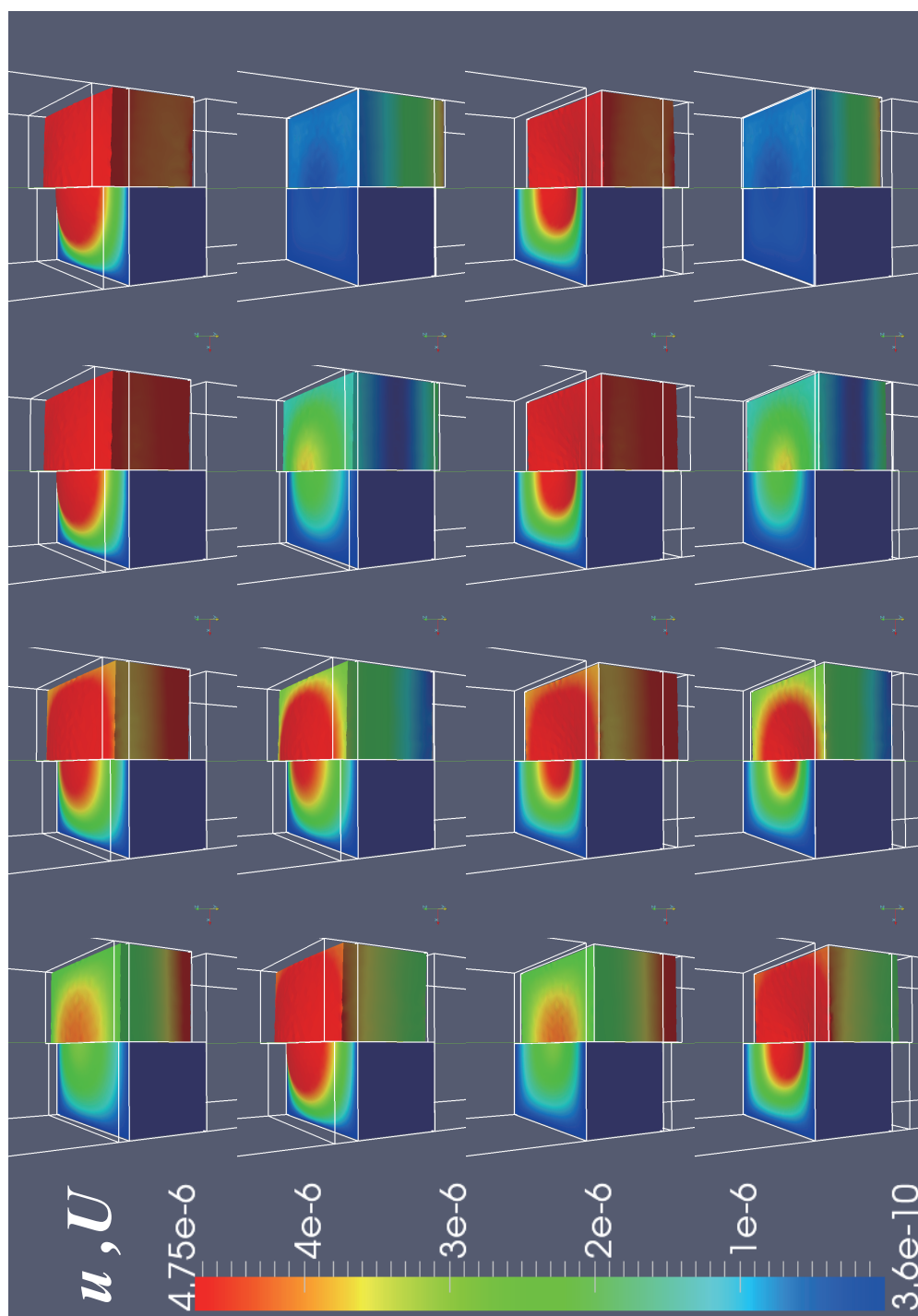


Fig. 4.14: Displacement field of the GW supported rigidly at 375 Hz. Fluid displacement on the right side, Solid displacement on the left side are exaggerated by magnifying 1,000 times.

#### 4.4.2 流れ抵抗による影響

GW50mm 厚, 側壁固定支持で流れ抵抗を変化させた場合の透過損失の値を Fig.4.15 に示す。また流れ抵抗の変化に伴う粘性特性長と熱的特性長の変化については吸音率における検討と同様に Johnson のモデルにおける関係式 (4.13),(4.14) を用た。

流れ抵抗が小さい場合,TMM と FEM の結果に大きな差がないことから, 側壁固定の影響は少ないと言える。

一方, 流れ抵抗が大きい場合, 低周波数域では側壁でスリップ条件の場合には質量則程度の透過損失であるが, 固定支持されることで, 透過損失が大きくなっている (Fig??)。スリップ支持の時材料全体が一体として振動していると考えられ, 固定支持される時には全体としての動きは抑制され, 異質媒質による反射が透過損失の上昇の主な原因であると考えられる。

500Hz 付近の固体共振によるディップ以降の高周波数域においては, 材料内部での減衰が大きくなることで, 透過損失が上昇する。

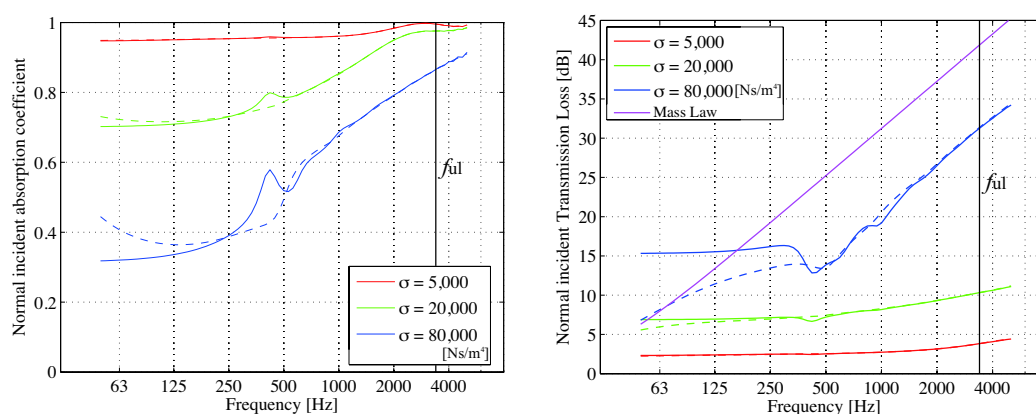


Fig. 4.15: Calculation result of the GW for flow resistivity variation. Left:  $\alpha_n$  seen from the incident side, Right :  $R_n$ .

#### 4.4.3 嵩密度による影響

多孔質材への音響加振はポロシティ  $\phi$  の割合で固体部分と流体部分に割り当てられている。従って、 $\phi$  を増加させた場合、物質密度、嵩密度、ポロシティの間には以下の関係を再掲する。

$$\phi = 1 - \frac{\rho}{\rho_s}$$

即ち嵩密度を変化させた場合に固体への加振力は相対的に大きくなると考えられる。

この影響を調べるため、GW50mm 厚、嵩密度を 96, 240, 480[kg/m<sup>3</sup>] とした変化させた場合の透過損失を Fig.4.16 に示す。これはポロシティにして、 $\phi = 0.96, 0.9, 0.8$  に対応する。

単層で用いる場合には、嵩密度を大きくしても質量則に従って透過損失は大きくならない。また、側壁固定の場合、低周波数域では先の検討と同様に、一体としての振動が生じ難くなり、全ての嵩密度で同程度の透過損失を示している。

以上の結果から、単層多孔質材の場合、流体相の振動が支配的であり、透過損失の大小は流れ抵抗による影響が大きいと言える。

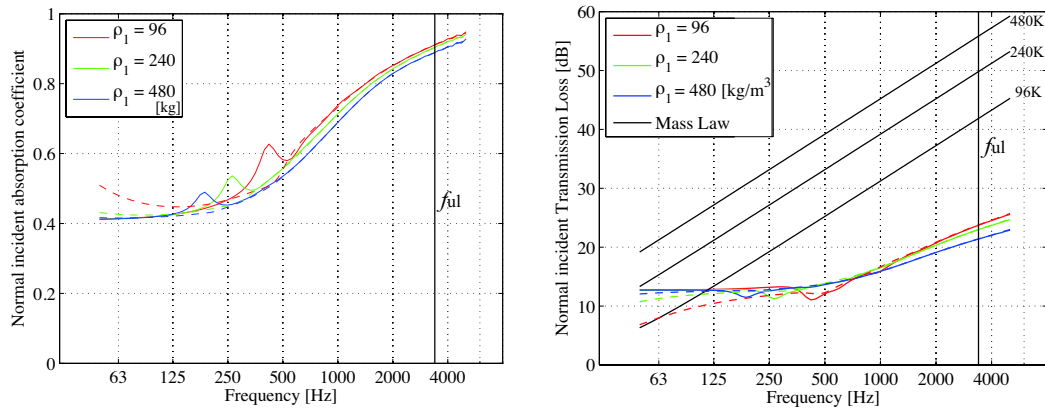


Fig. 4.16: Calculation result of the GW for bulk density variation. Left:  $\alpha_n$  seen from the incident side, Right :  $R_n$ .

## 第 5 章

# 複層材料の吸遮音特性解析

本章では積層防音材料の垂直入射条件における吸遮音特性の解析を行う。

第一節，第二節では積層防音材料において，最も基本となる膜付き多孔質材料に関する吸遮音特性解析を行う。伝達マトリックス法 (TMM) による解析値，有限要素法 (FEM) による可視化に基づき吸遮音メカニズムを明らかにすることを目的とする。また同時に，FEM により，積層材料が管内で固定支持される場合の吸遮音特性を解析し，音響管計測における支持条件に関して基本的な影響を把握することも目的とする。

第三節第一項では膜付き多孔質材料の吸音材としての適用を想定し，材料背後に低嵩密度のフェルトを挿入した場合の吸音特性について，TMM/FEM に基づき考察を行う。第二項では遮音材料としての適用を想定し，比較的厚い板に貼着される場合について吸遮音特性の解析，検討を行う。ただし，本節においては FEM は主に可視化に用いることとしている。

## 5.1 多孔質材・膜材の積層:吸音率の同定

本節ではグラスウール 96K, と膜の積層材料について考察を行う。

これまで音響分野で良く用いられてきた剛骨格モデルと膜との積層と比較し, 弾性骨格モデルを利用することの意義を考察する。

振動メカニズムを検証するとともに, 音響管計測における支持条件により, 計算値 (測定値) にどのような影響が表れるか検討を行った。

### 5.1.1 後壁密着条件

入射表面に膜を接着し, GW の厚みを変化させた場合の計算結果を Fig.5.1 に示す。

膜を積層した場合の吸音率特性は単層の場合 (Fig.4.8) と比べ, 弾性骨格モデルと剛骨格モデルは大きく異なる特性となることが分かる。

剛骨格モデルにおいては, 多孔質材の流体部分のみを扱っていることから, 膜の振動変位は比較的大きく, 低周波数域においては多孔質材側へ透過していると考えられる。従って, 厚みに応じて, なだらかに吸音率が上昇する特性が見られる。さらに高周波数域において生じるピークは膜をマス背後吸音層をバネとした一自由度共振系であると考えられる。

弾性骨格モデルにおいては低周波数域にピークが存在する。このピークは固体の圧縮による共振であると考えられる。これは厚みが半分になることで1オクターブ高い周波数で現れることから理解される。

そのピーク以降の周波数においては, 吸音率は小さくなっていく。膜に通気性が無いことで, 入射音波は全て多孔質材の固体相への外力として与えられる。それにより, 固体としての特性が大きく, 内部流体の減衰による高周波数での高い吸音率が現れなくなっていると考えられる。

最後に音響管計測において, 側壁固定支持条件の場合, 厚い材料ほど、ピークが高周波数域へシフトしている。これらの傾向は入射面に膜が無い場合もわずかに見て取れたが, ここでは固体振動系が支配的であることからより良く観察される。

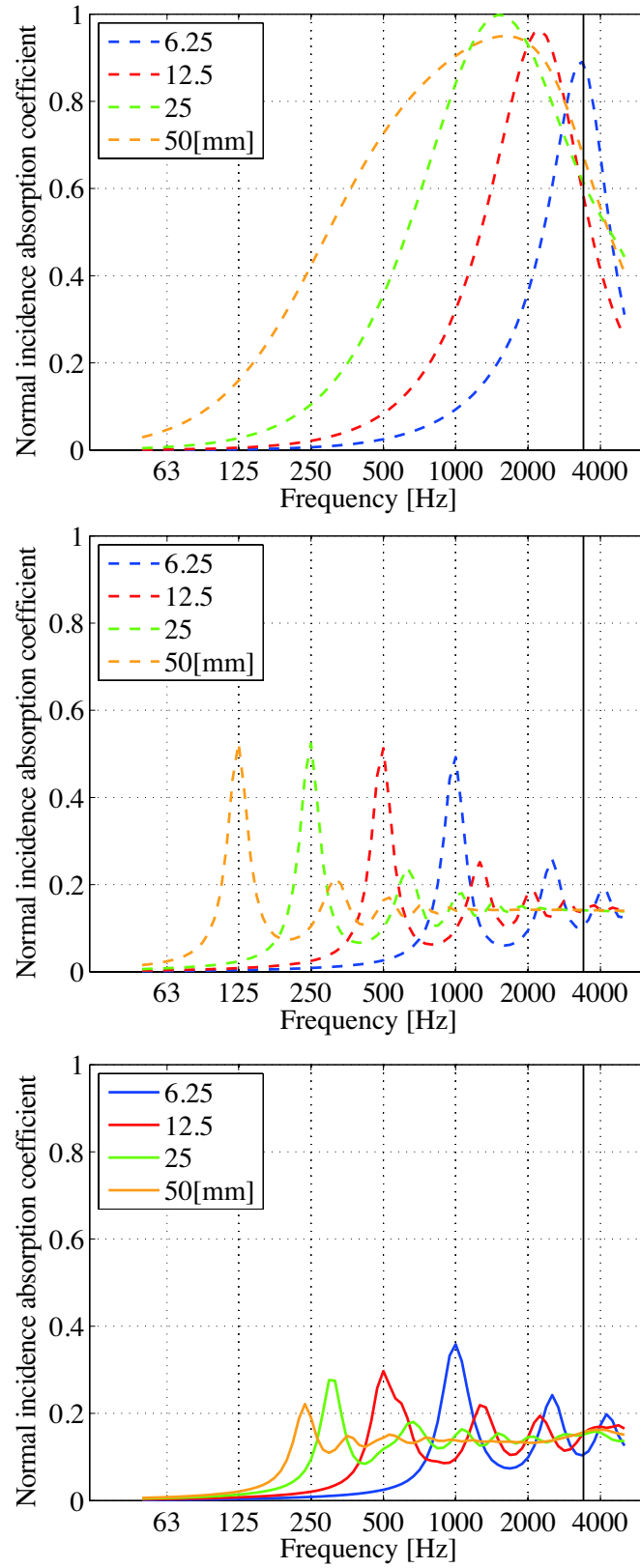


Fig. 5.1:  $\alpha_n$  of the GW with membrane on the incident side for GW's thickness variation. Material is backed by rigid wall. Top: Rigid frame model, Middle: Elastic frame model, Bottom: Elastic frame model supported rigidly on the side wall.

### 5.1.2 背後空気層の影響

背後空気層を 50mm とし、多孔質材の厚みを変化させた場合の計算結果を Fig.5.2 に示す。

剛骨格モデルにおいては、多孔質材内部の減衰と、一自由度共振系の影響が吸音率に現れている。この傾向は後壁密着とした場合とほぼ同様である。高周波数域において、膜が入射面にある場合、膜面での反射が大きくなり、吸音率は小さくなっている。一方、膜が背面にある場合では表面の多孔質材の吸音率が現れている。

弾性骨格モデルにおいては、低周波数のピークが後壁密着条件と比べると低周波数域に存在する。これは積層材料をマス、背後空気層をバネとした一自由度共振系であると考えられる。ただし、この共振が生じる周波数は膜が入射面にある場合と、背面にある場合で異なる。これは多孔質材背面が空気と連続な場合、みかけ上背後層の空気バネが大きくなり、より低周波数域にピークが現れると解釈できる。

また、膜が表面にある場合、最初の共振以降現れるピークは固体共振によるものであると考えられる。

高周波数域においては、剛骨格モデルと同様に、表面に膜がある場合、膜面での反射により、比較的小さい吸音率であるが、裏面に膜がある場合では、表面での多孔質材料の吸音率が現れていることが分かる。従って、吸音材として膜付き多孔質材料を使用する場合にはその設置向きにより、低周波数域でのピーク周波数や、高周波数域での吸音特性が変化することに留意する必要がある。

次に、GW 厚 50mm とし、背後空気層を変化させた場合の計算結果を Fig.5.3 に示す

剛骨格モデルの積層において、入射面に膜がある場合、材料厚を変化させた場合にあっては、吸音率のピーク周波数の変動がなくなっている。高周波数域では膜の反射性が高くなり、透過した音波もある程度厚みがある多孔質材内部で減衰してしまうため、背後空気層をバネとした振動を生じにくくなっていると考えられる。

弾性骨格モデルにおいては低周波数域での吸音率ピークの周波数が、厚みが増すにつれ低周波数域へシフトしている。これは、先の検討と同じく、一自由度共振系における吸音と解釈でき、背面が空気と連続する場合には特に、背後空気層厚によるバネの実効値も変化していると推察される。

一方背面に膜がある場合は背後層のバネ係数は空気層のみのものと考えられる。ここで、背後空気層厚  $L$ 、材料厚  $d$  に対しその共振周波数は次式で与えられる [21]。

$$f_r = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\rho_0 c_0^2}{\rho_1 d L}} \quad (5.1)$$

これより算出した背後層 50mm とし GW 厚を変化させた場合、GW 厚 50mm とし背後層を変化させた場合の共振周波数と計算によるピーク周波数をそれぞれ Tab.5.1, 5.2 に表す。



Tab. 5.1: Resonance frequency of theGW with air layer 50mm.

GW	50	25	12.5	6.25	[mm]
TMM	111	173	245	346	
$f_r$	122	167	236	353	[Hz]

Tab. 5.2: Resonance frequency of theGW 50mm and air layer.

AIR LAYER	50	25	12.5	6.25	[mm]
TMM	111	148	198	235	
$f_r$	122	167	236	353	[Hz]

ただし，TMM の計算は 1/12 オクターブ中心周波数で計算したものを表記している。

空気層が大きい場合には比較的良く一致すると言えるが，空気層が小さくなると TMM の結果はより低い周波数でピークが現れる傾向が見られた。この場合，空気バネが柔らかくなる，または表面のマスが大きくなるなどの可能性が考えられるが，この場合，積層材料内部での減衰による，減衰振動系の共振周波数の低下が解釈としては妥当である。

最後に音響管計測において，側壁固定支持条件の場合，多孔質材厚，背後空気層厚のどちらを変化させた場合においても，低周波数域でのピークはより高周波数域へシフトしている。このような材料においては特に低周波数域のピークを正しく評価することが非常に重要であると考えられる。そのため，音響管計測においては，側壁での支持条件は単層材料の場合と同様に重要なファクターであり，4.2 節の検討から，音響管の管径が小さい場合にはより注意が必要となると言える。

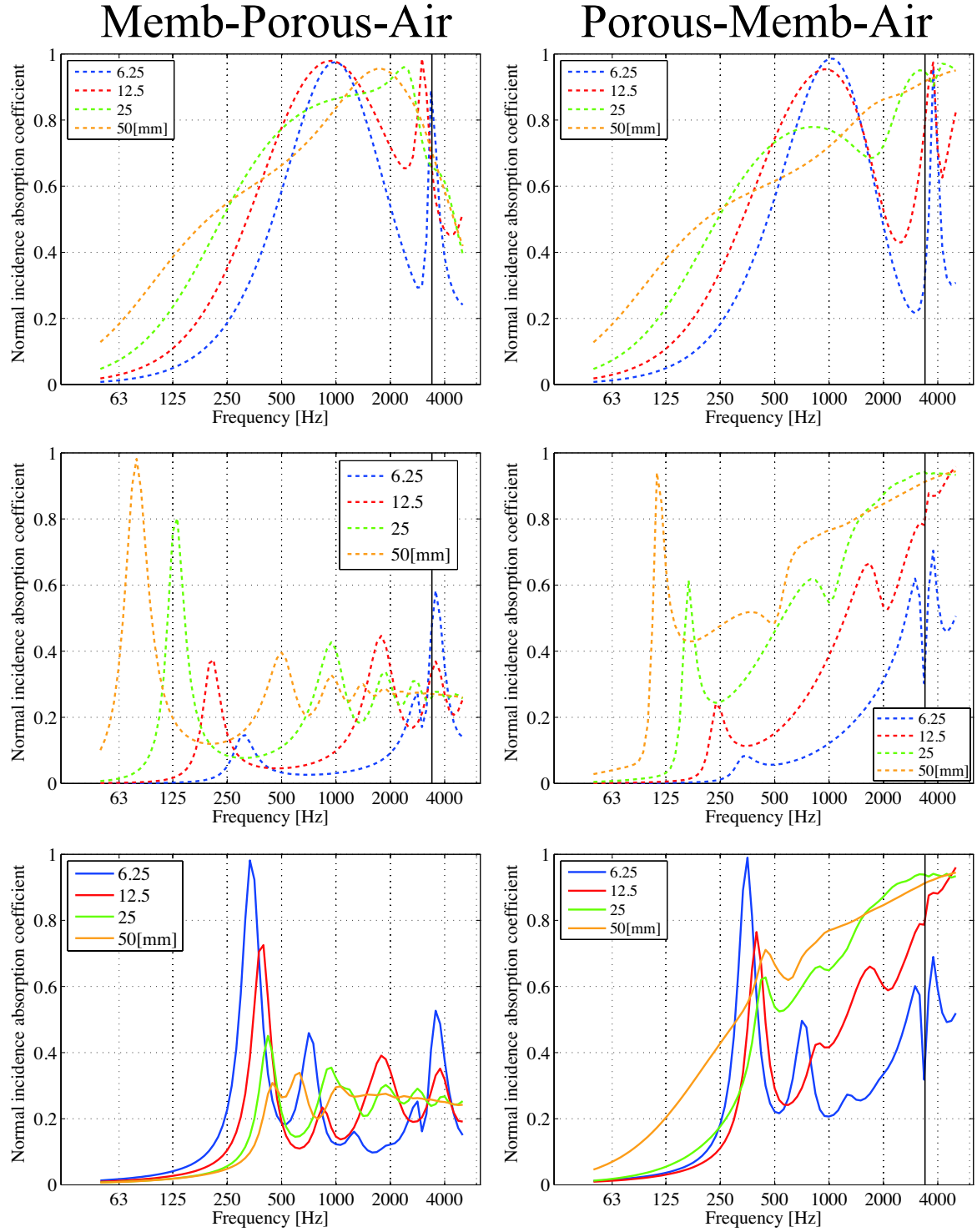


Fig. 5.2:  $\alpha_n$  of the GW with membrane for GW's thickness variation. Material is backed by 50mm air layer. Top: Rigid frame model, Middle: Elastic frame model, Bottom: Elastic frame model supported rigidly on the side wall.

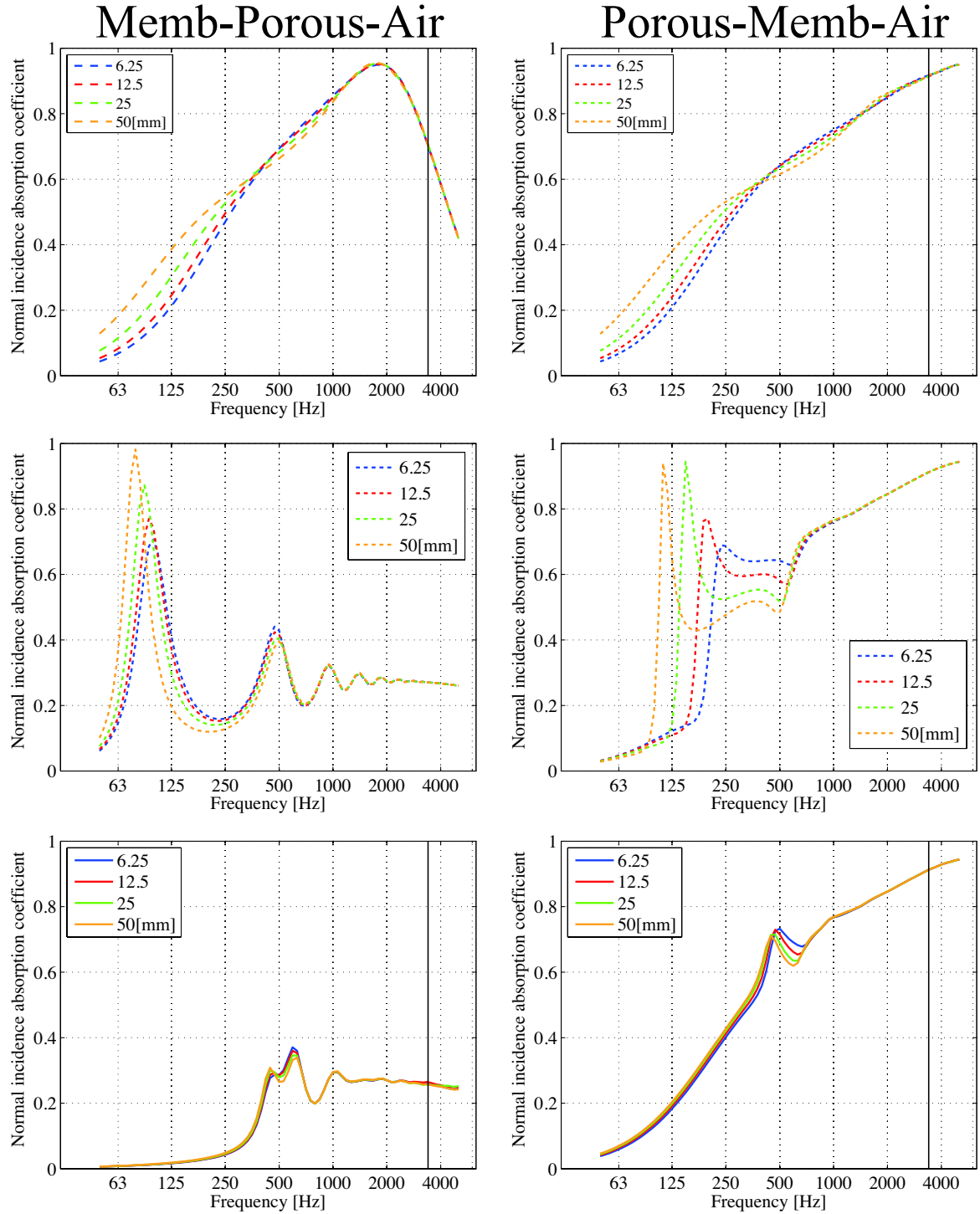


Fig. 5.3:  $\alpha_n$  of the GW with membrane for air layer variation. The thickness of the GW is 50mm. Top: Rigid frame model, Middle: Elastic frame model, Bottom: Elastic frame model supported rigidly on the side wall.

### 5.1.3 膜が接着されない場合

多孔質材と膜材の間にわずかな空気層 (隙間) が存在する場合、膜振動による固体伝搬音が絶縁されることとなり、多孔質材の固体への直接的な音響加振が行われなくなる。ここではこの隙間が吸音率に与える影響を考察する。

#### 隙間の大きさの影響

隙間の大きさを変化させた場合の結果を Fig.5.4 に示す。ここで、多孔質材は後壁に密着状態とした。低周波数域では膜の透過性が大きく、背後の多孔質材の吸音率となっている。

高周波数域におけるピークは一自由度共振系によるものであるが、隙間が大きくなることで、背後層が厚くなるため、このピークはより低い周波数で、大きい値を示している。ただし、この隙間が 20[mm] となった時は吸音率のピークの値は小さくなっている。これは、背後層内の方は膜面付近で大きな粒子変位 (振動速度) で振動し、減衰が大きくなるが、隙間が大きくなることで、この部分に多孔質材が入らなくなるため、減衰が小さくなったと解釈される。

#### 背後空気層と隙間の影響

膜と多孔質材の隙間を 1mm とし、積層材料の背後空気層を変化させた結果を Fig.5.5 に示す。

膜が背面にある場合はほぼ膜が無い場合の背後空気層をもつ単層多孔質材の特性となっていることが分かる。一方膜が表面にある場合、低周波数域では透過性が大きいいため、膜以降の場としての背後空気層を持つ多孔質材の特性が顕著に現れ、高周波数域で膜と剛骨格モデルの積層において現れたピーク吸音率を示し、その後膜の反射性により値は小さくなっていく。

以上の議論から、隙間の影響は非常に大きいことが分かる。接着されている場合には固体伝搬特性の影響が大きくなるが、接着されていない場合その透過性により低周波数域では多孔質材、高周波数域では膜材の特性が現れると言える。

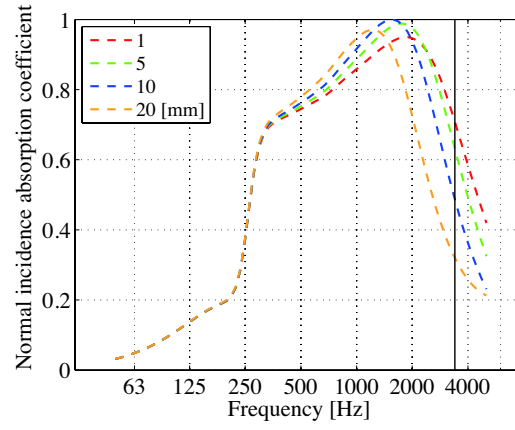


Fig. 5.4:  $\alpha_n$  of the Membrane+GW with gaps between them. Material is backed by rigid wall.

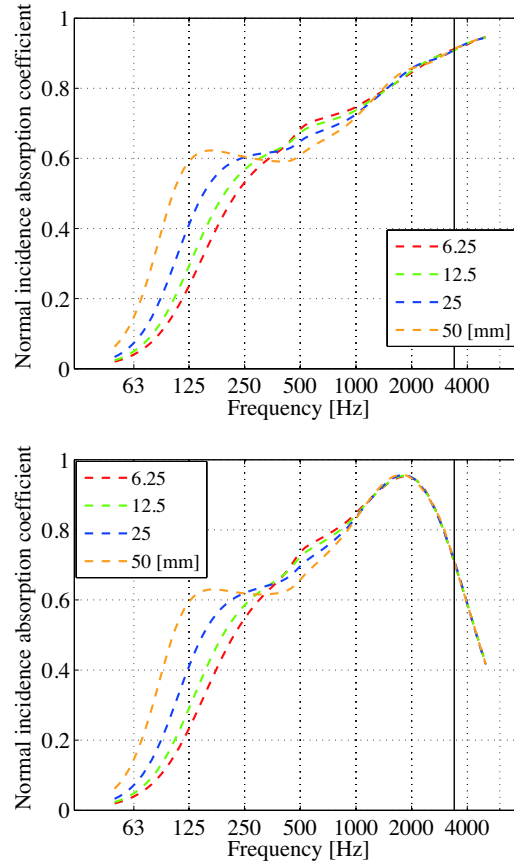


Fig. 5.5:  $\alpha_n$  of the Membrane + GW with different air layer, above membrane is on transmission side, below on incident side.

### 5.1.4 流れ抵抗による影響

GW 厚 50mm, 後壁密着条件の場合, 多孔質材の流れ抵抗を変化させた時の吸音率の変化を示す Fig.5.6. この時, 膜が表面にある場合は多孔質材の骨格共振が主な吸音の要因であると考えられるため, 流れ抵抗による影響は見られない。また側壁固定支持とした場合においても大きな差は見られない。

次に背後空気層 50mm を設けた場合, 多孔質材の流れ抵抗を変化させた時の吸音率の変化を示す Fig.5.7. この時, 流れ抵抗が小さいほど一自由度共振系におけるピークが鋭くなる傾向が見られるが, その現れる周波数は変化していない。また, 流れ抵抗が大きいほど最初のピーク以降での落ち込みが緩和している。従って, 流れ抵抗の大きさはこの場合, 共振の鋭さに影響していると考えられる。

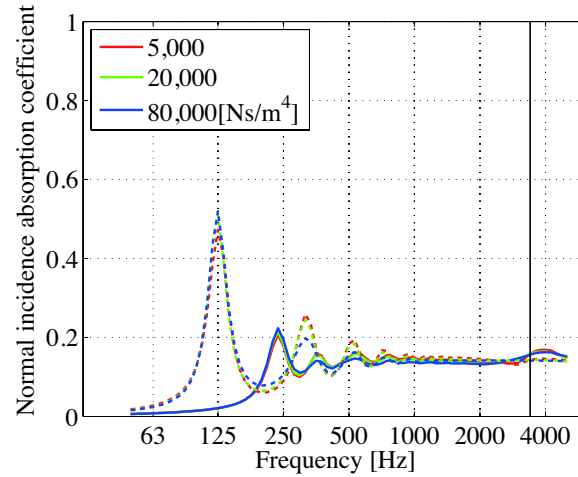


Fig. 5.6:  $\alpha_n$  of the GW with membrane on the incident side backed by rigid wall.

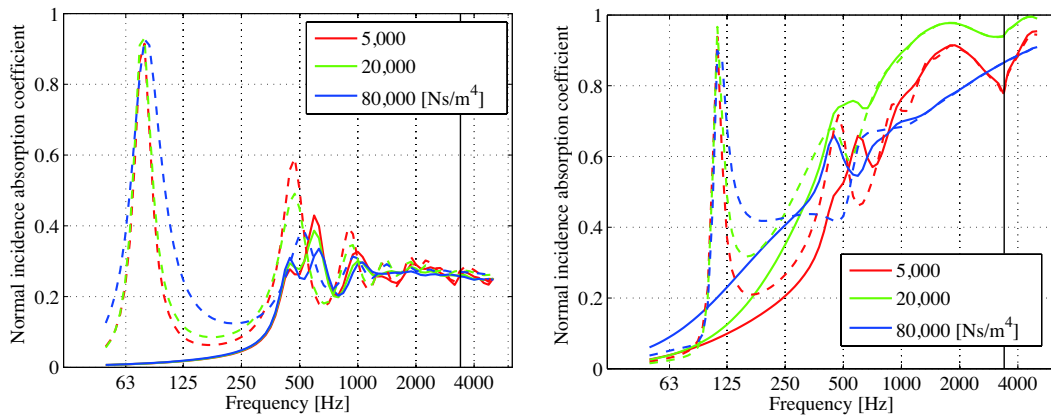


Fig. 5.7:  $\alpha_n$  of the Membrane + GW backed by air layer. Left: Membrane is on the incident side, Right: Membrane is on the transmission side.

## 5.2 多孔質材・膜材の積層:透過損失の同定

多孔質材厚みを変化させ、表面、または裏面に膜を接着した場合の透過損失の計算値を Fig.5.8,5.9 に示す。

透過損失については同一材料の場合、相反定理から材料の向きに関係なく同一の値になる。これは計算結果からも確認される。

剛骨格モデルにおける透過損失は単層多孔質材と同様の傾向を示している。ただし、高周波数域においては膜面での反射の影響で透過損失の上昇が見られる。一方吸音率は高周波数において、材料向きの影響が見られる。剛骨格モデルについては、単層多孔質材とほぼ同様のことが言えるため、ここではこれ以上議論を進めない。

弾性骨格モデルにおいては低周波数域においては質量則に従うような透過損失を示す。その後次第に質量則を超える透過損失を示し、ある周波数でピークとなる。GW12.5mm 厚における透過損失のピーク周波数 890Hz における変位分布を Fig.5.10 に示す。これより、固体と流体逆位相で振動している様子が見られる。また、多孔質材固体相の膜面の変位が各位相点で小さく、全体として材料厚が 1/4 波長となる時の共振に近い状態であることが分かる。

さらにこの周波数について言及する。材料厚の 1/4 波長でこれらの現象が起きることが予測される。真空状態の多孔質材骨格の圧縮モードに対する一端固定、一端自由支持での 1 次共振周波数は次式で表される。

$$f_r = \frac{1}{4d} \sqrt{\frac{2N(1-\nu)}{\rho_1(1-2\nu)}} \quad (5.2)$$

上式より、GW 厚を変化させた場合の共振周波数  $f_r$  と TMM によるピーク周波数を Tab.5.3 に表す。

Tab. 5.3: Resonance frequency of the GW.

GW	50	25	12.5	6.25	[mm]
TMM	235	445	890	1782	
$f_r$	228	456	912	1826	[Hz]

これらは良く対応しており、この現象の影響として、材料厚の 1/4 波長での共振現象が関わっていることがわかる。通常の通気性の無い弾性体の場合、入射面、透過面が自由ならば  $n/2$  波長での共振しか起きず (Fig.5.12)、これらは透過面で振動変位が大きくなるため、透過率の高い共振現象といえる。しかし、積層材料においてはこのように  $(2n-1)/4$  波長での共振に近い振動が生じ、膜面上での振動変位は小さく (理想的な共振ならば 0)、遮音性能が向上する現象が起きる。このような現象は多孔質材の固体相・流体相が逆位相で

振動することに加え、膜面でその振動変位が一致するという境界条件によるものだと考えられる。また、逆位相で振動することにより、音場に対する実効的な粒子変位は式(3.105)の形式で与えられることから、同様に多孔質材から音場への音響放射は小さくなると推察される。

その後、材料厚が波長の  $n/2$  倍相当での周波数において、圧縮に対し共振し透過損失が質量則よりも小さくなる傾向が見られる。Fig.5.11 に最初の共振と考えられる 1780Hz での変位分布を示す。ここでは材料表裏面で変位が大きく、中間面では全位相点において変位が小さくなっていることが観察される。

また、高周波数域では単層の場合と同様に材料内部の減衰が大きくなることで透過損失が上昇していると考えられる。

最後に音響管計測において、側壁固定支持条件の場合は低周波数に剛性制御と見られる一定スロープの透過損失の挙動が見て取れる。これらは膜の接着により、固体振動の影響が大きくなったことにより、現れたと考えられる。多孔質材厚が増すにつれ、先に述べた  $1/4$  波長相当でのピークは低周波数域側に現れることから、側壁固定支持により、これらの値を測定できないことが想定されるため、同様に支持条件の影響は大きいと言える。



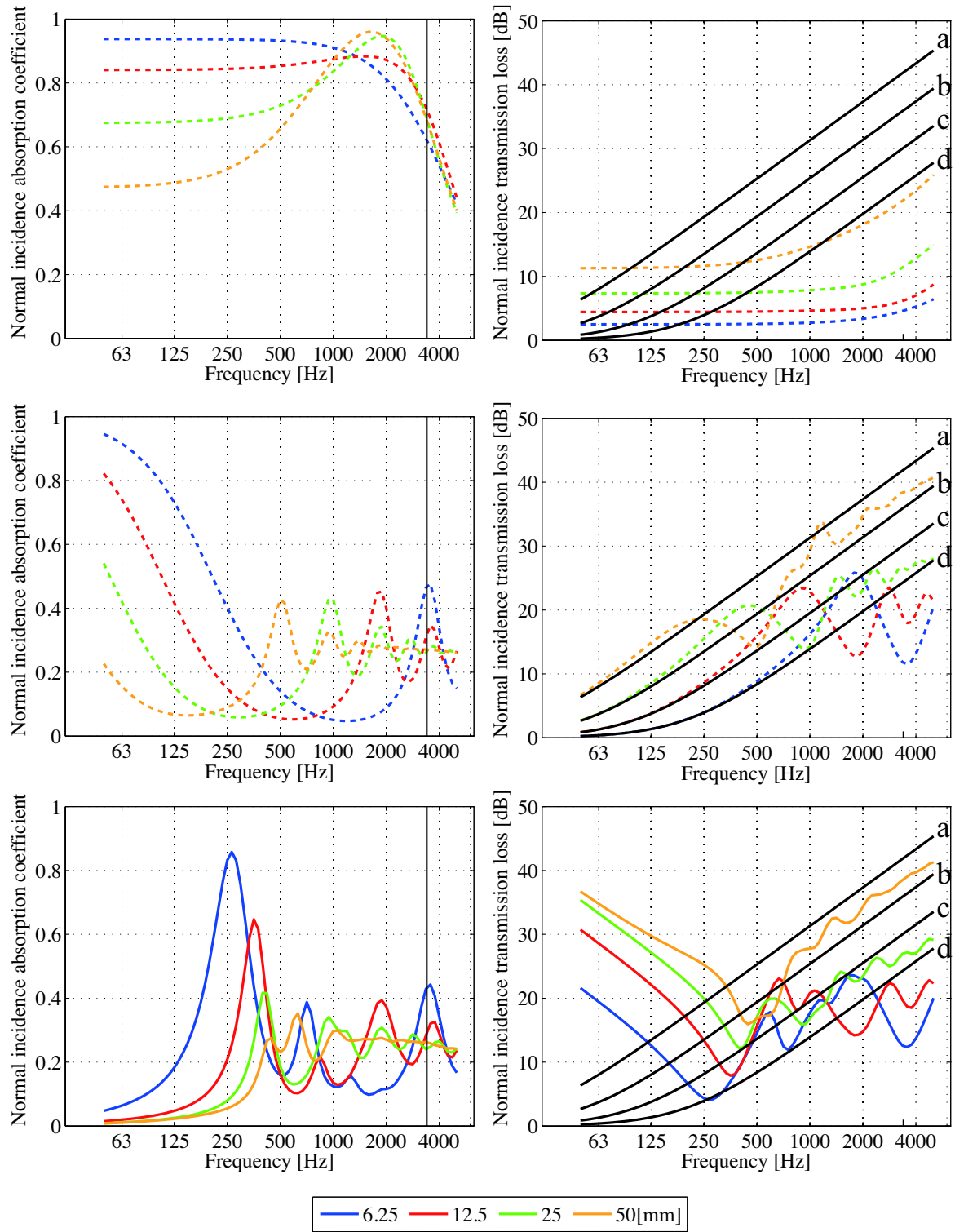


Fig. 5.8: Calculation result of GW with membrane on the incident side. Left :  $\alpha_n$  seen from the incident side, Right:  $R_n$ . Top: Rigid frame model, Middle Elastic frame model, Bottom : Elastic frame model supported rigidly on the side wall.

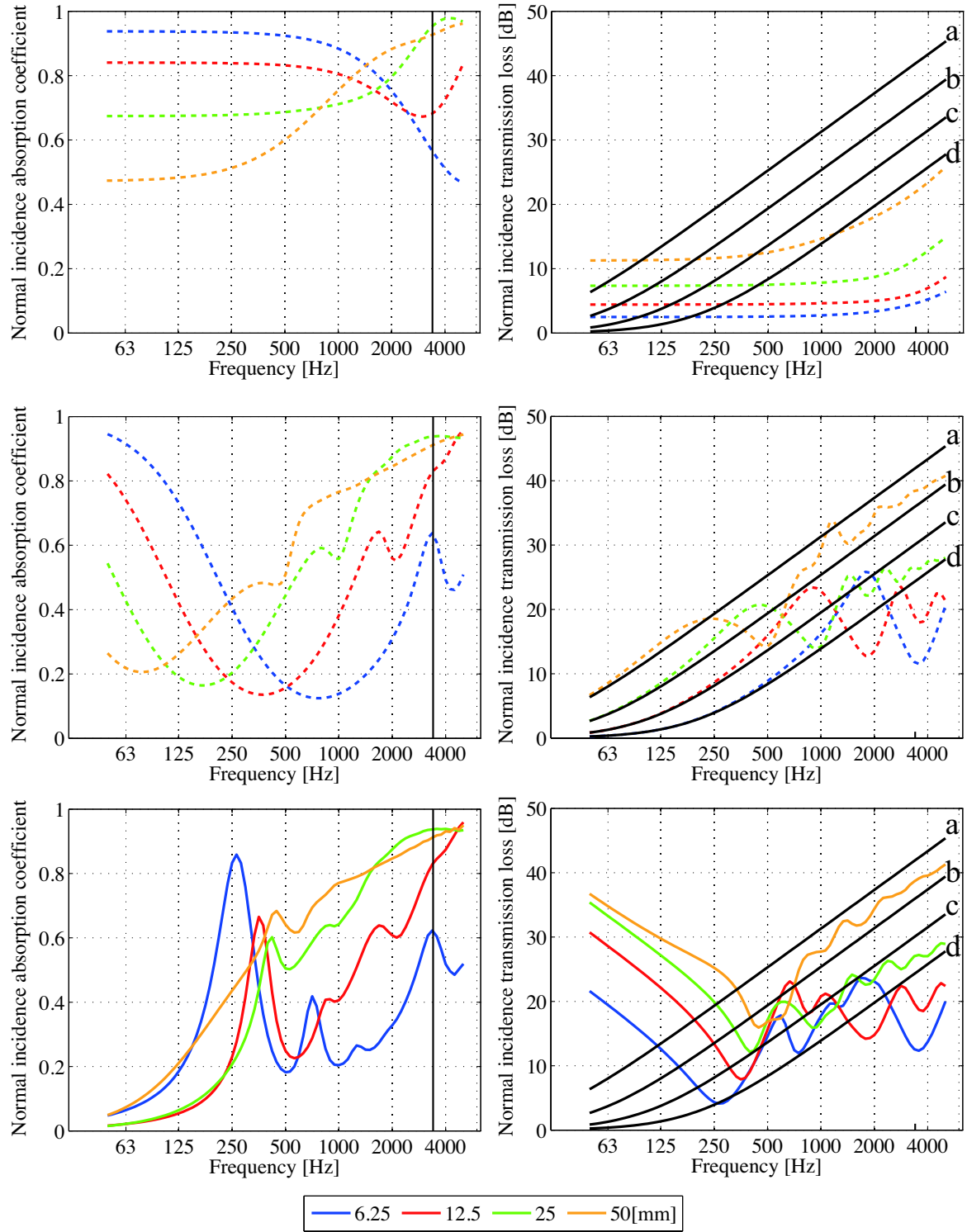


Fig. 5.9: Calculation result of GW with membrane on the transmission side. Left :  $\alpha_n$  seen from the incident side, Right:  $R_n$ . Top: Rigid frame model, Middle Elastic frame model, Bottom : Elastic frame model supported rigidly on the side wall.

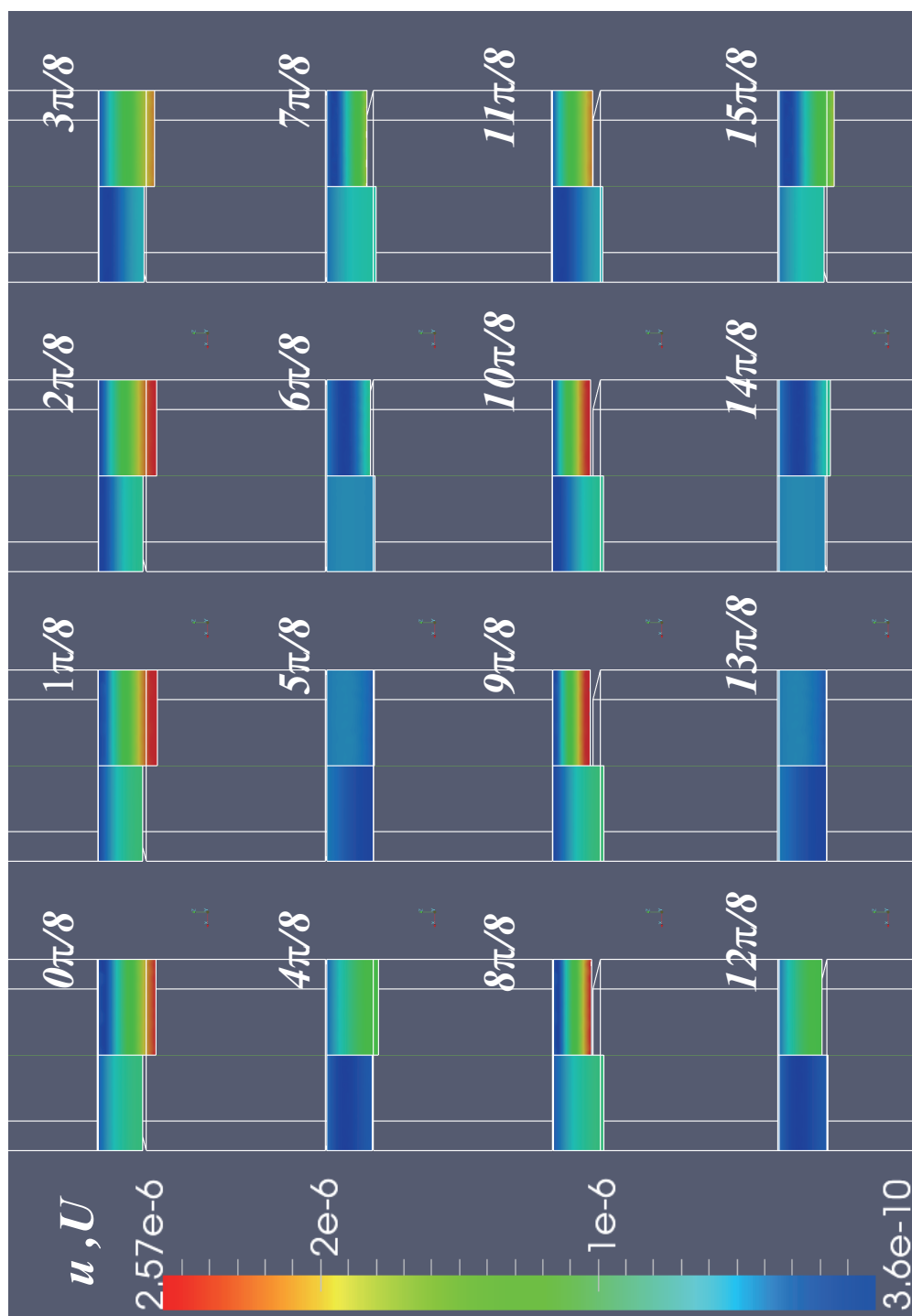


Fig. 5.10: Displacement field of GW at 890 Hz. Fluid and solid displacements displayed right and left side respectively are exaggerated by magnifying 1,000 times.

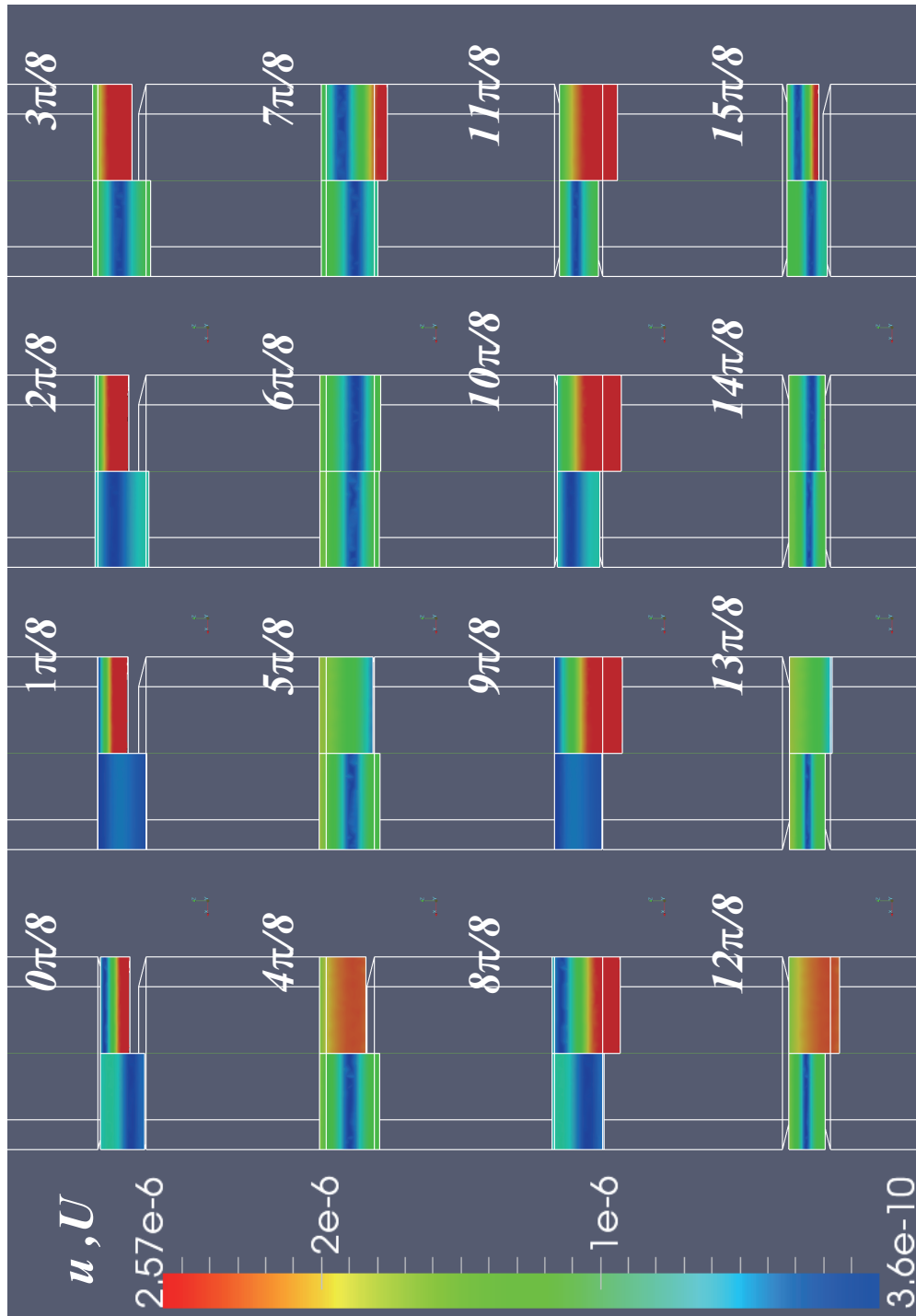


Fig. 5.11: Displacement field of GW at 1780 Hz. Fluid and solid displacements displayed right and left side respectively are exaggerated by magnifying 1,000 times.

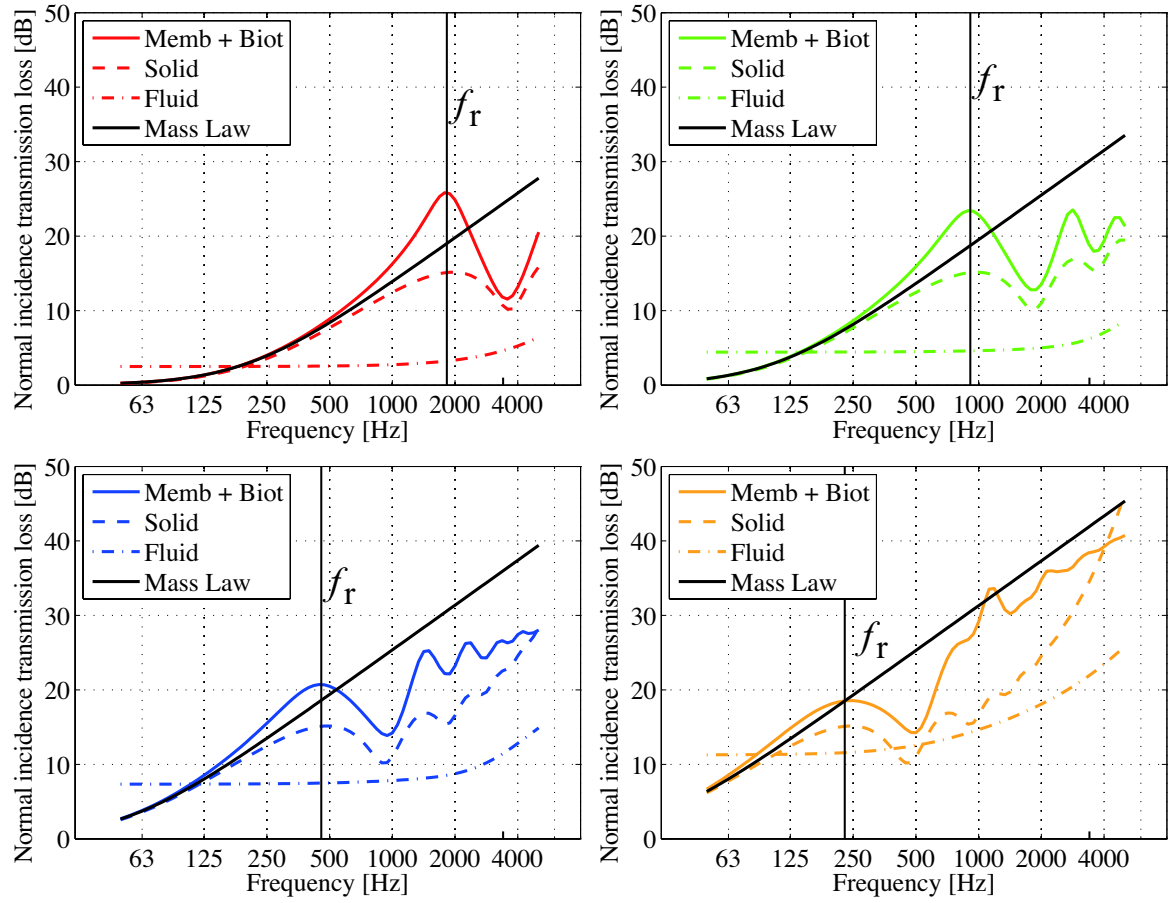


Fig. 5.12: Comparison of transmission loss among the poroelastic material with membrane, unbreathable frame as the elastic material and equivalent dissipative fluid with membrane.

### 5.2.1 膜が接着されない場合

膜と多孔質材の間に 1mm の隙間をもうけ、伝達マトリックス法により計算した結果を Fig.5.13 に示す。

吸音率の場合と同様に、隙間があることで単層多孔質材料に近い特性を示すことが分かる。特に低周波数域では単層多孔質材とほぼ同じ透過損失を示している。高周波数域では膜の影響により、透過損失は若干単層多孔質材よりも大きくなっている。

従って、ここまでに述べたような積層材料の特性を利用するためには、膜と多孔質材が接着されている必要があると言える。

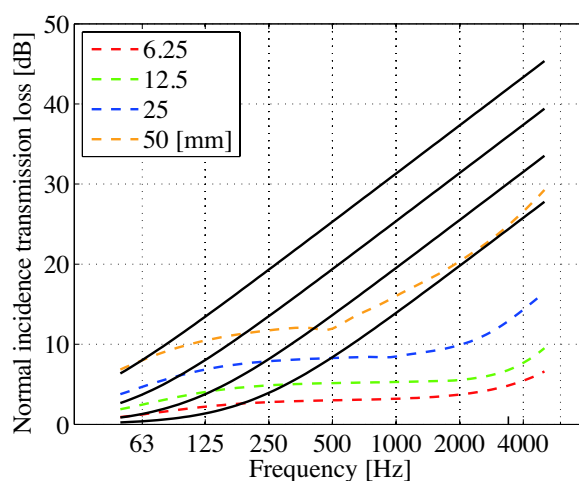


Fig. 5.13:  $\alpha_n$  of the GW with different thickness. Membrane is on incident side.

### 5.2.2 流れ抵抗による影響

GW50mm 厚とし、流れ抵抗を変化させた場合の結果を Fig.5.14,5.15 に示す。

低周波数域では質量則に従った透過損失の上昇が見られる。その後先に示した逆位相振動に起因する 250Hz 付近の透過損失のピークが現れるが、流れ抵抗が小さくなることによりこの値は大きくなることから分かる。

また、音響管側壁での固定支持により、低周波数域における剛性制御の影響は流れ抵抗に関わらず現れる。積層材では、固体が直接的に音響加振されやすい状況であるため、流れ抵抗によらず、このような固体伝搬系の影響が表れている。また、高周波数域において、単層多孔質材の場合は比較的固定支持による影響は少なかったが、積層材では固体共振によりピークディップの現れる周波数やその値が異なることが特徴として挙げられる。

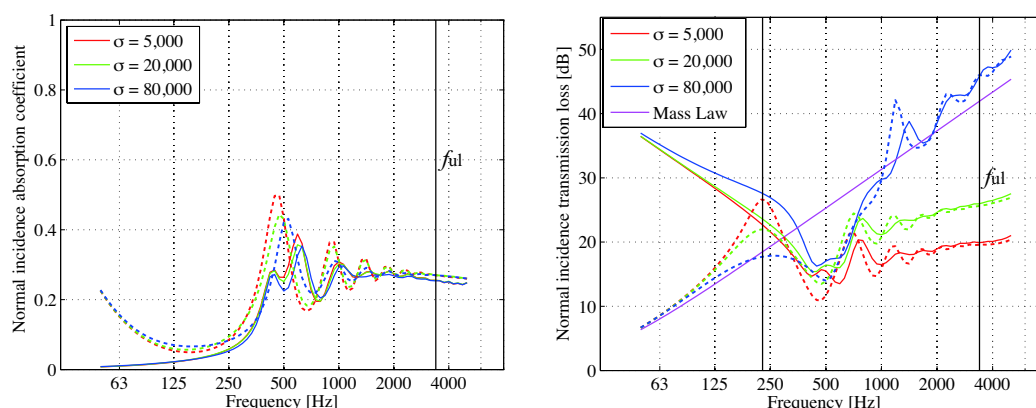


Fig. 5.14: Characteristics of the layered material for flow resistivity variation. Left:  $\alpha_n$  of GW with membrane on the incident side, Right:  $R_n$

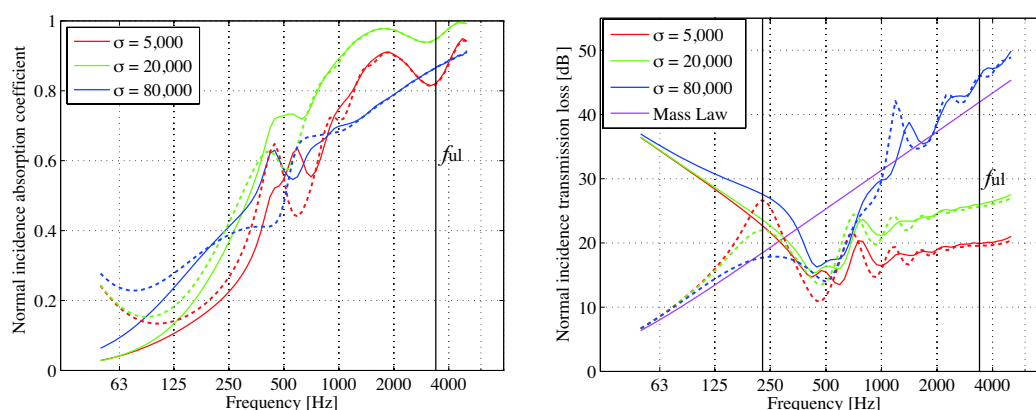


Fig. 5.15: Characteristics of the layered material for flow resistivity variation. Left:  $\alpha_n$  of GW with membrane on the transimission side, Right:  $R_n$

### 5.2.3 嵩密度による影響

多孔質材の嵩密度を変化させた場合の計算結果を Fig.5.175.16 に示す。

嵩密度が大きいほど、入射側からみた吸音率のピークは低周波数域に現れるが、その値については小さくなる傾向が見られる。また、高周波数域においては膜が表面にあるとき、一定の吸音率に収束して行く様子がみられるが、この値も嵩密度が大きいほど小さい値となっている。

透過損失は低周波数域で質量則に従い上昇する。また、側壁固定による剪断の共振の周波数は嵩密度が大きいほど高周波数域へシフトする。それ以降の周波数では流れ抵抗による材料内部での減衰が支配的であると考えられる。

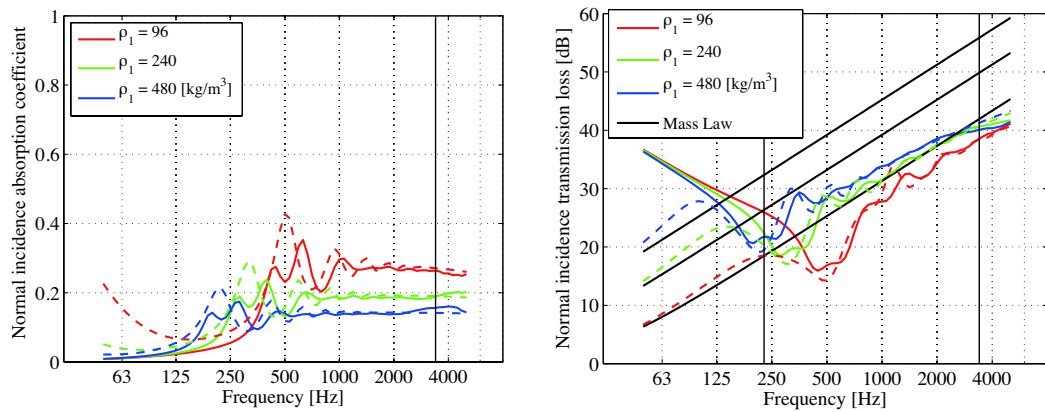


Fig. 5.16: Characteristics of the layered material for bulk density variation. Left:  $\alpha_n$  of GW with membrane on the transimission side, Right : $R_n$

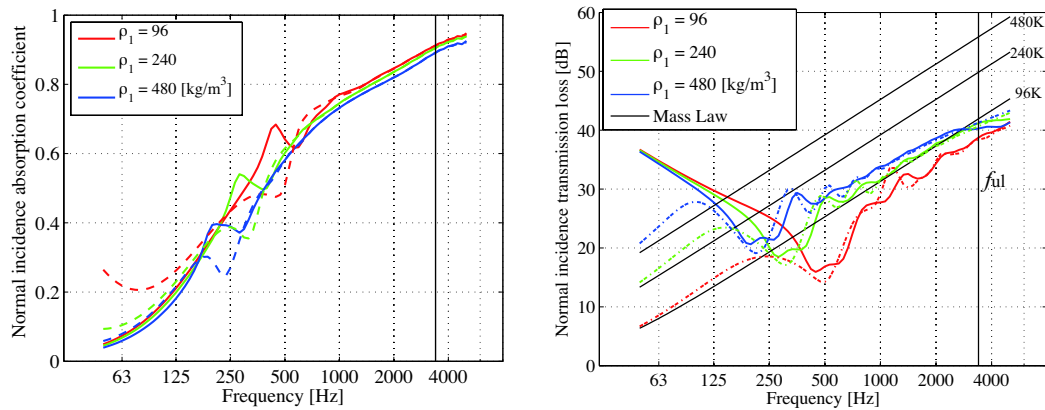


Fig. 5.17: Characteristics of the layered material for bulk density variation. Left:  $\alpha_n$  of GW with membrane on the transimission side, Right : $R_n$



## 5.3 複数多孔質材・膜・厚板の積層

ここでは先に検討した膜付き多孔質材料が、吸音目的で使用される場合と、遮音目的に用いられる場合の2つのケースを想定し、吸遮音特性の解析を行う。

吸音材料としては二種の多孔質材と一種の膜材の積層を取り上げる。この組み合わせは、近年低周波用膜吸音材として建築音響の分野でも開発・報告されている積層材料である [ref]。

遮音材料としては膜付き多孔質材を比較的厚い板に貼着した場合の特性について検討をおこなう。

### 5.3.1 吸音材としての適用

4.3.2 項, 5.1.2 項においてそれぞれ、単層多孔質材、膜付き多孔質材が背後空気層を持つ場合の吸音率を検討した。ここではその空気層にさらに多孔質材 (フェルト) を装填した場合の吸音特性を考える。各計算条件を Fig.5.18 に図示する。

またフェルトの物性値を Tab.5.4 に示す。

Tab. 5.4: Physical properties and dimensions of the poroelastic material

	$\alpha_\infty$	$\rho_1$	$\sigma$	$\phi$	$\eta$	$\nu$	$\Lambda$	$\Lambda'$	$N$
		[kg/m <sup>3</sup> ]	[Ns/m <sup>4</sup> ]				[μm]	[μm]	[N/m <sup>2</sup> ]
Felt	1.14	50	9000	0.96	0.24	0	108	216	$1.7 \times 10^4$

Fig. 5.19 に裏面に密着させ充填した場合、Fig.5.20 にわずかな隙間を設けて積層した場合の計算値を示す。

#### フェルトが密着して積層される場合

Case.A において、低周波数域において、一自由度共振系の影響が見られる。ただし、これらの吸音率のピーク値は膜を含む他のケースに比べ小さい。これは内部の連続的な通気性により、膜を含む材料に比べ固体振動が生じ難いためである。また、フェルトが薄くなるにつれ、(A1) は表面 GW が後壁密着状態での吸音率に近くなる。

高周波数域においては、GW の減衰が支配的なため、(A1) では大きな変化はないが (A2) では吸音特性が変化する。

次に膜を含む場合 Case.B,C においては、低周波数域での吸音率に大きなピークが現れる。これはここまでに考察してきたここでは一自由度共振系のものである。

最初に、(B2) について考える。背後が空気の場合に比べ、ピークの周波数は高い周波数で現れている。この原因としてフェルトの骨格が背後のバネとして働くためであると考えられる。この場合、GW と空気の連続性により空気バネがみかけ上大きくなるという現象

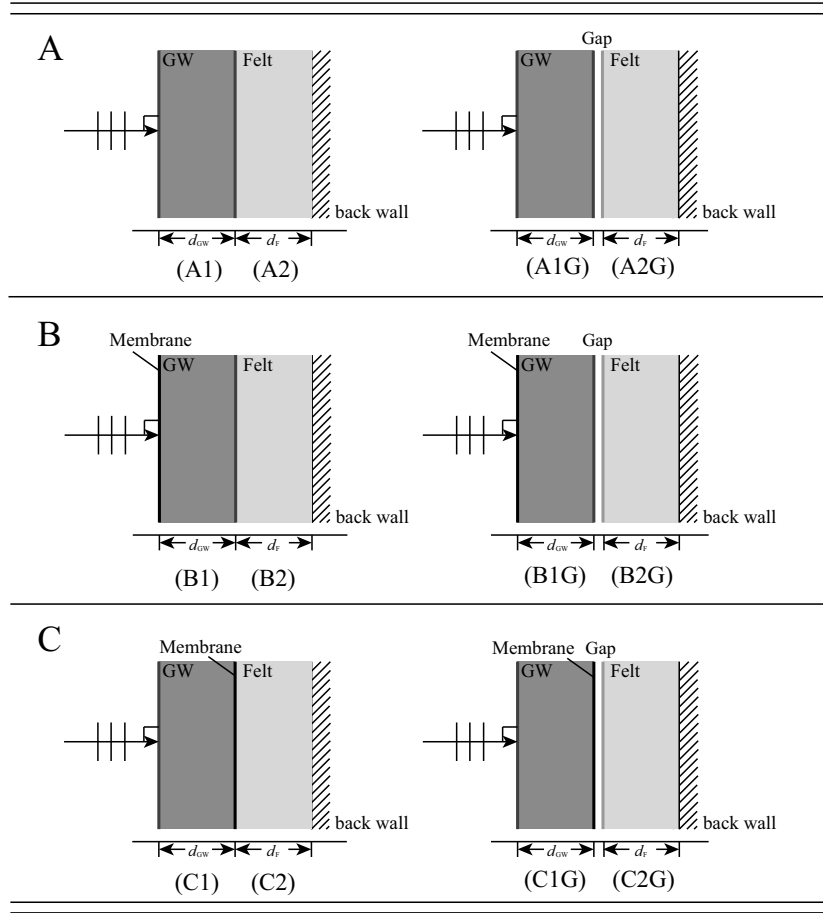


Fig. 5.18: Configurations of the analysis and labels for results.

の影響は少ないと考えられる。

次に (B1) を考える。ここでは最初の一自由度共振の現れる周波数は、背後層を変化させた場合とほぼ同じ周波数に現れる。これは GW が半分の厚さになることで質量が半分になることと、Felt 厚が半分になることでバネ係数がみかけ上倍になることに対応し、両者で共振周波数が一致していると考えられる。

またこの時、背後層が空気である場合に比べ、ピークは低周波数側へシフトし、その値も大きくなっている。GW 厚が減少することで、減衰性の媒質が少なくなるため、背後層が減衰のない空気の場合にはピークが小さかったと考えられる。

さらにこの条件では背後層が空気だった場合には存在しなかったピークが存在する。(d)GW6.25mm の場合の 187Hz, 353Hz でのこれらの変位分布を Fig.5.21,5.22 に示す。それぞれ、固体が 1 次モード、2 次モードに対応する変位分布に近いことがわかる。従って、これらのピークは固体共振によるものと考えられるが、それぞれの周波数は一端固定、一端自由の場合のものとは異なる。これは第二章に示した Biot 理論における速い波と遅い波の影響である可能性が挙げられる。

続いて、(C2) について考える。この場合、背後層が空気の場合とほぼ同様の吸音特性である。但し、一自由度共振での吸音率の値は小さくなっている。この理由として、・・・

次に (C1) の場合を考える。低周波数域での共振周波数や吸音率はほぼ (C2) の場合と同様であり、そのメカニズムについても同様と考えられる。高周波数域においては入射表面の GW により、吸音率が大きくなっている。

#### フェルトが隙間をもって積層される場合

(A2G) では単層多孔質材が背後空気層を持つ場合での吸音率に近くなる。(A1G) は隙間が無い場合と基本的には同様であるが、一自由度共振点での吸音率は若干小さくなっている。

膜を含む場合には、背後層が空気の場合と全体的にほぼ同様の傾向が見られる。但し、一自由度振動系の共振周波数は低くなり、吸音率の値は背後層が空気の場合に比べ大きくなっている。これは空気バネでの減衰が与えられたためであると考えられる。

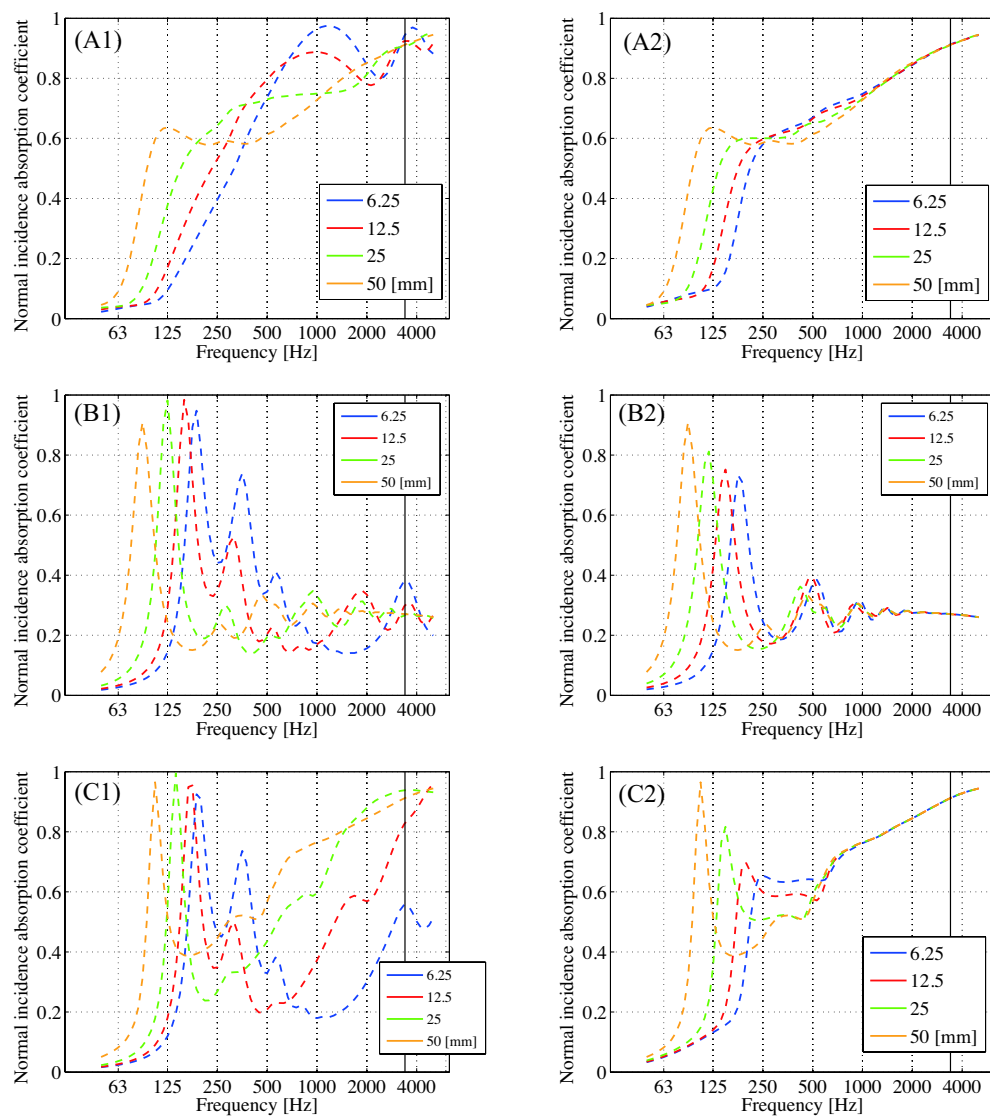


Fig. 5.19: Calculation result when back air behind the GW+Membrane layer is fully stuffed with the felt.

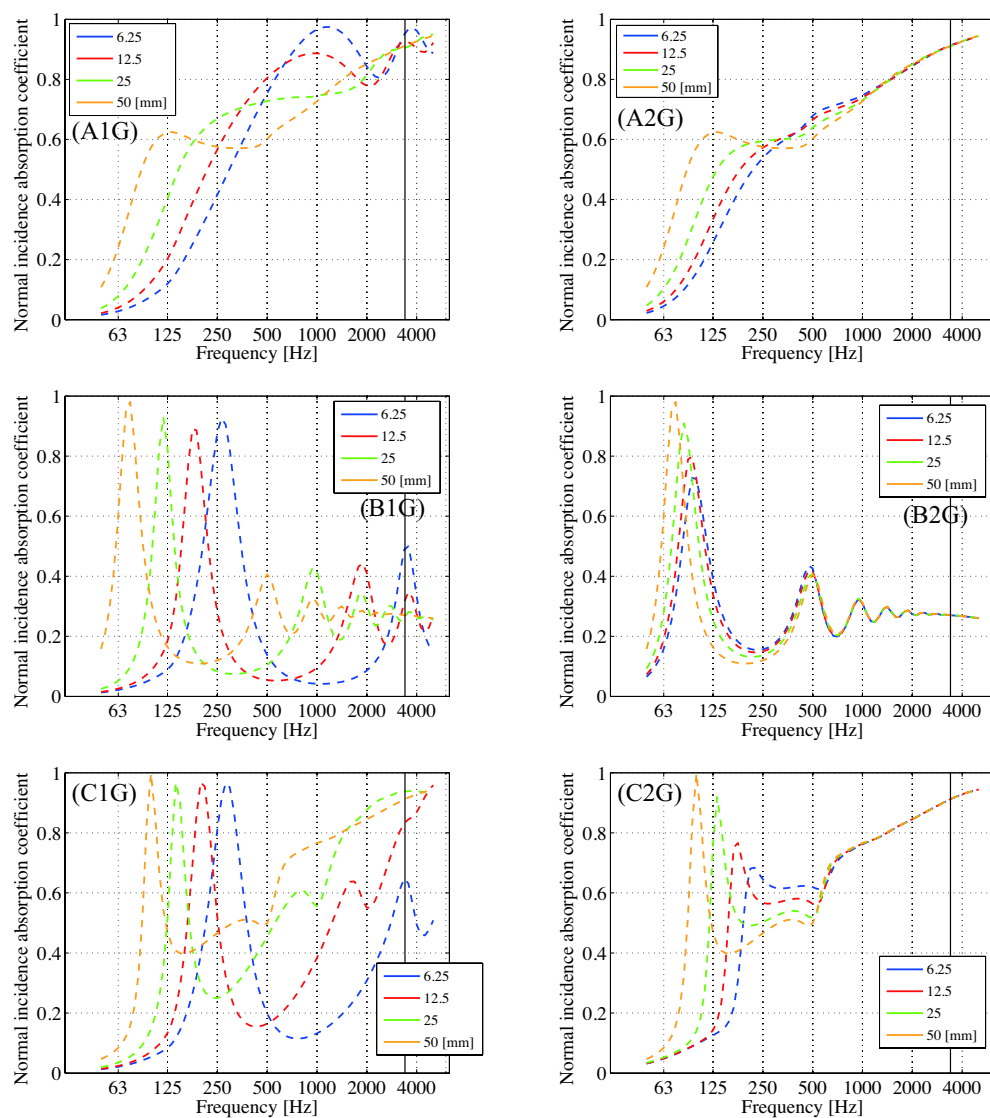


Fig. 5.20: Calculation result when back air behind the GW+Membrane layer is stuffed with the felt with slight air gap.

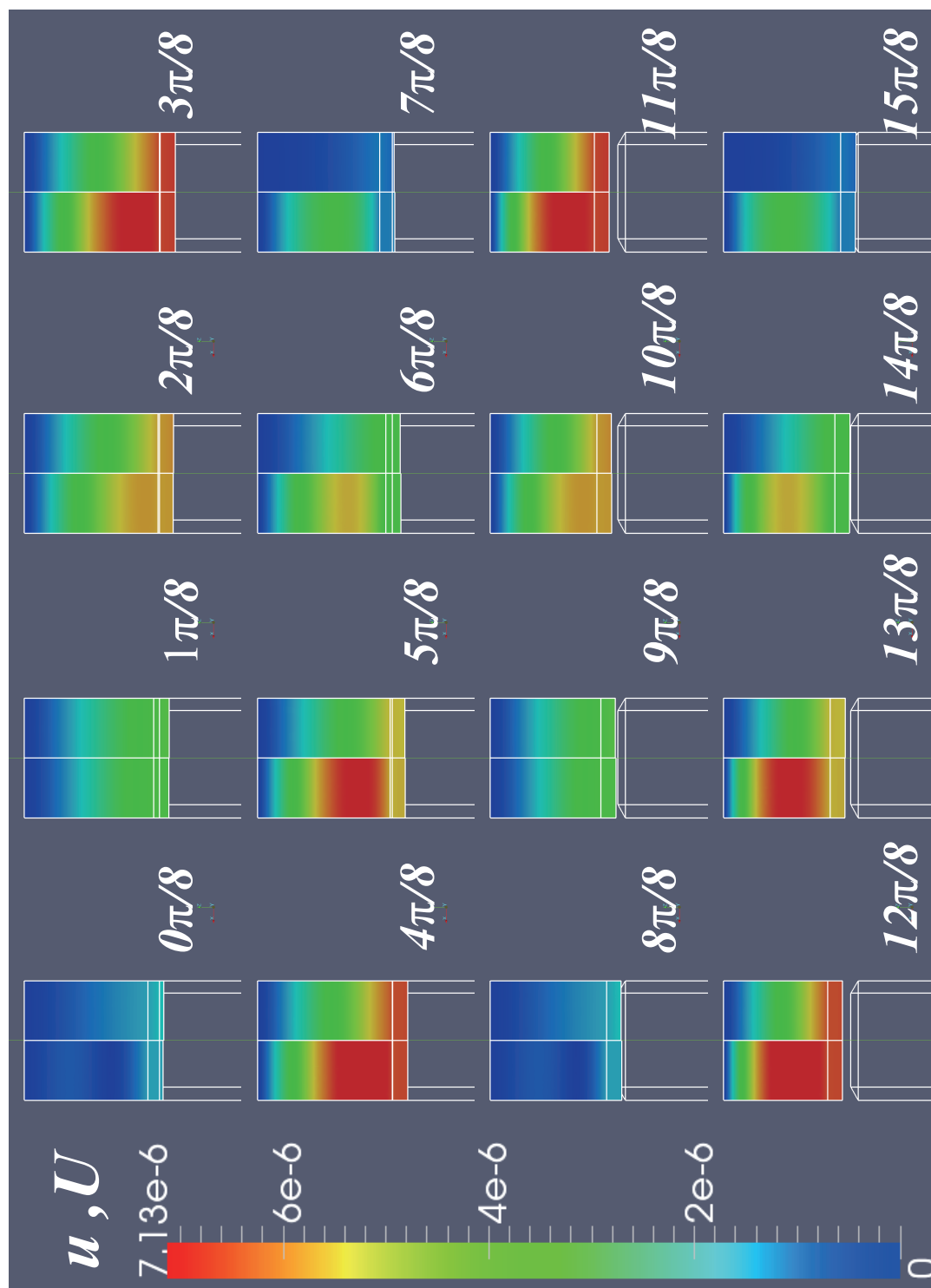


Fig. 5.21: Displacement fields at 187 Hz. Fluid displacement on the right side, Solid displacement on the left side are exaggerated by magnifying 1,000 times.

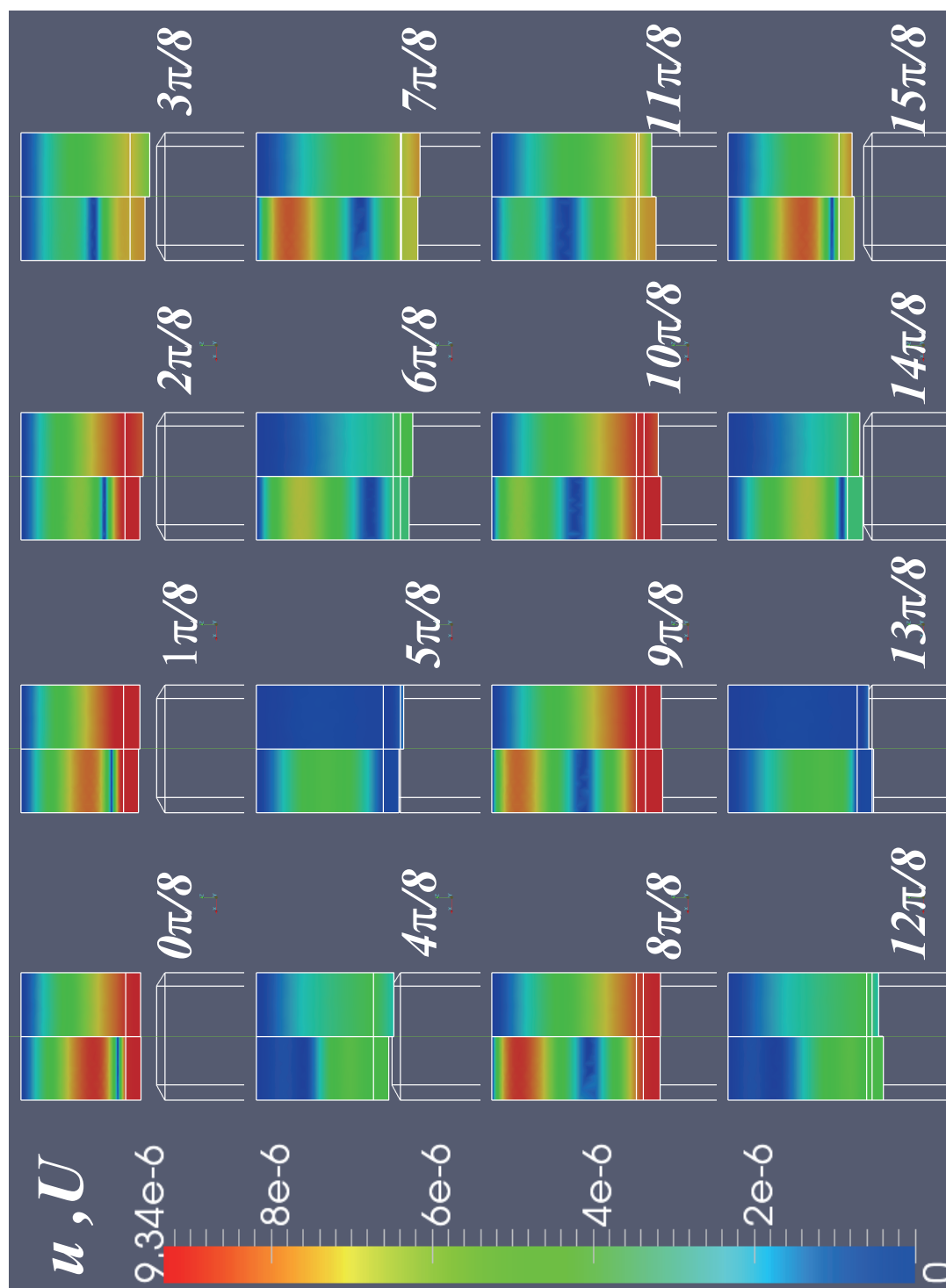


Fig. 5.22: Displacement fields at 353 Hz. Fluid displacement on the right side, Solid displacement on the left side are exaggerated by magnifying 1,000 times for purpose of visualization.

### 5.3.2 遮音材料としての適用

ここでは実際に積層材料を厚板に貼付した場合の，吸遮音特性を想定する。Fig.5.23 に計算条件を図示する。

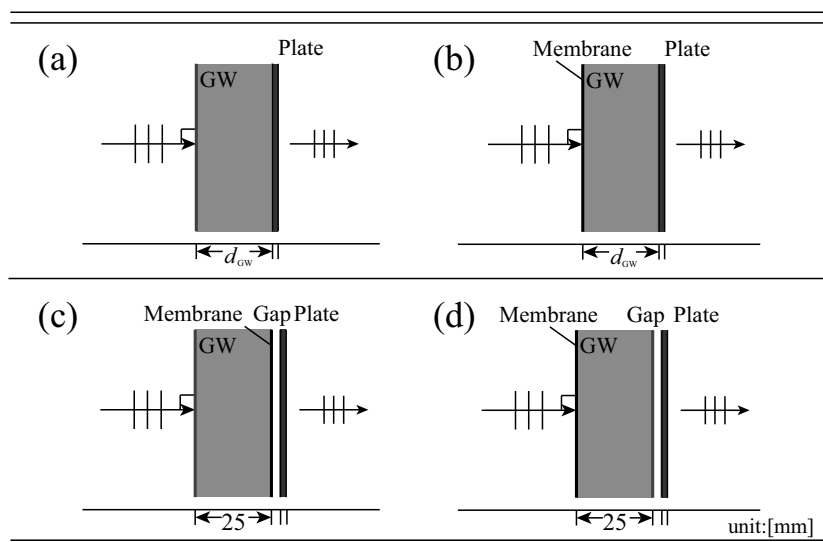


Fig. 5.23: Configurations of the analysis model and labels for results.

ここで用いた板の物性値を Tab.5.5 に示す。

Tab. 5.5: Physical properties and dimensions of the elastic material

	$\rho_s$	$\eta$	$\nu$	$E$
	[kg/m <sup>3</sup> ]			[N/m <sup>2</sup> ]
Lauan	610	0.01	0.3	$6.0 \times 10^9$

ここでは透過損失だけでなく，入射側から見た垂直入射吸音率についても検討を行う。

#### (a) 多孔質材のみを板に接着する場合

板に貼着した多孔質材の厚さを変化させた場合の結果を Fig.5.24 に示す。

低周波数域では透過により吸音率は大きくなり，250Hz 以降に多孔質材が厚いものから順に，骨格共振により透過損失にディップが見られる。この場合，多孔質材の固体，流体の逆位相振動に起因する透過損失のピークは見られない。

高周波数域では，特に多孔質材厚みが大い時には，表面での減衰により，透過損失は質量則を越えて大きくなっている。吸音率では後壁密着状態のものに近づいている (Fig.4.8)。



**(b) 膜付き多孔質材を接着する場合**

膜が板と接する場合その影響は小さく、多孔質材のみを貼着した場合と同等の特性になると考えられる。従って、ここでは入射表面に膜がある場合のみを想定する。多孔質材の厚みを変化させた場合の結果を Fig.5.25 に示す。

透過損失は低周波数域で質量則に従っている。その後、多孔質材の骨格の共振により、透過損失にディップが生じている。またこの時吸音率はピークとなっている。またこのピークは後壁密着状態の場合より、高い周波数で現れることが確認できる (Fig.5.1)。これは背面の板が振動することによる影響と考えられる。

**(c) 膜と板の間に空気層がある場合**

膜と板の間に空気層がある場合を考える。多孔質材厚は 25mm とした。結果を Fig.5.26 に示す。また、膜付き多孔質材を同等の面密度を持つ非通気弾性体として、二重壁構造の計算を行った結果を Fig.5.28 に示す。

この場合、空気層が小さくなるにつれ、多孔質材のみを板に密着させた場合の吸音率、透過損失へと近づいていく。これは、空気層が小さくなることで、空気バネとしては固くなり、最終的に膜面での変位と、板表面での変位が一致するためであると解釈できる。

隙間が大きくなるにつれ、透過損失のディップはより低周波数で現れる。このディップは二重壁における壁間の空気バネにより生じる共鳴透過と同様のものと考えられる。この周波数においては吸音率はピークとなっている。

**(d) 多孔質材と板の間に空気層がある場合**

最後に多孔質材と板の間に空気層がある場合を考える。また、同様に膜付き多孔質材を同等の面密度を持つ非通気弾性体として、二重壁構造の計算を行った結果 Fig.5.28 とあわせて検討する。

最初に現れる透過損失のディップは空気層の空気バネによる共鳴透過である。空気層厚 20mm, 198Hz における一周期での変位分布を Fig5.29 に示す。背後の厚板の振動変位が比較的大きくなっていることが確認される。

また非通気弾性体の二重壁構造とはこの空気バネの共振の現れる周波数が異なっている (Fig.5.28)。これは前項の吸音特性の部分でも述べたが、GW の通気性により、実効的な空気バネの値が大きくなっていると推察される。

その後、700Hz 付近で透過損失はなだらかなピークが生じている。空気層厚 20mm, 707Hz における、一周期での変位分布を Fig5.30 に示す。ここでは、空気層に面した多孔質材表面の固体相、流体層が逆位相に近い状態で振動していることが確認される。また、背後の弾性板の振動変位は非常に小さくなっている。

周波数が高くなるにつれ、透過損失は膜付き多孔質材、弾性板それぞれの透過損失を加算したものへ近づいている。

(c),(d) のケースに共通して、透過損失全体としては、非通気二重弾性板よりも性能は良いと言える Fig.5.28。特に多孔質材を板面に向けることで、隙間と言えるほどの小さな空気層の場合でも、膜付き多孔質材は比較的性能の劣化が少ないと言える。これは施工の行いやすさにも関わる特性であると言える。

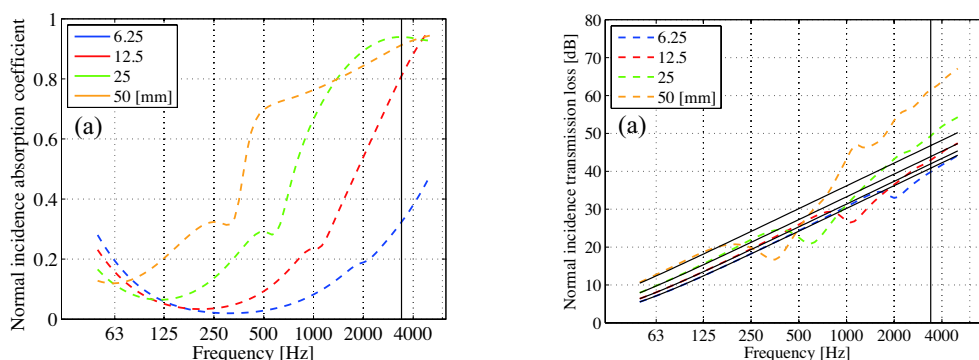


Fig. 5.24: Effect of thickness of porous material attached to the plate. Left:  $\alpha_n$  seen from incident side, Right :  $R_n$  Calculated with TMM.

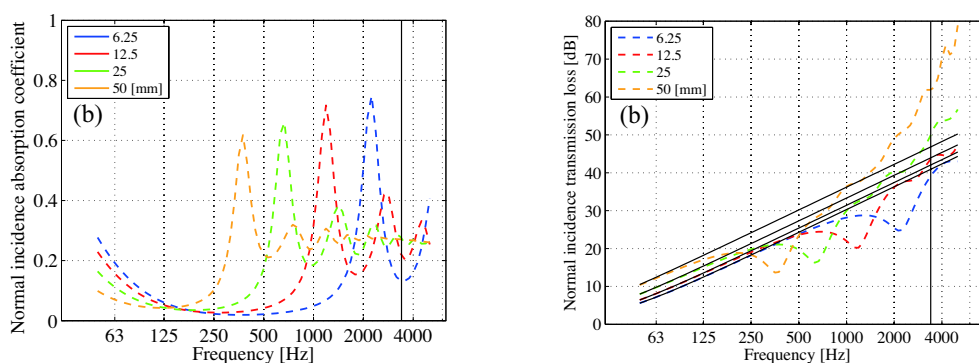


Fig. 5.25: Effect of thickness of porous material with membrane on the incident side attached to the plate. Left:  $\alpha_n$  seen from incident side, Right :  $R_n$  Calculated with TMM.

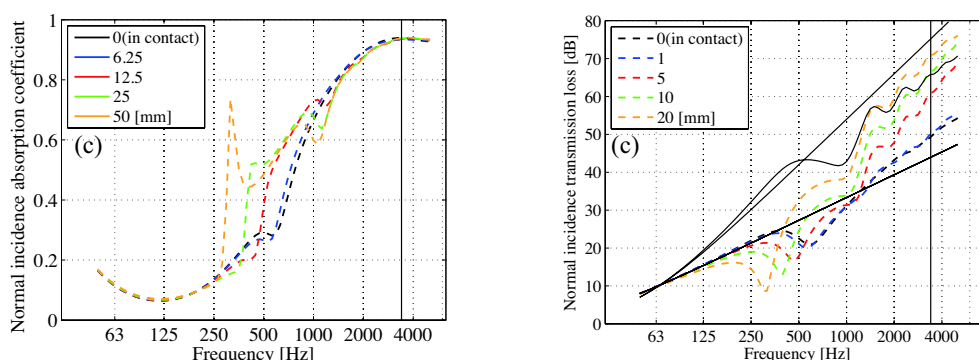


Fig. 5.26: Effect of gap between the membrane and plate. Left:  $\alpha_n$  seen from incident side, Right :  $R_n$  Calculated with TMM.

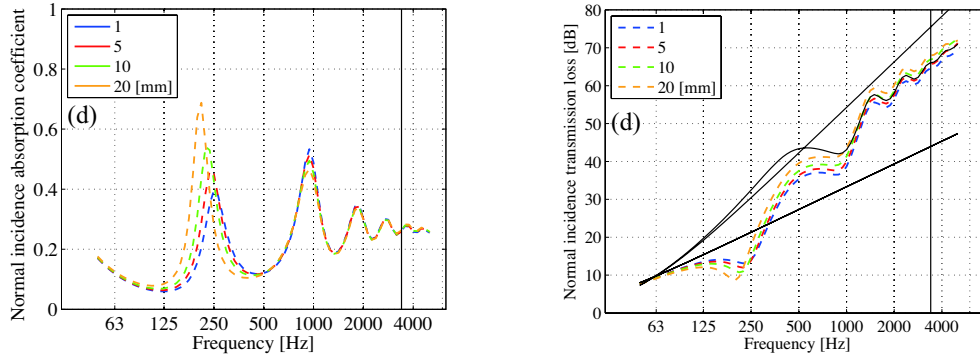


Fig. 5.27: Effect of gap between the GW and plate. Calculated with TMM.

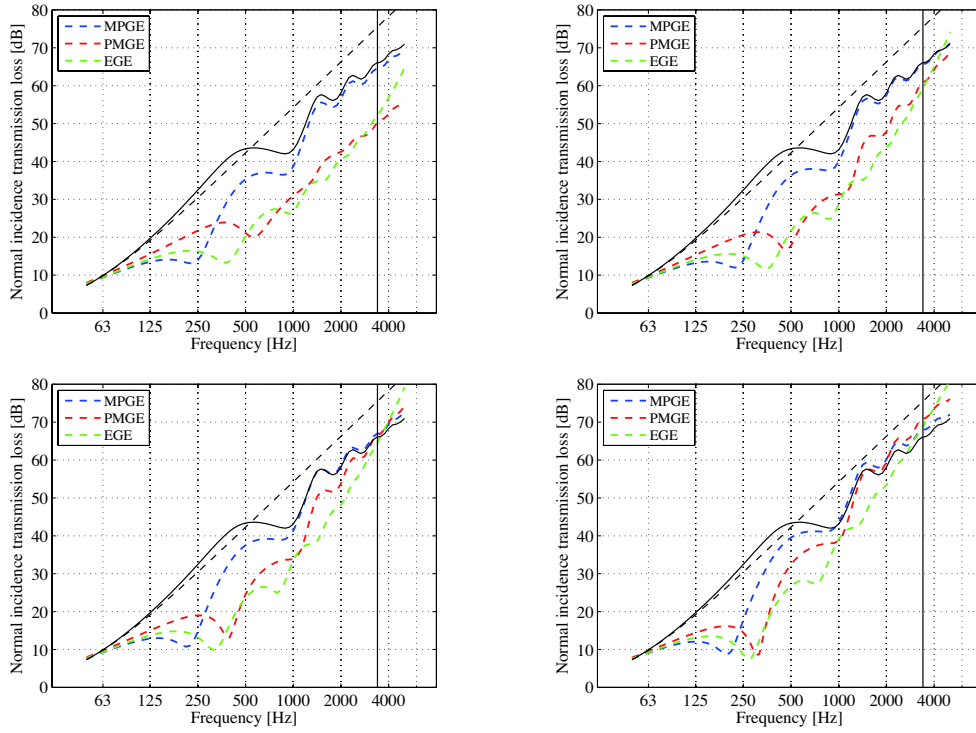


Fig. 5.28: Effect of gap before the plate. Comparison among (c), (d) and double-leaf wall layer. Calculated with TMM.

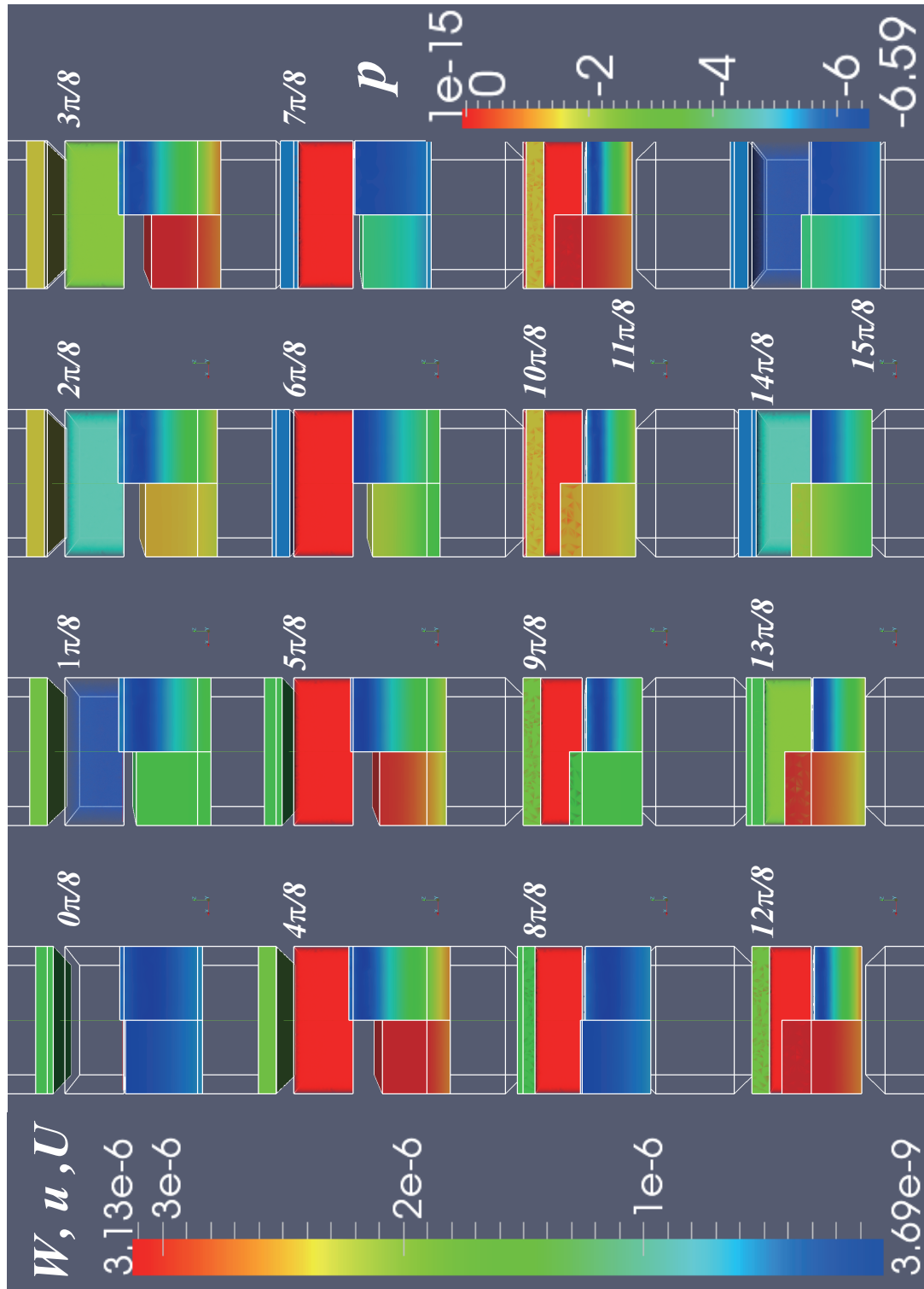


Fig. 5.29: Displacement fields at 198 Hz. Fluid displacement on the right side, Solid displacement on the left side are exaggerated by magnifying 3,000 times.

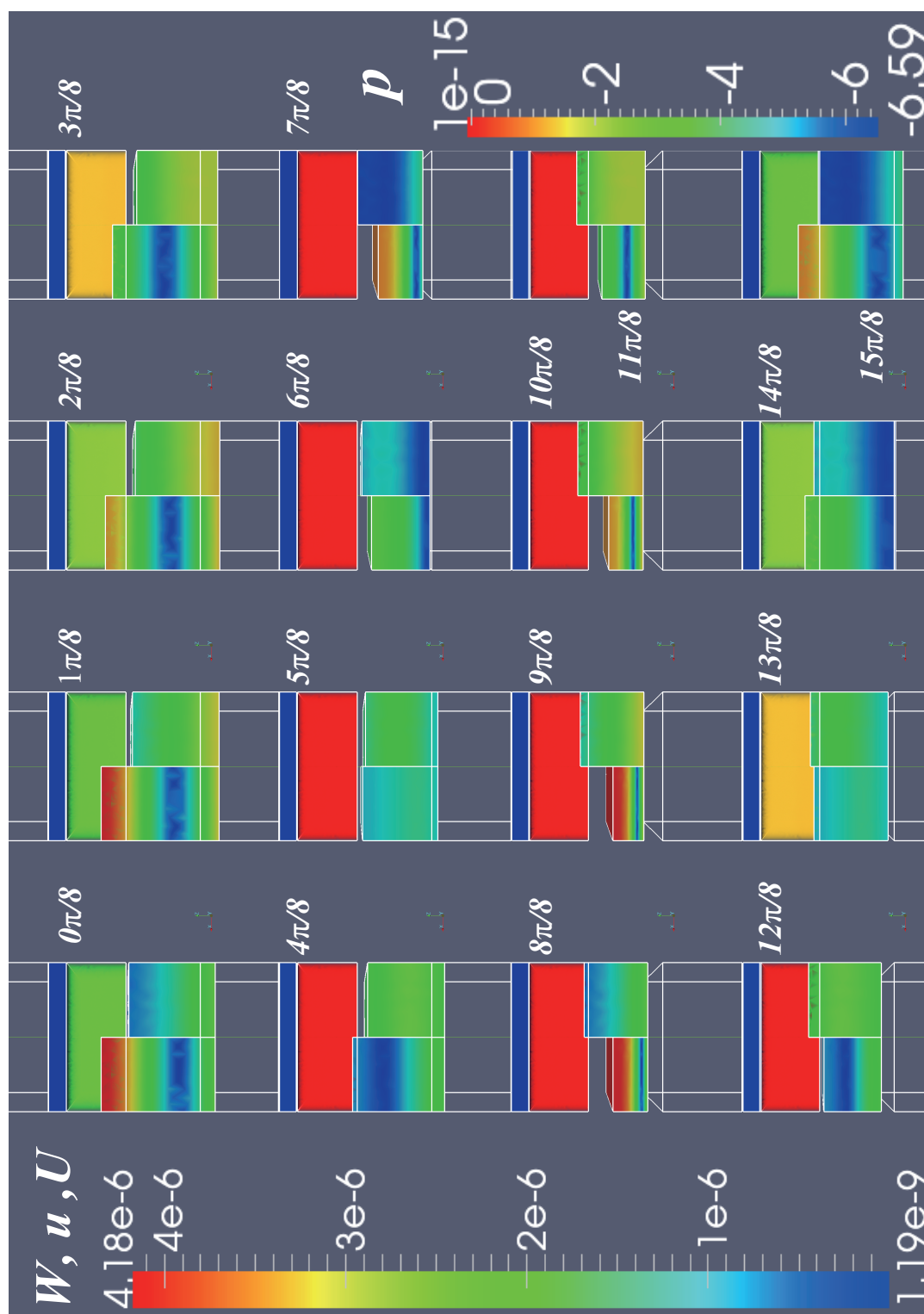


Fig. 5.30: Displacement fields at 707 Hz. Fluid displacement on the right side, Solid displacement on the left side are exaggerated by magnifying 2,000 times.

## 第 6 章

# 総括

本章では、本研究により得られた成果を総括し、今後の課題について述べる。

第一章では研究の背景について、概説し、積層防音材料の適切な性能予測、性能評価のためには、多孔質材の弾性骨格モデルを用いた解析が重要となることを述べた上で、次の目的を設定した。

- 音響管計測において単層・複層材料が支持条件によりその測定値にいかなる影響を及ぼすかを把握すること
- 数値解析を用いた可視化を通し、積層防音材料の吸遮音メカニズムを明らかにすること

第二章では基礎的な弾性振動理論を概観し、Biot theory における多孔質材内部を伝搬する波動の支配方程式を導出した。特にさまざまなパラメータの設定は Biot theory 適用の際非常に煩雑となるため、整理し記述した。

第三章では本論文で用いる数値解析の基礎理論について述べた。定常状態の音場、弾性体・多孔質弾性体場、膜振動場のそれぞれに対し、定式化した後に、それらを連成条件を述べ、具体的な適用方法を示した。また、有限要素法において中心になる要素マトリックスの算出方法を具体的に示した。

第四章では、音響管計測の詳細と問題点を述べた後、単層多孔質材の吸遮音特性について、音響管計測における支持条件をふまえて検討を行った。第二節では、管の形状や寸法に関する検討をおこなった。通常実務の場で、頻繁に用いられる音響管は円筒形状であるが、固定支持条件による影響は断面積が同程度の正方形管ならば大きな変化はないことがわかった。従って本節以降の章節では正方形断面の音響管をしようすることとした。第三節では垂直入射吸音率においては、音響管計測における側壁固定支持条件は特に厚み、流れ抵抗の大きい場合、側壁スリップ支持(緩支持)条件に対し、大きく乖離した結果が得られることが分かった。また、背後空気層が存在する場合は剪断の共振が明確に現れることが分かった。また、通常空気伝搬特性を測定するために行われる針固定測定に関しては、流れ抵抗よりも材料自体の剛性値が大きく左右することがわかった。第四節では単層多孔質材の透過損失について検討をおこなった。吸音率と同様に、厚み、流れ抵抗が大きいほ

ど、支持条件による影響は大きくなった。しかし、嵩密度の増加、即ち空気との接触面での固体面積の増加により固体への音響加振が行われやすくなると想定されるが、嵩密度を増加させることによる透過損失への影響は非常に少なかった。

第五章第一節では最も基本的な積層材料として、膜を有する多孔質材の吸音特性解析を行った。このような材料では、弾性挙動がより明確になり、音響管計測における影響も多大なものになると考えられるため、同様に音響管側壁での支持条件に関する検討を行った。膜付き多孔質材は背後に空気層を持つ場合、低周波数域に大きな吸音率を持つことが数値解析によって示された。これらは膜付き多孔質材を質量、背後空気層をバネとした、一自由度共振系であると考えられた。材料向きが吸音率に非常に影響していることも確認され、特に材料背面において、多孔質材と空気が連続となる場合、その空気バネの実効的な値は膜面が背面にある時よりも大きくなり、より低周波数で吸音率にピークが現れることが示唆された。

第二節では遮音特性に関する解析を行った。膜付き多孔質材料の透過損失は低周波数域で質量則に従い、その後質量則を超えるピークを示す。この周波数では多孔質弾性体の固体相と流体相が逆位相で振動することが有限要素法による可視化を通して確認され、材料厚が  $1/4$  波長となる周波数において現れる現象であることも指摘された。この現象は、上述の逆走振動に加え、膜面での振動変位が一致するという境界条件により生じる現象であると推察された。また吸音率、透過損失共に音響管内で固定されることにより、低周波数域で現れる吸遮音メカニズムが生じにくくなると言え、単層材料同様にその支持条件が、実測における正しい性能評価のために重要であることが指摘された。最後に第三章では吸音材、遮音材としての応用を想定し、それぞれ背後にフェルトを挿入した場合、弾性板に貼着した場合の検討を行った。背後にフェルトを膜付き多孔質材に密着する形で挿入した場合、特に表面での多孔質材厚が小さくなることで通常の固体共振では想定されない周波数においてピークが現れた。これは Biot theory における速い波、遅い波の影響であると推察された。一方遮音材としての適用としては、多孔質材を板面とし、わずかな隙間を持たせることでも、特性は飛躍的に向上することが数値解析により示された。

今後の課題として、斜め入射条件での解析が挙げられる。本論文では基礎的な検討として、垂直入射条件のみを扱ったが、実務への適用という観点からは、より現実的な条件における解析手法を導入し、予測範囲を広げて行くことが重要である。

また、実測結果との比較・検討が重要である。本論文では全て数値解析により検討を行った。しかし、これらは理想的な条件による計算であるため、実際の問題を精度良く予測し得るとは限らない。実測との比較を通し、その予測精度が立証された上で、最終的に積層防音材料の設計ツールとしての役割が果たされると言える。

## 付録 A

# 伝達マトリックス法

ここで本論文で無限大面積試料の解析に用いた伝達マトリックス法について記述する。ここでは伝達マトリックスの導出などは割愛するが，利用した数式と吸音率，透過損失の計算手順について説明する。伝達マトリックス法では Fig.A.1 のような層状の材料を想定する。

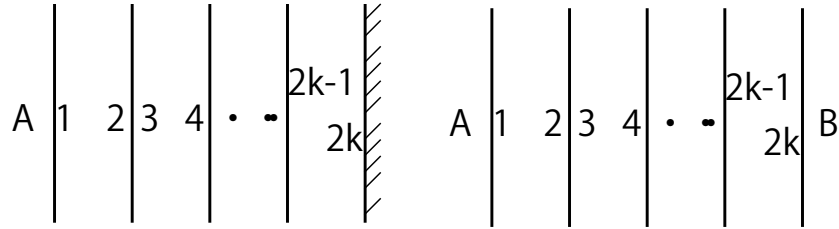


Fig. A.1: Concept of the layers. Left: Rigid backed condition, Right : semi-free condition.

## A.1 各物理場の伝達マトリックス

### A.1.1 膜モデル

膜は面密度  $m_a$  のみを考慮する。材料表裏面の応力，振動速度をそれぞれ  $p_1, p_2, u_1, u_2$  とすると伝達マトリックスは次式で書ける。

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ u_1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & j\omega m_a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} p_2 \\ u_2 \end{pmatrix} \quad (\text{A.1})$$

### A.1.2 弾性体モデル

材料自身の弾性，質量，厚みを考慮した場合，材料表裏面の応力と振動速度の関係は次式の伝達マトリックスで表される。



$$\begin{pmatrix} u(1)_1^s \\ u(1)_3^s \\ p(1)_3^s \\ p(1)_1^s \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} & T_{14} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} & T_{24} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} & T_{34} \\ T_{41} & T_{42} & T_{43} & T_{44} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u(2)_1^s \\ u(2)_3^s \\ p(2)_3^s \\ p(2)_1^s \end{pmatrix} \quad (\text{A.2})$$

$u(i)_1^s$  : 材料に対する剪断方向の振動速度

$u(i)_3^s$  : 材料に対する垂直方向の振動速度

$p(i)_3^s$  : 材料に対する垂直方向の応力

$p(i)_1^s$  : 材料に対する剪断方向の応力

i: 1-表面, 2-裏面

$$\begin{aligned} T_{11} &= \frac{2k_t^2 \cos(k_{13}d) + (k_{33}^2 - k_t^2) \cos(k_{33}d)}{\delta_3^2} & T_{24} &= T_{13} \\ T_{12} &= \frac{jk_t}{\delta_3^2} \{ (k_{33}^2 - k_t^2/k_{13}) \sin(k_{13}d) \\ &\quad - 2k_{33} \sin(k_{33}d) \} & T_{31} &= -2k_t \mu (k_{33} - k_t^2) \frac{\cos(k_{13}d) - \cos(k_{33}d)}{\omega \delta_3^2} \\ T_{13} &= -\omega k_t \frac{\cos(k_{13}d) - \cos(k_{33}d)}{\mu \delta_3^2} & T_{32} &= j\mu \frac{\{ (k_{33}^2 - k_t^2)/k_{33} \} \sin(k_{13}d) + 4k_t^2 k_{33} \sin(k_{33}d)}{\omega \delta_3^2} \\ T_{14} &= -j\omega \frac{(k_t^2/k_{13}) \sin(k_{13}d) + k_{33} \sin(k_{33}d)}{\mu \delta_3^2} & T_{33} &= T_{22} \\ T_{21} &= \frac{jk_t}{\delta_3^2} \{ 2k_{13} \sin(k_{13}d) \\ &\quad - \{ (k_{33}^2 - k_t^2)/k_{33} \} \sin(k_{33}d) \} & T_{34} &= T_{12} \\ T_{22} &= \frac{(k_{33}^2 - k_t^2) \cos(k_{13}d) + 2k_t^2 \cos(k_{33}d)}{\delta_3^2} & T_{41} &= j\mu \frac{4k_t^2 k_{33} \sin(k_{13}d) + \{ (k_{33}^2 - k_t^2)/k_{33} \} \sin(k_{33}d)}{\omega \delta_3^2} \\ T_{23} &= -j\omega \frac{k_{13} \sin(k_{13}d) + (k_t^2/k_{33}) \sin(k_{33}d)}{\mu \delta_3^2} & T_{42} &= T_{31} \\ & & T_{43} &= T_{21} \\ & & T_{44} &= T_{11} \end{aligned}$$

$d$ : 弾性体厚み

$\lambda, \mu$ : ラメの弾性係数 (第二章参照)

$\delta_1 = \omega \sqrt{\rho_s/(\lambda + 2\mu)}$ : 剪断方向波数

$\delta_3 = \omega \sqrt{\rho_s/(\mu)}$ : 垂直方向波数

$k_t = k_0 \sin(\theta)$ : 入射角  $\theta$  の時の材料面での剪断方向に対する波数

$k_{13} = \sqrt{\delta_1^2 - k_t^2}$ : 弾性体中の剪断方向に対する波数ベクトル

$k_{33} = \sqrt{\delta_3^2 - k_t^2}$ : 弾性体中の垂直方向に対する波数ベクトル

### A.1.3 流体モデル

剛骨格モデルや、隙間の空気層は次式の伝達マトリックスで表される。

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ u_1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(k_3 d) & \frac{j\omega \rho_{\text{eff}} \sin(k_3 d)}{k_3} \\ \frac{j k_3 \sin(k_3 d)}{\omega \rho_{\text{eff}}} & \cos(k_3 d) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ u_1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.3})$$

$d$ : 流体層厚み

$k_t = k_0 \sin(\theta)$ : 入射角  $\theta$  の時の材料面での剪断方向に対する波数

$k_{33} = \sqrt{k_{\text{eff}}^2 - k_t^2}$ : 流体中の垂直方向に対する波数

$k_{\text{eff}} = \omega \sqrt{\rho_{\text{eff}}/K_f}$ : 流体中の実効波数

ここで  $\rho_{\text{eff}}K_f$  は多孔質材内部流体の実効密度，複素体積弾性率であるが，これらは Champoux-Allard のモデル式より算出したものを用いた。また空気中ではそれぞれ  $\rho_0, \rho_0 c_0^2$  とおいた。

## A.1.4 多孔質弾性体モデル

多孔質弾性体モデルの伝達マトリックスは、次式で表すことができる。

$$\begin{pmatrix} u(1)_1^s \\ u(1)_3^s \\ u(1)_1^f \\ p(1)_3^s \\ p(1)_1^s \\ p(1)_3^f \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} & T_{14} & T_{15} & T_{16} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} & T_{24} & T_{25} & T_{26} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} & T_{34} & T_{35} & T_{36} \\ T_{41} & T_{42} & T_{43} & T_{44} & T_{45} & T_{46} \\ T_{51} & T_{52} & T_{53} & T_{54} & T_{55} & T_{56} \\ T_{61} & T_{62} & T_{63} & T_{64} & T_{65} & T_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u(1)_1^s \\ u(1)_3^s \\ u(1)_1^f \\ p(1)_3^s \\ p(1)_1^s \\ p(1)_3^f \end{pmatrix} \quad (\text{A.4})$$

$$\begin{aligned} T_{11} &= 2k_t^2 N(X_1 - X_2) \\ &\quad + (c_1 D_2 - C_2 D_1) X_3 \\ T_{12} &= k_t [C_2 Y_2' - C_1 Y_1' \\ &\quad + 2Nk_{33}(D_2 - D_1)Y_3] \\ T_{13} &= k_t (D_2 Y_2' - D_1 Y_1') \\ T_{14} &= \omega k_t [X_2 - X_1 + (D_2 - D_1)X_3] \\ T_{15} &= \omega [k_t^2 (Y_1' - Y_2') + k_{33}(D_2 - D_1)X_3] \\ T_{16} &= -\omega k_t [\mu_1 X_1 - \mu_2 X_2 \\ &\quad - \mu_3 (D_2 - D_1)X_3] \\ T_{21} &= k_t [(C_1 D_2 - C_2 D_1)Y_1' \\ &\quad - 2N(k_{13}Y_1 - k_{23}Y_2)] \\ T_{22} &= C_1 X_1 - C_2 X_2 + 2k_t^2 N(D_2 - D_1)X_3 \\ T_{23} &= D_1 X_1 - D_2 X_2 \\ T_{24} &= \omega [k_{13}Y_1 - k_{23}Y_2 + k_t^2 (D_2 - D_1)Y_3'] \\ T_{25} &= T_{14} \\ T_{26} &= \omega [k_{13}\mu_1 Y_1 - k_{23}\mu_2 Y_2 \\ &\quad + k_t^2 \mu_3 (D_2 - D_1)Y_3'] \\ T_{31} &= k_t [\mu_3 (C_1 D_2 - C_2 D_1)Y_3' \\ &\quad - 2N(k_{13}\mu_1 Y_1 - k_{23}\mu_2 Y_2)] \\ T_{32} &= \mu_1 C_1 X_1 - \mu_2 C_2 X_2 \\ &\quad + 2k_t^2 N\mu_3 (D_2 - D_1)X_3 \\ T_{33} &= \mu_1 D_1 X_1 - \mu_2 D_2 X_2 \\ T_{34} &= T_{26} \\ T_{35} &= T_{16} \\ T_{36} &= \omega [k_{13}\mu_1^2 Y_1 - k_{23}\mu_2^2 Y_2 \\ &\quad + k_t^2 \mu_3^2 (D_2 - D_1)Y_3'] \\ T_{41} &= 2k_t^2 N \frac{C_2 X_2 - C_1 X_1 + (C_1 D_2 - C_2 D_1)X_3}{\omega} \\ T_{42} &= \frac{C_1^2 Y_1' - C_2^2 Y_2' + 4k_t^2 N^2 k_{33} (D_2 - D_1)Y_3}{\omega} \\ T_{43} &= \frac{C_1 D_1 Y_1' - C_2 D_2 Y_2'}{\omega} \\ T_{44} &= T_{22} \\ T_{45} &= T_{12} \\ T_{46} &= T_{32} \\ T_{51} &= \frac{4k_t^2 N^2 (k_{13}Y_1 - k_{23}Y_2)}{\omega} + \frac{(C_1 D_2 - C_2 D_1)^2 Y_3'}{\omega (D_2 - D_1)} \\ T_{52} &= T_{41} \\ T_{53} &= -2k_t N \frac{D_1 X_1 - D_2 X_2}{\omega} \\ T_{54} &= T_{21} \\ T_{55} &= T_{11} \\ T_{56} &= T_{31} \\ T_{61} &= T_{53} \\ T_{62} &= T_{43} \\ T_{63} &= \frac{D_1^2 Y_1' - D_2^2 Y_2'}{\omega} \\ T_{64} &= T_{23} \\ T_{65} &= T_{13} \\ T_{66} &= T_{33} \end{aligned}$$

ここで  $X_i, Y_i, Y_i', C_i, D_i$  は次のように表される。但し、これらは便宜上置き換えたものであり、物理的な意味を持つまとまりではない。

$$\begin{aligned}
X_1 &= \frac{D_2 \cos(-k_{13}d)}{\Delta} & Y_1 &= j \frac{D_2 \sin(-k_{13}d)}{\Delta} & Y'_i &= \frac{Y_i}{k_{i3}} & i &= 1, 2, 3 \\
X_2 &= \frac{D_1 \cos(-k_{23}d)}{\Delta} & Y_2 &= j \frac{D_1 \sin(-k_{23}d)}{\Delta} & C_i &= (P + Q\mu_i)\delta_i^2 - 2k_t^2 N & i &= 1, 2 \\
X_3 &= \frac{\cos(-k_{33}d)}{\Delta} & Y_3 &= j \frac{\sin(-k_{33}d)}{\Delta} & D_i &= (R\mu_i + Q)\delta_i^2 & i &= 1, 2 \\
& & & & \Delta &= 2k_t^2 N(D_2 - D_1) + (C_1 D_2 - C_2 D_1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta_1^2 &= \frac{\omega^2(P\tilde{\rho}_{22} + R\tilde{\rho}_{11} - 2Q\tilde{\rho}_{12} - \sqrt{\Phi})}{2(PR - Q^2)} \\
\delta_2^2 &= \frac{\omega^2(P\tilde{\rho}_{22} + R\tilde{\rho}_{11} - 2Q\tilde{\rho}_{12} + \sqrt{\Phi})}{2(PR - Q^2)} \\
\delta_3^2 &= \frac{\tilde{\rho}_{11}\tilde{\rho}_{22} - \tilde{\rho}_{12}^2}{N\tilde{\rho}_{22}} \\
\Phi &= (P\tilde{\rho}_{22} + R\tilde{\rho}_{11} - 2Q\tilde{\rho}_{12})^2 - 4(PR - Q^2)(\tilde{\rho}_{11}\tilde{\rho}_{22} - \tilde{\rho}_{12}^2)
\end{aligned}$$

$N, P, Q, R, \tilde{\rho}_{11}, \tilde{\rho}_{12}, \tilde{\rho}_{22}$  は第二章に示した定常状態の Biot の弾性係数, 慣性係数である。

## A.2 各物理場の境界マトリックス

### A.2.1 多孔質弾性体モデル同士の境界

多孔質弾性体モデル同士が積層されるとし, 各層での表裏面の応力, 粒子速度は次式でかける。

$$\begin{pmatrix} u(1)_1^s \\ u(1)_3^s \\ u(1)_1^f \\ p(1)_3^s \\ p(1)_1^s \\ p(1)_3^f \end{pmatrix} = [T_{\text{Biot}}^1] \begin{pmatrix} u(2)_1^s \\ u(2)_3^s \\ u(2)_1^f \\ p(2)_3^s \\ p(2)_1^s \\ p(2)_3^f \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} u(3)_1^s \\ u(3)_3^s \\ u(3)_1^f \\ p(3)_3^s \\ p(3)_1^s \\ p(3)_3^f \end{pmatrix} = [T_{\text{Biot}}^2] \begin{pmatrix} u(4)_1^s \\ u(4)_3^s \\ u(4)_1^f \\ p(4)_3^s \\ p(4)_1^s \\ p(4)_3^f \end{pmatrix}$$

境界面の応力  $p(2), p(3)$  と粒子速度  $u(2), u(3)$  の連続条件は下式で書くことができる

$$\begin{cases} u(2)_1^s = u(3)_1^s \\ u(2)_3^s = u(3)_3^s \\ \phi_1(u(2)_3^f - u(2)_3^s) = \phi_2(u(3)_3^f - u(3)_3^s) \\ p(2)_3^s + p(2)_3^f = p(3)_3^s + p(3)_3^f \\ p(2)_1^s = p(3)_1^s \\ p(2)_3^f/\phi_1 = p(3)_3^f/\phi_2 \end{cases}$$

これらはマトリックス形式で次のように書ける。

$$\begin{pmatrix} u(2)_1^s \\ u(2)_3^s \\ u(2)_1^f \\ p(2)_3^s \\ p(2)_1^s \\ p(2)_3^f \end{pmatrix} = [I_{pp}] \begin{pmatrix} u(3)_1^s \\ u(3)_3^s \\ u(3)_1^f \\ p(3)_3^s \\ p(3)_1^s \\ p(3)_3^f \end{pmatrix}$$

$$[I_{pp}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \phi_2/\phi_1 & \phi_2/\phi_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \phi_1/\phi_2 \end{bmatrix}$$

これらを用いて、二層の表裏面での応力、粒子速度は下式で与えられる。

$$\begin{pmatrix} u(1)_1^s \\ u(1)_3^s \\ u(1)_1^f \\ p(1)_3^s \\ p(1)_1^s \\ p(1)_3^f \end{pmatrix} = [T_{\text{Biot}}^1][I_{pp}][T_{\text{Biot}}^2] \begin{pmatrix} u(4)_1^s \\ u(4)_3^s \\ u(4)_1^f \\ p(4)_3^s \\ p(4)_1^s \\ p(4)_3^f \end{pmatrix}$$

### A.2.2 弾性体モデルと多孔質弾性体モデルの境界

弾性体モデル、多孔質弾性体モデルの各層での表裏面の応力、粒子速度は次式でかける。

$$\begin{pmatrix} u(1)_1^s \\ u(1)_3^s \\ p(1)_3^s \\ p(1)_1^s \end{pmatrix} = [T_E^1] \begin{pmatrix} u(2)_1^s \\ u(2)_3^s \\ p(2)_3^s \\ p(2)_1^s \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} u(3)_1^s \\ u(3)_3^s \\ u(3)_1^f \\ p(3)_3^s \\ p(3)_1^s \\ p(3)_3^f \end{pmatrix} = [T_{\text{Biot}}^2] \begin{pmatrix} u(4)_1^s \\ u(4)_3^s \\ u(4)_1^f \\ p(4)_3^s \\ p(4)_1^s \\ p(4)_3^f \end{pmatrix}$$

境界面での応力  $p(2)$ ,  $p(3)$ , 粒子速度  $u(2)$ ,  $u(3)$  の連続条件は下式で書ける。

$$\begin{cases} u(2)_1^s = u(3)_1^s \\ u(2)_3^s = u(3)_3^s \\ u(2)_3^f = u(3)_3^f p(2)_3^s = p(3)_3^s + p(3)_3^f \\ p(2)_1^s = p(3)_1^s \end{cases}$$

$$[I_{\text{E,Biot}}] \begin{pmatrix} u(2)_1^s \\ u(2)_3^s \\ p(2)_3^s \\ p(2)_1^s \end{pmatrix} + [J_{\text{E,Biot}}] \begin{pmatrix} u(3)_1^s \\ u(3)_3^s \\ u(3)_1^f \\ p(3)_3^s \\ p(3)_1^s \\ p(3)_3^f \end{pmatrix} = 0$$

$$[I_{E,Biot}] \begin{pmatrix} u(2)_1^s \\ u(2)_3^s \\ p(2)_3^s \\ p(2)_1^s \end{pmatrix} + [J_{E,Biot}][T_{Biot}] \begin{pmatrix} u(4)_1^s \\ u(4)_3^s \\ u(4)_1^f \\ p(4)_3^s \\ p(4)_1^s \\ p(4)_3^f \end{pmatrix} = 0 \quad (A.5)$$

$$[I_{E,Biot}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[J_{E,Biot}] = - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

### A.2.3 膜モデルと多孔質弾性体モデルの境界

膜モデル，多孔質弾性体モデルの各層での表裏面の応力，粒子速度は次式でかける。

$$\begin{pmatrix} u(1)_1^s \\ u(1)_3^s \\ u(1)_1^f \\ p(1)_3^s \\ p(1)_1^s \\ p(1)_3^f \end{pmatrix} = [T_{Biot}^2] \begin{pmatrix} u(2)_1^s \\ u(2)_3^s \\ u(2)_1^f \\ p(2)_3^s \\ p(2)_1^s \\ p(2)_3^f \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} p(3) \\ u(3) \end{pmatrix} = [T_{Mmb}^2] \begin{pmatrix} p(4) \\ u(4) \end{pmatrix}$$

境界面での応力  $p(2), p(3)$ , 粒子速度  $u(2), u(3)$  の連続条件は下式で書ける。

$$\begin{cases} u(2)_3^s = u(3) \\ u(2)_3^f = u(3) \\ p(2)_3^s + p(2)_3^f = -p(3) \\ p(2)_1^s = 0 \end{cases}$$

これらをマトリックス形式で表すと次のように書ける。

$$[I_{Mmb,Biot}] \begin{pmatrix} u(2)_1^s \\ u(2)_3^s \\ u(2)_1^f \\ p(2)_3^s \\ p(2)_1^s \\ p(2)_3^f \end{pmatrix} + [J_{Mmb,Biot}] \begin{pmatrix} p(3) \\ u(3) \end{pmatrix} = 0$$

$$[I_{\text{Mmb,Biot}}] \begin{pmatrix} u(2)_1^s \\ u(2)_3^s \\ u(2)_1^f \\ p(2)_3^s \\ p(2)_1^s \\ p(2)_3^f \end{pmatrix} + [J_{\text{Mmb,Biot}}][T_{\text{Mmb}}] \begin{pmatrix} p(3) \\ u(3) \end{pmatrix} = 0 \quad (\text{A.6})$$

$$[I_{\text{Mmb,Biot}}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[J_{\text{Mmb,Biot}}] = - \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

#### A.2.4 流体モデルと多孔質弾性体モデルの境界

流体モデル，多孔質弾性体モデルの各層での表裏面の応力，粒子速度は次式でかける。

$$\begin{pmatrix} u(1)_1^s \\ u(1)_3^s \\ u(1)_1^f \\ p(1)_3^s \\ p(1)_1^s \\ p(1)_3^f \end{pmatrix} = [T_{\text{Biot}}^1] \begin{pmatrix} u(2)_1^s \\ u(2)_3^s \\ u(2)_1^f \\ p(2)_3^s \\ p(2)_1^s \\ p(2)_3^f \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} p(3) \\ u(3) \end{pmatrix} = [T_{\text{flu}}^2] \begin{pmatrix} p(4) \\ u(4) \end{pmatrix}$$

境界面での応力  $p(2), p(3)$ ，粒子速度  $u(2), u(3)$  の連続条件は下式で書ける。

$$\begin{cases} (1 - \phi)u(2)_3^s + \phi u(2)_3^f = u(3) \\ p(2)_3^s = -(1 - \phi)p(3) \\ p(2)_1^s = 0p(2)_3^f = -\phi p(3) \end{cases}$$

これらをマトリックス形式で表すと次のように書ける。

$$[I_{\text{flu,Biot}}] \begin{pmatrix} u(2)_1^s \\ u(2)_3^s \\ u(2)_1^f \\ p(2)_3^s \\ p(2)_1^s \\ p(2)_3^f \end{pmatrix} + [J_{\text{flu,Biot}}] \begin{pmatrix} p(3) \\ u(3) \end{pmatrix} = 0$$

$$[I_{\text{flu,Biot}}] \begin{pmatrix} u(2)_1^s \\ u(2)_3^s \\ u(2)_1^f \\ p(2)_3^s \\ p(2)_1^s \\ p(2)_3^f \end{pmatrix} + [J_{\text{flu,Biot}}][T_{\text{flu}}] \begin{pmatrix} p(4) \\ u(4) \end{pmatrix} = 0$$

$$[I_{\text{flu}, \text{Biot}}] \begin{pmatrix} u(2)_1^s \\ u(2)_3^s \\ u(2)_1^f \\ p(2)_3^s \\ p(2)_1^s \\ p(2)_3^f \end{pmatrix} + [J_{\text{flu}, \text{Biot}}][T_{\text{flu}}] \begin{pmatrix} p(4) \\ u(4) \end{pmatrix} = 0 \quad (\text{A.7})$$

$$[I_{\text{flu}, \text{Biot}}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 - \phi & \phi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[J_{\text{flu}, \text{Biot}}] = - \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 - \phi & 0 \\ 0 & 0 \\ \phi & 0 \end{bmatrix}$$

### A.2.5 弾性体モデル流体モデルの境界

弾性体モデル, 流体モデルの各層での表裏面の応力, 粒子速度は次式でかける。

$$\begin{pmatrix} u(1)_1^s \\ u(1)_3^s \\ p(1)_3^s \\ p(1)_1^s \end{pmatrix} = [T_E^1] \begin{pmatrix} u(2)_1^s \\ u(2)_3^s \\ p(2)_3^s \\ p(2)_1^s \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} p(3) \\ u(3) \end{pmatrix} = [T_{\text{flu}}^2] \begin{pmatrix} p(4) \\ u(4) \end{pmatrix}$$

境界面での応力, 音圧, 粒子速度の連続条件は下式で書ける。

$$\begin{cases} u(2)_3^s = u(3) \\ p(2)_3^s = -p(3) \\ p(2)_1^s = 0 \end{cases}$$

$$[I_{\text{E}, \text{flu}}] \begin{pmatrix} u(2)_1^s \\ u(2)_3^s \\ p(2)_3^s \\ p(2)_1^s \end{pmatrix} + [J_{\text{E}, \text{flu}}] \begin{pmatrix} p(3) \\ u(3) \end{pmatrix} = 0$$

$$[I_{\text{E}, \text{flu}}] \begin{pmatrix} u(2)_1^s \\ u(2)_3^s \\ p(2)_3^s \\ p(2)_1^s \end{pmatrix} + [J_{\text{E}, \text{flu}}][T_{\text{flu}}] \begin{pmatrix} p(4) \\ u(4) \end{pmatrix} = 0$$

$$[I_{\text{E}, \text{flu}}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[J_{\text{E}, \text{flu}}] = - \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$



### A.2.6 膜モデルと流体モデルの境界

膜モデル，流体モデルの表裏面の応力，音圧，粒子速度を次式で書ける。

$$\begin{pmatrix} p(1) \\ u(1) \end{pmatrix} = [T_{\text{Mmb}}^1] \begin{pmatrix} p(2) \\ u(2) \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} p(3) \\ u(3) \end{pmatrix} = [T_{\text{flu}}^2] \begin{pmatrix} p(4) \\ u(4) \end{pmatrix}$$

これらの積層は単純に伝達マトリックスの積算で表現される。即ち，膜表面と流体層裏面の応力，音圧，粒子速度は下式で表現できる。

$$\begin{pmatrix} p(1) \\ u(1) \end{pmatrix} = [T_{\text{Mmb}}^1][T_{\text{flu}}^2] \begin{pmatrix} p(4) \\ u(4) \end{pmatrix}$$

### 逆順となる積層

ここまで示した積層順と表裏面が入れ替わる場合は伝達マトリックスと境界マトリックスを入れ替えるだけでよい。

例えば多孔質材モデル-流体モデルの順で積層される場合，境界面では下式となる。

$$[I_{\text{flu,Biot}}] \begin{pmatrix} p(2) \\ u(2) \end{pmatrix} + [J_{\text{flu,Biot}}][T_{\text{Biot}}] \begin{pmatrix} u(4)_1^s \\ u(4)_3^s \\ u(4)_1^f \\ p(4)_3^s \\ p(4)_1^s \\ p(4)_3^f \end{pmatrix} = 0 \quad (\text{A.8})$$

### A.2.7 入射の取り扱い

入射は半無限厚みの空気層と考え，入射面で音圧，粒子速度  $p(A), u(A)$  が規定されるとする。

入射面が  $2 \times 2$  マトリックスで表される場合，応力，または音圧と，粒子速度の連続条件は下式で与えられる。

$$\begin{cases} u(A) = u(1) \\ p(A) = p(1) \end{cases}$$

これをマトリックス形式であらわすと下式で表すことができる。

$$[I_{\text{flu},}] \begin{pmatrix} p(A) \\ u(A) \end{pmatrix} + [J_{\text{flu},}] \begin{pmatrix} p(1) \\ u(1) \end{pmatrix} = 0$$

$$[I_{\text{E,flu}}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[J_{E,flu}] = - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

また，弾性体モデルや，多孔質弾性体モデルが第一層の場合は，流体モデルと積層される場合の境界マトリックスに置き換えられる。

### A.3 各物理場の終端マトリックス

最終層の  $n$  層目の場によって，また剛壁密着と背後が半無限厚み空気層の場合で終端マトリックスは異なる。ここでは各物理場に対する終端条件とその表現を示す。

#### A.3.1 後壁密着条件の場合

最終面が剛な壁面に密着する場合，最終面での粒子速度は 0 となる。ここでは各物理場に対する終端マトリックスを示す。

#### 多孔質弾性体モデルに対する終端マトリックス

多孔質弾性体場においては，以下の式で境界条件は定義される。

$$\begin{cases} u(2n)_1^s = 0 \\ u(2n)_3^s = 0 \\ u(2n)_3^f = 0 \end{cases}$$

これをマトリックス形式で表現すると次式で書ける。

$$[Y_{Biot}] \begin{pmatrix} u(2n)_1^s \\ u(2n)_3^s \\ u(2n)_3^f \\ p(2n)_3^s \\ p(2n)_1^s \\ p(2n)_3^f \end{pmatrix} = 0$$

$$[Y_{Biot}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

#### 弾性体モデルに対する終端マトリックス

弾性体場においては，以下の式で境界条件は定義される。

$$\begin{cases} u(2n)_1^s = 0 \\ u(2n)_3^s = 0 \end{cases}$$

これをマトリックス形式で表現すると次式で書ける。

$$[Y_E] \begin{pmatrix} u(2n)_1^s \\ u(2n)_3^s \\ p(2n)_3^s \\ p(2n)_1^s \end{pmatrix} = 0$$

$$[Y_E] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

### 2×2 モデルに対する終端マトリックス

膜モデル，流体モデルにおいては，以下の式で境界条件は定義される。

$$u(2n) = 0$$

これをマトリックス形式で表現すると次式で書ける。

$$[Y_{2 \times 2}] \begin{pmatrix} p(2n) \\ u(2n) \end{pmatrix} = 0$$

$$[Y_{2 \times 2}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

### A.3.2 半無限厚み空気層の場合

反無限厚み終端面において音圧  $p(B)$ ，粒子速度  $u(B)$  の比は固有音響抵抗と等しくなることから，音波の入射角度を考慮すると以下の式が成立する。

$$\frac{\rho_0 c_0}{\cos(\theta)} = \frac{p(B)}{u(B)}$$

これをマトリックス形式で表現すると次式で書ける。

$$[Y_{ab}] \begin{pmatrix} p(2n) \\ u(2n) \end{pmatrix} = 0$$

$$[Y_{ab}] = \begin{bmatrix} -1 & \frac{\rho_0 c_0}{\cos(\theta)} \end{bmatrix}$$

## A.4 全体伝達マトリックスの構築

これまで，全ての積層の状態について，境界面での関係式はそれを挟む  $k$  番目と  $k+1$  番目の層の裏面で定義される物理量  $\mathbf{V}(2k)$ ,  $\mathbf{V}(2k+1)$  より一般的に次の形式で書くことができた。

$$[I_{k,k+1}]\{\mathbf{V}(2k)\} + [J_{k,k+1}][T_{k+1}]\{\mathbf{V}(2k)\} = \{0\}$$

ここで,  $\{\mathbf{V}_0\}$  を次式で定義する。

$$\{\mathbf{V}_0\} = \{\{\mathbf{V}(A)\}^T, \{\mathbf{V}(2)\}^T, \{\mathbf{V}(4)\}^T, \dots, \{\mathbf{V}(2(n-1))\}^T, \{\mathbf{V}(2n)\}^T\}^T$$

また, 各境界面における関係式を次のようにマトリックス形式で表す。

$$\begin{aligned} [\mathbf{D}_0]\{\mathbf{V}_0\} &= \begin{bmatrix} [\mathbf{I}_{0,1}] & [\mathbf{J}_{0,1}][\mathbf{T}_1] & [\mathbf{0}] & \dots & [\mathbf{0}] & [\mathbf{0}] \\ [\mathbf{0}] & [\mathbf{I}_{1,2}] & [\mathbf{J}_{1,2}][\mathbf{T}_2] & \dots & [\mathbf{0}] & [\mathbf{0}] \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ [\mathbf{0}] & [\mathbf{0}] & [\mathbf{0}] & \dots & [\mathbf{J}_{n-2,n-1}][\mathbf{T}_{n-1}] & [\mathbf{0}] \\ [\mathbf{0}] & [\mathbf{0}] & [\mathbf{0}] & \dots & [\mathbf{I}_{n-1,n}] & [\mathbf{J}_{n-1,n}][\mathbf{T}_n] \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \{\mathbf{V}(A)\} \\ \{\mathbf{V}(2)\} \\ \{\mathbf{V}(4)\} \\ \vdots \\ \{\mathbf{V}(2(n-1))\} \\ \{\mathbf{V}(2n)\} \end{pmatrix} \\ &= \{\mathbf{0}\} \end{aligned}$$

#### A.4.1 剛壁終端条件

剛壁終端の場合以下のように全体伝達マトリックス  $[\mathbf{D}_0]$  に終端マトリックス  $[\mathbf{Y}_n]$  を加える終端条件を含む全体伝達マトリックス方程式を得る。ただし,  $[\mathbf{Y}_n]$  は最終層に対する固定終端マトリックスである。

$$[\mathbf{D}] = \begin{bmatrix} [\mathbf{D}_0] \\ [\mathbf{0}] \dots [\mathbf{0}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [\mathbf{Y}_n] \end{bmatrix}$$

$$[\mathbf{D}]\{\mathbf{V}_0\} = \{\mathbf{0}\}$$

#### A.4.2 半無限空気層終端条件

半無限空気層終端の場合, 以下のように, 未知数ベクトル  $\{\mathbf{V}_0\}$  に終端での音圧, 粒子速度  $\mathbf{V}(B) = \{p(B), u(B)\}^T$  を加える。また全体伝達マトリックス  $[\mathbf{D}_0]$  にインピーダンスマッチングの項を加え, 終端条件を含む全体伝達マトリックス方程式を得る。

$$\{\mathbf{V}\} = \{\{\mathbf{V}_0\}^T, \{\mathbf{V}(B)\}^T\}^T$$

$$[\mathbf{D}] = \begin{bmatrix} [\mathbf{D}_0] & \vdots & [\mathbf{0}] \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ [\mathbf{0}] & \dots & [\mathbf{I}_{n,B}] & \vdots & [\mathbf{J}_{n,B}] \\ [\mathbf{0}] & \dots & [\mathbf{0}] & -1 & \frac{\rho_0 c_0}{\cos(\theta)} \end{bmatrix}$$

$$[\mathbf{D}]\{\mathbf{V}\} = \{\mathbf{0}\}$$

全体行列は一般に  $N$  行  $N+1$  列の行列となっている。ここでは、表面における音圧  $p(A)$  を定め、これを外力項として連立一次方程式を解くことで、各層の裏面での物理量を算出することが出来る。

## A.5 吸音率・透過損失の算出

表面の音圧  $p(A)$  と粒子速度  $u(A)$  から比音響インピーダンスが求まる。

$$Z(A) = \frac{p(A)}{u(A)}$$

これより、音圧反射率  $r$ , 吸音率  $\alpha$  は次のように求められる。

$$r = \frac{Z(A) \cos(\theta) - \rho_0 c_0}{Z(A) \cos(\theta) + \rho_0 c_0}$$

$$\alpha = 1 - |r|^2$$

一方、音響透過率  $\tau$  は入射パワーに対する透過パワーの比で表される。従って、表面音圧  $p(A)$  と音圧反射率  $r$  から入射音圧は

$$p_i(A) = (1 + r)p(A)$$

と表されることに注意すると、音響透過率  $\tau$ , 音響透過損失  $R$  は次式で表すことができる。

$$\tau = \left| (1 + R) \frac{p(B)}{p(A)} \right|^2$$

$$R = 10 \log_{10}(1/\tau)$$

## 参考文献

- [1] M.E.Delany and E.N.Bazley, "Acoustic properties of fiborous absorbing materials" Appl. Acoust.Vol.3, pp105-116(1970)
- [2] Y. Miki. "Acoustical properties of porous materials - Modifications of Delany -Bazley models- " J . Acoust. Soc. Jpn. (E) Vol.11, pp 19 -24 (1990)
- [3] Y. Miki. "Acoustical properties of porous materials: Generalizations of empirical models." J . Acoust. Soc. Jpn (E) Vol.11, pp 19 -24 (1990)
- [4] Champoux, Y. and Allard, J.F. "Dynamic tortuosity and bulk modulus in air- saturated porous media." J . Appl. Physics. **70**, 1975- 1979
- [5] 加藤大輔, "多孔質材料内伝搬音の予測モデル - 繊維不織布の物質密度と繊維系による定量化"音響学会誌 63, 635-645(2007)
- [6] 加藤大輔, "多孔質材料内伝搬音の予測モデル - Kato モデルにおける適用範囲の拡張-"音響学会誌 64, 339-347(2008)
- [7] M.A.Biot, "Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid: I. Low frequency range, II. Higher frequency range," J. Acoust. Soc. Am 28, 168-191(1956)
- [8] J.F. Allard, N.Atalla Propagation of sound in porous media : Modeling sound absorbing materials -Second Edition.(WILEY, 2009)
- [9] B.Brouard, D.Lafarge and J.F.Allard " A general method of modeling sound propagation in layerd media" J. Sound Vib., 183(1), 1290142(1995)
- [10] 加藤大輔, "多孔質材料内伝搬音の予測モデル - Kato モデルにおける Biot 理論の適用-"音響学会誌 64, 597-606(2008)
- [11] JIS A 1405-2:2007 「音響管による吸音率及びインピーダンスの測定-第 2 部：伝達関数法」
- [12] 寺尾 道仁"インピーダンス管を用いた材料の音響特性の計測技術" 音響学会誌 63(10) , pp.606-611(2007)
- [13] 宇津野秀男, 田中俊光, 森沢吉孝, 吉村登志雄"多層形吸音材垂直入射吸音率の境界要素法による予測"日本機化学会論文集 (C 編), 56(532),pp.3248-252(1990)
- [14] R.Panneton, N.Atalla"Numerical prediction of sound transmission through finite multi-layer systems with poroelastic materials"J. Acoust. Soc. Am. 100(1) ,346 - 354(1996)

- [15] Christophe Geuzaine, Jean - François Remacle "Gmesh Reference Manua"(2009)
- [16] O. C. Zienkiewicz 著, 吉識雅夫, 山田嘉昭監訳, 基礎工学におけるマトリックス有限要素法, 培風館 (1975)
- [17] Craggs, A., "A finite element model for rigid porous absorbing materials" J. Sound Vib. Vol.61 , pp101-111(1987)
- [18] Y.J.Kang, J.S.Bolton "Finite element modeling of isotropic elastic porous materials coupled with acoustic finite elements." J.Acoust. Soc. Am. 98(1) pp635- 643 (1995)
- [19] R.Panneton, N.Atalla "An efficient finite element scheme for solving the three dimensional poroelasticity problem in acoustics." J . Acoust. Soc . Am, 101(6), 3287- 3297 (1997)
- [20] P.C.Hammer, O.P.Marlowe and A.H. Stroud "Numerical integration over simplexes and cones" Math. Tables Aids Comp. Vol.10, pp130-137
- [21] 前川純一, 森本政之, 阪上公博, 建築・環境音響学 第二版, 共立出版 2000

# 謝辞

本論文は、筆者が東京大学大学院新領域創成科学研究科 社会文化環境学専攻修士課程において、同専攻佐久間哲哉准教授のもとに行った研究をまとめたものであります。佐久間先生には研究の進め方、問題の考え方など様々な面において感銘を受けました。筆者の不理解の中、常に的確な御指示、御助言を頂きましたことを心から感謝いたします。

同専攻の副指導教員の神田順教授には、本論文に関する不足点などを普段見落としがちな視点からアドバイスをいただきました。また同専攻の清家剛准教授ならびに、東京大学生産技術研究所坂本慎一准教授には本論文の副査を担当して頂きましたことをここに感謝申し上げます。

豊和繊維工業株式会社 吉田崇様、加藤大輔様には研究の契機となる貴重なご意見を賜るとともに、共同研究の打合せの場においていくつもの有益なアドバイス、実測における知見などを頂きました。ここにお礼申し上げます。

神奈川大学准教授安田洋介准教授には学会や研究室行事などにおいて筆者の他愛のない相談にも気軽に乗って頂きました。

佐久間研究室の先輩の土屋裕造さん、太刀岡勇氣さん、李孝振さん、江田和司さん、安達光平さん、杉原慎一朗さん、村田義明さん、三上雄一郎さん、後輩の中島和博さん、郭静さんには修士課程における短い研究生生活の中で多くの楽しい思い出を頂きました。

同期の楠井尚貴さん、芥川俊輔さんとは多くの経験を共有し、筆者の修士課程の生活において掛替えの無い存在でした。敬意を表すると共に感謝申し上げます。

筆者の九州大学芸術工学部在学時の指導教員であり、現在の佐久間研究室における研究の機会を与えてくださいました藤原恭司教授に深く感謝申し上げます。また当時の研究室の同期である鈴木航輔さんとは本学在籍時においても学会や私生活の場で本研究に関する、沢山の有意義な議論を行いました。

株式会社清水建設 石塚崇博士には筆者の学部時代に数値解析プログラミングを始めるきっかけを与えて頂き、本学移籍後には学会の場において御助言を頂きました。ここに感謝申し上げます。

最後になりましたが、筆者の学生生活を暖かく見守って頂いた両親と兄妹に多大なる感謝の意を表します。

2012 年 1 月 30 日

井上 尚久