

# 数学的問題解決の道具としての図表の利用を定着させる授業法の提案

植 阪 友 理

## 1. 問題と目的

算数・数学の授業では、図や表が頻繁に用いられている。これは図や表を利用することによって生徒の理解が促進され、動機づけも高まるためであると考えられる (Dufour-Janiver, Bednarz&Belanger,1987)。しかし、図表が利用される理由はこれだけではない。教師は授業で図表を利用することを通じて、新しい問題を解く時に学習者自身で図表を利用することを期待していると考えられる。これは「問題解決のための道具」として図表を利用することを期待しているといえよう。図表を問題解決の道具として利用することによって、新奇な問題に対処するための内的な手段を獲得することができる。したがって、自己学習力や基礎学力という観点からも、図表を学習者自身で産出し、問題解決を行うことは重要であると考えられる。

だが、図表は問題解決の道具として十分に利用されていないと考える。なぜならば、以下に挙げる2つの問題が実践報告から指摘されているからである。1つ目は図表を利用するように促されたらならば図表を利用することができる学習者であっても、自発的に図表を利用している学習者は少ないという問題である (e.g.Dufour-Janiver et al.,1987;市川,2000)。また、2つ目の問題として、図表を利用したとしても、必ずしも問題解決の促進に結びつくわけではないということも指摘されている (e.g.高崎,1996)。

したがって、これら2つの問題を克服し、図表を問題解決の道具として利用させるためには、授業において利用するだけでなく、付加的な介入が必要であると考えられる。そこで本研究では、新奇な問題における自発的な図表の利用を促し、図表の利用を強制した場合の問題解決を促進させる介入方法を検討した。

### 《本研究における仮説》

今回検討する付加的な介入方法とは、「かき方トレーニング」と「言語的利用促進」の2つである。かき方トレーニングを行った群では、学習者自身に図表を作成させる時間を設けるなどの介入を行った。一方、言語的利用促進を行った群では、「新奇な問題を解決する際に、図表を利用することが有効である」と教示する

などの介入を行った (それぞれの介入の詳しい内容については後述する)。ただし、どちらの介入も行わない統制群であっても、図表を多く利用した授業を行った。

「かき方トレーニング」や「言語的利用促進」とは、図表を利用した授業への付加的な介入を意味する。

本研究において検討する1つ目の仮説は、図表の利用を強制させた場合の問題解決についてである。かき方トレーニングを行った群では、図表を利用するためのスキルが向上し、図表の利用を強制した場合には、問題解決が向上するのではないかと考えられた。

2つ目、3つ目の仮説は、自発的な図表の産出量に関するものである。かき方トレーニングを行った場合には、図表を利用するためのスキルが向上し、図表の自発的な産出量が増加するのではないかと考えられた。さらに、かき方トレーニングと言語的利用促進を組み合わせで行った場合には、図表の有効性が最も実感され、図表の利用が特に多くなると考えられた。

4つ目の仮説は、図表の利用を強制しない、自発的な問題解決に関するものである。かき方トレーニングと言語的利用促進の両方を行った群では、自発的な図表の利用が特に増加し、その結果、自発的な問題解決が促進されると考えられた。

以上の4つが本研究において検討する仮説である。

## 2. 方法

【調査対象者】夏休み学習ゼミナールに応募した中学2年生 139名

【実施時期】2002年8月中旬～8月下旬

【手続き】①概要 かき方トレーニング (あり,なし) ×言語的利用促進 (あり,なし) の4群構成である。

介入は5日間に分けて実施した。初日はプレテストを行い、最終日はポストテストを行った。2日目、3日目、4日目は群ごとに介入授業を行った。1日あたりの介入時間は50分である。

### ②介入授業の流れ

介入授業では1日につき、例題、類題、練習の3問を取り上げた。類題と練習は、解法構造とカバーストーリーは例題と同じであるが、数字のみが異なる問題である。授業でははじめに例題を取り上げた。自分の

力で解く時間を設けた後、書き込み式のワークシートを利用して解説を行った。類題もほぼ同様である。練習は、自分の力で解く時間を設けたが、その場では解説を行わず、回収して添削した。

### ③条件ごとの介入内容

(1) **かき方トレーニング**：かき方トレーニングを行った群では、以下の3点の操作を行った。1つ目はワークシートによる操作である。かき方トレーニングを行った群では①図表を利用する、②等しい部分を見つけて方程式を立てる、③方程式を解く、という3つの部分に分かれたワークシートを利用して解説した。一方、かき方トレーニングを行わなかった群では、①等しい部分を見つけて方程式を立てる、②方程式を解く、という2つの手順からなるワークシートによって、同様の内容を解説した。

2つ目の操作は、類題解説終了後に行った。図表を利用して類題を解説したあとに、類題において利用した図表を短時間で再構成するという課題を行った。この際、短時間で作成するために、定規は使わなくてよいなどのコツを伝えた。自分で作成することが難しい人に関しては、黒板や解答を参考にしてもかまわないとした。ここでは2分間の時間を与えた。

3つ目の操作は、練習問題を添削する際のフィードバックの違いである。かき方トレーニングを行った群に対しては、図表部分と数式・文字部分の両方に対して添削を行った。一方、かき方トレーニングを行わなかった群では、数式・文字部分に対してのみ添削を行い、図表に対するフィードバックは個別には行わなかった。ただし、両群共に、次の授業の冒頭では正しい図表を提示している。

(2) **言語的利用促進**：言語的利用促進を行った群では、以下の3回に分けて利用を促す教示を口頭で行った。1回目は、例題を解かせた後である。解答できなかった人に対して、解答にいたらなかった失敗の原因を、図表を利用していないことや、図表を適切に利用していないことに帰属して図表の利用を促した。また、解答できた人に対しても、より難しい問題では図表を利用するように促した。

2回目の言語的な教示は、例題の解説終了後に行った。類題を解かせる前に、図表を利用すると解きやすくなることを教示し、図表を利用して解くように促した。

3回目の言語的な教示は、類題の解説終了後に行った。図表を利用することで問題が解きやすくなることを確認し、他の問題でも図表を積極的に利用するよう

に促した。

### ④介入授業において利用した教材

今回の介入授業では大きく分けて3種類の問題を利用した。1つ目の問題は「状況図問題」である。この問題は長さをカバーストーリーに持つ問題であり、状況を表した絵であっても問題解決に有効な図表となる問題である。2日目に授業において取り上げた。

2つ目の問題は「線分図問題」である。この問題は、人数に関するカバーストーリーを持ち、人数を線分で表すことによって問題解決に有効な図表となる問題である。3日目に取り上げた。

3つ目の問題は「表問題」である。この問題は売買損益の問題であり、売上高や売上個数を表にまとめることが問題解決に有効となる問題である。4日目に取り上げた。

### ⑤プレテスト、ポストテストの内容

プレテスト、ポストテストで実施した課題について述べる。プレテストでは授業で扱った問題と、解法構造とカバーストーリーが等しく、用いられている数字のみ異なる問題を実施した。このような問題を以後「同型問題」と呼ぶ。

一方、ポストテストでは同型問題に加え、「転移問題」を実施した。転移問題とは、授業で扱った問題とは構造レベルでは多少異なるが、授業において利用した図表と同様の図表を用いることで解決が可能となる問題である。

次に、プレテストとポストテストの実施方法について述べる。プレテストでは図表の利用を強制しない自発的図表利用セッションのみを行った。ポストテストでは自発的図表利用セッションに加えて、図表の利用を強制する強制的図表利用セッションを実施した。2つのセッションでは同じ問題を実施したが、異なる冊子を用いている。また、2つのセッションでは、同一の問題を利用したが、それぞれのセッションごとに別の冊子を利用した。プレテストにおいて強制的図表利用セッションを行わなかったのは、ポストテストにおける強制的図表利用セッションを予期することを防ぐためと、統制群に今回の介入の目的を気づかせないためである。制限時間は、自発的図表利用セッションで1問につき4分、強制的図表利用セッションでは3分であった。

## 3. 結果

本研究の仮説は、全て新奇な問題に関するものであ

る。そこでここでは、仮説の検討に関連する転移問題の分析結果のみ報告する。

### ①自発的な図表の産出量の分析

自発的図表利用セッションの3問中、図表をかいた問題の数を算出し、図表の産出量とした。事前の図表の産出量と事後の図表の産出量を被験者内要因の従属変数とし、介入を2要因の独立変数として分析した。この結果、かき方トレーニングの主効果とかき方トレーニング×言語的利用促進の交互作用が認められた。多重比較 (Tukey 法) を用いて4群を比較した結果、かき方トレーニングと言語的利用促進の両方を行った群が他の3群に比べて有意に産出量が多いことが示された。これは「かき方トレーニングを行った場合には、図表を利用するためのスキルが向上し、図表の自発的な産出量が増加する」とする仮説2や、「かき方トレーニングと言語的利用促進を組み合わせて行った場合には、図表の有効性が最も実感され、図表の利用が特に多くなる」とする仮説3を支持する結果である。

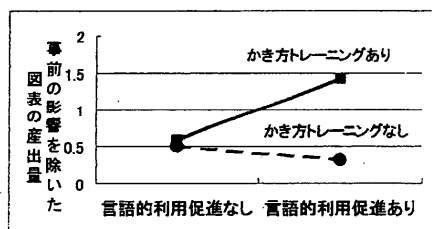


Fig 1 介入群ごとの自発的図表の産出量

### ②図表の利用を強制した場合の正解率

次に、図表の利用を強制した場合の正解率について述べる。はじめに、自発的図表利用セッションで図表を利用せずに問題解決に成功した人を問題ごとに除外した。正解率を従属変数とし、介入を2要因の独立変数として問題ごとにロジスティック分析を行った。この結果、状況図問題では、かき方トレーニングを行った場合に、正解率が有意に高くなることが示された。これは「かき方トレーニングを行った群では、図表を利用するためのスキルが向上し、図表の利用を強制した場合には、問題解決が向上する」とする仮説1を支持する結果である。

しかし、線分図問題や表問題のように、抽象的な図表が必要となる問題ではこのような介入の効果は見られなかった。これらは仮説1を支持しない結果である。この点については図表の質を分析し、考察を行う。

### ③図表の利用を強制しない場合の正解得点

さらに、図表の利用を強制しない、自発的な問題解

決における正解得点を分析した。プレテストとポストテストの自発的図表利用セッションにおける解答を得点化し、それぞれ事前の正解得点、事後の正解得点とした。事前の正解得点と事後の正解得点を被験者内要因の従属変数とし、介入を2要因の独立変数として問題ごとに分析した。この結果、いずれの問題においても介入の効果は見られなかった。これは「かき方トレーニングと言語的利用促進の両方を行った群では、自発的な図表の利用が特に増加し、その結果、自発的な問題解決が促進させる」とする仮説4を支持しない結果である。

### ④強制的図表利用セッションにおける図表の質の分析

この他に、かき方トレーニングが図表をかく際に必要となるスキルを向上させる介入であったことを確認するために、強制的図表利用セッションにおける図表の質を分析した。「問題解決に重要な量が明示的であるか」という基準によって、強制的図表利用セッションにおける図表を評定した。このような基準による図表の分類を、明示度による分類と呼ぶ。明示度と正解率の関係を分析したところ、明示度が高い図表では正解率が高い傾向が一貫して認められた。この結果は「問題解決において重要な量が明示的である」という基準が、有効な図表を判断する基準として適当であることを示すものである。そこで評定を足し上げて「表現スキル得点」とした。表現スキル得点を従属変数とし、介入を2要因の独立変数として一般線形モデルで分析した。この結果、かき方トレーニングを行った群において表現スキル得点が有意に高いことが示された。よってかき方トレーニングは、図表をかくために必要となるスキルを向上させる介入であったと言える。

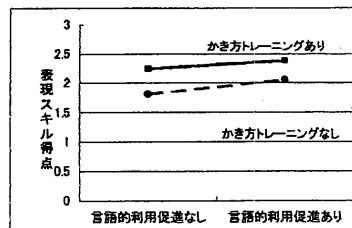


Fig 2 介入群ごとの表現スキル得点

次に、問題ごとに明示度と正解率の関係を集計した。この結果、状況図問題では、かき方トレーニングを行った群において、明示度が高い図表が多いことが示された。よって、かき方トレーニングによって問題解決に重要な量が明示的である図表が多く産出され、この結果、状況図問題においてかき方トレーニングを行っ

た場合に正解率が高くなったと考えられた。

また、線分図問題や表問題のように、抽象的な図表が必要とされる問題についても明示度と正解率の関係を集計した。この結果、かき方トレーニングを行った群では、明示度が高い図表が多く産出されていた。しかし、それらの図表を利用した場合の正解率が、状況図問題に比べて低いことが明らかとなった。このため、抽象的な図表を利用させる場合には、適切な図表をかくためのスキルのみならず、図表を利用して推論を行うためのスキルも必要であることが示唆された。

#### ⑤自発的図表利用セッションにおける図表の質の分析

自発的図表利用セッションにおける正解得点では、介入による効果は認められなかった。このため「かき方トレーニングと言語的利用促進を合わせて行った群では、自発的な図表の産出量が多くなり、その結果自発的問題解決が促進する」という仮説4は支持されなかった。この原因を考察するため、自発的図表利用セッションにおける図表の質の分析も行った。まず、強制的図表利用セッションと同様に、図表の質を評定し、これらの評定の分布と正解率を集計した。この結果、かき方トレーニングと言語的利用促進の両方の介入をおこなった群では、明示度が高い図表が多く産出されていた。しかし明示度が高い図表を産出できたとしても正解していた割合が17%~58%と低く、このために正解得点に差は見られなかったと考えられた。この結果からも、適切な図表を産出させるためのトレーニングのみならず、図表を利用して適切な推論を行うためのトレーニングを組み合わせる必要があることが示唆されたと考えられる。

#### 4. 考察

**【結果のまとめ】**本研究では、問題解決の道具としての図表の利用を促し、図表を利用した問題解決を促進させるための付加的な介入方法について検討を行った。検討した介入方法は、「かき方トレーニング」と「言語的利用促進」の2つである。これらの介入方法は、どちらも図表を用いた授業に何らかの付加的な介入を加えるというものであった。

3日間の介入授業を通じてこれらの効果を検討したところ、かき方トレーニングを行うことによって自発的な図表の産出量が増加することが示された。また、かき方トレーニングと言語的利用促進を組み合わせることによって、自発的な図表の産出量が特に増加す

ることが示された。よって「問題解決の道具としての図表の利用が少ない」という問題には、かき方トレーニングと言語的利用促進を組み合わせる行うことが有効であることが示されたと考えられる。

また、図表の利用を強制した状況では、かき方トレーニングを行った場合に正解率が向上することが状況図問題において示された。したがって、「図表を利用しても必ずしも問題解決に結びつくわけではない」という問題に対しては、かき方トレーニングが有効であることが示されたと考えられる。

しかし、抽象的な図表が要求される線分図問題や表問題ではこのような傾向は認められなかった。これらの原因を検討するために図表の質を分析した。この結果、かき方トレーニングを行った場合には、適切な図表をかくためのスキルが向上したことが示された。よって、状況図問題のように、適切な図表をかくだけで正解に結びつきやすい問題では、かき方トレーニングを行うことによって図表を利用した場合の問題解決が促進するが、抽象的な図表が必要となる問題では、かき方トレーニングの他に、図表を利用して推論を行うためのスキルを向上させる介入が必要であることが示唆された。

また、図表の利用を強制しない、自発的な問題解決を分析した結果、自発的な図表の産出量が特に多かったかき方トレーニングと言語的利用促進を合わせて行った群においても、正解得点が他の3群に比べて高いという傾向は認められなかった。図表の質を分析したところ、この群では問題解決に重要な量が明示的である図表は多く産出されたが、それらの図表に利用した場合の正解率は、状況図問題に比べて高くはないことが明らかとなった。このことから適切な図表を産出するためのスキルのみならず、図表を利用して推論を行うためのスキルを向上させる必要があることが示唆された。

**【効果が得られた理由】**本研究では、かき方トレーニングと言語的利用促進を組み合わせる行った場合に図表の自発的な利用が増加することが示された。また、一部ではあったが、かき方トレーニングを行った場合に強制的に図表を利用させた状況での問題解決が促進することが示された。ではこれらの効果はなぜ生じたのだろうか。この点について簡単に考察を行う。

まず自発的な図表の利用について述べる。市川(1993)は、図表を利用した解説を受けていたにも関わらず、実際のテスト場面では図表を利用せずに解決に

至らず、テスト後に図表を利用すれば簡単に解けることを知って驚いたということ事例を踏まえ、学習者が自発的に図表を利用するためには、学習者が図表の有効性を「実感」することが重要であると述べている。本研究では言語的利用促進のみの介入では自発的図表は増加しないが、言語的利用促進とかき方トレーニングを組み合わせることによって自発的な図表の利用が増加している。本研究のこのような結果は、言語的利用促進によって図表の有効性を「認識」し、さらにかき方トレーニングによって図表を実際に利用するという場が与えられ、図表の有効性を「実感」したために生じたのではないかと考えられた。この点については、インタビュー調査などを行い、検討する必要があると考える。

次に、強制的に図表を利用させた状況での問題解決について述べる。ここでは一部の問題ではあったが、かき方トレーニングが有効であった。かき方トレーニングでは、短時間で利用した図表を再作成させる課題や、類題において図表を考えさせるなどの介入を行っていた。このため、かき方トレーニングあり群では問題文を図表へと変換するという活動が繰り返し行われていたと考えられる。有効な図表を作成するためには、問題文から余分な情報を排して量的な関係を抽出する、線分や面積によって表現するなどの下位過程が含まれると考えられるが、かき方トレーニングあり群ではこれらの一連の過程を繰り返し行うことによって、一連の下位過程が自動化し、その結果図表を強制的に利用させた状況での問題解決が促進したのではないかと考えられた。この点についても今後より詳細に検討する必要があると考える。

**【結果の意義】** 本研究は以下の2点から意義があると考えられる。1点目は、実践的な問題に対して、具体的な介入方法を提案したという点である。「図表が問題解決の道具としてあまり利用されていない」という問題に対しては、かき方トレーニングと言語的利用促進という2つの介入を、図表を用いた授業に加えることによって、特に改善させることが示された。また、「図表を利用しても必ずしも問題解決を促進しないという問題」については、かき方トレーニングを行うことによって、改善されることが示された。教育実践において指摘されている問題に対して、具体的な介入方法を提案したという点で意義が大きいと考える。

本研究の2つ目の意義は、研究上の意義である。図表の利用に関する研究では、図表の効果を示した研究

や、図表の機能について考察した研究は多い (e.g.岩槻,2000;Larkin&Simon,1987;山崎,2001;Zhang&Norman,1994)。しかし、利用すべき図表があらかじめ与えられているものが多く、学習者自身が自己産出した図表を扱った研究は少ない (eg.Anzai,1991;伊藤・大西・杉江,1992,1994)。また、幾何や物理など利用すべき図表が明らかである分野での研究は多いが (eg.Greeno,1987;Koedinger & Anderson 1990)、本研究で扱ったような代数文章題での検討はほとんど行われていないという問題もある。これまでに研究対象とされてこなかった分野において、新たな知見を得たという点で意義があると考ええる。

**【今後の課題】** しかし、本研究では、いくつかの課題が残った。特に大きな課題としては、自発的な問題解決において、介入の効果が見られなかったという点である。これらの点については、図表の質の分析から、図表を利用して推論を行うためのスキルが不十分である可能性が示唆された。この点については、今後検討する必要があると考える。

#### 【引用文献】

- Anzai,Y 1991 Learning and use of representations for physics expertise.In K.A.Ericsoon and J.Smith (Eds),Toward a general theory of expertise. Cambridge:Cambridge University Press.
- Dufour-Janiver,B.Bednarz,N.&Belanger,M. 1987 Pedagogical Considerations Concerning the Problem of representation In Problems of representation in the teaching and learning of mathematics / edited by Claude Janvier Hillsdale, NJ : L. Erlbaum Associates
- Geeno,J.G. 1978 A study of problem solving. (山口修平・東洋 (訳)『問題解決の過程』サイエンス社,1985)
- 市川伸一 1993 「数学的な考え方」をめぐっての相談と指導 学習を支える認知カウンセリング・心理学と教育の新たな接点・(市川伸一編) p36-61 ブレーン出版
- 市川伸一 2000 勉強方が変わる本 岩波書店
- 岩槻恵子 2000 説明文理解におけるグラフの役割 -グラフは状況モデルの構築に貢献するか- 教育心理学研究,48,333-342
- Koedinger,K.R. and Anderson,J.R. 1990

Abstract planning and perceptual  
Chunks: Elements of expertise in geometry .  
Cognitive Science, 14, 511-550

Larkin, J.H. and Simon, H.A. 1987 Why a  
diagram is (sometimes) worth than ten  
thousand words? Cognitive Science. 16, 65-69

高崎綾子 1996 図を利用した文章題の指導—図は  
使いやすい道具となりうるか— 認知カウンセ  
リングのケース研究第11集 東京大学 1995年度  
における学生の報告から p9-21

山崎治・三輪和久 2001 外化による問題解決過程の  
変容 認知科学, 8(1), 103-116

Zhang, J. and Norman, D.A. 1994 Representation  
in Distributed Cognition Tasks. Cognitive  
Science, 18, 87-122