東京大学教養学部哲学・科学史部会　哲学・科学史論叢第十三号　平成 23 年 3 月（19-44）

# 流出現象の解析に見る理論と実験の相互作用：トリチェッリからダニエル・ベルヌーイまで

中　澤　　　聡

## 1.　はじめに

17，18 世紀において流体の運動に関する理論的研究は数学的物理学の最前線に位置していた．静止流体の平衡を考察する流体静力学の研究と異なり，流体の運動に関する数学的研究はガリレオによる運動の理論の確立をまって初めて可能となったものである．そしてそれらの理論は，造船や水力利用，都市への給水などの応用技術に対する関心を背景に，当時の一流の数学者たちによって研究された．

1640 年から 1780 年までの流体力学史の著者 J. S. Calero によれば，流体力学の誕生と発展のプロセスは，流体抵抗の問題と水槽からの流出の問題という主要な二つの問題の系譜にそって進行した．前者は流れの中に置かれた物体に流体が及ぼす効果に関するもので，後者は管や水槽から流出する流体の振る舞いを扱うものである．Calero の指摘によれば，抵抗の問題は実践上の関心により直接的に応えるものであったが，その後の発展により理論的，概念的に貢献したのは流出の問題のほうであったという（Calero 2008, 6）．

このように，18 世紀前半までの流体力学の発展において流出の問題は研究上重要な焦点となっていた．トリチェッリによる流出法則の定式化に始まる一連の研究は，ニュートン，ダニエル・ベルヌーイらの研究を経て，オイラーによる流体の基本方程式の導出に結実することになる（Mikhailov 1996; Darrigol & Frisch 2008）．

一方，そのような理論の発展と並行して，流体の運動に関する実験的研究も盛んに行われていた．それらの実験で発見されたいくつかの特徴的な現象は理論形成の流れに重要な寄与をしたと考えられる．本論文では，流出の問題に関する研究の展開を，理論と実験の相互作用に注目して分析することを試みる．

## 2. トリチェッリの流出法則

静止流体の平衡に関する研究は，周知の如くアルキメデスの時代から行われてきた．一方，流体の運動に関する数学的研究はガリレオ以降の時代に始まる．この分野に先鞭をつけた人物とされるのは，ガリレオの弟子であったベネデット・カステッリ（Benedetto Castelli, c1577–c1644）だが，後の研究に重要な影響を与えたのはエヴァンジェリスタ・トリチェッリ（Evangelista Torricelli, 1608–1684）による流出法則の発表であった（Mikhailov 1996, 205–212; Calero 2008, 268）.

1644 年，トリチェッリは『幾何学著作集』（*Opera geometrica*）という著書を出版し，その中の「水の運動について」という節の中でこの問題を扱った．彼はこの節を次のような仮定から始めている．

> ［水槽の下部に設けられた］開口部から勢いよく噴出する水は，重さを有する物体，たとえばその水の一滴が，最上部の水面から開口部まで自然落下した場合に獲得するのと同じ勢いを獲得する（Torricelli 1644, 191）.

したがって現代の記号を用いると，開口部から噴出する水の速度 $V$ は，重力加速度を $g$，開口部から水面までの高さを $H$ として，$V=\sqrt{2gH}$ のように表すことができる．これは今日トリチェッリの流出法則として知られているものである．

トリチェッリ自身はこの命題を論証せずに仮定として提示し，それを支持する経験的な事実を仮定の正しさの例証としていた．それは，水槽の開口部に鉛

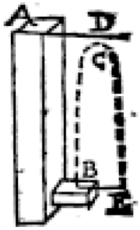


図１　鉛直上向きの噴水の実験
（Evangelista Torricelli, *Opera geometrica*, 1644, p. 192）

直上向きの管を取り付けると，噴流は水槽内の水面にほぼ等しい高さまで吹き上がるという実験である（図１）．これは開口部からの噴流の速度がガリレオの落体法則で与えられる速度に等しいことを示していると考えることができる．わずかに水面の高さに届かない分については，空気抵抗と，水の粒子同士の干渉のためとされた．こうして流体の運動に関しても数学的関係が初めて明確に定式化されたのである．

## 3.　トリチェッリの法則の実験的検証

トリチェッリの流出法則が発表された後，この法則を検証するため流出の問題に関する実験的研究が試みられるようになった．その嚆矢となるのが 1668 年にパリの科学アカデミーで行われた流出実験である．この実験は著名な天文学者であったジャン・ピカール（Jean Picard, 1620–1682）が同年 7 月 11 日の会合での決議に従って企画したもので，トリチェッリの流出法則を証明する目的で行われた（Blay 1992, 339–342）．科学アカデミー終身書記ジャン・バティスト・デュアメル（Jean-Baptiste du Hamel, 1623–1706）の記録によれば，この実験は次のようなものであった．

> まず最初に，高さは同じだが広さが異なる二つの円筒形の容器の底に孔が開けられた：両方を水で満たしたところ，どちらの容器からも等しい時間

に等しい量の水が流れ出た．続いて，同じ容器の底のさまざまな場所に孔を開けたところ，同じ時間にそれぞれの孔を通って同じ量の水が出て行くことが確認された．その後，円筒形の容器の高さを 25 の等しい部分に分けたところ，水面は等しい時間に奇数の列に従って，上向きに投げられた物体の通過距離が減少するのと全く同じ比で低下した（Du Hamel 1698, 45）．

この実験により，以下の点が確証された．

（1）水槽の開口部からの流速は水槽の容積には依存せず，開口部までに深さのみに依存する．

（2）流速は開口部の向きには依存しない．（圧力は等方的である．）

（3）水槽の高さを 25 等分すると，等しい時間の間に水槽内の水面が下降した高さは 9，7，5，3，1 という奇数列を成す．

これらの結果は流速が開口部から水面までの高さの平方根に比例することを示しており，トリチェッリの法則が成り立つことを確証するものと見なされた[(1)]．

さらにパリ科学アカデミーの会員であったエドム・マリオット（Edme Mariotte, 1620–1684）は流出の問題に関して多くの実験的研究を行い，主著である『水の運動に関する論考』（*Traité du mouvement des eaux*）の中で発表した．マリオットの著作はその後長きにわたって流体に関する実験データの権威あるソースとして通用することになる（Calero 2008, 278）．

マリオットは，水位が異なる水槽から，同じ直径の開口部を通って同じ時間内に流れ出る水の量を計測し，単位時間当たりの流量が開口部から水面までの高さの平方根に比例することを確かめようとした[(2)]．最初彼は開口部から水面までの高さが 39 リーニュのとき，直径 6 リーニュの開口部を通って 1 分間に 8.86 パントの水が流れ出すことを見いだした．一方開口部までの高さを 7

リーニュにしたときは，1分間あたりの流量は3.75パントであった．したがって流量は高さの平方根にほぼ比例している．第二の実験では高さをそれぞれ192リーニュ，768リーニュにしたところ，直径3リーニュの開口部からの流量は一分当り5パントと10パントであった．単位時間当たりの流量は流速に比例するので，マリオットはこの結果によって，やはりトリチェッリの流出法則が検証されたと考えた（Mariotte 1686, 263）.

続いてマリオットは，開口部から水面までの高さがわかれば開口部から流出する水の流量が計算できるように，流量と高さの平方根との比例定数を確定することを試みた．彼は，水槽内の水面の高さが13ピエのとき，直径3リーニュの開口部から流出する流量が毎分14パントであることを見いだし，これを標準値として水面の高さから流量を見積もるための表を計算した．

これらの実験的研究の成果により，17世紀末には，トリチェッリの流出法則の正しさは経験的に裏付けられたと一般に見なされるようになった．これに対し，より一般的な運動の原理から流出法則を導こうという理論的な取り組みの嚆矢となるのはやはりニュートンであった．

## 4.　ニュートンのカタラクト理論

ニュートンが流体の問題を論じるのは『プリンキピア』の第二編である．この著作を評してかつて科学史家C.トゥルースデルは次のように述べていた：

> 第二篇はほとんどまったくオリジナルであり，その多くは誤りである．到るところで新たな仮説が導入され，隠された仮定が自由に用いられる一方，明言された仮定は時にはまったく使われない．…空気の弾性や開口部からの流体の流れ，水中での波の進行，管内の水の振動，希薄な，あるいは濃密な流体内の物体が受ける抵抗，空気中の音の伝播，水の内部摩擦，これらのための理論を創るため，ニュートンは新たな概念を創った．これらの主題がまったく新しいものであることを考えれば，彼の概念がほとん

> ど後に残らず，彼の解で正しいものがほとんどないことは，彼がどの場合にも手探りである確定した解答への道を切り開くことができたということに比べれば取るに足りないことである．すばらしく独創的だが，結局のところ，大部分は不満足な第二篇は，次の世紀の力学研究の多くのために範囲を画し，問題を確定したのである．（Truesdell 1968, 91. 強調は原文.）

トゥルースデルの評価のとおり，流出の問題に関しても『プリンキピア』第二篇は確かに 18 世紀の理論的研究の出発点となった．しかしながら事情はきわめて錯綜しているため，いささか詳細な解説が必要である．

最初ニュートンは 1687 年に出版された『プリンキピア』初版で流出の問題を取り上げ，自らの運動法則を用いた解析から水の流速はトリチェッリの法則が与える値の $1/\sqrt{2}$ と結論した．しかしながら，この結果は，最も基本的な実験である，鉛直上向きの噴水の実験結果に合わないと考えられたため，ニュートンは第二版で流出に関する命題をほぼ全面的に書き換え，いわゆるカタラクトの理論を採用する．しかし第二版でのニュートンの修正は大きな議論を巻き起こし，さらなる研究の呼び水となるのである．

『プリンキピア』初版で流出の問題が登場するのは第二篇命題 37 である．そこでニュートンが試みるのは，流れを引き起こす力を仮定した上で，それに運動の第二法則を適用して流速を導き出すことであり，いわば力から運動を導き出す順問題を解くことであった．

まず彼は，水を満たした容器の底面に開けられた開口部からの流出を考え，開口部の上にある水の柱の重さが流出する水の運動をもたらす力であるとした．それに運動の第二法則を適用すると，開口部から一定時間内に流出した水の運動量は，開口部の上にある水の柱が同じ時間内に自由落下した場合に獲得する運動量に等しいはずである．これをもとにニュートンは以下のように議論を進める．

> 孔の面積を $F$，孔に垂直に乗っている水の高さを $A$，その重量を $P$，その量［体積］を $FA$，与えられた任意の時間 $T$ に真空中を自由落下によって通過する距離を $S$，そしてその時間の終わりに落下によって得る速度を $V$ とせよ：するとその獲得した運動 $AF\times V$ は，同じ時間に流出する水全ての運動に等しいだろう．流出することによって孔から出る速度対速度 $V$ が $d$ 対 $e$ になるとすると，水は速度 $V$ で距離 $2S$ を描くことができるので，同じ時間で流出する水はその速度 $(d/e)V$ で距離 $(2d/e)S$ を描くことができるだろう．さらに長さが $(2d/e)S$ で広さが孔のそれと同じである水の柱，すなわち柱 $(2d/e)SF$ は同じ時間に流出して容器から出てくることができる．それゆえ流出する水の量をその速度にかけて得られる運動 $2(dd/ee)SFV$，すなわちその流出の時間に生成する全運動は，運動 $AF\times V$ に等しいだろう．そしてもし等しいそれらの運動を $FD$ で割れば，$2(dd/ee)S$ は $A$ に等しくなるだろう．そこから $dd$ 対 $ee$ は $A$ 対 $2S$ であり，$d$ 対 $e$ は $A/2$ 対 $S$ の二分比となる．したがって孔から水が流出する速度と，落下する水が，落下時間 $T$ で距離 $S$ を通過するとき獲得する速度との比は，孔に垂直に乗っている水の高さが，その高さの二倍と，物体が時間 $T$ の間落下して通過する距離 $S$ との比例中項に対する比に等しい (Newton, 1972, 777-779).

比例によるニュートンの議論を代数方程式の形に整理すると以下のようになる（図 2）．開口部の面積を $a$，水面の高さを $H$ とすると，仮定より水を流出させる力は水柱 $aH$ の重量に等しくなる．もし時間 $\Delta T$ の間にこの水柱が自由落下したとすると，重力によってこの水柱が獲得する全運動量は，水の密度を $\rho$，重力加速度を $g$ とおき（当時の慣例にしたがって，これらの定数をニュートンは 1 と仮定している）$\rho aHg\Delta T$ と表せる．一方，流出する水の速度を $V$ とすると，時間 $\Delta T$ の間に開口部を通る水の体積は $aV\Delta T$ となり，流出した水が獲得する運動量は $\rho aV^2\Delta T$ となる．したがって運動の第二法則より

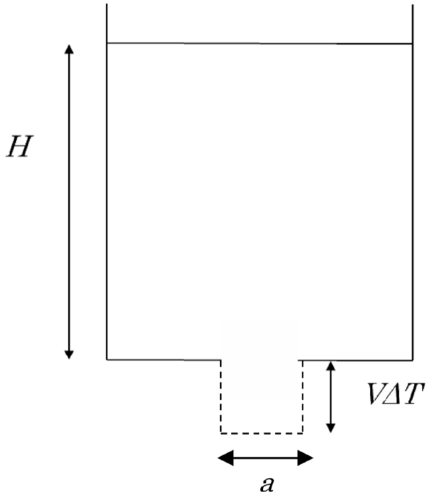


図 2

$\rho aHg\Delta T = \rho aV^2\Delta T$ という式が成り立ち，ここから $V = \sqrt{gH}$ という結果が得られる．

ここでのニュートンのアプローチの特徴は，おそらく静水圧とのアナロジーから，水を流出させる力の大きさが，開口部を底面とし，水面までの高さを有する水柱の重さに等しいと直観的に断定している点である．さらにニュートンは流出速度と落体の終端速度との比について論じることで，流速と高さの平方根との比例関係のみならず，比例定数まで理論的に確定することを可能とした．これによると水の流速はトリチェッリの法則が与える値の $1/\sqrt{2}$ となる．

しかしながら，このニュートンの解析には発表直後から数多くの異論が寄せられた(3)．そのためニュートンは『プリンキピア』第二版執筆の段階で流出に関する命題をほぼ全面的に書き換えることになる．

1710 年 9 月，『プリンキピア』第二版の出版責任者だったロジャー・コーツはニュートンから第二篇第七章分を含む改訂原稿を受け取った．ニュートンがコーツに送った原稿は見つかっていないが，コーツの返信から，この時点でニュー

トンが初版の第二篇命題 37 の結果を，トリチェッリの流出法則に合うように修正していたことがわかる．この原稿の中でニュートンがどのような理論からこの結果を導き出していたかは不明だが，『プリンキピア』の第二版以降では第二編命題 36 でいわゆるカタラクトの理論が論じられており，おそらくこのときすでに，その理論を採用していたのではないかと思われる（Newton 1971, 478-484).

カタラクトの理論によれば，水槽の中の水は落体の法則にしたがって開口部に向かいながら加速される．したがって H および G の位置での流速 $V_H$, $V_G$ と落下距離 $IH$，$IG$ との間には $V_G/V_H=\sqrt{IG}/\sqrt{IH}$ という関係が成り立つ（図 3 ).
一方，流速 $V$ と流れの断面積 $S$ との間にはいわゆる連続の法則が成り立つので，水を非圧縮性流体として扱い，流体要素の体積が一定だとすれば，H および G の位置での断面積 $S_H$, $S_G$ と流速 $V_H$, $V_G$ との間には $S_HV_H=S_GV_G$ という関係が成り立つ．したがって開口部からの高さと流れの断面積の間には

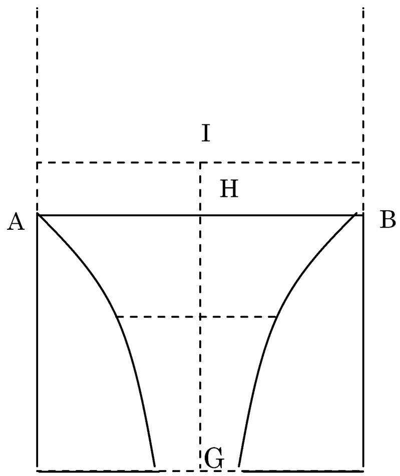

図 3　ニュートンのカタラクト

$$\frac{V_G}{V_H}=\sqrt{\frac{IG}{IH}}=\frac{S_H}{S_G}$$

という関係が成り立つ．この式によって表される水槽内の流れの形をニュートンはカタラクト，すなわち滝と名付けた．カタラクトの理論は，結局のところ，流出現象を落体法則とのアナロジーで説明する試みであり，第二版執筆の段階でニュートンはトリチェッリの流出法則の正しさを基本的に認めていたと考えられる．

しかしニュートンの修正はコーツを困惑させた．彼が流量に関するマリオットの実験データに基づいて計算したところ，流速は水面の高さの半分に相当する値だったからである．ニュートンへの返信の中で彼は次のように書いている：

> 正直申し上げて，私は命題 36 を読んで少なからず驚きました．…私を最も困らせたことの一つは，マリオット氏のある実験です．彼はそれを細心の注意で何度も繰り返したと述べております（『水および他の流体の運動についての論考』245 ページ）．彼の実験に基づく私の結論はこうです．流出する水の速度は，容器の半分だけの高さから落下する重い物体によって獲得される速度に等しい．これは貴殿が御著作の前の版で確定されたとおりです（Newton *Corres* 5, 66）．

コーツが自身の計算の基礎としたのは，開口部から水面までの高さが 13 ピエのとき，直径 3 リーニュの開口部を通って 1 分間に 14 パントの水が流れ出すというマリオットの実験データであり，当時おそらくこれは標準値とされていたものと考えられる．この流量と開口部の面積をもとに，トリチェッリの法則を仮定して，当時の標準的な重力加速度の値（g/2＝15 ピエ 1 プース）から水槽内の水の高さを逆算したところ，コーツは 76 プースという結果を得た．これは実際の 13 ピエという値の約半分である[(4)]．

コーツを説得するためニュートンはトリチェッリ以来の鉛直上向きの噴水の

実験を引き合いに出したが，コーツは納得しなかった．鉛直上向きの噴水の実験と流量測定の結果との食い違いを説明するためニュートンはさらなる実験に取り組み，いわゆる縮流現象［vena contracta］を発見することになる．

ニュートンは開口部からの水の流出を観察し，開口部から出た水流が細くなることに気づいた．直径 5/8 インチの開口部から流出する水流の直径を測定した彼は，水流の直径が開口部から約半インチのところで 21/40 インチになることを見出した（*Newton Corres* 5, 103; Newton 1972, 480）．したがって水流の直径と開口部の直径との比は 21：25 となり，両者の面積比はその二乗，すなわち $1{:}\sqrt{2}$ にほぼ等しくなる．水流がもっとも細くなるくびれの位置で，その流速がトリチェッリの法則の値になるならば，実際の流量はコーツが計算した結果の半分となり，計算値と実測値との食い違いは解消される．以上のことからニュートンは，開口部から流出する水の流速は実質的にトリチェッリの法則が与える値に等しく，水の流出を引き起こす力は，縮流の断面を底面とし，水面までの高さの 2 倍の高さを有する水柱の重量に等しいと結論した．

結局『プリンキピア』二版以降のニュートンは，既知の力と運動の第二法則から流出の法則を導き出すという初版でのアプローチを放棄し，代わりに経験的なアプローチ，すなわち流量と縮流のくびれを実測することによって流速を確定し，そのために必要な力の大きさを逆算するという方針を採用した．しかしこのニュートンの方針転換はさらなる議論を巻き起こし，ダニエル・ベルヌーイを流出の問題へといざなうことになる．

## 5. ダニエル・ベルヌーイによる流出の問題の解法

ダニエル・ベルヌーイ（Daniel Bernoulli, 1700–1782）と流出の問題とのかかわりは 1724 年前後に始まる．きっかけはイタリアの数学者ヤコポ・リッカーティ（Jacopo Riccati, 1676–1754）との論争であった．

『プリンキピア』第二版が出版された当初，リッカーティはカタラクト理論に対して批判的な態度をとっていたが，その後考えを改め，流出を引き起こす

力は開口部から水面までの高さの 2 倍の高さを有する水柱の重量であるというニュートンの立場の支持に回っていた．一方ダニエル・ベルヌーイの父ヨハンは，『プリンキピア』初版でのニュートン同様，その半分の高さの水柱の重量が流出を引き起こす力であるという仮定からトリチェッリの流出法則を導き出そうとしており，この時点ではダニエル・ベルヌーイも基本的に父ヨハンの立場を踏襲していた．

論争は，リッカーティがダニエル・ベルヌーイに以前この問題に関して別の人物に送った手紙の写しを送付し，論評を求めたことをきっかけに始まった．ダニエル・ベルヌーイは 1724 年 2 月 14 日付できわめて批判的な内容の返答を送り，その後数回にわたって手紙のやり取りが続くことになる．その後彼は自身の議論を『数学習作集』（*Exercitationes quaedam mathematicae*, 1724）の中に発表した．この一件以後，ダニエルは流出問題に対する考察を深めていくことになる（Mikhailov 1994, 233–238）．

流体の平衡と運動に関するダニエル・ベルヌーイの研究は 1738 年に出版された主著『流体力学』に集大成される．しかし，流出の問題を中心とするその内容の核心的部分はすでに 1727 年の論文「任意の管を通って流れる水の運動に関する新理論」（‘Theoria nova de motu aquarum per canales quoscunque fluentium’）の中で発表されていた．この論文の中で彼は，いわゆる活力保存の原理を流体に応用し，流出の問題に初めて整合的な解答を与えたと評価されている（Mikhailov 1996, 229 n. 64）．

1727 年論文の冒頭でベルヌーイは，開口部が非常に小さく，水槽内の水面がほぼ静止しているとみなせる場合，開口部から出る水の流速がトリチェッリの法則によって与えられることは確立されたが，より高度な問題について以前に与えられた解答は経験と一致していないと述べる．そのため彼は，「数理自然学［Physico-Mathematicis］の無数の問題を解くに当たって大いなる有用性を有する」活力保存の原理(5)を，管を通って流れる水の運動の理論に応用することを提唱することになる．

ダニエル・ベルヌーイが，まだ当時活発な議論の対象であった活力保存の原理を採用した動機には，『プリンキピア』初版でのニュートンや父ヨハンが受け容れていた仮定，すなわち，開口部の上に乗っている水柱の重量が流出を引き起こす力であるという仮定の妥当性に対する疑問があったことは疑いない．後の『流体力学』第一章で，彼は次のように明快に述べている：

> 彼［ニュートン］は『自然哲学の数学的諸原理』の初版の中でその理論を公表し，開口部の前におかれ，流れ出そうとしている水を運動に駆り立てる圧力からそれを導こうとした．しかしながら，その事柄の本性は水を流出させる力をアプリオリに確定することを常に許すわけではなく，むしろ，私自身しばしば経験したことだが，これに関しては，それを運動の現象から，すなわちアポステリオリに求めるしかないように思われるのであり，それゆえ，そのような原理に頼る思考は疑わしいと判断せざるをえない（Bernoulli 1738, I §2）.

このためニュートンは『プリンキピア』第二版で縮流を導入し，流量の測定から経験的に力の大きさを逆算した．しかしダニエル・ベルヌーイはこのアプローチにも批判的である．

> しかしながら，水脈の収縮が，流出する水の速度を流量から見積もれないことの真の原因であることは否定できないとしても，それに基づいて理論を構築すべきではないと私は考える．なぜなら，その［水脈の収縮］は偶然的であり，また，速度は水の摩擦や粘性などのような他の原因によらなければ変化しない以上，［水脈の収縮が］つねに一定であるわけでもないからである（Bernoulli 1738, I §2）.

必要とされていたのは，流出の現象を導くことのできる偶然的でない原理であっ

た．

彼が用いた方法は，管内を移動する流体の塊を考え，位置の微小変化による活力の増分が位置エネルギーの減少分に等しいとして微分方程式を立てるというものである（Bernoulli 1727, 114–116）．これまで同様，連続の法則が成り立つと仮定すれば，管内の流速は断面積に反比例する．したがって管の幾何学的形状が決まれば，断面要素内の流体がもつ活力は位置の関数となり，そこから管内の流体の基本方程式を導くことができる．

基本方程式の導出は論文の命題 1 から 3 で行われる（図 4）．まず，任意の形状をした管 ABGM の中を移動する水塊を考える．ここで容器の高さ AM＝$c$ であり，A から水面 DC までの落差を $t$，断面 DC および開口部 ON の面積をそれぞれ $s$，$b$ とする．

はじめ DCMG の位置にあった水塊が FEONLGF の位置まで降下したとすると，それによる位置エネルギーの減少分は，面積 DC と CE との積であらわされる微小体積に高さをかけたもの，すなわち

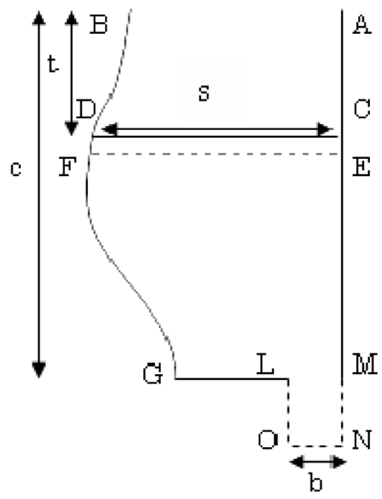


図 4

$DC \times CE \times CM = DC \times CM \times CE = s(c-t)dt$ で表される．

一方活力の増分は，FEONLGF に移動したとき水塊が有している活力から，DCMG の位置にあったときの活力を引いた差として以下のように計算される．まず，水塊が DCMG の位置にあるとき，断面 DC での流速をそれに相当する高さ $v$ で表わし[(6)]，水塊が有する活力の合計を $M$ とすると，その一部である FEMLGF の有する活力は $M-svdt$ となる．このとき連続の法則より断面 FE での流速は $s\sqrt{v}/(s+ds)$ となる．続いて水塊が FEONLGF の位置に移動したとすると，断面 FE での流速は $\sqrt{v}+d(\sqrt{v})=\sqrt{v}+dv/2\sqrt{v}$ となる．部分 FEMLGF の有する活力は，水塊の移動前後で，断面 FE での流速の比の 2 乗に比例すると考えられるので，水塊が移動した後，すなわち断面 CD が FE まで降下したとき部分 FEMLGF の有する活力は

$$(M-svdt)\times\left(\sqrt{v}+\frac{dv}{2\sqrt{v}}\right)^2\Big/\left(\frac{s\sqrt{v}}{s+ds}\right)^2 \cong \frac{Msv-s^2v^2dt+Msdv+2Mvds}{sv}$$

となる．一方，流出する水滴 LMON の有する活力は，LMON＝DCEF＝$sdt$ より，$(ss/bb)vsdt=(s^3/b^2)vdt$ となる．したがって活力の増分は

$$\frac{-s^2v^2dt+Msdv+2Mvds}{sv}+\frac{s^3}{b^2}vdt$$

となり，以上から基本方程式

$$s(c-t)dt=\left(\frac{s^2}{b^2}-1\right)svdt+M\frac{dv}{v}+2M\frac{ds}{s}$$

が得られる[(7)]．

この基本方程式を流出の問題に適用するとどのような解が得られるだろうか？続く命題 4 で最初に取り上げられるのが，垂直に立った円筒形の容器内の水が底面に開けられた開口部から流出するとき，水面が下降する速度を求める問題である．

円管の断面積を $n$，開口部の面積を 1 とし，流出前の水面の高さを $c$，水面

が下降した高さを $t$ とすると，断面積は一定なので流れの速度水頭 $v$ も一定であり，管内に残る水の活力は $M=n(c-t)v$ となる．これらを基本方程式に代入すると，$n(c-t)dt=n(c-t)dv-nvdt+n^3vdt$ となる．ここで $z=(c-t)$，$m=nn-1$ とおいて積分すると，

$$v=\frac{c^{nn-2}z-z^{nn-1}}{(nn-2)c^{nn-2}}$$

が得られる(8)．

この式で $n=1$，つまり円筒の断面積が開口部の面積に等しいとすると，開口部からの流出の速さは水面が降下する速さに等しく，$v=c-z=t$，すなわち $t$ の位置で水面が降下する速度は，高さ t から落下した落体が獲得する速度に等しい．したがってこの場合，円筒内の水は一体となり，一本の水の柱として通常の落体と同様に自然落下する．当然これは加速運動であり，水の柱は落下距離 $c$ を通過し，容器を完全に脱したとき初めてトリチェッリの法則が与える速度に到達する．したがって開口部が大きい場合でも，流出の始めから水が水面の高さ $c$ に相当する速さを獲得すると考えた人々は誤っていたとダニエル・ベルヌーイは指摘する．

続いてダニエル・ベルヌーイは，容器の断面積に比べて開口部が非常に小さい場合，流出の速度はトリチェッリの法則が与えるものに近づくと述べるが，そのことは 1738 年の『流体力学』でより一般的な形で証明されている (Bernoulli 1738, III §8–10)．

『流体力学』では，上記の基本方程式は

$$Ndv-\frac{mmvydx}{nn}+\frac{mmvdx}{y}=-yxdx$$

と表されるが，ここで $x$ は容器内の流体の深さ，$v$ は基準となる断面での流速を表す速度水頭であり，$m$ は基準となる断面の面積，$n$ は開口部の面積，$y$ は水面の面積である．$N$ は流体の有する全活力の測度であり，1727 年論文での $M$ に相当する(9)．

さて，開口部からの流速を速度水頭 $z=(mm/nn)v$ で表わすと，上記方程式は $nnNdz-mmzydx+mmnnzdx/y=-mmyxdx$ となるが，開口部が容器の断面に比べてきわめて小さいとすると，これは $-mmzydx=-mmyxdx$ となり，結局 $z=x$ が導かれる．すなわち管の出口での速度水頭は水面までの高さに等しく，流速は水面から出口までの間の容器の形状によらず，その高さの平方根に比例する．もちろんこれはトリチェッリの法則であるが，以前の数学者たちが正しく理解していたのはこの場合のみであったとダニエル・ベルヌーイは論じる．開口部が容器断面に比べて十分に小さいとみなせない場合にはこの結果は成り立たないのであり，流出の問題に関してトリチェッリの流出法則はひとつの極限において成り立つ近似的な解に過ぎないのである．

さらに自らの方法の一般性を示すため，ダニエル・ベルヌーイは，水槽の底面の開口部に取り付けられた鉛直管からの流出の問題を取り上げる（Bernoulli 1727, 120–122）．

この実験の結果は最初マリオットによって 1686 年に発表された．それによれば，水槽の底面に鉛直の管を取りつけた場合，そこから流れ出す水の流量は管がない場合に比べて著しく増加する（Mariotte 1686, 269–272）．このとき管内では断面積が一定のため，連続の法則が成り立っていれば加速は起こらないはずである．したがって水は管の上端に達した段階で流出速度に達していることになり，管がある場合はない場合に比べて水槽内の水が激しく加速されることになる．このことは自由落下からのアナロジーではうまく説明できない．さらにこの実験を追試したオランダの自然哲学者ス・グラーフェサンデ（Willem Jacob 's Gravesande, 1688–1742）は，管の入り口の大きさはそのままで，出口だけを大きくすると流量は増し，小さくすると流量は減るという事実を見出した（'s Gravesande 1725, 238–245）．これらの実験結果はダニエル・ベルヌーイが自らの新たな理論の妥当性を試す試金石になったと考えられる．

まず円筒形の容器 ACDB に挿入された円管 EF を通って水が流出するとき，水面 GH が下降する速度を速度水頭 $v$ で表す（図 5 ）．この場合，基本方程式

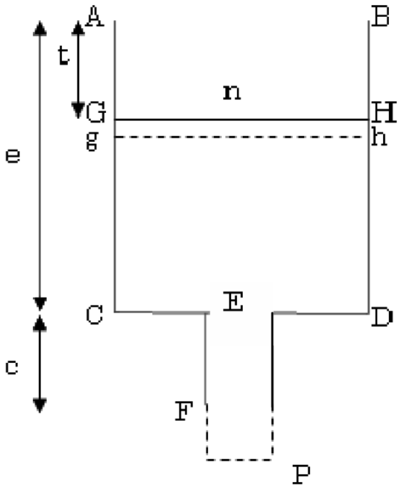


図 5

から $(c+e-t)dt=(e-t+nc)dv+(nnv-v)dt$ が得られる．ここで $e$ は容器の高さ，$c$ は挿入された円管の長さであり，容器と円管の断面は一定で，それぞれ $n$ および 1 と置かれている．$t=q+e+nc$, $v=r-c/(n+1)$ という変数変換をして積分すると，

$$v=\frac{e+c+\dfrac{c}{n+1}-t}{nn-2}-\frac{\left(e+c+\dfrac{c}{n+1}\right)\times(t-e-nc)^{nn-1}}{(nn-2)\times(-e-nc)^{nn-1}}$$

が得られる[(10)]．この流速の最大値を c＝0（つまり円管がない通常の流出の問題）の場合の流速の最大値と比較すると前者がはるかに大きく，その差は円管 EF が長くなればなるほど増大する．したがって取り付けられた円管が長くなるほど，容器が空になるまでの時間は短くなるとダニエル・ベルヌーイは論じた．

同様の問題は 1738 年の『流体力学』でも扱われるが，その解法は上記のものに比べより見通しよく整理されている．同書の第三章で管内を移動する水塊

の基本方程式を導いた後，ダニエル・ベルヌーイはス・グラーフェサンデの実験に言及し，彼が報告している現象を自身の理論から説明できることを示す(Bernoulli 1738, III §21–23)．この場合，基本方程式は

$$m(x-b)dv+\frac{bmm}{\sqrt{gn}}dv-\frac{m^3vdx}{nn}+mvdx=-mxdx$$

となる（図 6 ）．ここで $x$ は管の出口から基準となる断面 CD までの高さ，$v$ は断面 CD での流速を表す速度水頭であり，$m$, $g$, $n$ はそれぞれ断面 CD，管の入り口 FG および出口 MN の面積である．FG に取り付けた管の長さは $b$ で表される(11)．開口部での速度水頭は連続の法則により $s=(mm/nn)v$ となり，これを代入すると

$$\frac{nn}{m}(x-b)ds+\frac{bnn}{\sqrt{gn}}ds-msdx+\frac{nn}{m}sdx=-mxdx$$

が得られる．ここで断面 $m$ が $g$ と $n$ に比べ極めて大きいとすると，結局 $s=x$，すなわち管の出口での速度水頭は水面までの高さに等しいという結果が得られる．したがって管の出口からの流速は水面から出口までの間の容器の形状によ

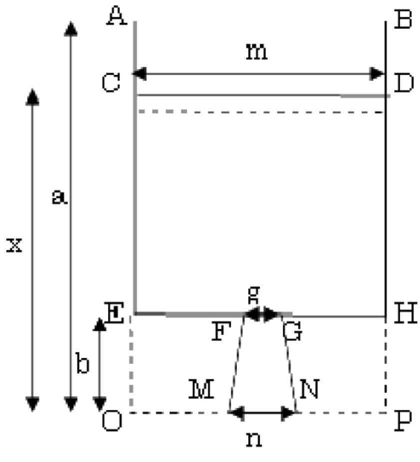


図 6

らず，その高さの平方根に比例することになり，この場合でもトリチェッリの法則が成り立つ.

このことについてダニエル・ベルヌーイは次のように注記している：

> 開口部 MN が非常に小さいとき，水が複雑な容器 AEFMNGHB を通って流れ出す仕方は，単純な容器 AOMNPB を通る場合と異ならず，水面 CD の速度は，開口部 MN＝FG とおいた場合でも，水が容器 AEFGHB を通って流れる場合より大きく，ましてや低い端に向かって管の断面積が増大し，MN が FG より大きくなるときは一層そうなることは明らかである.

この結果，水面から出口までの高さが等しい場合，流量は管の出口の面積に比例して増大することになり，ス・グラーフェサンデの実験が理論的に裏付けられたとダニエル・ベルヌーイは結論した.

## 4.　おわりに

最後に，理論と実験との相互作用という観点から，これまで検討してきた流出の問題の展開を簡単にまとめておきたい.

トリチェッリが流出法則を発表して以降，この法則の検証に関連して二種類の実験が知られていた．鉛直上向きの噴水実験と，流量測定実験である．このうち前者は当時トリチェッリの法則を直接確証する最も強力な証拠とみなされていた.

一方後者の流量測定実験によっても流速と，水面までの高さの平方根との比例関係については肯定的な結果が得られており，当初はこれもトリチェッリの法則を支持する実験結果と見られていた．いくつかの例外的な事例を除いて，初期の実験研究において比例定数の食い違いが問題視されることはなかったが，これは当時の測定技術，特に時間測定の技術がそこまで厳密な議論を許容するものではなかったことを示唆している．また時間測定の精度に加えて，流速か

らそれに相当する高さを逆算するには重力加速度の値が必要となるが，当時はその測定自体が依然重要な研究課題であったことも忘れてはならない(12)．

1687 年に出版された『プリンキピア』初版はこの状況に重要な転機をもたらした．この中でニュートンは，流出速度と落体の終端速度との比について論じることで，流速と高さの平方根との比例関係のみならず，両者の比例定数まで確定させる結果を理論的に導いた．『プリンキピア』初版でのニュートンの議論は，それまでの実験解釈の再検討を促したのである．

しかしながら，この結果は，最も基本的な実験である，鉛直上向きの噴水の実験結果に合わないと考えられたため，ニュートンは第二版で流出に関する命題をほぼ全面的に書き換え，いわゆるカタラクトの理論を採用する．さらにニュートンは縮流現象の存在を実験的に示すことで流量の計算値と実測値との食い違いを説明した．

このようなニュートン理論のアドホックな性格の克服が，ダニエル・ベルヌーイの流体力学研究の出発点となる．ベルヌーイは活力保存の原理を採用し，その原理から管内の流体の基本方程式を導き出した．さらに彼は，その方程式からトリチェッリの流出法則を証明できるだけでなく，マリオットやス・グラーフェサンデの実験の結果が矛盾なく説明できることを示した．これらの変則例を説明することでベルヌーイは，トリチェッリの流出法則を証明するそれまでの議論に比べ，活力保存則に基づく自らの理論がより広い適応範囲と有効性を有することを示そうとしたのである．

このように，流出の問題をめぐる理論の発展を概観すると，当時の実験結果がその流れの節目節目で大きな影響を及ぼしたことは明らかである．しかしそのあり方は，必ずしも旧来の実証的な科学方法論が前提とするようなものではない．例えば，流量の実験とトリチェッリの法則との関係からに典型的に現れているように，ある時期には理論を裏付けると見られていた実験結果が，時間の経過とともに理論の反証例とみなされるようになる．またニュートンが発見した縮流現象には，実験結果と理論との齟齬を解消するためのアド・ホックな

仮説の性格が強く見られるであろう．

しかしその一方で，この発展の流れの中には，核となる否定できない強い事実とみなせるものも確かに登場している．例えばニュートンが『プリンキピア』初版での理論を取り下げたのは，明らかに鉛直上向きの実験が有した説得力のためである．またダニエル・ベルヌーイはマリオットやス・グラーフェサンデの実験を取り上げたのは，これらの変則的な事例を説明することで自らの理論の信頼性を高めるためであったと考えられる．

何が自明であり，動かせない事実が何であるかということがそれぞれ科学者の属する時代の文脈に依存することは確かであろう．そのような文脈がどの程度社会的な成分に依存するかを明らかにすることは本稿の射程を超えている．しかし科学者たちはそれぞれの文脈の中で，やはり実験や観察によって得られた経験的なデータというものに束縛されているのであり，当然のことながら事実をすべて恣意的に構成することができるわけではない．このような経験的チャレンジの理論発展に対する役割は，本稿で扱った流出の問題をめぐる歴史過程にも見出すことができるのである．

**一次文献**

Bernoulli, Daniel 1727, ‘Theoria nova de motu aquarum per canales quoscunque fluentium’ *Commentarii Academiae scientiarum Petoropolitanae* **2**, 111–125.

Bernoulli, Daniel 1738, *Hydrodynamica sive de viribus et motibus fluidorum commentarii* (Strasbourg) in *Die Werke von Daniel Bernoulli*, 5 (Basel: Birkhäuser, 2004).
英訳：*Hydrodynamics by Daniel Bernoulli & Hydraulics by Johann Bernoulli*, translated by Thomas Carmody & Helmut Kobus (New York: Dover, 1968).

Du Hamel, Jean-Baptiste. 1698. *Regiae scientiarum academiae historia parisis* (Paris).

Newton, Isaac 1972, *Philosophiae naturalis principia mathematica*, ed. by A. Koyré and I. B. Cohen (Cambridge: Cambridge University Press).
邦訳：河辺六男責任編集『ニュートン』中央公論社 1971 年.

Mariotte, Edme 1686, *Traité du mouvement des eaux et des autres corps fluides* (Paris).

Gravesande, Willem Jacob ’s 1725, *Physices Elementa Mathematica, experimentis confirmata, sive Introductio ad Philosophiam Newtonianam*, 2nd edition (Leiden).

Torricelli, Evangelista 1644, *Opera geometrica* (Firenze).

## 著作集および書簡集

Huygens *Œuvres: Œuvres complètes de Christiaan Huygens*, edited by the Societé Hollandaise des Sciences (1937).

Newton *Corres: The Correspondence of Isaac Newton*, edited by H.W. Turnbull (Cambridge: Published for the Royal Society, at the University Press, 1959–1977).

## 二次文献

Blay, Michel 1992, *La naissance de la mécanique analytique: La science du mouvement au tournant des XVII*[e] *et XVIII*[e] *siècles* (Paris: Presses Universitaires de France).

Calero, Julián Simón 2008, *The Genesis of Fluid Mechanics 1640–1780* (Dordrecht: Springer).

Darrigol, Olivier & U. Frisch 2008 'From Newton's mechanics to Euler's equations' *Physica D* **237**: 1855–1869.

Hankins, Thomas L. 1970, *Jean d'Alembert: Science and Enlightenment* (Oxford: Clarendon Press).

Maffioli, C. S. 1994, *Out of Galileo: The Science of Waters 1628–1718* (Rotterdam: Erasmus Publishing).

Mikhailov Gleb K. 1996, 'Early studies on the outflow of water from vessels and Daniel Bernoulli's exercitationes quaedam mathematicae' in *Die Werke von Daniel Bernoulli*, 1 (Basel: Birkhäuser), 199–255.

Ravetz, J. 1961, 'The Representation of Physical Quantities in Eighteenth-Century Mathematical Physics' *Isis* **52**: 7–20.

Truesdell, Clifford A. 1968, *Essays in the Hisotry of Mechanics* (Berlin: Springer).

Westfall, Richard S. 1980, *Never at Rest. A Biography of Isaac Newton* (Cambridge: Cambridge University Press).
日本語訳：田中一郎, 大谷隆昶訳『アイザック・ニュートン』平凡社 1993.

有賀暢迪 2009,「活力論争とは何だったのか」『科学哲学科学史研究』**3**: 39–57.

中澤　聡 2009,「ニュートンは運動方程式 F＝ma を書いたのだろうか？」（中根美知代他『科学の真理は永遠に不変なのだろうか―サプライズの科学史入門―』東京：ベレ出版）所収.

## 註

（1） 結果の（3）は以下のように導かれる．底面積 $S$ の円筒形の容器から面積 $a$ の開口部を通って水が流れ出す場合を考える．水位 $z$ の変動に関わらず流速が水面まで

の高さの平方根に比例し，$v=\sqrt{2gz}$ と表せるとすると，時間 $dt$ の間に流出する水の体積は $dQ=avdt=a\sqrt{2gz}\,dt$ と表される．これは水位の低下によって減少した容器内の水の体積 $-Sdz$ に等しく，したがって微分方程式 $a\sqrt{2gz}\,dt=-Sdz$ が得られる．これを解くと経過時間と水位の関係式 $t=2S(\sqrt{z_0}-\sqrt{z})/a\sqrt{2g}$ が得られ，ここから等しい時間の間に水面が下降する高さは奇数列を成すことが導かれる．

（2） 以下の記述では古いフランスの度量衡が用いられている．メートル法以前のフランスでは同じ名前の単位でも地域ごとに原器の大きさが異なっていたが，自然科学関係の文献では主にパリの単位が用いられていた．長さの基本単位はピエであり，1 ピエ＝12 プース＝144 リーニュとなる．Calero はパリのピエのメートル法換算値として 324.83 mm を採用している（Calero 2008, 494）．一方パントは容積の単位で，パリのパントは通常約 0.93 リットルと換算されるが，マリオットはそれを 1 立方ピエの 1/35 としている（Mariotte 1686, 265）．Calero の値でこれを計算すると，0.97927 リットルとなる（Calero 2008, 279 n. 25）．

（3） ニュートンと親交のあったスイスの数学者ニコラ・ファシオ・ド・デュイリエ（Nicolas Fatio de Duillier, 1664–1753）は自ら実験を行ってニュートンの説得を試みたらしい．彼は第 2 篇命題 37 に関して，自身が所蔵する『プリンキピア』初版の 330 ページの欄外に「この論証はすべて誤謬にして，その結論は偽なり」（Tota haec demonstratio fallax est ejusque conclusio falsa）と書き込み，331 ページの第二パラグラフに「水の高さの半分．水の全高と訂正せよ．余が容器を用いて実験を行うよう取り計らい，ようやくわれらがニュートンをこの誤りから解き放てり」（dimidiam aquae altitudinem. Corrige et lege totam aquae altitudinem. Newtonum nostrum ab hoc errore vix liberare potui, idque facto demum experimento ope vasis quod conficiendum curavi）と注記している（Newton *Corres* 3, 169 n. 3）．

Westfall は，ファシオが実験で水槽の下部に取り付けられた開口部から上向きに噴出した水が水槽内の水面の高さまで上昇することを示し，これによってニュートンを説得したとしている（Westfall 1980, 708）．

（4） ピエは長さの基本単位であり，約 30 cm である．1 ピエ＝12 プース＝144 リーニュとなる．パントは容積の単位であり，マリオットは 1 パントを 1 立方ピエの 1/35 としている．詳しくは注 2 を参照．

（5） 活力［vis viva］とはライプニッツが用い始めた概念で，今日の運動エネルギーに当たり，活力保存の原理とは力学的エネルギーの保存則にほぼ相当する．活力を力の正しい尺度と見なすライプニッツの見解をめぐって，当時ヨーロッパでは学界を二分する議論が繰り広げられたが，これは後に活力論争と呼ばれることになる．活力論争については（有賀 2009）を参照．

（6） 18 世紀初頭まで物理法則はもっぱら比例式の形で理解されてきたが，それらが代

数方程式として表現されるようになるにつれて，さまざまな次元を有する物理量をどのように表わすかという問題が生じた（中澤 2009）．この問題を解決するための努力は 19 世紀を通して続き，その中で普遍的な単位系の確立と物理定数の測定が物理学者たちの重要な課題となる．本論文が扱う時代はちょうど過渡期にあたり，ベルヌーイやオイラーらは単位同士の換算にまつわる曖昧さを避けるため，さまざまな物理量を長さと力（重量）の次元によって表現するのを慣例としていた．例えば速度や時間はガリレオの落体法則に基づいて長さ（落下距離）の単位を用いて表わされることになる．詳しくは（Ravetz 1961），（Hankins 1970）を参照．速度を長さの次元で表わすことは今日工学の分野で用いられる速度水頭の概念に相当する．速度水頭（velocity head）とは運動エネルギーの大きさを長さの次元で表したものであり，速度を $V$ としたとき，速度水頭 $v$ は $v=V^2/2g$ と表すことができる．

（7） このままでわかりにくいので， $\Omega_S=s, \Omega_0=b, X=c-t, V=\sqrt{2gv}$ ， $M=\int\Omega\cdot V^2/2g\cdot dX$ とおいてこの結果を書き直すと，上記の基本方程式は

$$-\Omega_S X dX = -\left(\frac{\Omega_S^2}{\Omega_0^2}-1\right)\Omega_S\frac{V^2}{2g}dX + 2\frac{\int\Omega\frac{V^2}{2g}dX}{V}dV + 2\frac{\int\Omega\frac{V^2}{2g}dX}{\Omega_2}d\Omega$$

と表せる．この式の右辺は水塊の持つ活力の全微分に相当する．

（8） 上記の変数変換を行って整理すると，線形非同次微分方程式 $dv/dz-mv/z=-1$ が得られる．これを解いて，$t=0$ で $v=0$ という初期条件で任意定数を決めると，$v$ について上記の式が得られる．

（9） 先ほどと同様に書き直すと，

$$-\Omega_S X dX = 2\frac{\int\frac{\Omega_f^2}{\Omega}dX}{V}dV - \left(\frac{1}{\Omega_S}-\frac{\Omega_S}{\Omega_0^2}\right)\Omega_f^2\frac{V^2}{2g}dX.$$

ただし $\Omega_f=m$ とし，左辺と右辺を入れ替えた．詳しい導出過程については *Die Werke von Daniel Bernoulli*, 5（Basel: Birkhäuser, 2004): 51–55 を参照．

（10） 上記の変数変換を行って整理すると，線形非同次微分方程式 $dr/dq+(1-n^2)r/q=1$ が得られる．これを解いて，$t=0$ で $v=0$ という初期条件で任意定数を決めると解曲線

$$(t-e-nc)^{1-nn}\left(-nnv+2v+c-t+e+\frac{c}{n+1}\right)=(-e-nc)^{1-nn}\frac{ne+e+nc+2c}{n+1}$$

が得られ，これを $v$ について整理すると上記の式が得られる．

（11） 先ほどと同様にして書き直すと，

$$-\Omega_S X dX = \left(\frac{\Omega_S^2}{\Omega_0^2}-1\right)\Omega_S\frac{V^2}{2g}dX + \left(X-L+\frac{L\Omega_S}{\sqrt{\Omega_0\Omega_1}}\right)\Omega_S\frac{V}{g}dV.$$

ただし $\Omega_S = m$, $\Omega_0 = n$, $\Omega_1 = g$, $X = x$, $L = b$, $V = \sqrt{2gv}$ とおき，左辺と右辺を置き換えた．

（12）　当時の標準となる重力加速度の値を測定したホイヘンスは，例外的に 1668 年という早い段階から覚書の中で流量の計算値と実測地とのずれを指摘していたが，そのことが彼の生前にどの程度知られていたかは不明である（Huygens *Œuvres* XIX, 172）.