

東京大学大学院新領域創成科学研究科

基盤科学研究系

先端エネルギー工学専攻

平成21年度

修士論文

非一様磁場と密度勾配における  
抵抗性ドリフト波の線形安定性解析

2010年2月提出

指導教員 古川 勝 准教授

086069 忠地 慧

# 目次

第1章 序論	1
1.1 背景	1
1.2 目的	5
第2章 非一様密度勾配の効果	6
2.1 Hasegawa-Wakatani 方程式	6
2.2 $x$ 方向への物理量の変化	7
2.2.1 解析解	7
2.2.2 数値解	16
2.2.3 数値解と解析解の比較	17
2.3 $z$ 方向への物理量の変化	19
2.3.1 数値解	19
第3章 非一様磁場の効果	25
3.1 RT-1 プラズマを想定した場合の典型的パラメータ	26
3.2 $k_z C_s \ll k_y v_{de} \ll k_z v_A$ の場合	28
3.2.1 分散関係式の導出	28
3.2.2 磁場勾配に対する安定性解析	30
3.2.3 イオン音波が現れないモデル	36
3.3 $k_z C_s \sim k_y v_{de} \ll k_z v_A$ の場合	45
3.3.1 分散関係式の導出	45
3.3.2 磁場勾配に対する安定性解析	47

3.4	$k_z C_s \sim k_y v_{de} \sim k_z v_A$ の場合 . . . . .	52
3.4.1	分散関係式の導出 . . . . .	53
第4章	結論	57
付録A	非一様磁場におけるモデルの導出	59
謝辞		68
参考文献		70
学会発表		72

# 第1章 序論

## 1.1 背景

プラズマが力学的平衡状態にはない場合，そこにおける自由エネルギーは波を自己励起させ，したがって平衡は不安定になる．不安定性とは，常に自由エネルギーを減少させ，プラズマを真の熱平衡状態に近づけようとする働きであるともいえる．この観点にたつて，不安定性をそれらを起こすに有効な自由エネルギーの形式に従って分類してみると，4つの主な範疇に分けられる．ビーム不安定性，*Rayleigh – Taylor* 不安定性，ユニバーサル不安定性，速度空間不安定性である．本研究で扱う抵抗性ドリフト波は，このうちユニバーサル不安定性に分類できる．電場や重力場のように明らかに推進力をもつものがないときでも，プラズマはある空間に閉じ込められている限り完全な熱力学的平衡ではない．プラズマの圧力はプラズマを広げる傾向をもち，広がるエネルギーは不安定性を引き起こす．この型の自由エネルギーは現実のプラズマ中ではどれにでも存在し，結果として生ずる波をユニバーサル不安定性と呼ぶ．

ドリフト波とは，磁化された密度の不均一なプラズマ中を，等密度線の方向に伝播する縦波である．磁場中のプラズマが密度勾配をもつとき，どんなに小さい勾配でも，それだけでプラズマが不安定になることは，1963年 Russians によって初めて理論的に示され，ドリフト波不安定性と名づけられた．ドリフト波が不安定になる要因として，(1) 密度勾配，(2) 磁場に垂直なイオンと電子のドリフトに差を生じさせるもの，イオンの慣性または，イオンの有限 Larmor 半径の効果，(3) 磁場に平行な電子の自由な運動を妨げるもの．電子の衝突あるいは Landau

damping が必要である [22] . ここで ( 2 ) の Larmor 半径の効果というのは , 有限の Larmor 半径を考慮に入れると波の電場を Larmor 軌道に沿って平均したイオンの感じる有効電場が  $(1/2)k_{\perp}^2\rho_i^2$  (  $\rho_i$  はイオンの Larmor 半径 ,  $\rho_e = 0$  とする . ) だけ電子の電場より小さくなって , これが  $E \times B$  ドリフトに差を生じるのである . イオンの温度と電子の温度が等しいとき , イオンの慣性と有限 Larmor 半径の効果は , 不安定の成長にちょうど同じ大きさの寄与を与える .

ドリフト波研究は主に核融合研究のテーマの一つとして位置付けられている . 磁場閉じ込め核融合プラズマにおける最も重要な問題の一つにプラズマ粒子やエネルギーの「異常輸送」の機構解明がある . 一般に , 異常輸送はプラズマの持つ様々な不安定性から生ずる乱流による輸送の増加であると考えられている . 実際 , トカマクやステラレータ等の実験装置では特に周辺プラズマ領域において顕著な異常輸送と大きな密度や静電ポテンシャルの揺らぎが観測され , プラズマは特に周辺領域で強い乱流状態にある . ドリフト波乱流も異常輸送を引き起こす原因の一つであり , ドリフト波乱流を記述するための最も基本となる方程式が長谷川 , 三間氏によって導かれている [1] . まず , イオン流体の運動方程式と連続の方程式は ,

$$\frac{dv_{\perp}}{dt} = -\frac{e}{m}\nabla_{\perp}\varphi + v_{\perp} \times \omega_c \quad (1.1.1)$$

$$\nabla_{\perp} \cdot v_{\perp} = -\frac{d}{dt} \ln n \quad (1.1.2)$$

と書ける . ここで  $\nabla_{\perp}$  は磁場に垂直な面の微分オペレータ ,  $v_{\perp}$  は流れの速度 ,  $e , m$  はその電荷と質量 ,  $\omega_c (= eB_0/m)$  はイオンのサイクロトロン周波数 ,  $n$  は密度 ,  $\frac{d}{dt}$  は流線に沿った時間微分である . また , ボルツマン分布を仮定して , イオン密度は ,

$$n = n_0(x) \exp(e\varphi/T_e) , \quad (1.1.3)$$

で与えられる . 式 (1.1.1) の curl をとると  $\varphi$  に対して次の Hasegawa-Wakatani 方程式が得られる .

$$\frac{\partial}{\partial t} (\nabla_{\perp}^2 \varphi - \varphi) - [(\nabla_{\perp} \varphi \times \hat{z}) \cdot \nabla_{\perp}] \left[ \nabla_{\perp}^2 \varphi - \ln \left( \frac{n_0}{\omega_c} \right) \right] = 0 \quad (1.1.4)$$

一方，プラズマ周辺領域の密度の揺らぎに対するモデル方程式として Hasegawa-Wakatani 方程式 [2] が導かれている。

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} \nabla \varphi \times \hat{z} \cdot \nabla \right) \nabla^2 \varphi = C_1(\varphi - n) + C_2 \varphi \quad (1.1.5)$$

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} \nabla \varphi \times \hat{z} \cdot \nabla \right) (n + \ln n_0) = C_1(\varphi - n) \quad (1.1.6)$$

ただし，

$$C_1 = -\frac{T_e}{e^2 n_0 \eta \omega_c} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (1.1.7)$$

$$C_2 = \frac{\mu}{\rho_s^2 \omega_c} \nabla^4 \quad (1.1.8)$$

このモデルは磁場に平行方向の電子の電気抵抗を含んで Hasegawa-Mima 方程式を拡張したモデルである．ここで， $\eta$  は電気抵抗であり， $\mu$  は粘性である．以上の方程式は，非一様密度，一様磁場のプラズマ中での静電的抵抗性ドリフト波乱流を記述するモデルであり，このとき  $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$  流の圧縮は，

$$\nabla \cdot \mathbf{v}_{\mathbf{E} \times \mathbf{B}} = \nabla \cdot \left[ \frac{\nabla \varphi \times \mathbf{B}}{B_0^2} \right] = 0 \quad (1.1.9)$$

である．また，洲鎌らはステラレーターの周辺プラズマを想定し，曲率とシアーを持つ磁場及び密度勾配が存在する場合の静電的かつ抵抗性プラズマの乱流を取り扱うのに，以下の流体モデル方程式を用いている [9]．

$$\frac{d}{dt} \nabla_{\perp}^2 \phi = \frac{1}{\nu} \nabla_{\parallel}^2 (n - \phi) + \nabla n \times \nabla \Omega \cdot \hat{z} + \mu \nabla_{\perp}^4 \phi \quad (1.1.10)$$

$$\frac{d}{dt} (n + \bar{n}) = \frac{1}{\nu} \nabla_{\parallel}^2 (n - \phi) + \nabla (n - \phi) \times \nabla \Omega \cdot \hat{z} + D_{\perp} \nabla_{\perp}^2 n \quad (1.1.11)$$

式 (1.1.10) 及び (1.1.11) において  $\nabla \Omega = (d\Omega/dr) \hat{r}$  はステラレーターのヘリカル磁場の平均曲率を表し，それに伴う遠心力と密度勾配  $d\bar{n}/dr$  及び衝突周波数  $\nu$  によって不安定性が生じ，乱流が引き起こされる．その他にも磁場の磁率を与えたモデルによる研究は行われている [10, 11, 12]．しかし，このとき  $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$  流の圧縮  $\nabla \cdot \mathbf{v}_{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}$  は，やはり小さいと考えられ [13]，プラズマの運動はほぼ非圧縮である．

ここで、磁気圏型プラズマ閉じ込めと RT-1 について言及しておく。プラズマ閉じ込め効率の性能を特徴付けるパラメータの一つに  $\beta$  値というものがある。 $\beta$  値とは  $\beta = \frac{p}{B^2/2\mu_0}$  ( $p$ : プラズマ圧力,  $B^2/\mu_0$ : 磁気圧) で表される。この  $\beta$  値を高くすることができればそれだけ弱い磁場でプラズマを閉じ込めることも可能になるため、現在、 $\beta$  値の高いプラズマ閉じ込めを目指して様々な磁場閉じ込め方式が研究されているが、その一つとして磁気圏型プラズマ閉じ込めが提案されている。

1977 年に打ち上げられた探査機ボイジャーによる観測結果などから、木星の磁気圏内において超高  $\beta$  トーラスプラズマが閉じ込められていることが明らかになった [15, 16]。この現象に関して A. Hasegawa は、ダイポール磁場が極めて高い  $\beta$  値のプラズマを閉じ込める可能性があることを指摘しており、ダイポール磁場によるプラズマの閉じ込め方式を提案している [3, 4]。

また、木星磁気圏に閉じ込められるプラズマがトロイダル方向に高速回転流をしていることも、観測結果から分かっている [15, 16]。この現象に関して S. M. Mahajan と Z. Yoshida は 2 磁気流体緩和理論を提唱し [5, 6, 7]、この高速回転流が木星磁気圏におけるプラズマの超高  $\beta$  プラズマ平衡状態を実現していることを示した。そこで我々の研究室では、この木星磁気圏に閉じ込められるプラズマをモデルとしたプラズマ実験装置「Ring Trap-1 (RT-1)」[8] により、超高  $\beta$  プラズマ閉じ込め現象の実験的検証を目指している。

トカマクやステラレーター等の実験装置と比較し、RT-1 のような磁気圏型プラズマ閉じ込め装置では磁場の非一様性が顕著に大きい。このとき、 $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$  ドリフトの圧縮は、

$$\nabla \cdot \mathbf{v}_{\mathbf{E} \times \mathbf{B}} = (-\nabla\varphi \times \hat{z}) \cdot \nabla \left( \frac{1}{B} \right) \neq 0 \quad (1.1.12)$$

となり、その効果を調べるのが重要になる。したがって、磁気圏型プラズマ閉じ込め装置のような磁場配位における抵抗性ドリフト波に対する  $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$  ドリフトの圧縮性効果を調べるための基礎研究として、本研究では 1 次元スラブプラズマを考え、磁場が一方向にあり、それを横切る方向に磁場強度の変化がある平衡状

態を考える．

また，プラズマの線形安定性解析でよく用いられる手法の一つにモード解析（分散関係）がある．モード解析では，平衡のまわりで線形化した方程式の固有値問題を解き，モードの周波数に相当する固有値  $\omega$  が虚部を持つかどうか調べる．線形化方程式の生成作用素がエルミート作用素である場合，一般的に点スペクトルと連続スペクトルで分解可能であり，また，固有関数は直交する．連続スペクトルを持つ場合は，それに属する固有関数は二乗可積分ではなくなる．一方で，非エルミート作用素である場合，このスペクトル分解可能性や固有関数の直交性が保証されない．したがって，スペクトル（固有値）がどのような構造を持つのが調べることに重要な意義を持つが，ドリフト波についてはよく調べられていない．

## 1.2 目的

このような背景を踏まえ，本研究では空間変化（磁場の非一様性，密度勾配の非一様性）に対する線形ドリフト波の安定性解析を行い，以下2点を明らかにする．

1. 静電的ドリフト波のスペクトル構造と，それに対する非一様密度勾配の効果．
2. 静電的及び電磁的ドリフト波安定性に対する非一様磁場による  $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$  ドリフト圧縮性の効果．



## 第2章 非一様密度勾配の効果

一様磁場, 非一様密度勾配のプラズマ中で線形ドリフト波の数理解析を行う.  $x$  方向に密度勾配がある Hasegawa-Wakatani 方程式を  $\partial/\partial x$  を残して微分方程式として扱う場合のスペクトル構造を調べる. また, 数値解と微分方程式による解析解との比較を行い, その違いを調べる.

以下では, 1次元スラブプラズマを考え,  $z$  方向に一様磁場  $\mathbf{B}_0 = B_0 \hat{z}$  があり,  $x$  方向に密度勾配  $\nabla n_0$  があるとする.

### 2.1 Hasegawa-Wakatani 方程式

Hasegawa-Wakatani 方程式については序論でも述べたとおりだが, 一様磁場, 非一様密度プラズマ中でトカマク端部のプラズマにおける静電的抵抗性ドリフト波乱流を記述する方程式として導かれたモデルである. 線形化し, 時間,  $y, z$  方向には Fourier 変換を施したとき, 次のように表せる. 渦度方程式と連続の式はそれぞれ,

$$-i\omega \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} - k_y^2 \right) \varphi = \frac{k_z^2}{\eta} (\varphi - n), \quad (2.1.1)$$

$$-i\omega n - ik_y \frac{n'_0}{n_0} \varphi = \frac{k_z^2}{\eta} (\varphi - n), \quad (2.1.2)$$

である. ただし,  $\eta$  は電気抵抗であり,  $x$  方向には  $\partial/\partial x$  を残した.

また, ここでは密度  $n$  を  $n_0$  で, 静電ポテンシャル  $\varphi$  を  $e/T_e$  で, 時間を  $\Omega_i \equiv eB_0/m_i$  で, 長さを  $\rho_s \equiv \frac{\sqrt{T_e/m_i}}{\Omega_i}$  で規格化した.  $n_0$  は平衡密度,  $T_e$  は電子温度,  $m_i$  はイオンの質量である.

## 2.2 $x$ 方向への物理量の変化

磁場に垂直な方向 ( $x$  方向) へ物理量が変化する場合に線形ドリフト波の数理解析を行う。

### 2.2.1 解析解

$x$  方向に関する微分方程式として解き、固有値の分布や固有関数の直交性を調べる。

解くべき微分方程式は式 (2.1.1), (2.1.2) から  $n$  を消去することで得られる。

$$-\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{-\omega^2 k_y^2 - i\omega \frac{k_z^2}{\eta} (k_y^2 + 1) - ik_y \frac{n'_0}{n_0} \frac{k_z^2}{\eta}}{-i\omega \left( -i\omega + \frac{k_z^2}{\eta} \right)} \varphi = 0 \quad (2.2.1)$$

$\varphi$  の変域を  $0 \leq \varphi \leq \pi$  とし、境界条件を、 $\varphi(0) = \varphi(\pi) = 0$  と設定する。

これを *Schrödinger* 型に書くと、 $\frac{n'_0}{n_0} = const.$  の場合には、 $x = 0, \pi$  に無限に高いポテンシャル障壁があり、かつその間ではポテンシャルが定数である。このようなときは束縛状態のみが可能で、つまり点スペクトルのみであることが分かる。

$\frac{n'_0}{n_0} = const.$  の場合

このとき、左辺第2項のポテンシャル部は *const.* となるので、これを  $\lambda$  とおいて、

$$-\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \lambda\varphi = 0, \quad (2.2.2)$$

とすると、 $\lambda < 0$  のとき、一般解は

$$\varphi = c_1 \cos \sqrt{-\lambda}x + c_2 \sin \sqrt{-\lambda}x,$$

である。(  $\lambda \geq 0$  のときは境界条件を満たせない。)

境界条件から

$$\varphi(0) = c_1 = 0 ,$$

$$\varphi(\pi) = c_1 \cos \sqrt{-\lambda}\pi + c_2 \sin \sqrt{-\lambda}\pi ,$$

である. よって

$$\lambda_j = -j^2 \quad . \text{ただし } j \text{ は自然数}$$

このような可算無限個の  $\lambda_j$  に対して

$$\lambda_j = \frac{-\omega_j^2 k_y^2 - i\omega_j \frac{k_z^2}{\eta} (k_y^2 + 1) - ik_y \frac{n'_0 k_z^2}{n_0 \eta}}{-i\omega_j \left( -i\omega_j + \frac{k_z^2}{\eta} \right)}$$

を  $\omega$  について解きなおせば,  $\omega_j$  の分布が求められる. それぞれの  $\lambda_j$  に対して,  $\omega_j$  は2つずつ離散的に求まる.

$$-\omega_j^2 k_y^2 - i\omega_j \frac{k_z^2}{\eta} (k_y^2 + 1) - ik_y \frac{n'_0 k_z^2}{n_0 \eta} = -i\omega_j \left( -i\omega_j + \frac{k_z^2}{\eta} \right) \lambda_j$$

$$\omega_j^2 (\lambda_j - k_y^2) + i\omega_j \frac{k_z^2}{\eta} (\lambda_j - k_y^2 - 1) - ik_y \frac{n'_0 k_z^2}{n_0 \eta} = 0$$

$$\begin{aligned}
\omega_j &= \frac{-i \frac{k_z^2}{\eta} (\lambda_j - k_y^2 - 1) \pm \sqrt{-\frac{k_z^2}{\eta} (\lambda_j - k_y^2 - 1)^2 - 4(\lambda_j - k_y^2)(-ik_y) \frac{n'_0 k_z^2}{n_0 \eta}}}{2(\lambda_j - k_y^2)} \\
&= \frac{-i \frac{k_z^2}{\eta}}{2(\lambda_j - k_y^2)} \left[ (\lambda_j - k_y^2 - 1) \pm \sqrt{(\lambda_j - k_y^2 - 1)^2 - 4ik_y (\lambda_j - k_y^2) \frac{n'_0 \eta}{n_0 k_z^2}} \right] \\
&\simeq \frac{-i \frac{k_z^2}{\eta}}{2(\lambda_j - k_y^2)} \left[ (\lambda_j - k_y^2 - 1) \pm (\lambda_j - k_y^2 - 1) \left[ 1 - 2ik_y \frac{\lambda_j - k_y^2}{(\lambda_j - k_y^2 - 1)^2} \frac{n'_0 \eta}{n_0 k_z^2} \right] \right] \\
&= \begin{cases} \frac{-i \frac{k_z^2}{\eta}}{2(\lambda_j - k_y^2)} \left[ 2(\lambda_j - k_y^2 - 1) - 2ik_y \frac{\lambda_j - k_y^2}{(\lambda_j - k_y^2 - 1)^2} \frac{n'_0 \eta}{n_0 k_z^2} \right] \\ \frac{-i \frac{k_z^2}{\eta}}{2(\lambda_j - k_y^2)} 2ik_y \frac{\lambda_j - k_y^2}{(\lambda_j - k_y^2 - 1)^2} \frac{n'_0 \eta}{n_0 k_z^2} \end{cases} \\
&= \begin{cases} -i \frac{k_z^2}{\eta} \frac{\lambda_j - k_y^2 - 1}{\lambda_j - k_y^2} & : \text{減衰解 (イオンブランチ)} \\ \frac{k_y \frac{n'_0}{n_0}}{\lambda_j - k_y^2 - 1} & : y \text{の正の方へ伝播する解 (電子ブランチ)} \end{cases}
\end{aligned}$$

ただし,  $\frac{\lambda_j - k_y^2 - 1}{\lambda_j - k_y^2} > 1$ ,  $n'_0 < 0$ ,  $\lambda_j - k_y^2 - 1 < 0$  である.

で平方根の展開 (近似) をもう一つ高次まで残したとき,

$$\begin{aligned}
\omega_j &\simeq \frac{-i \frac{k_z^2}{\eta}}{2(\lambda_j - k_y^2)} [(\lambda_j - k_y^2 - 1) - (\lambda_j - k_y^2 - 1) \\
&\quad \times \left[ 1 - 2ik_y \frac{\lambda_j - k_y^2}{(\lambda_j - k_y^2 - 1)^2} \frac{n'_0 \eta}{n_0 k_z^2} - \frac{1}{8} \left( -4ik_y \frac{\lambda_j - k_y^2}{(\lambda_j - k_y^2 - 1)^2} \frac{n'_0 \eta}{n_0 k_z^2} \right)^2 \right]] \\
&= \frac{k_y \frac{n'_0}{n_0}}{\lambda_j - k_y^2 - 1} + i \frac{\eta}{k_z^2} \frac{k_y^2 (\lambda_j - k_y^2)}{(\lambda_j - k_y^2 - 1)^3} \left( \frac{n'_0}{n_0} \right)^2 \\
&= \omega_{Dej} + i \frac{\eta}{k_z^2} \omega_{Dej}^2 \frac{\lambda_j - k_y^2}{\lambda_j - k_y^2 - 1},
\end{aligned}$$

である. ただし,  $\omega_{Dej} \equiv \frac{k_y \frac{n'_0}{n_0}}{\lambda_j - k_y^2 - 1}$  であり, 電子ブランチのみを考えた.

ここで,

$$\omega_{Dej} = \frac{k_y \frac{n'_0}{n_0}}{-j^2 - k_y^2 - 1},$$

であり,  $j \gg 1$  では

$$\omega_{Dej} \simeq \frac{k_y \frac{n'_0}{n_0}}{-j^2} \propto \frac{1}{j^2},$$

である. したがって,  $\omega_{Dej}$  は  $j = 1$  のとき最も大きく,  $j \rightarrow \infty$  にしたがって + 側から 0 に近づいていく. つまり,  $\omega = 0$  に集積するような点スペクトルの分布になる.

固有関数の直交性については, それぞれの  $\lambda_j$  に対して固有関数が

$$\begin{aligned} \varphi_j &= c \sin \sqrt{-\lambda_j} \pi \\ &= c \sin j\pi, \end{aligned}$$

である. したがって, 異なる  $j$  を持つ固有関数同士は直交する.

$\frac{n'_0}{n_0} \neq \text{const.}$  の場合

このとき,

$$\frac{n'_0}{n_0} = \left( \frac{n'_0}{n_0} \right)_c + \varepsilon f(x),$$

とおき, 密度勾配が  $x$  方向にゆっくり変化する場合を考える. ただし,  $|f(x)| \sim O(1)$ ,  $\eta \sim O(\varepsilon)$ ,  $\varepsilon \ll 1$ . また,  $f(x)$  は定数部分を持たないように選ぶ.

このときポテンシャル部分は

$$\frac{-\omega^2 k_y^2 - i\omega \frac{k_z^2}{\varepsilon\eta} (k_y^2 + 1) - ik_y \left( \frac{n'_0}{n_0} \right)_c \frac{k_z^2}{\varepsilon\eta} - ik_y \varepsilon f(x) \frac{k_z^2}{\varepsilon\eta}}{-i\omega \left( -i\omega + \frac{k_z^2}{\varepsilon\eta} \right)}, \quad (2.2.3)$$

である. この場合には,  $x = 0, \pi$  に無限に高いポテンシャル障壁があり, かつそれぞれの固有値に対応する固有モードはそのポテンシャル障壁の谷間に捕捉され

る. このようなときは束縛状態のみが可能で, つまり点スペクトルのみであることが分かる. ここで,

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon\omega_1 + \varepsilon^2\omega_2 + \dots$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\varepsilon\omega_0\omega_1 + \varepsilon^2(\omega_1^2 + 2\omega_0\omega_2) + \dots$$

とすると ( $|\omega_0| \sim O(1)$ )

$$\frac{1}{-i\omega \left( -i\omega + \frac{k_z^2}{\varepsilon\eta} \right)} = \frac{\varepsilon\eta/k_z^2}{-i\omega} - \frac{\varepsilon\eta/k_z^2}{-i\omega + \frac{k_z^2}{\varepsilon\eta}}$$

$$\frac{\varepsilon\eta/k_z^2}{-i\omega} = \frac{i\varepsilon\eta/k_z^2}{\omega_0 + \varepsilon\omega_1 + \dots} \simeq \frac{i\varepsilon\eta/k_z^2}{\omega_0} \left( 1 - \varepsilon\frac{\omega_1}{\omega_0} - \varepsilon^2\frac{\omega_2}{\omega_0} + \dots \right) \quad : \text{右辺第1項}$$

$$\frac{\varepsilon\eta/k_z^2}{-i\omega + \frac{k_z^2}{\varepsilon\eta}} = \frac{\left( \frac{\varepsilon\eta}{k_z^2} \right)^2}{1 - i\omega\frac{\varepsilon\eta}{k_z^2}} \simeq \varepsilon^2 \left( \frac{\eta}{k_z^2} \right)^2 \left( 1 + i\omega\frac{\varepsilon\eta}{k_z^2} + \dots \right) \quad : \text{右辺第2項}$$

したがって, 式(2.2.3)は

$$\frac{-\omega^2 k_y^2 - i\omega \frac{k_z^2}{\varepsilon\eta} (k_y^2 + 1) - ik_y \left( \frac{n'_0}{n_0} \right)_c \frac{k_z^2}{\varepsilon\eta} - ik_y f(x) \frac{k_z^2}{\eta}}{-i\omega \left( -i\omega + \frac{k_z^2}{\varepsilon\eta} \right)}$$

$$\simeq \left[ -(\omega_0^2 + 2\varepsilon\omega_0\omega_1 + \dots)k_y^2 - i(\omega_0 + \varepsilon\omega_1 + \dots)\frac{k_z^2}{\varepsilon\eta}(k_y^2 + 1) - ik_y \left( \frac{n'_0}{n_0} \right)_c \frac{k_z^2}{\varepsilon\eta} - ik_y f(x) \frac{k_z^2}{\eta} \right]$$

$$\times \left[ \frac{i\varepsilon\eta}{\omega_0 k_z^2} \left( 1 - \varepsilon\frac{\omega_1}{\omega_0} + \dots \right) - \varepsilon^2 \left( \frac{\eta}{k_z^2} \right)^2 \left( 1 + i\omega\frac{\varepsilon\eta}{k_z^2} + \dots \right) \right]$$

$$\simeq \left[ -i\omega_0 \frac{k_z^2}{\eta} (k_y^2 + 1) - ik_y \left( \frac{n'_0}{n_0} \right)_c \frac{k_z^2}{\eta} \right] \frac{i\eta}{\omega_0 k_z^2}$$

$$+ \varepsilon \left[ \left[ -\omega_0^2 k_y^2 - i\omega_1 \frac{k_z^2}{\eta} (k_y^2 + 1) - ik_y f(x) \frac{k_z^2}{\eta} \right] \frac{i\eta}{\omega_0 k_z^2} \right.$$

$$\left. + \left[ -i\omega_0 \frac{k_z^2}{\eta} (k_y^2 + 1) - ik_y \left( \frac{n'_0}{n_0} \right)_c \frac{k_z^2}{\eta} \right] \left( \frac{-i\eta\omega_1}{\omega_0^2 k_z^2} - \left( \frac{\eta}{k_z^2} \right)^2 \right) \right] + O(\varepsilon^2)$$

$$= \left[ k_y^2 + 1 + \frac{k_y}{\omega_0} \left( \frac{n'_0}{n_0} \right)_c \right]$$

$$+ \varepsilon \left[ -\frac{i\eta k_y^2 \omega_0}{k_z^2} + \frac{\omega_1}{\omega_0} (k_y^2 + 1) + \frac{k_y f(x)}{\omega_0} - \left[ k_y^2 + 1 + \frac{k_y}{\omega_0} \left( \frac{n'_0}{n_0} \right)_c \right] \left( \frac{\omega_1}{\omega_0} - \frac{i\eta\omega_0}{k_z^2} \right) \right] + O(\varepsilon^2)$$

$$\equiv V_0 + \varepsilon V_1(x) + O(\varepsilon^2),$$

とおける .

さらに ,

$$\varphi = \varphi_0 + \varepsilon\varphi_1 + \cdots ,$$

と仮定して , 微分方程式に代入すると ,

$$-\frac{d^2}{dx^2}(\varphi_0 + \varepsilon\varphi_1 + \cdots) + (V_0 + \varepsilon V_1(x))(\varphi_0 + \varepsilon\varphi_1 + \cdots) = 0 ,$$

となる . 最低次で ,

$$-\frac{d^2\varphi_0}{dx^2} + V_0\varphi_0 = 0 ,$$

であり , この解は

$$\varphi_0 = c \sin \sqrt{-V_0}x \quad , \quad V_0 = -j^2 \quad , \quad (j \text{ は自然数})$$

$$k_y^2 + 1 + \frac{k_y}{\omega_0} \left( \frac{n'_0}{n_0} \right)_c = -j^2 \quad ,$$

より ,

$$\omega_{0j} = \frac{k_y \left( \frac{n'_0}{n_0} \right)_c}{-j^2 - k_y^2 - 1} \quad ,$$

となり ,  $\omega_{De_j}$  と定義したものと一致した .

次のオーダーでは

$$-\frac{d^2\varphi_1}{dx^2} + V_0\varphi_1 = -V_1(x)\varphi_0 \quad ,$$

である . 同次解は ,

$$\varphi_1 = c_1 \cos \sqrt{-V_0}x + c_2 \sin \sqrt{-V_0}x \quad ,$$

である .  $c_1$  と  $c_2$  を  $x$  の関数として ( 定数変化法 )

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi_1}{dx} &= -\sqrt{-V_0}c_1 \sin \sqrt{-V_0}x + \sqrt{-V_0}c_2 \cos \sqrt{-V_0}x \\ &\quad + \frac{dc_1}{dx} \cos \sqrt{-V_0}x + \frac{dc_2}{dx} \sin \sqrt{-V_0}x \quad , \end{aligned}$$

であり、ここで、

$$\frac{dc_1}{dx} \cos \sqrt{-V_0}x + \frac{dc_2}{dx} \sin \sqrt{-V_0}x = 0$$

と仮定すると、さらに、

$$\begin{aligned} \frac{d^2\varphi_1}{dx^2} &= V_0 \left( c_1 \cos \sqrt{-V_0}x + c_2 \sin \sqrt{-V_0}x \right) \\ &\quad - \sqrt{-V_0} \left( \frac{dc_1}{dx} \sin \sqrt{-V_0}x - \frac{dc_2}{dx} \cos \sqrt{-V_0}x \right), \end{aligned}$$

である。したがって

$$\begin{pmatrix} \cos \sqrt{-V_0}x & \sin \sqrt{-V_0}x \\ \sqrt{-V_0} \sin \sqrt{-V_0}x & -\sqrt{-V_0} \cos \sqrt{-V_0}x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{dc_1}{dx} \\ \frac{dc_2}{dx} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -V_1(x) \sin \sqrt{-V_0}x \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \frac{dc_1}{dx} \\ \frac{dc_2}{dx} \end{pmatrix} &= \frac{1}{\cos \sqrt{-V_0}x (-\sqrt{-V_0} \cos \sqrt{-V_0}x) - \sin \sqrt{-V_0}x \sqrt{-V_0} \sin \sqrt{-V_0}x} \\ &\quad \times \begin{pmatrix} -\sqrt{-V_0} \cos \sqrt{-V_0}x & -\sin \sqrt{-V_0}x \\ -\sqrt{-V_0} \sin \sqrt{-V_0}x & \cos \sqrt{-V_0}x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -V_1(x) \sin \sqrt{-V_0}x \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{-\sqrt{-V_0}} \begin{pmatrix} V_1(x) \sin^2 \sqrt{-V_0}x \\ -V_1(x) \sin \sqrt{-V_0}x \cos \sqrt{-V_0}x \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_1 &= c_1(0) - \frac{1}{\sqrt{-V_0}} \int_0^x dx V_1(x) \sin^2 \sqrt{-V_0}x \\ &= -\frac{1}{2\sqrt{-V_0}} \int_0^x dx V_1(x) (1 - \cos 2\sqrt{-V_0}x) \\ c_2 &= c_2(0) + \frac{1}{\sqrt{-V_0}} \int_0^x dx V_1(x) \sin \sqrt{-V_0}x \cos \sqrt{-V_0}x \\ &= c_2(0) + \frac{1}{2\sqrt{-V_0}} \int_0^x dx V_1(x) \sin 2\sqrt{-V_0}x \end{aligned}$$

である。  $V_1(x)$  の中には与えられた  $f(x)$  と未定の  $\omega_1$  が入っている。  $c_1(\pi) = 0$  でなければならないから、この条件から  $\omega_1$  が決まる。 そのようにして決まった  $\omega_1$  等を使うと、  $c_2(x)$  を求められる。



例として,

$$V_1(x) = V_{10} + V_{11}x \quad (V_{10}, V_{11} : \text{定数})$$

の場合を考えてみる.

$$\begin{aligned} c_1(\pi) &= -\frac{1}{2j} \int_0^\pi dx (V_{10} + V_{11}x) (1 - \cos 2jx) \\ &= -\frac{1}{2j} \frac{1}{4j^2} (V_{11} + 4V_{10}j^2\pi + 2V_{11}j^2\pi^2 - V_{11} \cos 2j\pi - 2j(V_{10} + V_{11}\pi) \sin 2j\pi) \\ &= -\frac{\pi}{2j} \left( V_{10} + \frac{1}{2}V_{11}\pi \right) \end{aligned}$$

$V_{10}$  や  $V_{11}$  を実際の値に置き換えて,  $c_1(\pi) = 0$  とすると,

$$-\frac{i\eta k_y^2 \omega_0}{k_z^2} + \frac{\omega_1}{\omega_0} (k_y^2 + 1) - \left[ k_y^2 + 1 + \frac{k_y}{\omega_0} \left( \frac{n'_0}{n_0} \right)_c \right] \left( \frac{\omega_1}{\omega_0} - \frac{i\eta \omega_0}{k_z^2} \right) + \frac{\pi k_y}{2\omega_0} \left( \frac{n'_0}{n_0} \right)'_c = 0,$$

である.  $\omega_1$  について解くと,

$$\begin{aligned} \frac{\omega_1}{\omega_0} \left[ k_y^2 + 1 - k_y^2 - 1 - \frac{k_y}{\omega_0} \left( \frac{n'_0}{n_0} \right)_c \right] \\ = \frac{i\eta k_y^2 \omega_0}{k_z^2} + \left[ k_y^2 + 1 + \frac{k_y}{\omega_0} \left( \frac{n'_0}{n_0} \right)_c \right] \left( -\frac{i\eta \omega_0}{k_z^2} \right) - \frac{\pi k_y}{2\omega_0} \left( \frac{n'_0}{n_0} \right)'_c, \\ \omega_1 = \frac{1}{-\frac{k_y}{\omega_0^2} \left( \frac{n'_0}{n_0} \right)_c} \left\{ \frac{i\eta \omega_0}{k_z^2} \left[ k_y^2 - \left( k_y^2 + 1 + \frac{k_y}{\omega_0} \left( \frac{n'_0}{n_0} \right)_c \right) \right] - \frac{\pi k_y}{2\omega_0} \left( \frac{n'_0}{n_0} \right)'_c \right\}, \end{aligned}$$

となる. 各  $j$  に対して,

$$\begin{aligned} \omega_{1j} &= \frac{-\omega_{0j}^2}{k_y \left( \frac{n'_0}{n_0} \right)_c} \left\{ \frac{-i\eta}{k_z^2} \left[ \omega_{0j} + k_y \left( \frac{n'_0}{n_0} \right)_c \right] - \frac{\pi k_y}{2\omega_{0j}} \left( \frac{n'_0}{n_0} \right)'_c \right\} \\ &= \omega_{0j}^2 \left\{ \frac{i\eta}{k_z^2} \left[ \frac{\omega_{0j}}{k_y \left( \frac{n'_0}{n_0} \right)_c} + 1 \right] + \frac{\pi}{2\omega_{0j}} \frac{1}{\left( \frac{n'_0}{n_0} \right)_c} \left( \frac{n'_0}{n_0} \right)'_c \right\} \\ &= \omega_{0j}^2 \left\{ \frac{i\eta}{k_z^2} \frac{j^2 + k_y^2}{j^2 + k_y^2 + 1} - \frac{\pi}{2} \frac{j^2 + k_y^2 + 1}{k_y} \frac{\left( \frac{n'_0}{n_0} \right)'_c}{\left( \frac{n'_0}{n_0} \right)_c} \right\} \end{aligned}$$

が得られる.  $\left(\frac{n'_0}{n_0}\right)'_c = 0$  のとき, 以前導いた結果に帰着することが確認できる.  
 $\omega_{0j}^2 \propto j^{-4}$  だから, やはり  $j \rightarrow \infty$  となると,  $\omega_{1j} \rightarrow 0$  となり,  $\omega = 0$  が集積点となるような点スペクトルの分布になる.

ここからは固有関数の直交性を調べる.

このような  $\omega_{1j}$  をとるとき,

$$\begin{aligned} c_{1j}(x) &= -\frac{1}{2j} \int_0^\pi dx (V_{10} + V_{11}x) (1 - \cos 2jx) \\ &= -\frac{1}{2j} \frac{1}{4j^2} (V_{11} + 4V_{10}j^2x + 2V_{11}j^2x^2 - V_{11} \cos 2jx - 2j(V_{10} + V_{11}x) \sin 2jx), \\ c_{2j}(x) &= c_{2j}(0) + \frac{1}{2j} \int_0^\pi dx (V_{10} + V_{11}x) \sin 2jx \\ &= c_{2j}(0) + \frac{1}{2j} \frac{1}{4j^2} (2V_{10}j - 2j(V_{10} + V_{11}x) \cos 2jx + V_{11} \sin 2jx), \end{aligned}$$

となる. このような係数を用いると,  $\varphi_{1j}$  は,

$$\begin{aligned} &\cos jx, \quad x \cos jx, \quad x^2 \cos jx, \quad \cos 3jx, \quad \sin jx, \quad \sin 3jx, \\ &x \sin jx, \quad x \sin 3jx \end{aligned}$$

の線形和で表される.

したがって,

$$\begin{aligned} &\int_0^\pi dx (\varphi_{0j} + \epsilon \varphi_{1j}) (\varphi_{0l}^* + \epsilon \varphi_{1l}^*) \\ &= \int_0^\pi dx \varphi_{0j} \varphi_{0l}^* + \epsilon \int_0^\pi dx (\varphi_{0j} \varphi_{1l}^* + \varphi_{1j} \varphi_{0l}^*) + O(\epsilon^2), \end{aligned}$$

から,  $\varphi_{1j}$  が  $x \cos jx, x^2 \cos jx, x \sin jx, x \sin 3jx$  のとき,  $O(\epsilon)$  で直交性が破れる.

## 2.2.2 数値解

式 (2.1.1), (2.1.2) を行列形で表すと

$$-i\omega \begin{pmatrix} \frac{d^2}{dx^2} - k_y^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{k_z^2}{\eta} & -\frac{k_z^2}{\eta} \\ ik_y \frac{n'_0}{n_0} + \frac{k_z^2}{\eta} & -\frac{k_z^2}{\eta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ n \end{pmatrix}$$

となる .

これを  $x_{min} \leq x \leq x_{max}$  の領域で境界条件を

$$\varphi(x_{min}) = n(x_{min}) = 0.$$

$$\varphi(x_{max}) = n(x_{max}) = 0.$$

と設定し, 固有値問題として差分法を用いて解く .

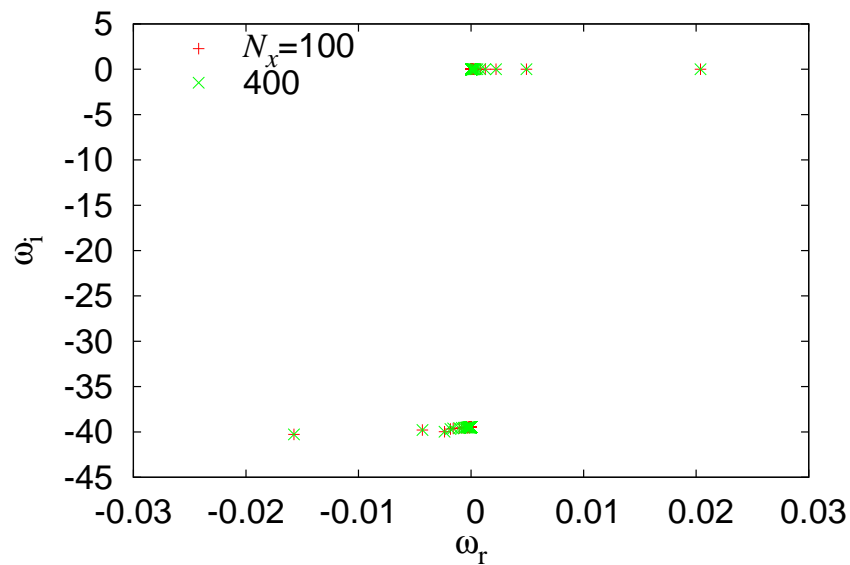


図 2.1: 固有値  $\omega$  の複素平面上での分布

図 2.1 は固有値  $\omega$  の複素平面上での分布を表しており, 横軸が固有値の実部, 縦軸が虚部である . イオンブランチと電子ブランチについて, さらに, グリッド数を 100 と 400 にした場合についてそれぞれ示し, 比較している . 図 2.1 を見ると,

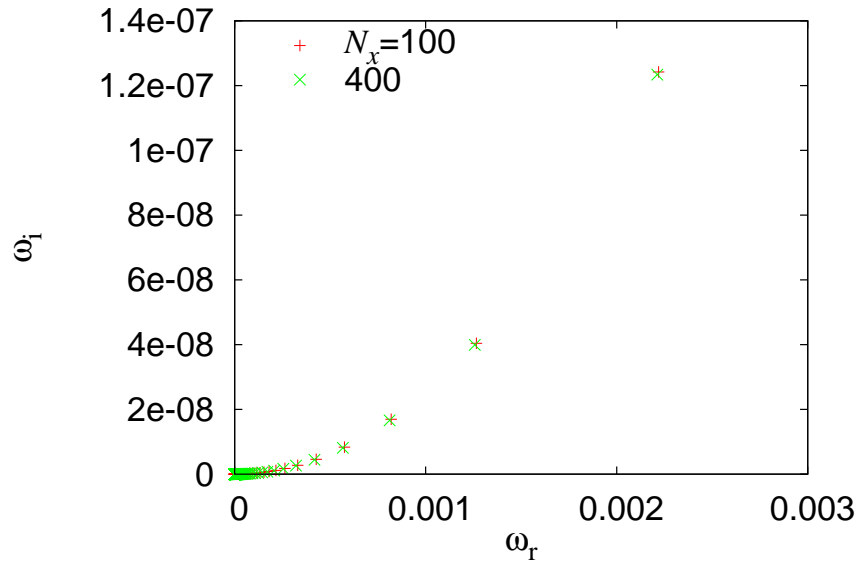


図 2.2: 固有値  $\omega$  の複素平面上での分布

固有値が 0 に近いあたりで密になっている様子が観察できるので，図 2.2 には固有値が 0 になる付近をクローズアップしたものを示した．図 2.2 を見ると，グリッド数を変化させても成長率 ( $\omega_i$ ) が大きい領域での固有値に特にずれは見られない．また，グリッド数によらず，固有値  $\omega = 0$  に集積している様子が見て取れる．

### 2.2.3 数値解と解析解の比較

固有値問題として数値計算することで得られた解と微分方程式の解析解を比較し，その違いを調べる．図 2.3 は固有値  $\omega$  の複素平面上での分布を表しており，横軸が固有値の実部，縦軸が虚部である．さらに，グリッド数を 100 と 400 にした場合についてそれぞれ示したものに，解析解を加えたものである．また，図 2.4 は，固有値が 0 になる付近をクローズアップしたものである．図 2.3 からはグリッド数を変化させた場合も，解析解と比較した場合も，固有値は一致していることが観察できる．図 2.4 からはグリッド数が 400 の場合と解析解の固有値が一致すること

が観察できる．しかし，グリッド数が 100 の場合は固有値にズレが見られる．これは細かい空間構造を持つところでは解像できなくなってくるために，解析解とのずれが生じていると考えられる．

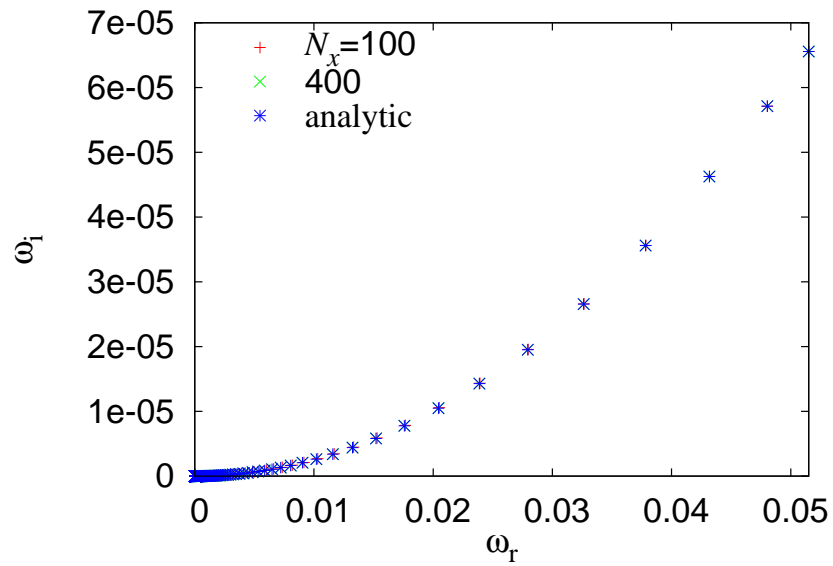


図 2.3: 固有値  $\omega$  の複素平面上での分布

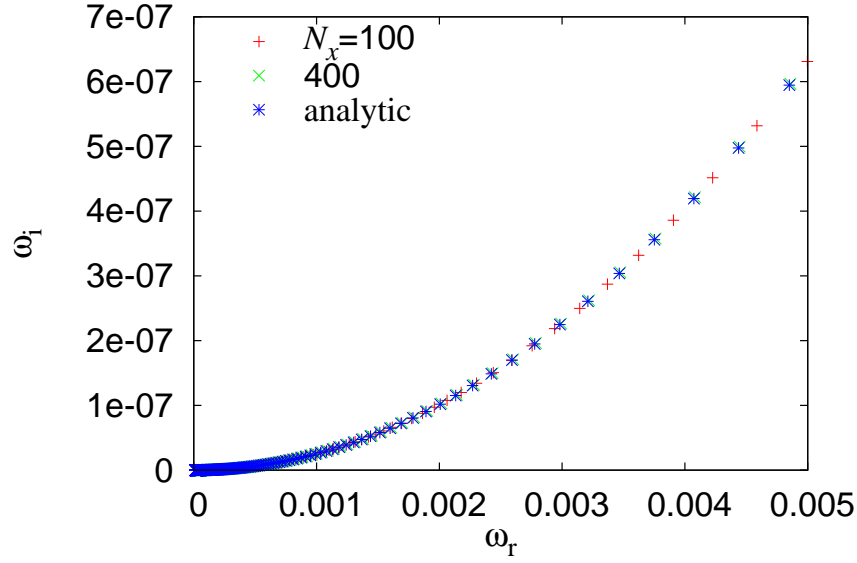


図 2.4: 固有値  $\omega$  の複素平面上での分布

## 2.3 $z$ 方向への物理量の変化

磁場と平行方向 ( $z$  方向) へ物理量が変化する場合に線形ドリフト波の数理解析を行う。このとき、抵抗  $\eta$  に  $z$  方向変化を与える。なぜなら、 $B_0$  方向へは粒子が容易に動けるため、平衡密度の非一様性が現れにくく、また、 $B_0(z)$  としてしまうと  $\nabla \cdot (B_0(z)\hat{z}) \neq 0$  となってしまうことを指摘しておく。

### 2.3.1 数値解

静電ポテンシャルと密度に関する連立方程式 (Hasegawa-Wakatani 方程式) は、

$$\frac{d}{dt} \nabla_{\perp}^2 \varphi = -\frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{1}{\eta} \frac{\partial}{\partial z} (\varphi - n) \right], \quad (2.3.1)$$

$$\frac{d}{dt} (n + \ln n_0) = -\frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{1}{\eta} \frac{\partial}{\partial z} (\varphi - n) \right], \quad (2.3.2)$$

である。ただし、 $\eta$  は抵抗であり、磁場方向 ( $z$  方向) は  $\partial/\partial z$  を残した。

また、ここでは密度  $n$  を  $n_0$  で、静電ポテンシャル  $\varphi$  を  $e/T_e$  で、時間を  $\Omega_i \equiv eB_0/m_i$

で, 長さを  $\rho_s \equiv \frac{\sqrt{T_e/m_i}}{\Omega_i}$  で規格化した.  $n_0$  は平衡密度,  $T_e$  は電子温度,  $m_i$  はイオンの質量である.

ここで式 (2.3.1), 式 (2.3.2) を線形化し,  $n$  を消去して微分方程式を導くと,

$$\frac{d^2\varphi}{dz^2} + \frac{i\omega\eta k_{\perp}^2}{\omega + \omega k_{\perp}^2 + k_x n'_0/n_0} \varphi = 0 \quad (2.3.3)$$

このとき,  $\eta = const.$  なら  $\sin z$ ,  $\cos z$  という解を持つのは明らかで, これは点スペクトルのみを持つことを意味する.

式 (2.3.1), (2.3.2) を  $z_{min} \leq z \leq z_{max}$  の領域で固有値問題として差分法を用いて解く. 磁気圏型磁場配位では磁力線は閉じているため, 周期境界条件を課している. 電気抵抗  $\eta$  が磁場方向に余弦的な空間構造を持つ場合を考え, 以下のような式で表した.

$$\eta = \eta \left( 1 + \varepsilon \cos \frac{2\pi z}{L} \right). \quad (2.3.4)$$

図 (2.5) は  $\varepsilon$  (振幅) に対する成長率の変化を表しており, 電気抵抗の空間変化が大きいほど, 不安定性の成長率が大きくなる様子が観察できる. ただし, 成長率のオーダは  $10^{-5}$  程度の変化である. 図 (2.6), (2.8), (2.10) はそれぞれ  $\varepsilon = 0.5 \times 10^{-2}$ ,  $0.5 \times 10^{-1}$ ,  $0.5$  の場合の最大成長率に対する固有関数の実部を  $n$  と  $\varphi$  についてプロットしたものである. また, 図 (2.7), (2.9), (2.11) はそれぞれ  $\varepsilon = 0.5 \times 10^{-2}$ ,  $0.5 \times 10^{-1}$ ,  $0.5$  の場合の最大成長率に対する固有関数の実部の  $n$  と  $\varphi$  の差をとってプロットしたものである.

$$\gamma \nabla_{\perp}^2 \varphi = \frac{k_z^2}{\eta} (\varphi - n) \quad (2.3.5)$$

$$\gamma n - ik_y \frac{n'_0}{n_0} \varphi = \frac{k_z^2}{\eta} (\varphi - n) \quad (2.3.6)$$

固有値問題として解いた上記 2 式から, 成長率の増加に伴って  $\varphi$  と  $n$  の差は大きくなると考えられたが, 図 (2.7), (2.9), (2.11) からは, そのような傾向は見られず,  $\varphi$  と  $n$  の振幅の違いから生じた  $Re(\varphi) - Re(n)$  であると考えられる. したがって,  $n$  と  $\varphi$  の位相差は小さいことが分かり, 成長率への影響は小さいと考えられ

る．電気抵抗  $\eta$  が磁場方向に余弦的な空間構造を持つ場合，電気抵抗の空間変化が大きくなるに伴い，不安定成長率も大きくなるが，成長率のオーダーは小さく，大きな不安定効果は持たないと言える．

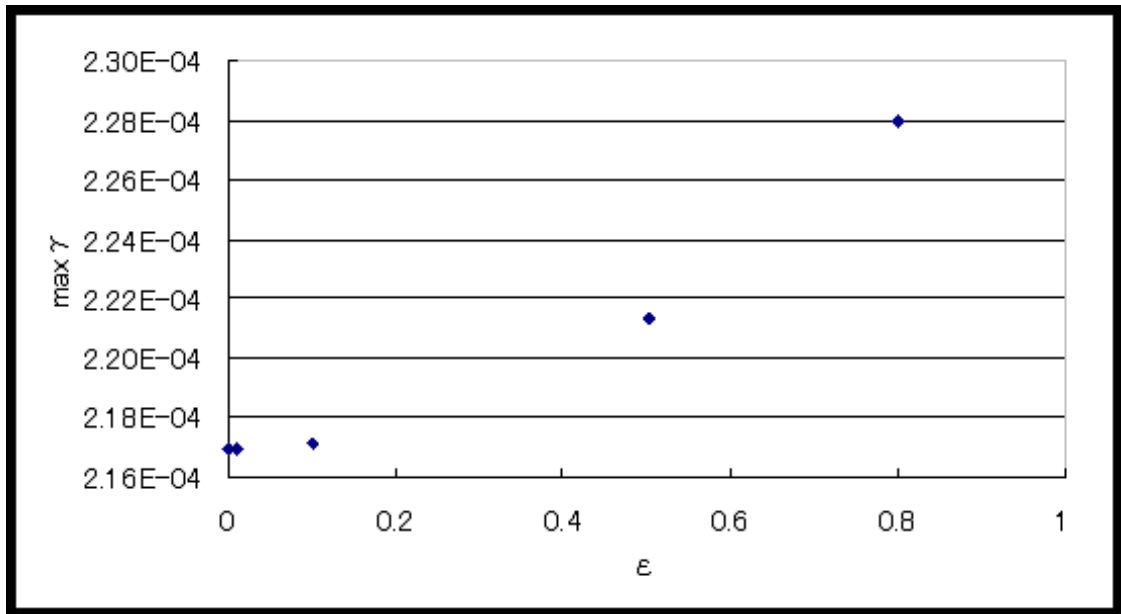


図 2.5:  $\epsilon$  に対する成長率の変化



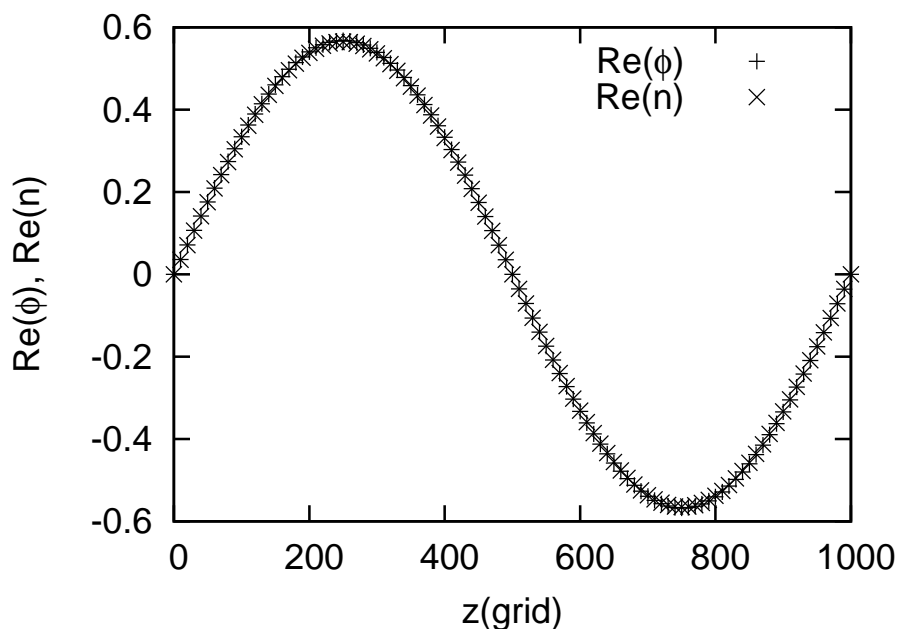


図 2.6:  $\varepsilon = 0.5 \times 10^{-2}$  のときの固有関数

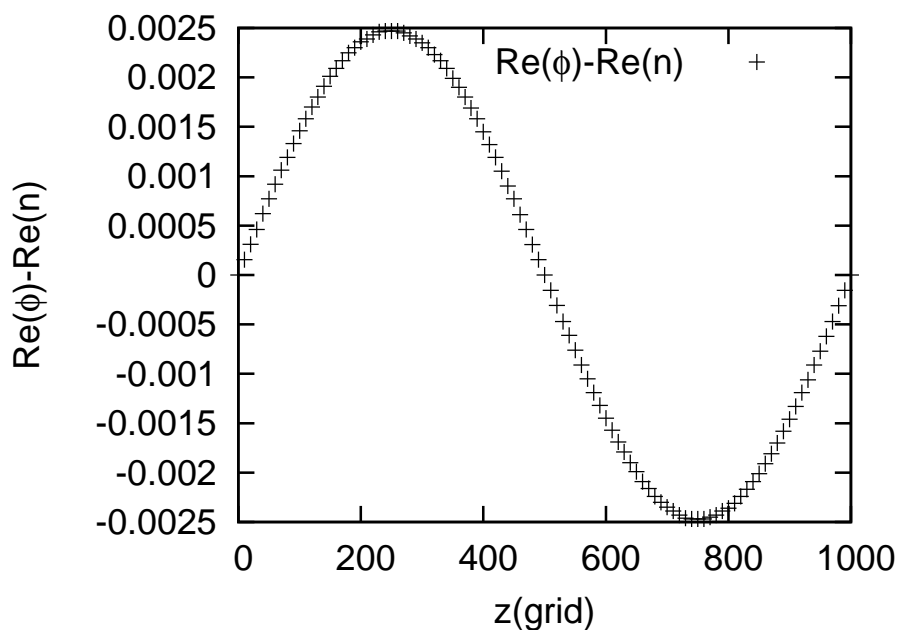


図 2.7:  $\varepsilon = 0.5 \times 10^{-2}$  のときの固有関数

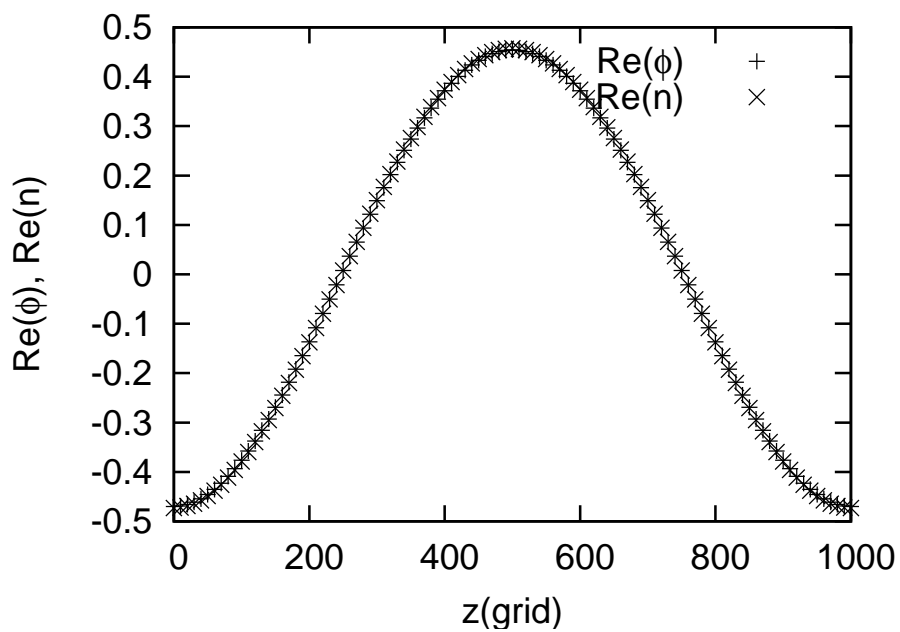


図 2.8:  $\varepsilon = 0.5 \times 10^{-1}$  のときの固有関数

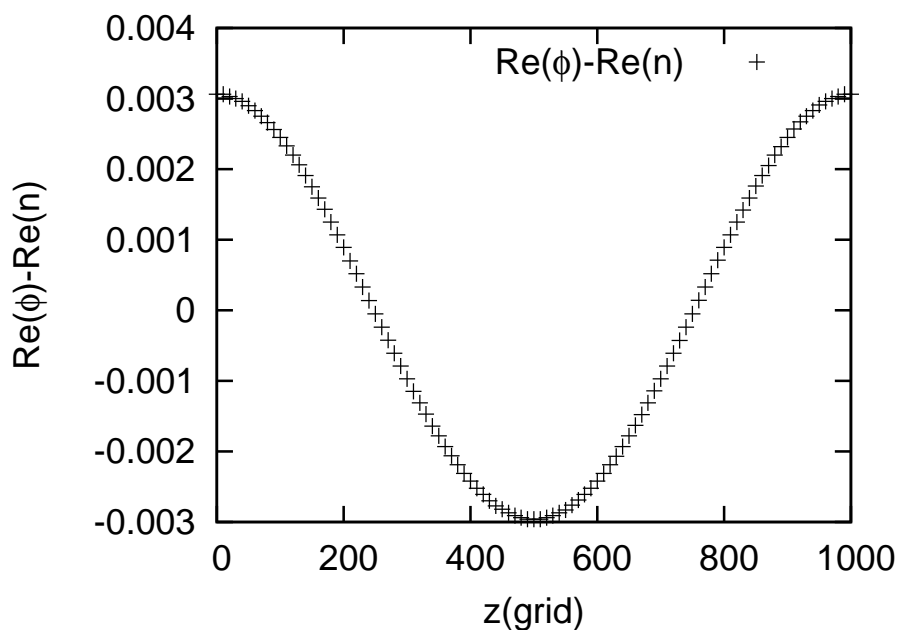


図 2.9:  $\varepsilon = 0.5 \times 10^{-1}$  のときの固有関数

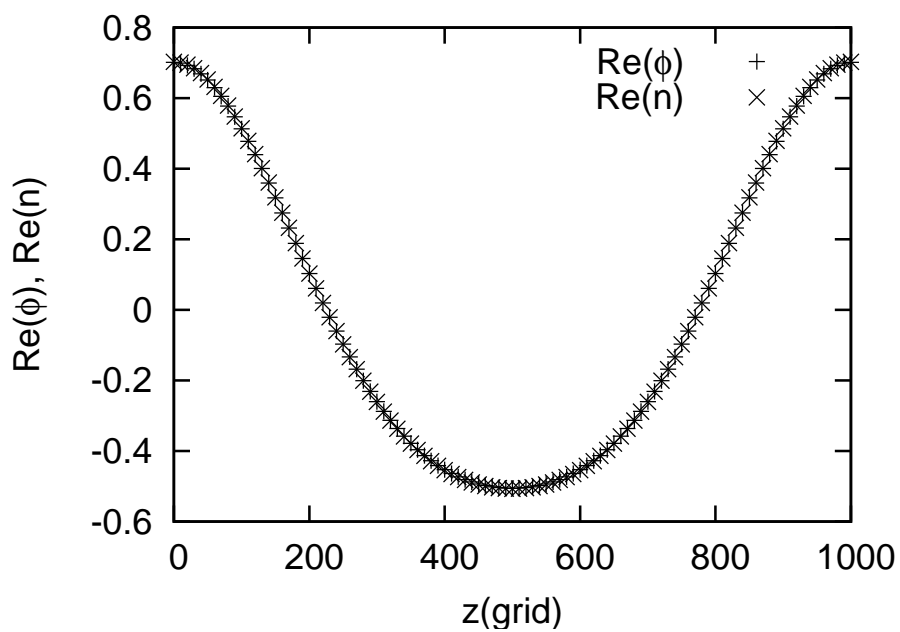


図 2.10:  $\varepsilon = 0.5$  のときの固有関数

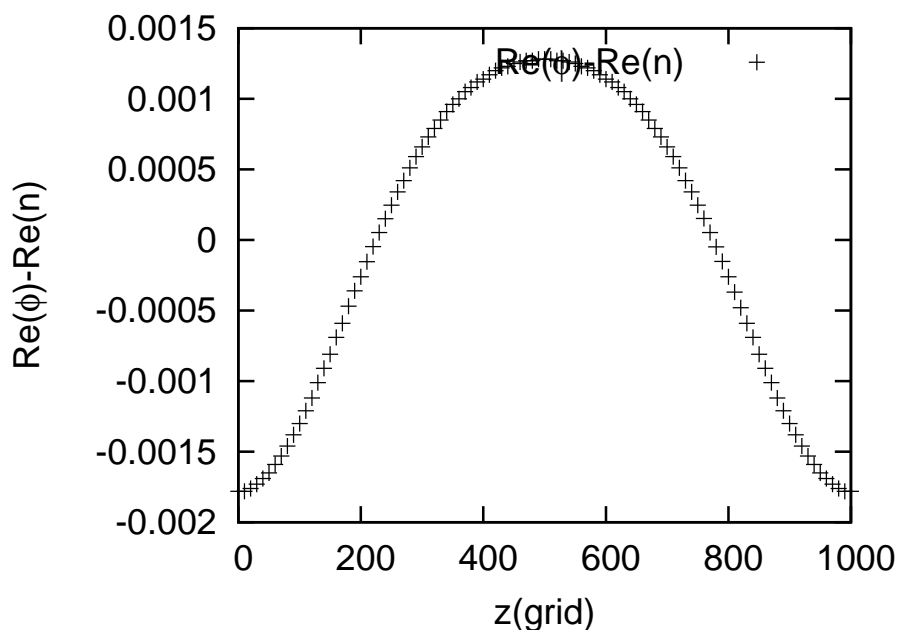


図 2.11:  $\varepsilon = 0.5$  のときの固有関数

## 第3章 非一様磁場の効果

磁場の非一様性が大きいとき，抵抗性ドリフト波の安定性に対して  $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$  ドリフトの圧縮性が効果を持つ．トカマクやステラレーターのようなトロイダルプラズマにおいては，磁場の非一様性の中でも磁場曲率を考えることで，インターチェンジ不安定性が生じることから，Hasegawa-Wakatani モデルに磁場の磁率を入れて拡張したモデルを用いて，ドリフト乱流に対する非一様磁場の効果を議論する研究がなされている [9, 10, 11, 12]．しかし，このとき  $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$  流の圧縮  $\nabla \cdot \mathbf{v}_{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}$  は，やはり小さいと考えられ [13]，プラズマの運動はほぼ非圧縮である．本研究では1次元スラブプラズマを考え， $z$  方向に磁場  $\mathbf{B}_0 = B_0 \hat{z}$  があり， $x$  方向に密度と磁場強度の勾配があるとする．このとき磁場勾配に対する線形ドリフト波の安定性を分散関係式から議論する．周波数  $k_y v_{de}$ ， $k_z C_s$ ， $k_z v_A$  のオーダリングによって次の3タイプのモデルによる検討を行った [14]．

1.  $k_z C_s \ll k_y v_{de} \ll k_z v_A$
2.  $k_z C_s \sim k_y v_{de} \ll k_z v_A$
3.  $k_z C_s \sim k_y v_{de} \sim k_z v_A$

ここで， $C_s (= \sqrt{T_e/m_i})$  はイオン音速， $v_{de} (= -T_e n'_0 / (en_0 B_0))$  は電子ドリフト速度， $v_A (= \sqrt{B_0^2 / (\mu_0 \rho_0)})$  はシアアルフベン速度である．

### 3.1 RT-1 プラズマを想定した場合の典型的パラメータ

磁気圏型プラズマ閉じ込め装置 RT-1 を想定した場合の典型的パラメータ例をまとめとめておく。

$$\text{大半径, 小半径} \sim 1m$$

$$\text{磁場} \sim 10^{-2}T \quad (0.03T)$$

$$\text{電子温度} \sim 10keV \quad \Rightarrow \quad 1.6 \times 10^{-15}J$$

$$\text{電子密度} \sim 10^{17}m^{-3} \quad (\text{ピーク値})$$

$$\begin{aligned} \Omega_i &= \frac{eB_0}{m_i} \\ &\sim \frac{1.60 \times 10^{-19} \times 3 \times 10^{-2}}{1.67 \times 10^{-27}} \simeq 2.87 \times 10^6. \quad (s^{-1}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho_s &= \frac{\sqrt{T_e/m_i}}{\Omega_i} \\ &\sim \frac{1.60 \times 10^{-15} / 1.67 \times 10^{-27}}{2.87 \times 10^6} \simeq 0.34 \quad (m) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \eta &\approx \frac{\pi e^2 m_i^{1/2}}{(4\pi\epsilon)^2 T_e^{3/2}} \ln\Lambda \\ &\sim \frac{3.14 \times (1.6 \times 10^{-19})^2 \times \sqrt{1.67 \times 10^{-27}}}{(4 \times 3.14 \times 8.85 \times 10^{-12})^2 \times (1.6 \times 10^{-15})^{3/2}} \times 10 \sim 4.15 \times 10^{-8} \quad (\Omega) \end{aligned}$$

規格化した場合

大半径, 小半径  $\sim 3$  (z 方向長さ)

密度勾配  $\rho_s \frac{n'_0}{n_0} \sim -0.34$

$k_x, k_y \sim 1.$

$k_{\perp}^2 = k_x^2 + k_y^2 \sim 2$

$k_z \sim 10^{-1}$

$\eta \sim \frac{1.6 \times 10^{-19} \times 10^{17}}{3 \times 10^{-2}} \times 4.15 \times 10^{-8} \simeq 2.21 \times 10^{-8}$

$\beta_e \simeq \frac{2 \times 1.26 \times 10^{-6} \times 10^{17} \times 1.6 \times 10^{-15}}{(3 \times 10^{-2})^2} \sim 0.45$

イオン音速, 電子ドリフト速度, シアアルフベン速度の比較をする.

$$\frac{C_s}{v_A} = \frac{\sqrt{\mu_0 n_0 T_e}}{B_0} = \sqrt{\frac{\beta_e}{2}} \sim 0.47 \quad (3.1.1)$$

$$\frac{k_y v_{de}}{k_z C_s} = \frac{\sqrt{m_i T_e} n'_0}{e n_0 B_0} = \frac{k_y n'_0}{k_z n_0} \sim -3.4 \quad (3.1.2)$$

## 3.2 $k_z C_s \ll k_y v_{de} \ll k_z v_A$ の場合

このとき，式 (3.1.1) , (3.1.2) の比較から， $\beta_e \ll 1$  かつ  $k_z \ll k_y$  であるときに， $k_z C_s \ll k_y v_{de} \ll k_z v_A$  の周波数領域で以下の分散関係が妥当性を持つと考えられる．

### 3.2.1 分散関係式の導出

線形化した渦度方程式と連続の式はそれぞれ以下のように表される．詳細は付録 A に示す．

$$-i\omega \left[ \frac{\rho_0}{B_0} \left[ -ik_y v_x + \frac{i}{k_y} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{B_0} \frac{\partial(B_0 v_x)}{\partial x} \right) \right] + \left( \frac{\rho_0}{B_0} \right)' \frac{i}{k_y B_0} \frac{\partial(B_0 v_x)}{\partial x} \right] \\ = \frac{ik_y T_e B_0'}{B_0^2} n_1 + \frac{ik_z^2 B_0}{k_y \eta} \left[ 1 - \frac{k_y v_{de} \left( 1 + \frac{\beta_e}{2} \right)}{\omega - \frac{k_z^2 C_s^2}{\omega}} \right] v_x \quad (3.2.1)$$

$$-i \left( \omega - \frac{k_z^2 C_s^2}{\omega} \right) n_1 + n_0' \left( 1 + \frac{\beta_e}{2} \right) v_x = 0 \quad (3.2.2)$$

ここでプライムは  $x$  微分， $v_{de} = -T_e n_0' / (en_0 B_0)$ ， $\beta_e = 2\mu_0 n_0 T_e / B_0^2$  である．

式 (3.2.1) , (3.2.2) から分散関係を導いていく．

2つの式から  $n_1$  を消去すると次式が得られる．

$$-i\omega \left[ \frac{\rho_0}{B_0} \left[ -ik_y v_x + \frac{i}{k_y} \left( -k_x^2 v_x + ik_x \frac{B_0'}{B_0} v_x + \left( \frac{B_0'}{B_0} \right)' v_x \right) \right] \right. \\ \left. + \left( \frac{\rho_0}{B_0} \right)' \frac{i}{k_y B_0} (ik_x B_0 v_x + B_0' v_x) \right] \\ = \frac{k_y T_e B_0' n_0' \left( 1 - \frac{n_0 B_0'}{n_0' B_0} \right)}{B_0^2 \left( \omega - \frac{k_z^2 C_s^2}{\omega} \right)} v_x + \frac{ik_z^2 B_0}{\eta k_y} \left[ 1 - \frac{k_y v_{de} \left( 1 - \frac{n_0 B_0'}{n_0' B_0} \right)}{\omega - \frac{k_z^2 C_s^2}{\omega}} \right] v_x \quad (3.2.3)$$

全体に  $\frac{-ik_y B_0}{\rho_0}$  を掛けて整理すると，

$$-i\omega \left[ -k_x^2 + ik_x \frac{n_0'}{n_0} + \left[ \left( \frac{B_0'}{B_0} \right)' + \frac{B_0'}{B_0} \left( \frac{n_0'}{B_0} \right)' \right] \right] \\ = \frac{-ik_y T_e B_0' n_0' \left( 1 - \frac{n_0 B_0'}{n_0' B_0} \right)}{\rho_0 B_0 \left( \omega - \frac{k_z^2 C_s^2}{\omega} \right)} + \frac{k_z^2 \mu_0 v_A^2}{\eta} \left[ 1 - \frac{k_y v_{de} \left( 1 - \frac{n_0 B_0'}{n_0' B_0} \right)}{\omega - \frac{k_z^2 C_s^2}{\omega}} \right], \quad (3.2.4)$$

が得られる．さらに  $\left(\omega - \frac{k_z^2 C_s^2}{\omega}\right) \frac{\eta}{k_z^2 \mu_0 v_A^2}$  を掛けると以下ようになる．

$$\begin{aligned} & -i\omega \left[ -k_\perp^2 + ik_x \frac{n'_0}{n_0} + \left[ \left( \frac{B'_0}{B_0} \right)' + \frac{B'_0}{n_0} \left( \frac{n_0}{B_0} \right)' \right] \right] \frac{\eta}{k_z^2 \mu_0 v_A^2} \left( \omega - \frac{k_z^2 C_s^2}{\omega} \right) \\ & = \frac{-ik_y^2 T_e B'_0 n'_0 \left( 1 - \frac{n_0 B'_0}{n'_0 B_0} \right)}{\rho_0 B_0} \frac{\eta}{k_z^2 \mu_0 v_A^2} + \omega - k_y v_{de} \left( 1 - \frac{n_0 B'_0}{n'_0 B_0} \right) - \frac{k_z^2 C_s^2}{\omega} \end{aligned} \quad (3.2.5)$$

$$\begin{aligned} & \omega - k_y v_{de} \left( 1 - \frac{n_0 B'_0}{n'_0 B_0} \right) - \frac{k_z^2 C_s^2}{\omega} - \frac{ik_y^2 \eta T_e B'_0 n'_0 \left( 1 - \frac{n_0 B'_0}{n'_0 B_0} \right)}{k_z^2 B_0^3} \\ & = \frac{i\eta}{\mu_0} \left[ k_\perp^2 - ik_x \frac{n'_0}{n_0} - \left[ \left( \frac{B'_0}{B_0} \right)' + \frac{B'_0}{n_0} \left( \frac{n_0}{B_0} \right)' \right] \right] \frac{\omega^2 - k_z^2 C_s^2}{k_z^2 v_A^2} \end{aligned} \quad (3.2.6)$$

ここで左辺の  $\frac{n_0 B'_0}{n'_0 B_0}$  と右辺の  $\left[ \left( \frac{B'_0}{B_0} \right)' + \frac{B'_0}{n_0} \left( \frac{n_0}{B_0} \right)' \right]$  を書き換えたものを以下に示す．

$$\begin{aligned} \frac{n_0 B'_0}{n'_0 B_0} &= \frac{T_e n_0 B'_0}{T_e n'_0 B_0} \\ &= \frac{-\mu_0 n_0 T_e}{B_0^2} \\ &\equiv \frac{-\beta_e}{2} \end{aligned} \quad (3.2.7)$$

(ただし，第1行から第2行への変形は平衡条件  $\frac{B_0 B'_0}{\mu_0} + T_e n'_0 = 0$  を用いた．)

$$\begin{aligned} \left( \frac{B'_0}{B_0} \right)' + \frac{B'_0}{n_0} \left( \frac{n_0}{B_0} \right)' &= \frac{B_0''}{B_0} - \frac{2(B'_0)^2}{B_0^2} + \frac{B'_0 n'_0 T_e}{B_0 n_0 T_e} \\ &= \frac{B_0''}{B_0} - \frac{2(B'_0)^2}{B_0^2} \left( 1 + \frac{B_0^2}{2\mu_0 n_0 T_e} \right) \\ &= \frac{B_0''}{B_0} - \frac{2(B'_0)^2}{B_0^2} \left( 1 + \frac{1}{\beta_e} \right) \end{aligned} \quad (3.2.8)$$

上記の式を用いて式(3.2.6)を書き直すと次の式が得られる．

$$\begin{aligned} & \omega - k_y v_{de} \left( 1 - \frac{\beta_e}{2} \right) - \frac{k_z^2 C_s^2}{\omega} \\ & = \frac{i\eta}{\mu_0} \left[ k_\perp^2 - ik_x \frac{n'_0}{n_0} - \left[ \frac{B_0''}{B_0} - \frac{2(B'_0)^2}{B_0^2} \left( 1 + \frac{1}{\beta_e} \right) \right] \right] \frac{\omega^2 - k_z^2 C_s^2}{k_z^2 v_A^2} + \frac{ik_y^2 \eta T_e B'_0 n'_0 \left( 1 + \frac{\beta_e}{2} \right)}{k_z^2 B_0^3} \end{aligned} \quad (3.2.9)$$



今,  $k_z C_s \ll k_y v_{de} \ll k_z v_A$  の場合を考えているので, 式 (3.2.9) で  $k_z C_s \rightarrow 0$  の極限をとると,

$$\begin{aligned} & \omega - k_y \bar{v}_{de} \\ &= \frac{i\eta}{\mu_0} \left[ k_{\perp}^2 - ik_x \frac{n'_0}{n_0} - \left[ \frac{B''_0}{B_0} - \frac{2(B'_0)^2}{B_0^2} \left( 1 + \frac{1}{\beta_e} \right) \right] \right] \frac{\omega^2}{k_z^2 v_A^2} + \frac{ik_y^2 \eta T_e B'_0 n'_0 \left( 1 + \frac{\beta_e}{2} \right)}{k_z^2 B_0^3} \end{aligned} \quad (3.2.10)$$

が得られる. ただし,  $\bar{v}_{de} = v_{de} \left( 1 + \frac{\beta_e}{2} \right)$  とした.

以上で分散関係式が導かれた.

ここで  $\eta \rightarrow 0$  の極限を考え,

$$\omega = k_y \bar{v}_{de} \equiv \omega_{De},$$

とおく. これを  $\eta$  を含む項の  $\omega^2$  に代入し, 再び左辺の  $\omega$  について解くと,

$$\begin{aligned} \omega = \omega_{De} + \frac{i\eta}{\mu_0} \left[ k_{\perp}^2 - ik_x \frac{n'_0}{n_0} - \left[ \frac{B''_0}{B_0} - \frac{2(B'_0)^2}{B_0^2} \left( 1 + \frac{1}{\beta_e} \right) \right] \right] \frac{\omega_{De}^2}{k_z^2 v_A^2} \\ + \frac{ik_y^2 \eta T_e B'_0 n'_0 \left( 1 + \frac{\beta_e}{2} \right)}{k_z^2 B_0^3}, \end{aligned} \quad (3.2.11)$$

となる. 式 (3.2.11) を  $\rho_s, \Omega_i$  を使って規格化すると次式が得られる.

$$\omega = \omega_{De} + i\eta \left[ k_{\perp}^2 - ik_x \frac{n'_0}{n_0} - \left[ B''_0 - 2(B'_0)^2 \left( 1 + \frac{1}{\beta_e} \right) \right] \right] \frac{\omega_{De}^2}{k_z^2} + \frac{i\eta k_y^2 B'_0 n'_0 \left( 1 + \frac{\beta_e}{2} \right)}{k_z^2} \quad (3.2.12)$$

したがって, 分散関係の近似式が導かれた.

### 3.2.2 磁場勾配に対する安定性解析

分散関係の近似式の  $Im(\omega)$  項の正負を調べることによって, 安定か不安定かを判別することができる.

$$Im(\omega) = \eta \left[ k_{\perp}^2 + 2(B'_0)^2 \left( 1 + \frac{1}{\beta_e} \right) \right] \frac{\omega_{De}^2}{k_z^2} + \frac{\eta k_y^2 B'_0 n'_0 \left( 1 + \frac{\beta_e}{2} \right)}{k_z^2} \quad (3.2.13)$$

ただし  $B_0'' = 0$  とした .

式 (3.2.7) により  $n_0'$  と  $B_0'$  が関係付けられているため ,

$$\omega_{De} = \frac{2k_y B_0'}{\beta_e} \left( 1 + \frac{\beta_e}{2} \right) , \quad (3.2.14)$$

である . したがって  $B_0'$  に対する成長率は次式で与えられる .

$$f(B_0') = \frac{8\eta k_y^2}{k_z^2 \beta_e^2} \left( 1 + \frac{\beta_e}{2} \right)^2 \left( 1 + \frac{1}{\beta_e} \right) (B_0')^4 \\ + \left[ \frac{4\eta k_y^2 k_\perp^2}{k_z^2 \beta_e^2} \left( 1 + \frac{\beta_e}{2} \right)^2 - \frac{2\eta k_y^2}{k_z^2 \beta_e} \left( 1 + \frac{\beta_e}{2} \right) \right] (B_0')^2 . \quad (3.2.15)$$

$f(B_0')$  は  $B_0'$  に関する 4 次関数である .  $f(B_0')$  を平方完成し , 安定か不安定かを判別すると共に , 安定化条件を求める . 式 (3.2.15) から ,

$$f(B_0') = \frac{2\eta k_y^2}{k_z^2 \beta_e} \left( 1 + \frac{\beta_e}{2} \right) \left[ \frac{2}{\beta_e} \left( 1 + \frac{\beta_e}{2} \right) \left( 1 + \frac{1}{\beta_e} \right) \right. \\ \left. \times \left[ (B_0')^2 + \frac{\frac{2k_\perp^2}{\beta_e} \left( 1 + \frac{\beta_e}{2} \right) - 1}{\frac{4}{\beta_e} \left( 1 + \frac{\beta_e}{2} \right) \left( 1 + \frac{1}{\beta_e} \right)} \right]^2 - \frac{\left[ \frac{2k_\perp^2}{\beta_e} \left( 1 + \frac{\beta_e}{2} \right) - 1 \right]^2}{\frac{8}{\beta_e} \left( 1 + \frac{\beta_e}{2} \right) \left( 1 + \frac{1}{\beta_e} \right)} \right] \quad (3.2.16)$$

が得られる . ここで  $f(B_0')$  は  $(B_0')^2$  の偶関数である .

式 (3.2.16) から安定になり得る条件は次式を満たすときであることがわかった .

$$\frac{2k_\perp^2}{\beta_e} \left( 1 + \frac{\beta_e}{2} \right) - 1 < 0$$

つまり ,

$$k_\perp^2 < \frac{\beta_e}{2 + \beta_e} , \quad (3.2.17)$$

である . このとき , 安定化される  $(B_0')^2$  の範囲は ,

$$0 \leq (B_0')^2 \leq \frac{\frac{2k_\perp^2}{\beta_e} \left( 1 + \frac{\beta_e}{2} \right) - 1}{\frac{2}{\beta_e} \left( 1 + \frac{\beta_e}{2} \right) \left( 1 + \frac{1}{\beta_e} \right)} , \quad (3.2.18)$$

である . 以上から , 場合によっては安定になり得ることが確認でき , さらに安定条件を求めることができた . 安定条件から , 磁場に垂直方向の波数が小さくなる場合に安定になることがわかる .

式(3.2.15)のそれぞれのパラメータに3.1節の典型的な値を代入し,  $B'_0$  に対する成長率のダイヤグラムを描いたものを図3.1に示す. ただし, 今,  $\beta_e \ll 1$  かつ  $k_z \ll k_y$  であるときに分散関係が妥当性を持つため,  $k_z = 10^{-3}, \beta_e = 10^{-3}$  とした. このダイヤグラムからは, 成長率が常に不安定方向に単調に増加していく様子が観察できる.

また,  $\beta_e$  を変化させた場合のダイヤグラムを図3.2に示す. このとき  $\beta_e$  が小さくなるほど, 成長率は大きくなるため,  $\beta_e \ll 1$  を考えると, 減衰する場合を想定する必要はないと考えられる. また, 図3.3と3.4はそれぞれ磁場勾配に対する  $\omega_r$  と  $\omega_i$  をプロットしたものである. ただし,  $k_z = 10^{-3}, \beta_e = 10^{-3}$  とし, それ以外のパラメータには3.1節の典型的な値を代入した. 図3.4から磁場勾配に対して不安定成長する解があるため, やはり, この場合は不安定であると言える.

ここで, 図(3.1), (3.4)を比べるとオーダの開きが大きい. これは, 式(3.2.10)中の右辺第一項が,  $\beta_e \rightarrow 0$  のとき

$$\frac{i}{\mu_0 k_z^2 v_A^2} \left[ k_\perp^2 - ik_x \frac{n'_0}{n_0} - \left[ \frac{B''_0}{B_0} - \frac{2(B'_0)^2}{B_0^2} \left( 1 + \frac{1}{\beta_e} \right) \right] \right] \rightarrow \infty$$

となることが原因ではないかと考えられる. したがって以下では上記の内容を考慮に入れて分散関係の近似式を再導出してみる.

$\eta \sim O(\varepsilon)$  とし,  $\omega = \omega_0 + \varepsilon\omega_1 + \varepsilon^2\omega_2 + \dots$  とすると,

$$\omega_0 + \varepsilon\omega_1 + \varepsilon^2\omega_2 + \dots - k_y \bar{v}_{de} = C_1 \varepsilon \eta (\omega_0^2 + 2\varepsilon\omega_0\omega_1 + \dots) + C_2 \varepsilon \eta,$$

となる. ここで,

$$C_1 = \frac{i}{\mu_0 k_z^2 v_A^2} \left[ k_\perp^2 - ik_x \frac{n'_0}{n_0} - \left[ \frac{B''_0}{B_0} - \frac{2(B'_0)^2}{B_0^2} \left( 1 + \frac{1}{\beta_e} \right) \right] \right]$$

$$C_2 = \frac{ik_y^2 T_e B'_0 n'_0 \left( 1 + \frac{\beta_e}{2} \right)}{k_z^2 B_0^3}$$

である. 今,  $C_1 \sim O(1/\varepsilon)$  になる場合を考えているので,

$$O(\varepsilon^0) : \quad \omega_0 - k_y \bar{v}_{de} = C_1 \eta \omega_0^2$$

$$O(\varepsilon^1) : \quad \omega_1 = C_1 \eta 2\omega_0\omega_1 + C_2 \eta$$

$\omega_1$  を求め、 $B'_0$  に対する  $\omega_i$  をプロットしたものを図 (3.5), (3.6) に示す。ただし、それぞれのパラメータに 3.1 節の典型的な値を代入し、 $k_z = 10^{-3}$ ,  $\beta_e = 10^{-3}$  とした。図 (3.4) と比較すると形状は合っているが、やはりオーダに開きが生じることが分かった。

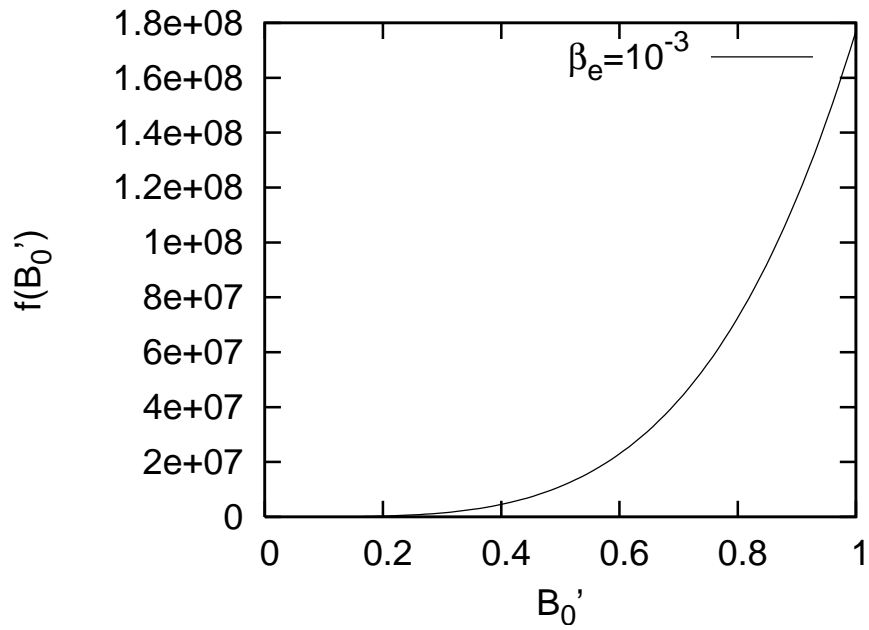


図 3.1:  $B'_0$  に対する成長率  $f(B'_0)$  ( $k_z = 10^{-3}$ ) .

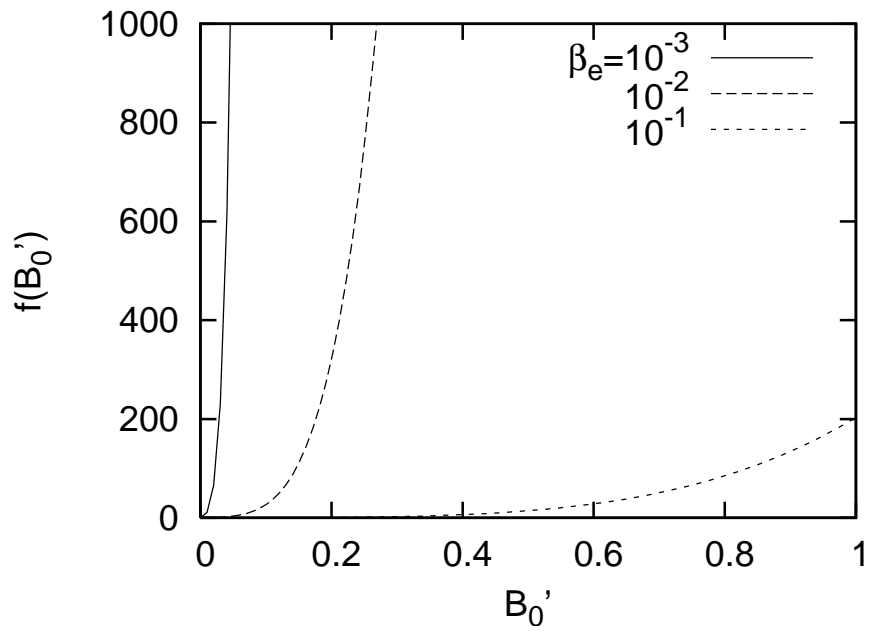


図 3.2:  $\beta_e$  を変化させた場合の  $B_0'$  に対する成長率  $f(B_0')$  ( $k_z = 10^{-3}$ ) .

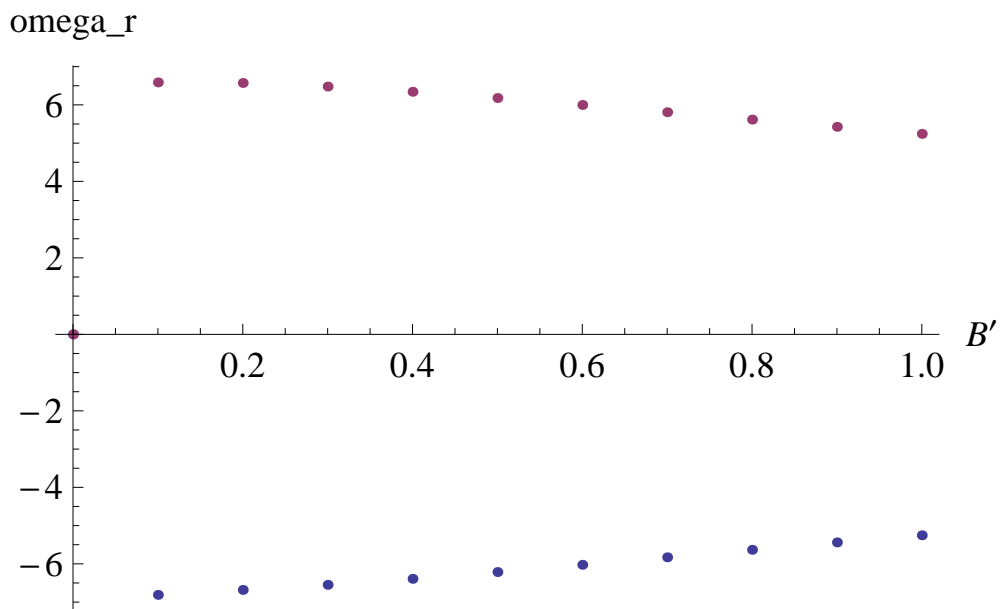


図 3.3: 磁場勾配に対する  $\omega_r$ .

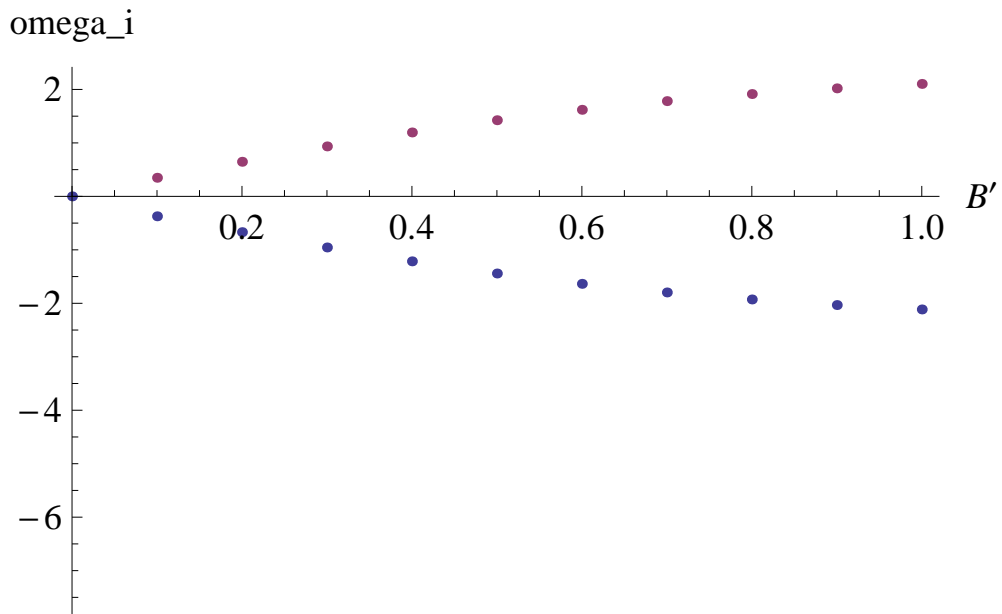


図 3.4: 磁場勾配に対する  $\omega_i$ .

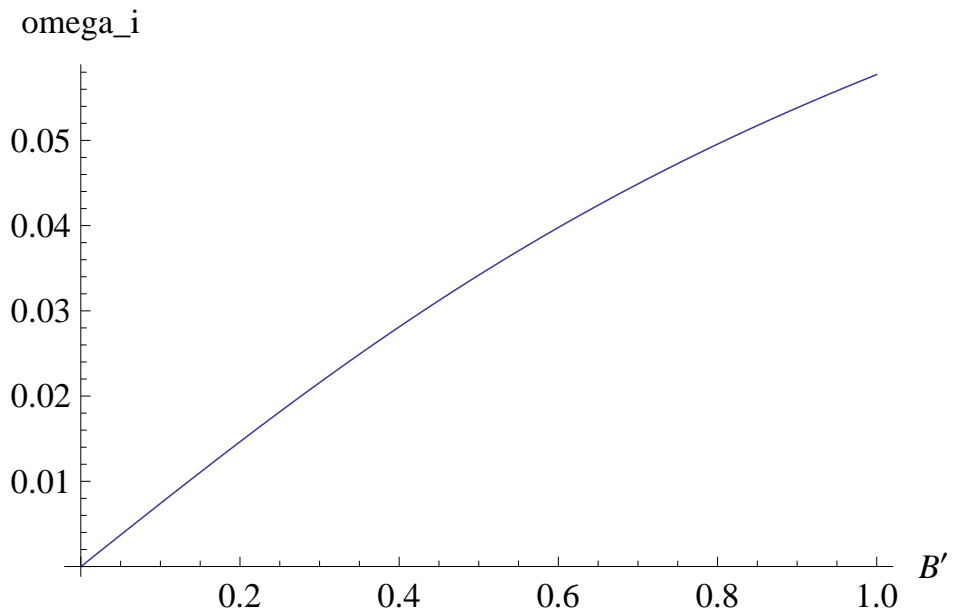


図 3.5: 磁場勾配に対する  $\omega_i$ .

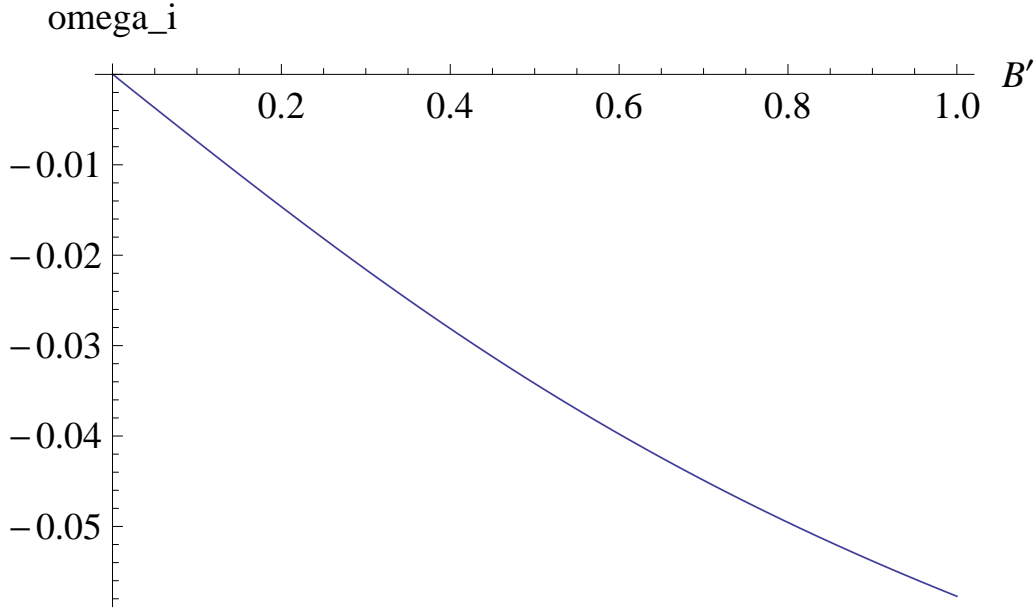


図 3.6: 磁場勾配に対する  $\omega_i$ .

### 3.2.3 イオン音波が現れないモデル

3.2.1, 3.2.2 節では  $k_z C_s \rightarrow 0$  の極限をとり, イオン音波を落としていた. しかし, 始めからイオン音波が現れないようなモデルの場合は成長率がどのような挙動を示すのか. 以下では上記のモデルとの違いについて検討していく. モデルを導出する上での一番の違いは, 上記のモデルでイオンの連続の式 (式 (3.2.2)) を用いたのに対し, ここでは電子の連続の式を用いる点である. 線形化した渦度方程式と電子の連続の式はそれぞれ以下のように表される.

$$\begin{aligned}
 -i\omega \left[ \frac{\rho_0}{B_0} \left[ -ik_y v_x + \frac{i}{k_y} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{B_0} \frac{\partial (B_0 v_x)}{\partial x} \right) \right] + \left( \frac{\rho_0}{B_0} \right)' \frac{i}{k_y B_0} \frac{\partial (B_0 v_x)}{\partial x} \right] \\
 = \frac{ik_y T_e B_0'}{B_0^2} n_1 - \frac{k_z^2}{\eta} \left( \frac{B_0}{ik_y} v_x + \frac{T_e}{en_0} n_1 \right) \quad (3.2.19)
 \end{aligned}$$

$$-i\omega n_1 + n_0' v_x + n_0 \left[ \frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{1}{B_0} \frac{\partial (B_0 v_x)}{\partial x} + \frac{k_z^2}{en_0 \eta} \left( \frac{B_0}{ik_y} v_x + \frac{T_e}{en_0} n_1 \right) \right] = 0 \quad (3.2.20)$$

ここでプライムは  $x$  微分である.

式 (3.2.19), (3.2.20) は  $v_x$  と  $n_1$  に関して閉じている.

以下では分散関係を導出していく．

式 (3.2.19) は，

$$\begin{aligned} -i\omega \left[ \frac{\rho_0}{B_0} \left[ -ik_y v_x + \frac{i}{k_y} \left( \left( \frac{B'_0}{B_0} \right)' + \frac{B'_0}{B_0} ik_x - k_x^2 \right) v_x \right] + \left( \frac{\rho_0}{B_0} \right)' \frac{i}{k_y} \left( \frac{B'_0}{B_0} + ik_x \right) v_x \right] \\ = \frac{ik_y T_e B'_0}{B_0^2} n_1 - \frac{k_z^2}{\eta} \left( \frac{B_0}{ik_y} v_x + \frac{T_e}{en_0} n_1 \right) , \end{aligned}$$

となる．全体に  $-ik_y \frac{B_0}{\rho_0}$  を掛けて整理すると，

$$\begin{aligned} -i\omega \left[ -k_\perp^2 + \left( \frac{B'_0}{B_0} \right)' + \frac{B'_0}{B_0} ik_x + \frac{B_0}{\rho_0} \left( \frac{\rho_0}{B_0} \right)' \left( \frac{B'_0}{B_0} + ik_x \right) \right] v_x \\ = \frac{k_y^2 T_e B'_0}{\rho_0 B_0} n_1 + \frac{k_z^2 B_0^2}{\eta \rho_0} \left( v_x + ik_y \frac{T_e}{en_0 B_0} n_1 \right) , \\ -i\omega \left[ -k_\perp^2 + ik_x \frac{n'_0}{n_0} + \left[ \left( \frac{B'_0}{B_0} \right)' + \frac{B'_0}{n_0} \left( \frac{n_0}{B_0} \right)' \right] \right] v_x \\ = \frac{k_y^2 T_e B'_0}{\rho_0 B_0} n_1 + \frac{k_z^2 B_0^2}{\eta \rho_0} \left( v_x + ik_y \frac{T_e}{en_0 B_0} n_1 \right) , \quad (3.2.21) \end{aligned}$$

となる．

同様に式 (3.2.20) は，

$$\begin{aligned} -i\omega n_1 + n'_0 v_x + n_0 \left[ ik_x v_x - \left( \frac{B'_0}{B_0} + ik_x \right) v_x \right] + \frac{k_z^2}{en\eta} \left( \frac{B_0}{ik_y} v_x + \frac{T_e}{en_0} n_1 \right) = 0 , \\ -i\omega n_1 + n_0 \left( \frac{n'_0}{n_0} - \frac{B'_0}{B_0} \right) v_x - \frac{ik_z^2 B_0}{k_y en\eta} \left( v_x + ik_y \frac{T_e}{en_0 B_0} n_1 \right) = 0 , \quad (3.2.22) \end{aligned}$$

となる．式 (3.2.21) と (3.2.22) を行列形で表すと次のように書ける．

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_x \\ n_1 \end{pmatrix} = O$$



$$\begin{aligned}
a &= -i\omega \left[ 1 - \frac{ik_x n'_0}{k_\perp^2 n_0} + \frac{1}{k_\perp^2} \left( \frac{B_0''}{B_0} - \frac{2(B_0')^2}{B_0^2} \left( 1 + \frac{1}{\beta_e} \right) \right) \right] + \frac{k_z^2 B_0^2}{\eta k_\perp^2 \rho_0} \\
b &= \frac{k_y^2 T_e B_0'}{\rho_0 B_0 k_\perp^2} + \frac{ik_y k_z^2 B_0 T_e}{\eta \rho_0 e n_0 k_\perp^2} \\
c &= n'_0 \left( 1 + \frac{\beta_e}{2} \right) - \frac{ik_z^2 B_0}{k_y e \eta} \\
d &= -i\omega + \frac{k_z^2 T_e}{e^2 n_0 \eta}
\end{aligned}$$

ここから行列式  $ad - bc = 0$  を解いて、分散関係が得られる。

$$\begin{aligned}
& \left[ i\omega \left[ 1 - \frac{ik_x n'_0}{k_\perp^2 n_0} + \frac{1}{k_\perp^2} \left( \frac{B_0''}{B_0} - \frac{2(B_0')^2}{B_0^2} \left( 1 + \frac{1}{\beta_e} \right) \right) \right] - \frac{k_z^2 B_0^2}{\eta k_\perp^2 \rho_0} \right] \left( -i\omega + \frac{k_z^2 T_e}{e^2 n_0 \eta} \right) \\
& \quad + \left( \frac{k_y B_0'}{B_0} + \frac{ik_z^2 B_0}{\eta e n_0} \right) \left[ n'_0 \left( 1 + \frac{\beta_e}{2} \right) - \frac{ik_z^2 B_0}{k_y e \eta} \right] = 0 \\
& \omega^2 \left[ 1 - \frac{ik_x n'_0}{k_\perp^2 n_0} + \frac{1}{k_\perp^2} \left( \frac{B_0''}{B_0} - \frac{2(B_0')^2}{B_0^2} \left( 1 + \frac{1}{\beta_e} \right) \right) \right] \\
& \quad + i\omega \left[ \frac{k_z^2 T_e}{e^2 n_0 \eta} \left[ 1 - \frac{ik_x n'_0}{k_\perp^2 n_0} + \frac{1}{k_\perp^2} \left( \frac{B_0''}{B_0} - \frac{2(B_0')^2}{B_0^2} \left( 1 + \frac{1}{\beta_e} \right) \right) \right] + \frac{k_z^2 B_0^2}{\eta k_\perp^2 \rho_0} \right] \\
& \quad + \frac{k_y T_e}{\rho_0 k_\perp^2} \left[ \frac{k_y B_0'}{B_0} n'_0 \left( 1 + \frac{\beta_e}{2} \right) + \frac{ik_z^2}{\eta e} \left[ -B_0' + B_0 \frac{n'_0}{n_0} \left( 1 + \frac{\beta_e}{2} \right) \right] \right] = 0 \quad (3.2.23)
\end{aligned}$$

$\eta \rightarrow 0$  の極限をとると  $\eta^{-1}$  の項のみ残り、

$$\begin{aligned}
& i\omega \left[ \frac{k_z^2 T_e}{e^2 n_0 \eta} \left[ 1 - \frac{ik_x n'_0}{k_\perp^2 n_0} + \frac{1}{k_\perp^2} \left( \frac{B_0''}{B_0} - \frac{2(B_0')^2}{B_0^2} \left( 1 + \frac{1}{\beta_e} \right) \right) \right] + \frac{k_z^2 B_0^2}{\eta k_\perp^2 \rho_0} \right] \\
& \quad + \frac{k_y T_e}{\rho_0 k_\perp^2} \frac{ik_z^2}{\eta e} \left[ -B_0' + B_0 \frac{n'_0}{n_0} \left( 1 + \frac{\beta_e}{2} \right) \right] = 0,
\end{aligned}$$

となる。全体を  $i \frac{k_z^2 T_e}{e^2 n_0 \eta}$  で割ると、

$$\begin{aligned}
& \omega \left[ 1 - \frac{ik_x n'_0}{k_\perp^2 n_0} + \frac{1}{k_\perp^2} \left( \frac{B_0''}{B_0} - \frac{2(B_0')^2}{B_0^2} \left( 1 + \frac{1}{\beta_e} \right) \right) + \frac{1}{k_\perp^2 \rho_s^2} \right] \\
& \quad + \frac{k_y \Omega_i}{k_\perp^2} \left[ -\frac{B_0'}{B_0} + \frac{n'_0}{n_0} \left( 1 + \frac{\beta_e}{2} \right) \right] = 0, \\
& \omega = \frac{-\frac{k_y \Omega_i}{k_\perp^2} \left[ -\frac{B_0'}{B_0} + \frac{n'_0}{n_0} \left( 1 + \frac{\beta_e}{2} \right) \right]}{1 - \frac{ik_x n'_0}{k_\perp^2 n_0} + \frac{1}{k_\perp^2} \left( \frac{B_0''}{B_0} - \frac{2(B_0')^2}{B_0^2} \left( 1 + \frac{1}{\beta_e} \right) \right) + \frac{1}{k_\perp^2 \rho_s^2}} \equiv \omega_{De}, \quad (3.2.24)
\end{aligned}$$

が得られる .

この  $\omega_{De}$  を分散関係式 (3.2.23) の  $\eta$  を含まない項の  $\omega$  へ代入すると ,

$$\begin{aligned} \omega_{De}^2 & \left[ 1 - \frac{ik_x n'_0}{k_\perp^2 n_0} + \frac{1}{k_\perp^2} \left( \frac{B_0''}{B_0} - \frac{2(B_0')^2}{B_0^2} \left( 1 + \frac{1}{\beta_e} \right) \right) \right] \\ & + i\omega \frac{k_z^2 T_e}{e^2 n_0 \eta} \left[ 1 - \frac{ik_x n'_0}{k_\perp^2 n_0} + \frac{1}{k_\perp^2} \left( \frac{B_0''}{B_0} - \frac{2(B_0')^2}{B_0^2} \left( 1 + \frac{1}{\beta_e} \right) \right) + \frac{1}{k_\perp^2 \rho_s^2} \right] \\ & + \frac{k_y^2 T_e B_0'}{\rho_0 k_\perp^2 B_0} n'_0 \left( 1 + \frac{\beta_e}{2} \right) + \frac{ik_z^2 T_e k_y \Omega_i}{e^2 n_0 \eta k_\perp^2} \left[ -\frac{B_0'}{B_0} + \frac{n'_0}{n_0} \left( 1 + \frac{\beta_e}{2} \right) \right] \simeq 0 , \end{aligned}$$

が得られる . 全体を  $i \frac{k_z^2 T_e}{e^2 n_0 \eta}$  で割って ,  $\omega$  について解くと次式が得られる .

$$\omega \simeq \omega_{De} + \frac{i\eta e^2 n_0}{k_z^2 T_e} \frac{\omega_{De}^2 \left[ 1 - \frac{ik_x n'_0}{k_\perp^2 n_0} + \frac{1}{k_\perp^2} \left( \frac{B_0''}{B_0} - \frac{2(B_0')^2}{B_0^2} \left( 1 + \frac{1}{\beta_e} \right) \right) \right] + \frac{k_y^2 \rho_s^2 \Omega_i^2}{k_\perp^2} \frac{B_0' n'_0}{B_0 n_0} \left( 1 + \frac{\beta_e}{2} \right)}{1 - \frac{ik_x n'_0}{k_\perp^2 n_0} + \frac{1}{k_\perp^2} \left( \frac{B_0''}{B_0} - \frac{2(B_0')^2}{B_0^2} \left( 1 + \frac{1}{\beta_e} \right) \right) + \frac{1}{k_\perp^2 \rho_s^2}} \quad (3.2.25)$$

式 (3.2.24) と (3.2.25) を  $\rho_s$  ,  $\Omega_i$  を使って規格化すると (規格化記号を省略) ,

$$\omega_{De} = \frac{-\frac{k_y}{k_\perp} \left[ -B_0' + n'_0 \left( 1 + \frac{\beta_e}{2} \right) \right]}{1 - \frac{ik_x n'_0}{k_\perp^2} + \frac{1}{k_\perp^2} \left( B_0'' - 2(B_0')^2 \left( 1 + \frac{1}{\beta_e} \right) \right) + \frac{1}{k_\perp^2}} , \quad (3.2.26)$$

$$\omega \simeq \omega_{De} + \frac{i\eta}{k_z^2} \frac{\omega_{De}^2 \left[ 1 - \frac{ik_x n'_0}{k_\perp^2} + \frac{1}{k_\perp^2} \left( B_0'' - 2(B_0')^2 \left( 1 + \frac{1}{\beta_e} \right) \right) \right] + \frac{k_y^2}{k_\perp^2} B_0' n'_0 \left( 1 + \frac{\beta_e}{2} \right)}{1 - \frac{ik_x n'_0}{k_\perp^2} + \frac{1}{k_\perp^2} \left( B_0'' - 2(B_0')^2 \left( 1 + \frac{1}{\beta_e} \right) \right) + \frac{1}{k_\perp^2}} , \quad (3.2.27)$$

となる . ここで問題となるのが式 (3.2.26) の分母に現れる虚数である .  $\omega_{De}$  に虚数が含まれていれば , 式 (3.2.27) に代入したとき ,  $\eta$  に依存しない成長率が現れてしまうことになる . 分散関係式を近似せずに解いた場合でも , 実際に  $k_x$  の符号によって , 安定 / 不安定の異なる解が得られている . このことと , 前節の  $k_z C_s \rightarrow 0$  の極限との違いは連続の式を電子のものとするか , イオンのものとするかか

らきている。しかし，電気抵抗に依らない不安定が出るのは物理的に正しくないと考えられるので，この点についてはさらなる検討が必要である。式(3.2.27)から  $Im(\omega)$  を抜き出し，有理化すると，

$$\begin{aligned}
Im(\omega) = & \frac{-\frac{ik_x k_y n'_0}{k_\perp^4} \left\{ -B'_0 + n'_0 \left( 1 + \frac{\beta_e}{2} \right) \right\}}{\left\{ 1 + \frac{2(B'_0)^2}{k_\perp^2} \left( 1 + \frac{1}{\beta_e} \right) + \frac{1}{k_\perp^2} \right\}^2 + \left( \frac{k_x n'_0}{k_\perp^2} \right)^2} \\
+ & \frac{i\eta \frac{k_y^2}{k_\perp^4} \left\{ -B'_0 + n'_0 \left( 1 + \frac{\beta_e}{2} \right) \right\}^2 \left[ \left\{ 1 + \frac{2(B'_0)^2}{k_\perp^2} \left( 1 + \frac{1}{\beta_e} \right) + \frac{1}{k_\perp^2} \right\}^2 - \frac{k_x^2}{k_\perp^4} (n'_0)^2 \right]}{k_z^2 \left[ \left\{ 1 + \frac{2(B'_0)^2}{k_\perp^2} \left( 1 + \frac{1}{\beta_e} \right) + \frac{1}{k_\perp^2} \right\}^2 + \left( \frac{k_x n'_0}{k_\perp^2} \right)^2 \right]^3} \\
& \times \frac{\left[ \left\{ 1 + \frac{2(B'_0)^2}{k_\perp^2} \left( 1 + \frac{1}{\beta_e} \right) \right\}^2 + \left( \frac{k_x n'_0}{k_\perp^2} \right)^2 \right]}{\left[ \left\{ 1 + \frac{2(B'_0)^2}{k_\perp^2} \left( 1 + \frac{1}{\beta_e} \right) + \frac{1}{k_\perp^2} \right\}^2 + \left( \frac{k_x n'_0}{k_\perp^2} \right)^2 \right]^3} \\
+ & \frac{i\eta \frac{k_y^2}{k_\perp^6} \left\{ -B'_0 + n'_0 \left( 1 + \frac{\beta_e}{2} \right) \right\}^2 \left[ \left\{ 1 + \frac{2(B'_0)^2}{k_\perp^2} \left( 1 + \frac{1}{\beta_e} \right) + \frac{1}{k_\perp^2} \right\}^2 - \frac{k_x^2}{k_\perp^4} (n'_0)^2 \right]}{k_z^2 \left[ \left\{ 1 + \frac{2(B'_0)^2}{k_\perp^2} \left( 1 + \frac{1}{\beta_e} \right) + \frac{1}{k_\perp^2} \right\}^2 + \left( \frac{k_x n'_0}{k_\perp^2} \right)^2 \right]^3} \\
& \times \frac{\left\{ 1 + \frac{2(B'_0)^2}{k_\perp^2} \left( 1 + \frac{1}{\beta_e} \right) \right\}}{\left[ \left\{ 1 + \frac{2(B'_0)^2}{k_\perp^2} \left( 1 + \frac{1}{\beta_e} \right) + \frac{1}{k_\perp^2} \right\}^2 + \left( \frac{k_x n'_0}{k_\perp^2} \right)^2 \right]^3} \\
+ & \frac{i\eta \frac{k_y^2}{k_\perp^2} B'_0 n'_0 \left( 1 + \frac{\beta_e}{2} \right) \left\{ 1 + \frac{2(B'_0)^2}{k_\perp^2} \left( 1 + \frac{1}{\beta_e} \right) + \frac{1}{k_\perp^2} \right\}}{k_z^2 \left\{ 1 + \frac{2(B'_0)^2}{k_\perp^2} \left( 1 + \frac{1}{\beta_e} \right) + \frac{1}{k_\perp^2} \right\}^2 + \left( \frac{k_x n'_0}{k_\perp^2} \right)^2} \\
- & \frac{i\eta \frac{2k_x^2 k_y^2 (n'_0)^2 \left\{ -B'_0 + n'_0 \left( 1 + \frac{\beta_e}{2} \right) \right\}^2 \left\{ 1 + \frac{2(B'_0)^2}{k_\perp^2} \left( 1 + \frac{1}{\beta_e} \right) + \frac{1}{k_\perp^2} \right\}}{k_z^2 k_\perp^{10} \left[ \left\{ 1 + \frac{2(B'_0)^2}{k_\perp^2} \left( 1 + \frac{1}{\beta_e} \right) + \frac{1}{k_\perp^2} \right\}^2 + \left( \frac{k_x n'_0}{k_\perp^2} \right)^2 \right]^3}.
\end{aligned}$$

ただし  $B''_0 = 0$  とした。

式(3.2.7)により  $n'_0$  と  $B'_0$  が関係付けられているため， $B'_0$  に対する成長率は次式で与えられる。

$$\begin{aligned}
f(B'_0) = & \frac{\frac{ik_x k_y}{k_\perp^4} \frac{2B'_0}{\beta_e} \left\{ -B'_0 - \frac{2B'_0}{\beta_e} \left( 1 + \frac{\beta_e}{2} \right) \right\}}{\left\{ 1 + \frac{2(B'_0)^2}{k_\perp^2} \left( 1 + \frac{1}{\beta_e} \right) + \frac{1}{k_\perp^2} \right\}^2 + \left( \frac{2B'_0 k_x}{k_\perp^2 \beta_e} \right)^2} \\
& + \frac{i\eta \frac{k_y^2}{k_\perp^4} \left\{ -B'_0 - \frac{2B'_0}{\beta_e} \left( 1 + \frac{\beta_e}{2} \right) \right\}^2 \left[ \left\{ 1 + \frac{2(B'_0)^2}{k_\perp^2} \left( 1 + \frac{1}{\beta_e} \right) + \frac{1}{k_\perp^2} \right\}^2 - \frac{k_x^2}{k_\perp^4} \left( \frac{2B'_0}{\beta_e} \right)^2 \right]}{k_z^2 \left[ \left\{ 1 + \frac{2(B'_0)^2}{k_\perp^2} \left( 1 + \frac{1}{\beta_e} \right) + \frac{1}{k_\perp^2} \right\}^2 + \left( \frac{2B'_0 k_x}{k_\perp^2 \beta_e} \right)^2 \right]^3} \\
& \quad \times \frac{\left[ \left\{ 1 + \frac{2(B'_0)^2}{k_\perp^2} \left( 1 + \frac{1}{\beta_e} \right) \right\}^2 + \left( \frac{2B'_0 k_x}{k_\perp^2 \beta_e} \right)^2 \right]}{\left[ \left\{ 1 + \frac{2(B'_0)^2}{k_\perp^2} \left( 1 + \frac{1}{\beta_e} \right) + \frac{1}{k_\perp^2} \right\}^2 + \left( \frac{2B'_0 k_x}{k_\perp^2 \beta_e} \right)^2 \right]^3} \\
& + \frac{i\eta \frac{k_y^2}{k_\perp^6} \left\{ -B'_0 - \frac{2B'_0}{\beta_e} \left( 1 + \frac{\beta_e}{2} \right) \right\}^2 \left[ \left\{ 1 + \frac{2(B'_0)^2}{k_\perp^2} \left( 1 + \frac{1}{\beta_e} \right) + \frac{1}{k_\perp^2} \right\}^2 - \frac{k_x^2}{k_\perp^4} \left( \frac{2B'_0}{\beta_e} \right)^2 \right]}{k_z^2 \left[ \left\{ 1 + \frac{2(B'_0)^2}{k_\perp^2} \left( 1 + \frac{1}{\beta_e} \right) + \frac{1}{k_\perp^2} \right\}^2 + \left( \frac{2B'_0 k_x}{k_\perp^2 \beta_e} \right)^2 \right]^3} \\
& \quad \times \frac{\left\{ 1 + \frac{2(B'_0)^2}{k_\perp^2} \left( 1 + \frac{1}{\beta_e} \right) \right\}}{\left[ \left\{ 1 + \frac{2(B'_0)^2}{k_\perp^2} \left( 1 + \frac{1}{\beta_e} \right) + \frac{1}{k_\perp^2} \right\}^2 + \left( \frac{2B'_0 k_x}{k_\perp^2 \beta_e} \right)^2 \right]^3} \\
& + \frac{i\eta - \frac{k_y^2}{k_\perp^2} B'_0 \frac{2B'_0}{\beta_e} \left( 1 + \frac{\beta_e}{2} \right) \left\{ 1 + \frac{2(B'_0)^2}{k_\perp^2} \left( 1 + \frac{1}{\beta_e} \right) + \frac{1}{k_\perp^2} \right\}}{k_z^2 \left\{ 1 + \frac{2(B'_0)^2}{k_\perp^2} \left( 1 + \frac{1}{\beta_e} \right) + \frac{1}{k_\perp^2} \right\}^2 + \left( \frac{2B'_0 k_x}{k_\perp^2 \beta_e} \right)^2} \\
& - \frac{i\eta \frac{2k_x^2 k_y^2}{k_\perp^2} \left( \frac{2B'_0}{\beta_e} \right)^2 \left\{ -B'_0 - \frac{2B'_0}{\beta_e} \left( 1 + \frac{\beta_e}{2} \right) \right\}^2 \left\{ 1 + \frac{2(B'_0)^2}{k_\perp^2} \left( 1 + \frac{1}{\beta_e} \right) + \frac{1}{k_\perp^2} \right\}}{k_z^2 \frac{k_\perp^{10}}{\left[ \left\{ 1 + \frac{2(B'_0)^2}{k_\perp^2} \left( 1 + \frac{1}{\beta_e} \right) + \frac{1}{k_\perp^2} \right\}^2 + \left( \frac{2B'_0 k_x}{k_\perp^2 \beta_e} \right)^2 \right]^3} \quad (3.2.28)
\end{aligned}$$

式 (3.2.28) のそれぞれのパラメータに 3.1 節の典型的な値を代入し、 $B'_0$  に対する成長率のダイヤグラムを描いたものを図 3.7 に示す。このダイヤグラムからは、減衰している様子が観察できる。ただし、今、 $k_x$  を正としているので減衰しているが、 $k_x$  が負の場合は不安定成長し得ることに注意する。それは図 3.11 から確認できる。図 3.8 は式 (3.2.28) の第 1 項 ( $\eta$  に依存する項) とそれ以外の項 ( $\eta$  に依存しない項) に分けて、その成長率を比較したダイヤグラムである。 $\eta$  に依存しない項に比べ、 $\eta$  に依存する項の成長率のオーダがかなり大きいことが観察できる。したがって、成長率に対する効果は  $\eta$  に依存する項の方が大きいと予測できる。ま

た, 図 3.11 は分散関係式式 (3.2.23) を数値的に解いたときの解をプロットしたものである。ただし,  $B'_0 = 0.3$  の場合であり, パラメータ値は上記と同様の値を代入した。図 3.9 と 3.10 はそれぞれ磁場勾配に対する  $\omega_r$  と  $\omega_i$  をプロットしたものである。図 3.10 から磁場勾配に対する  $\omega_i$  はやはり, 減衰する様子が観察できる。しかし, 図 (3.11) で  $k_x < 0$  にした場合を見ると, やはり  $k_x$  の符号によって安定にも不安定にもなり得ることが確認できた。

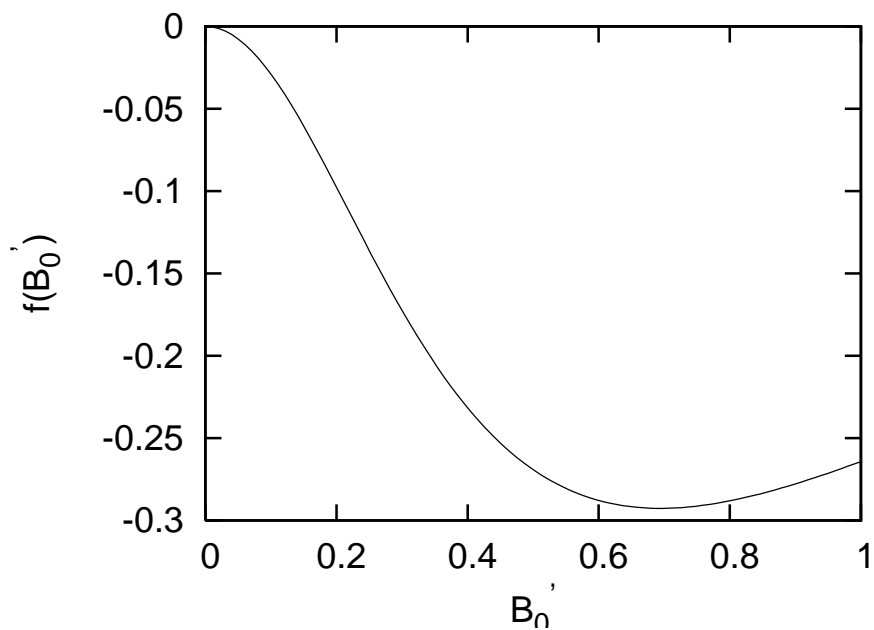


図 3.7: 典型的なパラメータに対してプロットした  $B'_0$  に対する成長率  $f(B'_0)$  .

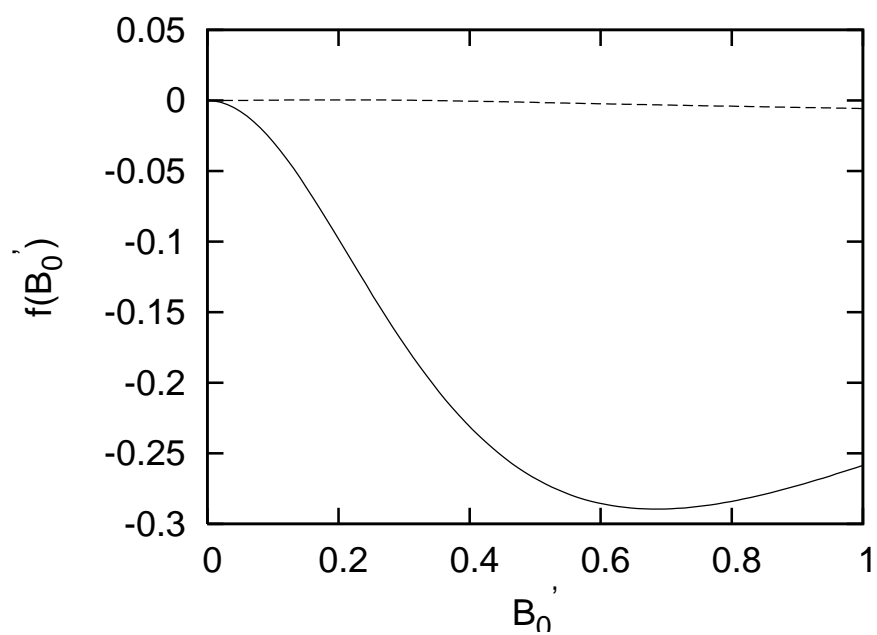


図 3.8: 典型的なパラメータに対してプロットした  $B'_0$  に対する成長率  $f(B'_0)$  . ただし, 点線は  $\eta$  を含む項 .

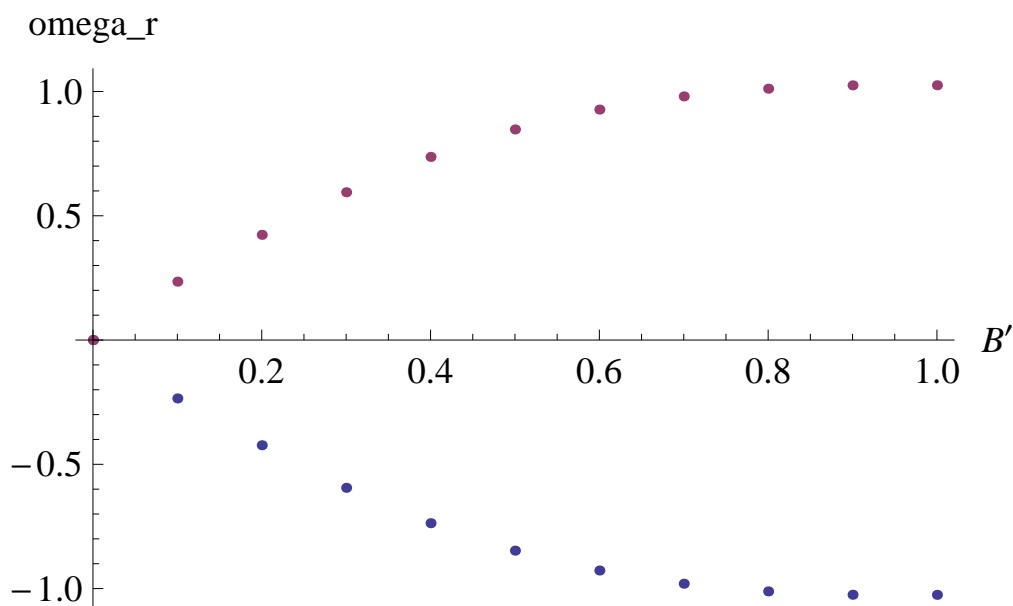


図 3.9: 磁場勾配に対する  $\omega_r$  .

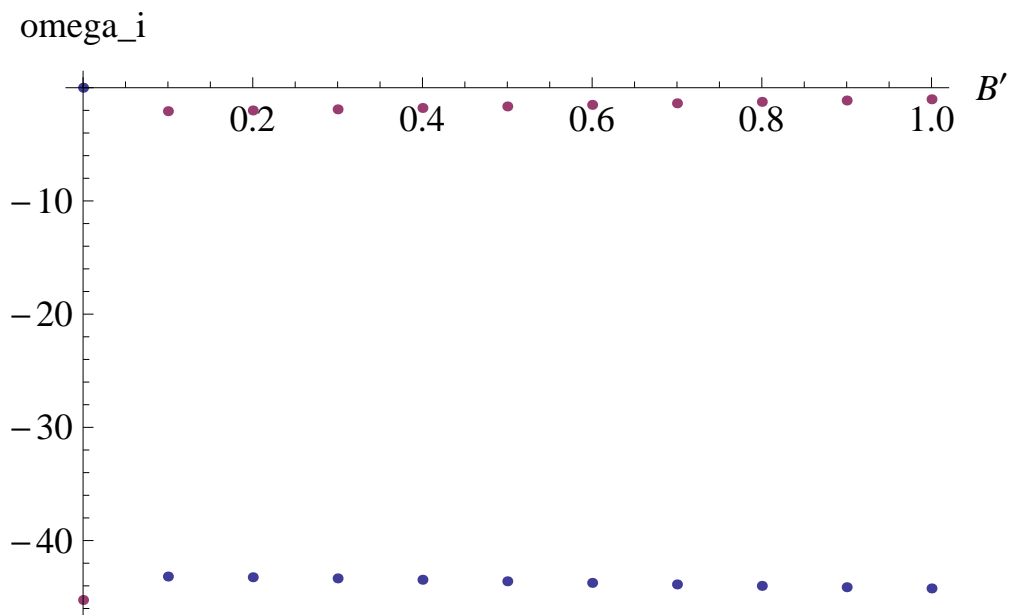


図 3.10: 磁場勾配に対する  $\omega_i$  ( $k_x > 0$ ) .

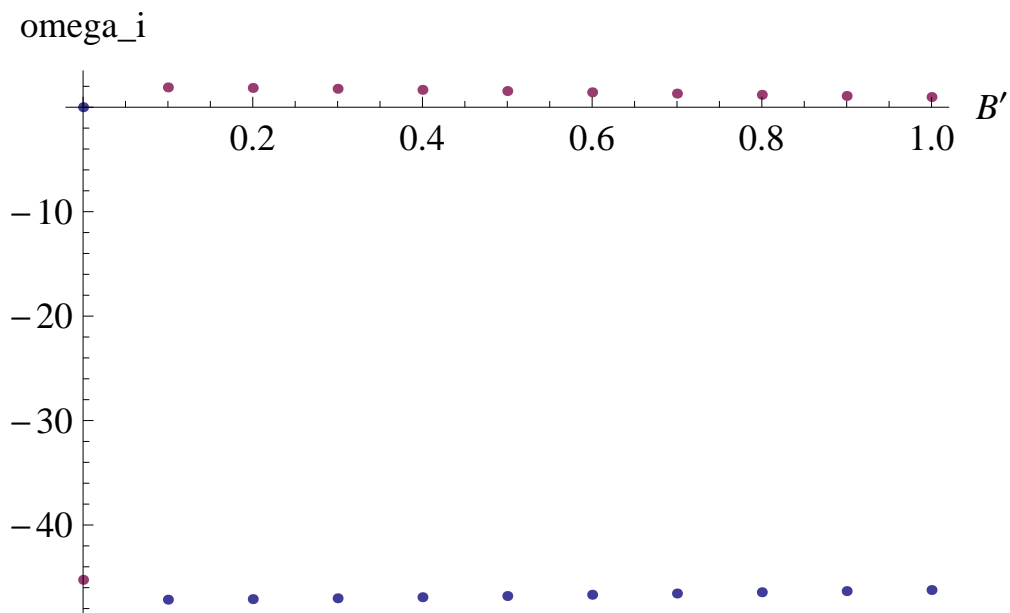


図 3.11: 磁場勾配に対する  $\omega_i$  ( $k_x < 0$ ) .

### 3.3 $k_z C_s \sim k_y v_{de} \ll k_z v_A$ の場合

$k_z C_s \sim k_y v_{de} \ll k_z v_A$  のような周波数領域が成り立つためには  $\beta_e$  が十分に小さくなるような場合を考える必要がある．したがって、 $\beta_e \ll 1$  のとき、以下の分散関係は妥当性を持つと言える．

#### 3.3.1 分散関係式の導出

線形化した渦度方程式と連続の式は  $k_z C_s \ll k_y v_{de} \ll k_z v_A$  の場合と同様であり、式 (3.2.1)、(3.2.2) で表される．分散関係式の導出過程は式 (3.2.9) まで 3.2.1 節と同様である．今、 $k_z C_s \sim k_y v_{de}$  であるからイオン音波周波数の項は残る．以降は式 (3.2.9) を変形していく．

$$\begin{aligned} \omega^3 + \frac{\mu_0 v_A^2 k_y^2 T_e B_0' n_0' \left(1 + \frac{\beta_e}{2}\right)}{\left[ k_{\perp}^2 - i k_x \frac{n_0'}{n_0} - \left[ \frac{B_0''}{B_0} - \frac{2(B_0')^2}{B_0^2} \left(1 + \frac{1}{\beta_e}\right) \right] \right] B_0^3} \omega \\ + \frac{i \mu_0 k_z^2 v_A^2}{\eta \left[ k_{\perp}^2 - i k_x \frac{n_0'}{n_0} - \left[ \frac{B_0''}{B_0} - \frac{2(B_0')^2}{B_0^2} \left(1 + \frac{1}{\beta_e}\right) \right] \right]} (\omega^2 - k_y \bar{v}_{de} \omega - k_z^2 C_s^2) = 0 \end{aligned} \quad (3.3.1)$$

以上で分散関係式を導くことができた．

$\eta \rightarrow 0$  の極限では、

$$\omega_{De} \equiv \frac{1}{2} \left[ k_y \bar{v}_{de} \pm \sqrt{k_y^2 \bar{v}_{de}^2 + 4k_z^2 C_s^2} \right], \quad (3.3.2)$$

である．

この  $\omega_{De}$  を第 1、2 項の  $\omega^3$  と  $\omega$  に代入して再度解くと、

$$\begin{aligned} \omega^2 - k_y \bar{v}_{de} \omega - k_z^2 C_s^2 \\ - \frac{i \eta \omega_{De}^3 \left[ k_{\perp}^2 - i k_x \frac{n_0'}{n_0} - \left[ \frac{B_0''}{B_0} - \frac{2(B_0')^2}{B_0^2} \left(1 + \frac{1}{\beta_e}\right) \right] \right]}{\mu_0 k_z^2 v_A^2} \\ - \frac{i \eta \omega_{De} k_y^2 T_e B_0' n_0' \left(1 + \frac{\beta_e}{2}\right)}{k_z^2 B_0^3} = 0, \end{aligned} \quad (3.3.3)$$



$$\omega = \frac{1}{2} \left[ k_y \bar{v}_{de} \pm \sqrt{k_y^2 \bar{v}_{de}^2 + 4k_z^2 C_s^2 + 4i\eta X} \right], \quad (3.3.4)$$

となる。ただし， $X$  を以下に示した。

$$X = \frac{\omega_{De}^3 \left[ k_{\perp}^2 - ik_x \frac{n'_0}{n_0} - \left[ \frac{B''_0}{B_0} - \frac{2(B'_0)^2}{B_0^2} \left( 1 + \frac{1}{\beta_e} \right) \right] \right]}{\mu_0 k_z^2 v_A^2} + \frac{\omega_{De} k_y^2 T_e B'_0 n'_0 \left( 1 + \frac{\beta_e}{2} \right)}{k_z^2 B_0^3}$$

式 (3.3.4) を規格化し，分散関係の近似式を導出できた（規格化記号省略）

$$\omega = \frac{1}{2} \left[ -k_y n'_0 \left( 1 + \frac{\beta_e}{2} \right) \pm \sqrt{k_y^2 (n'_0)^2 \left( 1 + \frac{\beta_e}{2} \right)^2 + 4k_z^2 + 4i\eta Y} \right] \quad (3.3.5)$$

ただし， $Y$  を以下に示した。

$$Y = \frac{\omega_{De}^3}{k_z^2} \left[ k_{\perp}^2 - ik_x n'_0 - \left[ B''_0 - 2(B'_0)^2 \left( 1 + \frac{1}{\beta_e} \right) \right] \right] + \frac{\omega_{De} k_y^2 B'_0 n'_0 \left( 1 + \frac{\beta_e}{2} \right)}{k_z^2}$$

ここで前節の結果と一致するか確認するために， $k_z^2 C_s^2 \rightarrow 0$  の極限をとった場合を考える。

まず  $\eta \rightarrow 0$  の極限では（正のとき），

$$\omega_{De} = \frac{1}{2} \left[ k_y \bar{v}_{de} + \sqrt{k_y^2 \bar{v}_{de}^2} \right] = k_y \bar{v}_{de},$$

となる。さらに式 (3.3.4) を変形すると，

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{1}{2} \left[ k_y \bar{v}_{de} + \sqrt{k_y^2 \bar{v}_{de}^2 + 4i\eta Z_1} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[ k_y \bar{v}_{de} + k_y \bar{v}_{de} \sqrt{1 + \frac{4i\eta}{k_y^2 \bar{v}_{de}^2} Z_1} \right] \\ &\simeq \frac{1}{2} \left[ k_y \bar{v}_{de} + k_y \bar{v}_{de} \left( 1 + \frac{2i\eta}{k_y^2 \bar{v}_{de}^2} Z_1 \right) \right] \\ &= k_y \bar{v}_{de} + i\eta Z_2, \end{aligned}$$

となる。ただし， $Z_1, Z_2$  を以下に示した。

$$\begin{aligned} Z_1 &= \frac{\omega_{De}^3 \left[ k_{\perp}^2 - ik_x \frac{n'_0}{n_0} - \left[ \frac{B''_0}{B_0} - \frac{2(B'_0)^2}{B_0^2} \left( 1 + \frac{1}{\beta_e} \right) \right] \right]}{\mu_0 k_z^2 v_A^2} + \frac{\omega_{De} k_y^2 T_e B'_0 n'_0 \left( 1 + \frac{1}{\beta_e} \right)}{k_z^2 B_0^3} \\ Z_2 &= \left[ \frac{\omega_{De}^2 \left[ k_{\perp}^2 - ik_x \frac{n'_0}{n_0} - \left[ \frac{B''_0}{B_0} - \frac{2(B'_0)^2}{B_0^2} \left( 1 + \frac{1}{\beta_e} \right) \right] \right]}{\mu_0 k_z^2 v_A^2} + \frac{k_y^2 T_e B'_0 n'_0 \left( 1 + \frac{1}{\beta_e} \right)}{k_z^2 B_0^3} \right] \end{aligned}$$

以上から,  $k_z^2 C_s^2 \rightarrow 0$  の条件下で求められた分散関係 ( 式 (3.2.11) ) と一致することが確認できた .

### 3.3.2 磁場勾配に対する安定性解析

式 (3.3.5) の右辺の平方根を取り出すと ,

$$\pm \sqrt{a + ib} ,$$

である . ここで ,  $a, ib$  を以下に示す .

$$a = k_y^2 (n'_0)^2 \left(1 + \frac{\beta_e}{2}\right)^2 + 4k_z^2 + \frac{4\eta\omega_{De}^3 k_x n'_0}{k_z^2}$$

$$ib = 4i\eta \left[ \frac{\omega_{De}^3}{k_z^2} \left[ k_\perp^2 - \left[ B_0'' - 2(B_0')^2 \left(1 + \frac{1}{\beta_e}\right) \right] \right] \frac{\omega_{De} k_y^2 B_0' n'_0 \left(1 + \frac{\beta_e}{2}\right)}{k_z^2} \right]$$

$\sqrt{a + ib} = A + iB$  と表すとき ,

$$A = \sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} + a}{2}} ,$$

$$B = \frac{\sqrt{b^2}}{b} \sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{2}} ,$$

となる . したがって  $Im(\omega)$  は次の式で表される .

$$Im(\omega) = \pm \frac{\sqrt{b^2}}{2b} \sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{2}} \quad (3.3.6)$$

また，式 (3.2.7) を用いて  $a, b$  を表すと以下の式を得る．

$$\begin{aligned}
a &= k_y^2 \frac{4(B'_0)^2}{\beta_e^2} \left(1 + \frac{\beta_e}{2}\right)^2 + 4k_z^2 \\
&\quad - \frac{\eta k_x B'_0}{k_z^2 \beta_e} \left[ \frac{2k_y B'_0}{\beta_e} \left(1 + \frac{\beta_e}{2}\right) + \sqrt{k_y^2 \frac{4(B'_0)^2}{\beta_e^2} \left(1 + \frac{\beta_e}{2}\right)^2 + 4k_z^2} \right]^3 \\
ib &= \frac{4i\eta}{k_z^2} \left[ \frac{1}{8} \left[ \frac{2k_y B'_0}{\beta_e} \left(1 + \frac{\beta_e}{2}\right) + \sqrt{k_y^2 \frac{4(B'_0)^2}{\beta_e^2} \left(1 + \frac{\beta_e}{2}\right)^2 + 4k_z^2} \right]^3 \right. \\
&\quad \times \left. \left[ k_\perp^2 - \{B''_0 - 2(B'_0)^2 \left(1 + \frac{1}{\beta_e}\right)\} \right] \right. \\
&\quad \left. - \frac{k_y^2}{\beta_e} \left(1 + \frac{\beta_e}{2}\right) (B'_0)^2 \left[ \frac{2k_y B'_0}{\beta_e} \left(1 + \frac{\beta_e}{2}\right) + \sqrt{k_y^2 \frac{4(B'_0)^2}{\beta_e^2} \left(1 + \frac{\beta_e}{2}\right)^2 + 4k_z^2} \right] \right]
\end{aligned}$$

ただし，規格化した  $\omega_{De}$  を用いた．

$$\omega_{De} = \frac{1}{2} \left[ \frac{2k_y B'_0}{\beta_e} \left(1 + \frac{\beta_e}{2}\right) \pm \sqrt{\frac{4k_y^2 (B'_0)^2}{\beta_e^2} \left(1 + \frac{\beta_e}{2}\right)^2 + 4k_z^2} \right] \quad (3.3.7)$$

上式のそれぞれのパラメータに 3.1 節の典型的な値を代入し， $B'_0$  に対する成長率のダイアグラムを描いたものを図 3.12 に示す．ただし，今  $\beta_e \ll 1$  のとき分散関係が妥当性を持つため， $\beta_e = 10^{-3}$  とした．このダイアグラムからは，常に減衰していく様子が観察できる．図 3.13 は  $\beta_e$  を変化させた場合の  $B'_0$  に対する成長率  $f(B'_0)$  のダイアグラムである．このダイアグラムからは， $\beta_e$  が小さくなるにつれ，減衰率が大きくなる様子が観察できる．また，図 (3.14) と (3.15) はそれぞれ磁場勾配に対する  $\omega_r$  と  $\omega_i$  をプロットしたものである．分散関係の近似式を求める際に， $\omega_r$  が正になる場合のみを考えていたために図 (3.13) では減衰したが，図 (3.15) から， $\omega_r$  が負になる場合には磁場勾配に対して不安定成長する解も現れる様子が観察できる．したがって結果的には不安定成長することが分かった．また，図 (3.12) と (3.15) を比較すると，オーダの開きが大きい．これは，式 (3.3.1) 中の左辺第 2，3 項が， $\beta_e \rightarrow 0$  のとき  $C_1 \rightarrow 0$ ， $C_2 \rightarrow 0$  となることが原因ではないかと考えられる．

ただし,

$$C_1 = \frac{\mu_0 v_A^2 k_y^2 T_e B'_0 n'_0 \left(1 + \frac{\beta_e}{2}\right)}{\left[ k_\perp^2 - i k_x \frac{n'_0}{n_0} - \frac{B'_0}{B_0} + \frac{2(B'_0)^2}{B_0} \left(1 + \frac{1}{\beta_e}\right) \right] B_0^3}$$

$$C_2 = \frac{i \mu_0 k_z^2 v_A^2}{\left[ k_\perp^2 - i k_x \frac{n'_0}{n_0} - \frac{B'_0}{B_0} + \frac{2(B'_0)^2}{B_0} \left(1 + \frac{1}{\beta_e}\right) \right]}$$

である. したがって以下では上記の内容を考慮に入れて分散関係の近似式を再導出してみる.

$\eta \sim O(\varepsilon)$  とし,  $\omega = \omega_0 + \varepsilon \omega_1 + \varepsilon^2 \omega_2 + \dots$  とすると,

$$(\omega_0^3 + 3\varepsilon \omega_0^2 \omega_1 + \dots) + C_1 (\omega_0 + \varepsilon \omega_1 + \dots)$$

$$\frac{C_2}{\varepsilon \eta} [(\omega_0^2 + 2\varepsilon \omega_0 \omega_1 + \dots) - k_y \bar{v}_{de} (\omega_0 + \varepsilon \omega_1 + \dots) - k_z^2 C_s^2] = 0$$

となる. ここで, 今,  $C_1, C_2 \sim O(\varepsilon)$  になる場合を考えているので,

$$O(\varepsilon^0) : \quad \omega_0^3 + \frac{C_2}{\eta} (\omega_0^2 - k_y \bar{v}_{de} \omega_0 - k_z^2 C_s^2) = 0$$

$$O(\varepsilon^1) : \quad 3\omega_0^2 \omega_1 + C_1 \omega_0 + \frac{C_2}{\eta} (2\omega_0 \omega_1 - k_y \bar{v}_{de} \omega_1) = 0$$

$\omega_1$  を求め,  $B'_0$  に対する  $\omega_i$  をプロットしたものを図 (3.16) に示す. ただし, それぞれのパラメータに 3.1 節の典型的な値を代入し,  $\beta_e = 10^{-3}$  とした. 図 (3.15) と比較すると形状もオーダも合っていないことが分かった. 以上から, 3.2 節の場合も含め, 分散関係の近似式はあまり精度の良いものが得られないと言える.

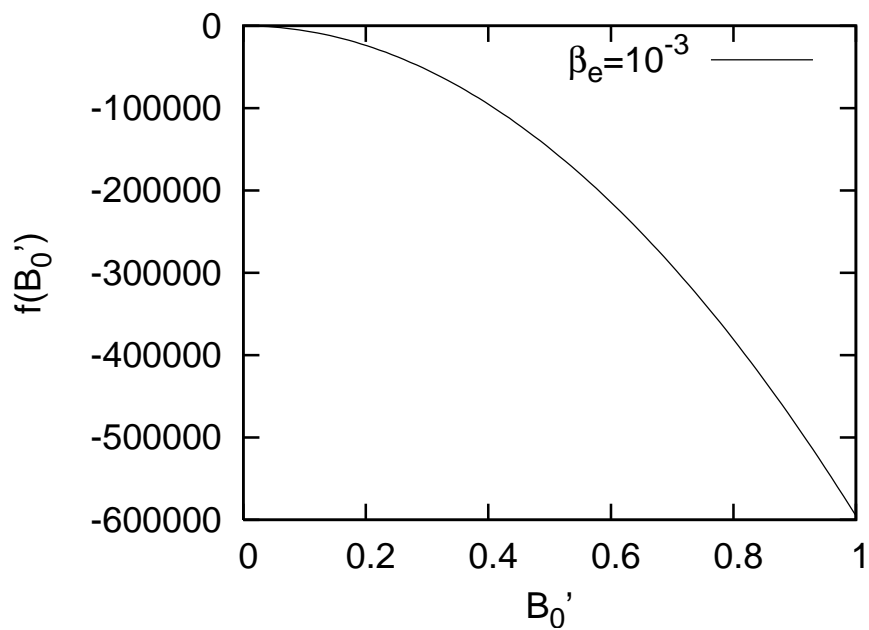


図 3.12:  $B'_0$  に対する成長率  $f(B'_0)$  .

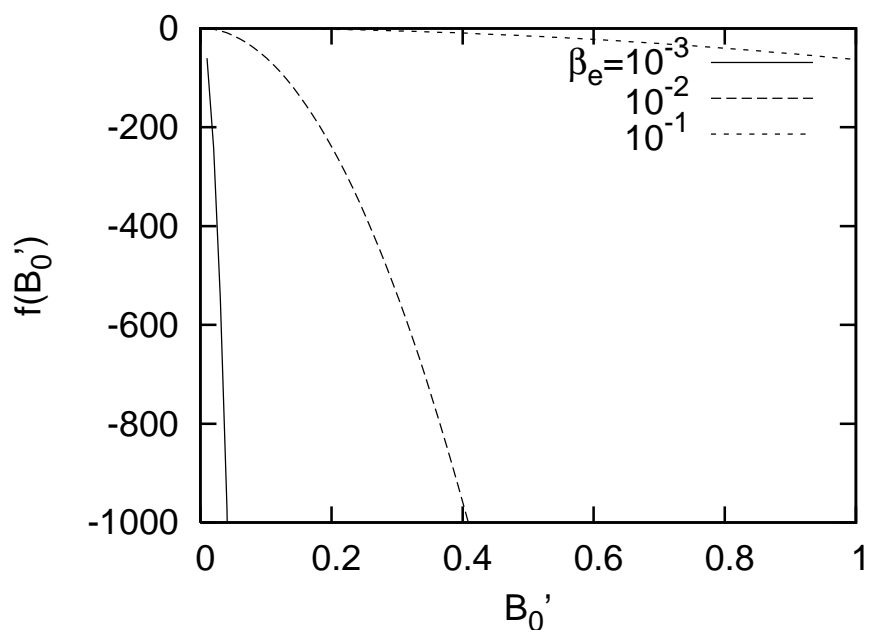


図 3.13:  $\beta_e$  を変化させた場合の  $B'_0$  に対する成長率  $f(B'_0)$  .

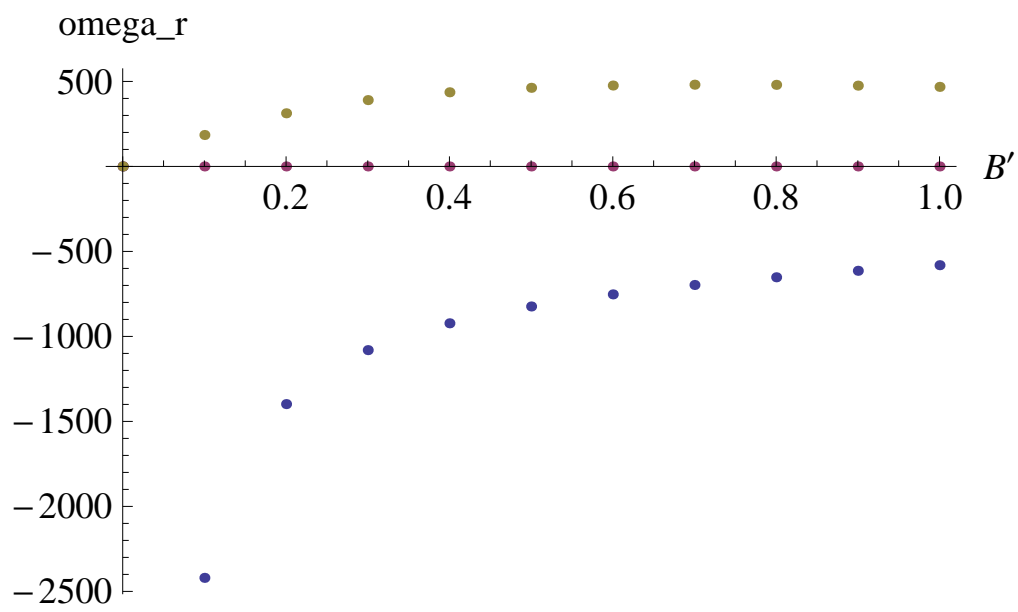


図 3.14: 磁場勾配に対する  $\omega_r$

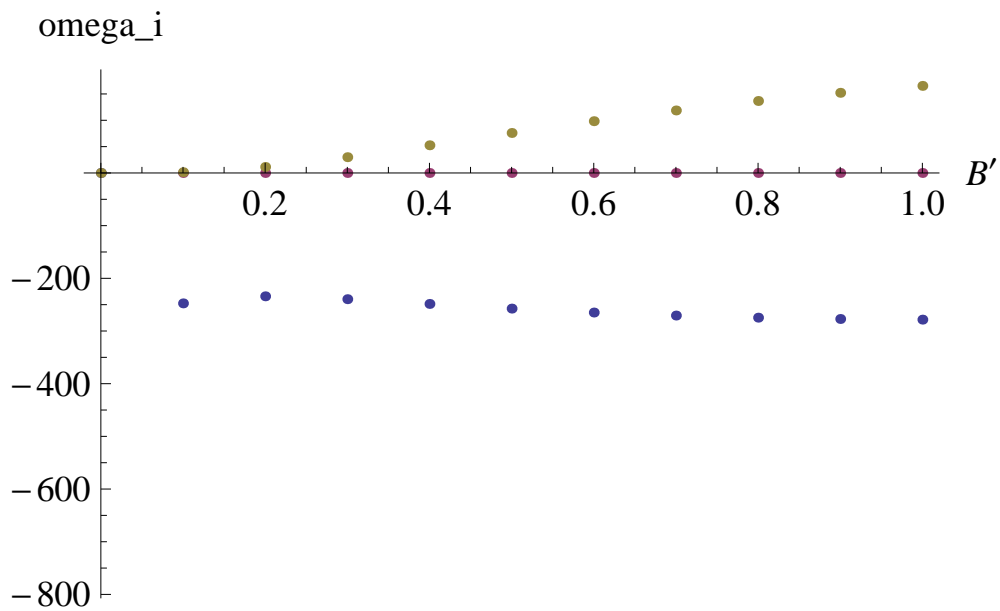


図 3.15: 磁場勾配に対する  $\omega_i$

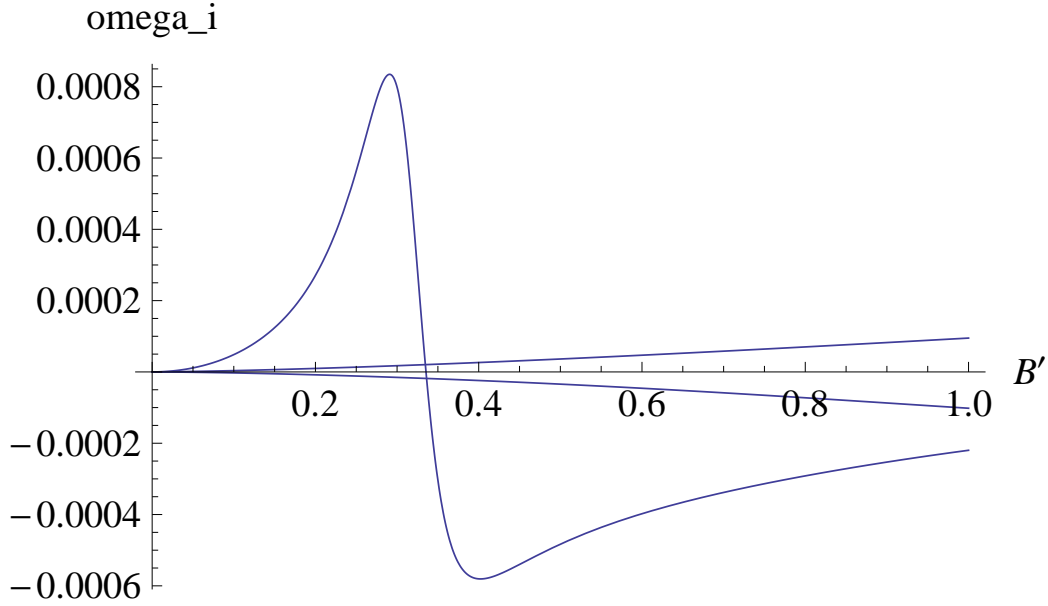


図 3.16: 磁場勾配に対する  $\omega_i$

### 3.4 $k_z C_s \sim k_y v_{de} \sim k_z v_A$ の場合

このときは電磁的であり，一般的なプラズマ中では  $k_z C_s \sim k_y v_{de} \sim k_z v_A$  のような周波数領域をとる．3.1 節の RT-1 を想定した典型的なパラメータ値によって各速度を比較すると，式 (3.1.1) (3.1.2) が得られる．これらは事実， $k_z C_s \sim k_y v_{de} \sim k_z v_A$  を満たしている．

このとき，渦度方程式と連続の式に加え，誘導方程式を必要とする．詳細は付録 A に示す．

$$\begin{aligned}
 -i\omega \left[ -k_{\perp}^2 + ik_x \left( \frac{B'_0}{B_0} + \frac{n'_0}{n_0} \right) + \left[ \frac{B''_0}{B_0} - \frac{2(B'_0)^2}{B_0^2} \left( 1 + \frac{1}{\beta_e} \right) \right] \right] v_x \\
 = \frac{ik_z v_A^2}{B_0} \left( -k_{\perp}^2 + ik_x \frac{B'_0}{B_0} \right) B_x \quad (3.4.1)
 \end{aligned}$$

$$-i \left( \omega - \frac{k_z^2 C_s^2}{\omega} \right) n_1 + n'_0 \left( 1 + \frac{\beta_e}{2} \right) v_x + \frac{k_z C_s^2 n'_0}{\omega B_0} B_x = 0 \quad (3.4.2)$$

$$-i\omega B_x = \frac{\eta}{\mu_0} \left( -k_{\perp}^2 + ik_x \frac{B'_0}{B_0} \right) B_x - \frac{k_y k_z T_e}{en_0} n_1 - ik_y v_{de} B_x + ik_z B_0 v_x \quad (3.4.3)$$

式 (3.4.1) , (3.4.2) , (3.4.3) は  $v_x, B_x, n_1$  について閉じている．

### 3.4.1 分散関係式の導出

式 (3.4.1) , (3.4.2) , (3.4.3) は行列で次のように表せる .

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_x \\ B_x \\ n_1 \end{pmatrix} = O \quad (3.4.4)$$

$$a = -i\omega \left[ -k_{\perp}^2 + ik_x \left( \frac{B'_0}{B_0} + \frac{n'_0}{n_0} \right) + \left[ \frac{B''_0}{B_0} - \frac{2(B'_0)^2}{B_0^2} \left( 1 + \frac{1}{\beta_e} \right) \right] \right]$$

$$b = -\frac{ik_z v_A^2}{B_0} \left( -k_{\perp}^2 + ik_x \frac{B'_0}{B_0} \right)$$

$$c = 0$$

$$d = n'_0 \left( 1 + \frac{\beta_e}{2} \right)$$

$$e = \frac{k_z C_s^2 n'_0}{\omega B_0}$$

$$f = -i \left( \omega - \frac{k_z^2 C_s^2}{\omega} \right)$$

$$g = ik_z B_0$$

$$h = -ik_y v_{de} + \frac{\eta}{\mu_0} \left( -k_{\perp}^2 + ik_x \frac{B'_0}{B_0} \right) + i\omega$$

$$i = -\frac{k_y k_z T_e}{en_0}$$

したがって行列式

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 0$$



から分散関係を求めることができる。

行列式 (3.4.1) を解いて以下の分散関係が得られる。

$$\begin{aligned}
& i\omega^4 \left[ -k_{\perp}^2 + ik_x \left( \frac{B'_0}{B_0} + \frac{n'_0}{n_0} \right) + \left[ \frac{B''_0}{B_0} - \frac{2(B'_0)^2}{B_0^2} \left( 1 + \frac{1}{\beta_e} \right) \right] \right] \\
& + \omega^3 \left[ -ik_y v_{de} + \frac{\eta}{\mu_0} \left( -k_{\perp}^2 + ik_x \frac{B'_0}{B_0} \right) \right] \\
& \quad \times \left[ -k_{\perp}^2 + ik_x \left( \frac{B'_0}{B_0} + \frac{n'_0}{n_0} \right) + \left[ \frac{B''_0}{B_0} - \frac{2(B'_0)^2}{B_0^2} \left( 1 + \frac{1}{\beta_e} \right) \right] \right] \\
& - i\omega^2 k_z^2 C_s^2 \left[ -k_{\perp}^2 + ik_x \left( \frac{B'_0}{B_0} + \frac{n'_0}{n_0} \right) + \left[ \frac{B''_0}{B_0} - \frac{2(B'_0)^2}{B_0^2} \left( 1 + \frac{1}{\beta_e} \right) \right] \right] \\
& - i\omega^2 \left[ k_z^2 v_A^2 \left( -k_{\perp}^2 + ik_x \frac{B'_0}{B_0} \right) \right] \\
& - \omega k_z^2 C_s^2 \left[ -ik_y v_{de} + \frac{\eta}{\mu_0} \left( -k_{\perp}^2 + ik_x \frac{B'_0}{B_0} \right) \right] \\
& \quad \times \left[ -k_{\perp}^2 + ik_x \left( \frac{B'_0}{B_0} + \frac{n'_0}{n_0} \right) + \left[ \frac{B''_0}{B_0} - \frac{2(B'_0)^2}{B_0^2} \left( 1 + \frac{1}{\beta_e} \right) \right] \right] \\
& + i\omega \frac{k_y k_z^2 C_s^2 T_e n'_0}{en_0 B_0} \left[ -k_{\perp}^2 + ik_x \left( \frac{B'_0}{B_0} + \frac{n'_0}{n_0} \right) + \left[ \frac{B''_0}{B_0} - \frac{2(B'_0)^2}{B_0^2} \left( 1 + \frac{1}{\beta_e} \right) \right] \right] \\
& - i\omega \frac{k_y k_z^2 v_A^2 T_e n'_0}{en_0 B_0} \left( 1 + \frac{\beta_e}{2} \right) \left( -k_{\perp}^2 + ik_x \frac{B'_0}{B_0} \right) \\
& - k_z^2 C_s^2 \left[ k_z^2 v_A^2 \left( -k_{\perp}^2 + ik_x \frac{B'_0}{B_0} \right) \right] \\
& = 0
\end{aligned} \tag{3.4.5}$$

得られた分散関係から  $\omega = Re(\omega) + iIm(\omega)$  という関係式を導きたいが、 $\omega$  についての4次方程式であり、容易には導くことができない。したがって、3.1節の典型的なパラメータ値を代入し、数値計算により、 $\omega$  を求めることにする。

図 3.17 は  $B'_0$  に対する  $\omega_r$  を 4 つの解についてそれぞれプロットしたものである .  $B'_0 = 0$  のときの  $\omega_r$  は上から (1):シアアルフベン波 , (2):イオン音波 , (3):イオン音波 , (4):シアアルフベン波 , である . 図 3.18 は  $B'_0$  に対する  $\omega_i$  を 4 つの解についてそれぞれプロットしたものである . 同オーダの成長率と減衰率を示す  $\omega_i$  が存在しており , 全体としては不安定成長していることが分かる .

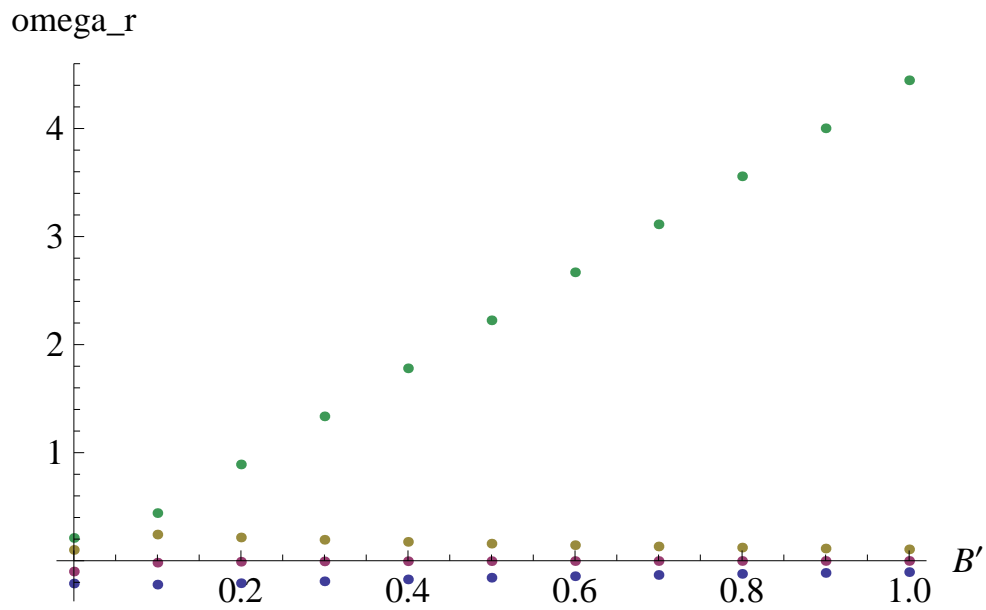


図 3.17: 磁場勾配に対する  $\omega_r$

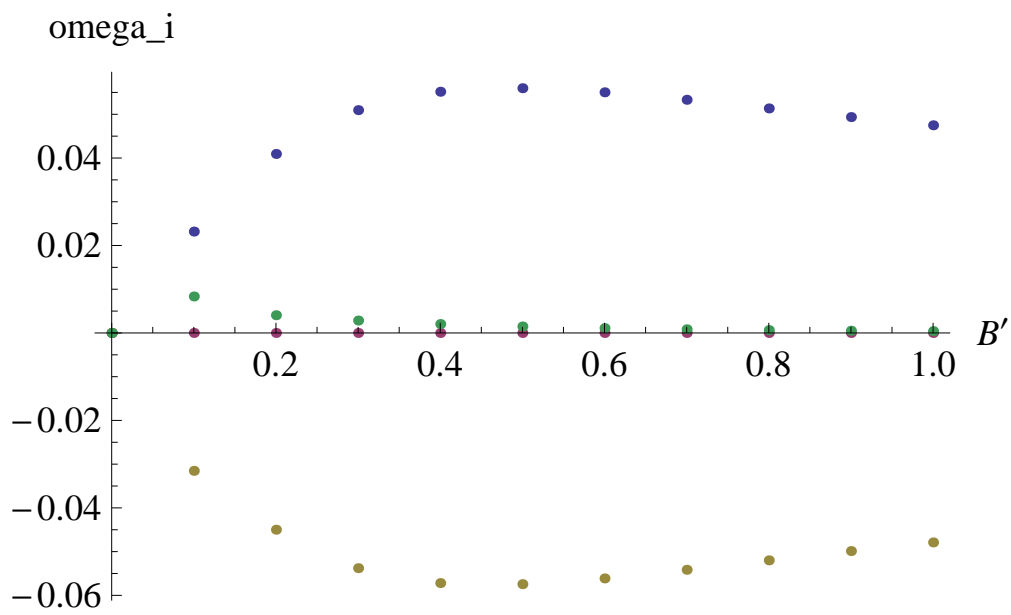


図 3.18: 磁場勾配に対する  $\omega_i$

## 第4章 結論

本研究は、空間変化に対する線形ドリフト波の安定性解析を行うことを目的として、次の2つの場合を柱にして進められた。

1. 静電的ドリフト波のスペクトル構造とそれに対する非一様密度勾配及び電気抵抗の効果
2. 静電的及び電磁的ドリフト波安定性に対する非一様磁場による  $E \times B$  ドリフト圧縮性の効果

1. の場合は Hasegawa-Wakatani 方程式を基に数値計算と解析的手法を用いて、固有値の並びや固有関数の直交性を調べた。2. の場合は1次元スラブプラズマで、 $z$  方向に磁場  $B_0 = B_0 \hat{z}$ 、 $x$  方向には密度と磁場強度の勾配があるときのモデル方程式を導き、分散関係式から安定性解析を行った。

Hasegawa-Wakatani 方程式を  $x$  方向に関する微分方程式として解いた場合、点スペクトルのみであること、固有値の集積点が  $\omega = 0$  であることが分かった。また、密度勾配が  $x$  方向にゆっくり変化する場合に、 $\eta \ll 1$  のもとで摂動論を用いて微分方程式を解き、点スペクトルのみであること、固有値の集積点が  $\omega = 0$  であること、 $O(\varepsilon)$  で固有関数の直交性が破れることが分かった。 $x$  方向の固有値問題として数値計算をし、得られた解と解析解を比較した結果、固有値  $\omega$  は0付近で密になっており、視覚的にも固有値の集積点が  $\omega = 0$  であることが確かめられた。数値解と解析解は一致していたが、 $\omega = 0$  付近で一致しないものについては、グリッド数が少ないための解像度の不足からであると考えられる。

$B_0 = B_0(x)\hat{z}$  の場合の線形ドリフト波を表すモデルを導き，分散関係から安定性解析を行った．その際，周波数のオーダーリングによって3タイプのモデルによる検討をした．

$k_z C_s \ll k_y v_{de} \ll k_z v_A$  の場合は，不安定成長すると考えられる．分散関係の近似式から求められた安定条件は

$$k_{\perp}^2 < \frac{\beta_e}{2 + \beta_e}.$$

であるが，これを満たすような  $k_{\perp}$  にした場合，分散関係の妥当性が失われてしまうためである．また，数値計算から得られた磁場勾配に対する  $\omega_i$  のグラフからも不安定成長する様子が観察できた．

$k_z C_s \sim k_y v_{de} \ll k_z v_A$  の場合は，不安定成長すると考えられる．分散関係の近似式から得られた  $B'_0$  に対する成長率のダイヤグラムは減衰を示したが，分散関係の数値計算から得られた磁場勾配に対する  $\omega_i$  のグラフでは不安定成長する解が観察できた．したがって全体としては不安定成長する． $k_z C_s \sim k_y v_{de} \sim k_z v_A$  の場合は， $\omega$  の4次方程式であり，4つ得られた解のうち，2つの解が同オーダーの  $\omega_i$  を示し，一方は不安定成長，もう一方は減衰する．したがって全体としては不安定成長している．

# 付録A 非一様磁場におけるモデル の導出

$\mathbf{B}_0 = B_0(x)\hat{z}$  のとき, Hasegawa-Wakatani 方程式のような簡約化方程式ではなく, 一般化 Ohm 則を用いた MHD の分散関係を考える. 始めは  $\partial/\partial x$  を残す.

平衡

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{B_0^2}{2\mu_0} + p_0 \right) = 0$$

$T_i = 0, T_e = \text{const.}$  として,  $p_0 = n_0 T_e$  とすると,

$$\frac{B_0 B_0'(x)}{\mu_0} + T_e n_0'(x) = 0,$$

となる.

線形化方程式

運動方程式

$$\begin{aligned} \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} &= -\nabla p + \mathbf{j} \times \mathbf{B} \\ &= -\nabla \left( p + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) + \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} \cdot \nabla \mathbf{B} \end{aligned}$$

線形化すると,

$$\rho_0 \frac{d\mathbf{v}_1}{dt} = -\nabla \left( p_1 + \frac{\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{B}_1}{\mu_0} \right) + \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{B}_0 \cdot \nabla \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_1 \cdot \nabla \mathbf{B}_0),$$

$$x \text{ 成分 : } \quad -i\omega\rho_0v_x = -\frac{\partial}{\partial x} \left( p_1 + \frac{B_0B_z}{\mu_0} \right) + \frac{1}{\mu_0} ik_z B_0 B_x \quad (\text{A.0.1})$$

$$y \text{ 成分 : } \quad -i\omega\rho_0v_y = -ik_y \left( p_1 + \frac{B_0B_z}{\mu_0} \right) + \frac{1}{\mu_0} ik_z B_0 B_y \quad (\text{A.0.2})$$

$$\begin{aligned} z \text{ 成分 : } \quad -i\omega\rho_0v_z &= -ik_z \left( p_1 + \frac{B_0B_z}{\mu_0} \right) + \frac{1}{\mu_0} (ik_z B_0 B_z + B'_0(x) B_x) \\ &= -ik_z p_1 + \frac{B'_0(x)}{\mu_0} B_x \end{aligned} \quad (\text{A.0.3})$$

である。

渦度方程式を導く。

$$\begin{aligned} -ik_y \times (\text{A.0.1}) : \quad & (-ik_y)(-i\omega\rho_0)v_x = ik_y \frac{\partial}{\partial x} \left( p_1 + \frac{B_0B_z}{\mu_0} \right) - ik_y \frac{1}{\mu_0} ik_z B_0 B_x \\ \frac{\partial}{\partial x} (\text{A.0.2}) : \quad & -i\omega \frac{\partial}{\partial x} (\rho_0 v_y) = -ik_y \frac{\partial}{\partial x} \left( p_1 + \frac{B_0B_z}{\mu_0} \right) + ik_x \frac{1}{\mu_0} ik_z B_0 B_y \end{aligned}$$

この2式を足すと，

$$-i\omega \left[ \frac{\partial}{\partial x} (\rho_0 v_y) - ik_y \rho_0 v_x \right] = \frac{ik_z B_0}{\mu_0} \left( \frac{\partial B_y}{\partial x} - ik_y B_x \right) + \frac{ik_z B'_0}{\mu_0} B_y. \quad (\text{A.0.4})$$

となる。

一般化 Ohm 則

$$\mathbf{E} = -\mathbf{v} \times \mathbf{B} + \eta \mathbf{j} + \frac{1}{ne} (\mathbf{j} \times \mathbf{B} - \nabla p_e)$$

$$\mathbf{B} \text{ に平行な成分 : } \quad \mathbf{B} \cdot \mathbf{E} = \eta \mathbf{B} \cdot \mathbf{j} - \frac{1}{ne} \mathbf{B} \cdot \nabla p_e$$

線形化すると，

$$\begin{aligned} B_0 E_z &= \eta \left( B_0 j_z - \frac{B'_0(x)}{\mu_0} B_y \right) \\ &\quad - \frac{1}{n_0 e} (ik_z B_0 p_1 + p'_0(x) B_x) - \left( \frac{1}{n} \right)_1 \frac{1}{e} \mathbf{B}_0 \cdot \nabla p_0, \\ E_z &= \eta \left( j_z - \frac{B'_0(x)}{\mu_0 B_0} B_y \right) - \frac{1}{n_0 e} \left( ik_z p_1 + \frac{p'_0(x)}{B_0} B_x \right) \end{aligned} \quad (\text{A.0.5})$$

$$\mathbf{B} \text{ に垂直な成分 : } \mathbf{E}_{\perp 1} = -\mathbf{v}_1 \times \mathbf{B}_0 ,$$

として ,

$$E_x = -v_y B_0 , \quad (\text{A.0.6})$$

$$E_y = v_x B_0 , \quad (\text{A.0.7})$$

となる.

誘導方程式

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\nabla \times \mathbf{E}$$

線形化すると ,

$$\frac{\partial \mathbf{B}_1}{\partial t} = -\nabla \times \mathbf{E}_1 ,$$

$$x \text{ 成分 : } -i\omega B_x = -ik_y E_z + ik_z E_y , \quad (\text{A.0.8})$$

$$y \text{ 成分 : } -i\omega B_y = -ik_z E_x + \frac{\partial E_z}{\partial x} , \quad (\text{A.0.9})$$

$$z \text{ 成分 : } -i\omega B_z = -\frac{\partial E_y}{\partial x} + ik_y E_x , \quad (\text{A.0.10})$$

である.

*Ampère* の法則

$$\mu_0 \mathbf{j} = \nabla \times \mathbf{B}$$

線形化すると ,

$$\mu_0 \mathbf{j}_1 = \nabla \times \mathbf{B}_1 ,$$

$$x \text{ 成分 : } \mu_0 \mathbf{j}_x = ik_y B_z - ik_z B_y , \quad (\text{A.0.11})$$

$$y \text{ 成分 : } \mu_0 \mathbf{j}_y = ik_z B_x - \frac{\partial B_z}{\partial x} , \quad (\text{A.0.12})$$

$$z \text{ 成分 : } \mu_0 \mathbf{j}_z = \frac{\partial B_y}{\partial x} - ik_y B_x , \quad (\text{A.0.13})$$



である。

連続の式

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla n + n \nabla \cdot \mathbf{v} = 0$$

線形化すると，

$$\begin{aligned} \frac{\partial n_1}{\partial t} + \mathbf{v}_1 \cdot \nabla n_0 + n_0 \nabla \cdot \mathbf{v}_1 &= 0, \\ -i\omega n_1 + n'_0(x)v_x + n_0 \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} + ik_y v_y + ik_z v_z \right) &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A.0.14})$$

である。

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

線形化すると，

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{B}_1 &= 0, \\ \frac{\partial B_x}{\partial x} + ik_y B_y + ik_z B_z &= 0, \end{aligned} \quad (\text{A.0.15})$$

である。

式 (A.0.5) に式 (A.0.13) を代入．

$$E_z = \frac{\eta}{\mu_0} \left( \frac{\partial B_y}{\partial x} - ik_y B_x - \frac{B'_0}{B_0} B_y \right) - \frac{1}{n_0 e} \left( ik_z T_e n_1 + \frac{p'_0}{B_0} B_x \right) \quad (\text{A.0.16})$$

式 (A.0.8) に式 (A.0.16) と式 (A.0.7) を代入．

$$-i\omega B_x = -ik_y \left[ \frac{\eta}{\mu_0} \left( \frac{\partial B_y}{\partial x} - ik_y B_x - \frac{B'_0}{B_0} B_y \right) - \frac{1}{n_0 e} \left( ik_z T_e n_1 + \frac{p'_0}{B_0} B_x \right) \right] + ik_z B_0 v_x \quad (\text{A.0.17})$$

式 (A.0.9) に式 (A.0.16) と式 (A.0.6) を代入．

$$-i\omega B_y = ik_z B_0 v_y + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\eta}{\mu_0} \left( \frac{\partial B_y}{\partial x} - ik_y B_x - \frac{B'_0}{B_0} B_y \right) - \frac{1}{n_0 e} \left( ik_z T_e n_1 + \frac{p'_0}{B_0} B_x \right) \right] \quad (\text{A.0.18})$$

式 (A.0.10) に式 (A.0.6) と式 (A.0.7) を代入 .

$$\begin{aligned}
 -i\omega B_z &= -\frac{\partial}{\partial x}(v_x B_0) + ik_y(-v_y B_0) \\
 &= -B_0 \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} + ik_y v_y \right) - B'_0 v_x \quad (\text{A.0.19})
 \end{aligned}$$

ここからは  $B_z = 0$  とする . これは , 速い磁気音波を落とすことに対応している .  
このとき式 (A.0.19) から ,

$$0 = -B_0 \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} + ik_y v_y \right) - B'_0 v_x ,$$

となる . これを  $ik_y v_y$  について解くと ,

$$\begin{aligned}
 ik_y v_y &= -\frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{B'_0}{B_0} v_x \\
 &= -\frac{1}{B_0} \frac{\partial}{\partial x} (B_0 v_x) , \quad (\text{A.0.20})
 \end{aligned}$$

となる . また , 式 (A.0.15) からは ,

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial B_x}{\partial x} + ik_y B_y &= 0 . \\
 ik_y B_y &= \frac{\partial B_x}{\partial x} , \quad (\text{A.0.21})
 \end{aligned}$$

が得られる .

次に式 (A.0.14) に式 (A.0.3) を代入して  $v_z$  を消去する .

$$\begin{aligned}
 i\omega n_1 + n'_0 v_x + n_0 \left[ \frac{\partial v_x}{\partial x} + ik_y v_y + ik_z \frac{-ik_z T_e n_1 + \frac{B'_0}{\mu_0} B_x}{-i\omega m n_0} \right] &= 0 \\
 i \left( \omega - \frac{k_z^2 T_e}{\omega m} \right) n_1 + n'_0 v_x + n_0 \frac{\partial v_x}{\partial x} + ik_y n_0 v_y - \frac{k_z B'_0}{\omega m \mu_0} B_x &= 0 \quad (\text{A.0.22})
 \end{aligned}$$

ここで式 (A.0.20) を使って  $v_y$  を消去すると ,

$$\begin{aligned}
 i \left( \omega - \frac{k_z^2 T_e}{\omega m} \right) n_1 + n'_0 v_x + n_0 \frac{\partial v_x}{\partial x} - n_0 \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{B'_0}{B_0} v_x \right) - \frac{k_z B'_0}{\omega m \mu_0} B_x &= 0 , \\
 i \left( \omega - \frac{k_z^2 T_e}{\omega m} \right) n_1 + n'_0 \left( 1 - \frac{n_0 B'_0}{n'_0 B_0} \right) v_x - \frac{k_z B'_0}{\omega m \mu_0} B_x &= (\text{A00,23})
 \end{aligned}$$

となる。また，式 (A.0.4)，式 (A.0.17) から式 (A.0.20) と式 (A.0.21) を使って  $v_y$ ， $B_y$  を消去する。

$$\begin{aligned} -i\omega \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left[ \rho_0 \frac{i}{k_y} \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{B'_0}{B_0} v_x \right) \right] - ik_y \rho_0 v_x \right] \\ = \frac{ik_z B_0}{\mu_0} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{i}{k_y} \frac{\partial B_x}{\partial x} \right) - ik_y B_x + \frac{B'_0}{B_0} \frac{i}{k_y} \frac{\partial B_x}{\partial x} \right] \quad (\text{A.0.24}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -i\omega B_x = -ik_y \left[ \frac{\eta}{\mu_0} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{i}{k_y} \frac{\partial B_x}{\partial x} \right) - ik_y B_x - \frac{B'_0}{B_0} \frac{i}{k_y} \frac{\partial B_x}{\partial x} \right] - \frac{1}{n_0 e} \left( ik_z T_e n_1 + \frac{T_e n'_0}{B_0} B_x \right) \right] \\ + ik_z B_0 v_x \quad (\text{A.0.25}) \end{aligned}$$

ここからは局所分散関係を導く。

まず式 (A.0.24)  $\times (-ik_y)$  としておく。

$$\begin{aligned} -i\omega \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left[ \rho_0 \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{B'_0}{B_0} v_x \right) \right] - ik_y^2 \rho_0 v_x \right] \\ = \frac{ik_z B_0}{\mu_0} \left[ \frac{\partial^2 B_x}{\partial x^2} - k_y^2 B_x + \frac{B'_0}{B_0} \frac{\partial B_x}{\partial x} \right] \\ -i\omega \rho_0 \left[ -k_y^2 v_x + \left( \frac{B'_0}{B_0} \right)' v_x + \frac{B'_0}{B_0} ik_x v_x + \frac{n'_0}{n_0} \left( ik_x v_x + \frac{B'_0}{B_0} v_x \right) - k_y^2 v_x \right] \\ = \frac{ik_z B_0}{\mu_0} \left( -k_x^2 B_x - k_y^2 B_x + \frac{B'_0}{B_0} ik_x B_x \right) \\ -i\omega \left[ -k_\perp^2 + ik_x \left( \frac{B'_0}{B_0} + \frac{n'_0}{n_0} \right) + \left( \frac{B'_0}{B_0} \right)' + \frac{n'_0}{n_0} \frac{B'_0}{B_0} \right] v_x \\ = \frac{ik_z v_A^2}{B_0} \left( -k_\perp^2 + ik_x \frac{B'_0}{B_0} \right) B_x \quad (\text{A.0.26}) \end{aligned}$$

ここで  $v_A^2 = \frac{B_0^2}{\mu_0 \rho_0}$  を使った。

また式 (A.0.25) は，

$$-i\omega B_x = \frac{\eta}{\mu_0} \left( -k_\perp^2 + ik_x \frac{B'_0}{B_0} \right) B_x - \frac{k_y k_z T_e}{n_0 e} n_1 - ik_y v_{de} B_x + ik_z B_0 v_x, \quad (\text{A.0.27})$$

となる．ここで  $v_{de} = -\frac{T_e n'_0}{n_0 e B_0}$  を使った．

また，式 (A.0.23) は，

$$i \left( \omega - \frac{k_z^2 C_s^2}{\omega} \right) n_1 + n'_0 \left( 1 - \frac{n_0 B'_0}{n'_0 B_0} \right) v_x - \frac{k_z B'_0}{\omega m \mu_0} B_x = 0, \quad (\text{A.0.28})$$

となる．ここで  $C_s^2 = \frac{T_e}{m}$  を使った．

次に静電的な場合を考える．

まず，一般化 Ohm 則で磁場摂動はないとして，

B 成分

$$E_z = \eta j_z - \frac{i k_z T_e}{n_0 e} n_1, \quad (\text{A.0.29})$$

となる．B に垂直な成分は式 (A.0.7)

$$E_y = v_x B_0$$

ここで  $E_z = -i k_z \phi$ ， $E_y = -i k_y \phi$  とすると，

$$E_z = -i k_z \frac{v_x B_0}{-i k_y} = \frac{k_z B_0}{k_y} v_x,$$

である．式 (A.0.29) 全体に  $k_y$  を掛ける．

$$k_z B_0 v_x = k_y \left( \eta j_z - \frac{i k_z T_e}{n_0 e} n_1 \right) \quad (\text{A.0.30})$$

連続の式は，式 (A.0.28) から，

$$-i \left( \omega - \frac{k_z^2 C_s^2}{\omega} \right) n_1 + n'_0 \left( 1 - \frac{n_0 B'_0}{n'_0 B_0} \right) v_x = 0, \quad (\text{A.0.31})$$

となる．式 (A.0.31) を式 (A.0.30) に代入して， $n_1$  を消去すると，

$$k_z B_0 v_x = k_y \eta j_z - \frac{k_y k_z B_0 v_{de} \left( 1 - \frac{n_0 B'_0}{n'_0 B_0} \right)}{\omega - \frac{k_z^2 C_s^2}{\omega}} v_x,$$

$$\left[ 1 - \frac{k_y v_{de} \left( 1 - \frac{n_0 B'_0}{n'_0 B_0} \right)}{\omega - \frac{k_z^2 C_s^2}{\omega}} \right] v_x = \frac{k_y \eta}{k_z B_0} j_z , \quad (\text{A.0.32})$$

となる .

運動方程式の  $x, y$  成分はそれぞれ,

$$-i\omega \rho_0 v_x = -\frac{\partial p_1}{\partial x} + j_y B_0 , \quad (\text{A.0.33})$$

$$-i\omega \rho_0 v_y = -ik_y p_1 + j_x B_0 , \quad (\text{A.0.34})$$

である .

$$\text{式 (A.0.33)} \times \left( \frac{-ik_y}{B_0} \right) : -i\omega \rho_0 v_x = -\frac{\partial p_1}{\partial x} + j_y B_0 \quad (\text{A.0.35})$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\text{式 (A.0.34)}}{B_0} \right) : -i\omega \rho_0 v_y = -ik_y p_1 + j_x B_0 \quad (\text{A.0.36})$$

2 式を足して渦度方程式を導く .

$$-i\omega \left[ \frac{\rho_0}{B_0} \left( -ik_y v_x + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) + \left( \frac{\rho_0}{B_0} \right)' v_y \right] = \frac{ik_y T_e B'_0}{B_0^2} n_1 - \left( \frac{\partial j_x}{\partial x} + ik_y j_y \right)$$

ここで準中性条件  $\nabla \cdot \mathbf{j} = 0$  を使うと,

$$-i\omega \left[ \frac{\rho_0}{B_0} \left( -ik_y v_x + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) + \left( \frac{\rho_0}{B_0} \right)' v_y \right] = \frac{ik_y T_e B'_0}{B_0^2} n_1 - ik_z j_z , \quad (\text{A.0.37})$$

である . さらに,

$$E_x = -\frac{\partial \phi}{\partial x} = -v_y B_0 ,$$

$$E_y = -ik_y \phi = v_x B_0 ,$$

より

$$v_y = \frac{1}{B_0} \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{1}{B_0} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{B_0 v_x}{-ik_y} \right) = \frac{i}{k_y B_0} \frac{\partial}{\partial x} (B_0 v_x) , \quad (\text{A.0.38})$$

となる . これを式 (A.0.37) に代入して,

$$\begin{aligned} -i\omega \left[ \frac{\rho_0}{B_0} \left( -ik_y v_x + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{i}{k_y B_0} \frac{\partial}{\partial x} (B_0 v_x) \right] \right) + \left( \frac{\rho_0}{B_0} \right)' \frac{i}{k_y B_0} \frac{\partial}{\partial x} (B_0 v_x) \right] \\ = \frac{ik_y T_e B'_0}{B_0^2} n_1 - ik_z j_z , \quad (\text{A.0.39}) \end{aligned}$$

となる. 式 (A.0.32) を使って,  $j_z$  を消去すると,

$$\begin{aligned}
 & -i\omega \left[ \frac{\rho_0}{B_0} \left( -ik_y v_x + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{i}{k_y B_0} \frac{\partial}{\partial x} (B_0 v_x) \right] \right) + \left( \frac{\rho_0}{B_0} \right)' \frac{i}{k_y B_0} \frac{\partial}{\partial x} (B_0 v_x) \right] \\
 & = \frac{ik_y T_e B_0'}{B_0^2} n_1 - \frac{ik_z^2 B_0}{k_y \eta} \left[ 1 - \frac{k_y v_{de} \left( 1 - \frac{n_0 B_0'}{n_0' B_0} \right)}{\omega - \frac{k_z^2 C_s^2}{\omega}} \right] v_x, \quad (\text{A.0.40})
 \end{aligned}$$

である.

# 謝辞

本研究を行うにあたり，研究室の皆様には大変お世話になりました．この場を借りて深く感謝の意を表したいと思います．

吉田善章教授には，研究への取組み方から聴衆に伝わりやすい発表の仕方に至るまで幅広いご指導を頂きました．先生の仰ることは常に本質的であり，研究以外でも活かせる，今後の糧となるべき姿勢を学ばせて頂いたと感じています．

古川勝准教授には，指導教官として言葉には尽くせぬ程の助言・助力を頂きました．先生なしにはこの研究は成り立たなかったはずであり，自分の不勉強が身に染みる思いです．私のような出来の悪い学生の指導にあたらせてしまったことをお詫びすると同時に深く感謝したいと思います．

森川先生，齋藤先生には研究の面で直接お世話になることはありませんでしたが，一緒に食事させて頂いたり，お話をさせて頂いたりして，快適な研究生生活を送ることができました．

梶村さん北山さんには旅費の申請など，事務的な面で非常にお世話になりました．また，おいしいコーヒーやお菓子を頂くことも多く，有意義なりラックスタ임을過ごせました．

研究室の先輩方である，沼澤さん，矢野さん，播磨さん，中津さん，林さんにはとても仲良くして頂いたことを感謝したいと思います．そのおかげで楽しい研究生生活を送ることができました．

同期の川面君，水島君は研究に対する情熱が大きく，私も同期として大いに刺激を受けました．また，2人のサポートのおかげで良い学生生活を送れたと感じています．

後輩である，江本君，小林君，杉浦君，vogel 君には先輩としてたいしたこと  
できませんでしたが，今後の充実した研究生活を祈っています．

最後に，何不自由なく勉強に打ち込める環境を提供してくれた両親に深く感謝  
したいと思います．

忠地慧



## 参考文献

- [1] A. Hasegawa and K. Mima , Phys. Fluids 21 (1978) 87.
- [2] A. Hasegawa and M. Wakatani, Phys. Rev. Letters 50 (1983) 682.
- [3] A. Hasegawa, Comments Plasma Phys. Controlled Fusion 1,147 (1987)
- [4] A. Hasegawa, L. Chen, and M. E. Mauel, Nucl. Fusion, 30, 2405 (1990)
- [5] S. M. Mahajan and Z. Yoshida, Phys. Rev. Lett. 81, 4863 (1998)
- [6] Z. Yoshida and S. M. Mahajan, J. Math Phys. 40, 5080 (1999)
- [7] Z. Yoshida and S. M. Mahajan, Phys. Rev. Lett. 88, 095001 (2002)
- [8] Z. Yoshida, Y. Ogawa, J. Morikawa, M. Furukawa, H. Saitoh, M. Hirota, D. Hori, J. Shiraishi, S. Watanabe, S. Numazawa, Y. Yano, and J. Suzuki, Fusion Science and Technology 51, 2T 29-33 (2007)
- [9] H. Sugama, M. Wakatani and A. Hasegawa, Phys. Fluids 31 (1988) 1601.
- [10] W. Horton, Rev. Mod. Phys. 71, 735 (1999)
- [11] B. D. Scott, New J. Phys. 7. 92 (2005)
- [12] J. M. Dewhurst, B. Hnat, and R. O. Dendy, Phys. Plasmas 16, 072306 (2009)
- [13] R. D. Hazeltine and J. D. Meiss, "Plasma Confinement" (Dover, Mineda, New York, 2003)

- [14] R.J.Goldston and P.H.Rutherford, Introduction to Plasma Physics (IOP publishing, 1995)
- [15] S. M. Krimingis et al. , Science 206, 977 (1979)
- [16] L. J. Lanzerotti et al. , Science 257, 1518 (1992)
- [17] Francis F. Chen, "Introduction to Plasma Physics" (Plenum Press, New York, 1974)
- [18] K. Nishikawa and M. Wakatani, "Plasma Physics" (Springer, 1999)
- [19] J. P. Freidberg, "Ideal Magnetohydrodynamics" (Plenum Press, New York, 1987)
- [20] 宮本健郎 , プラズマ物理・核融合 (東京大学出版会 , 東京 , 2004 )
- [21] 長谷川晃 , 日本物理学会誌 , 第 35 卷 , 第 2 号 ( 1980 )
- [22] 天野恒雄 「プラズマに於る最近の話題 ( III )」
- [23] 佐伯紘一 , プラズマ・核融合学会誌 , 第 77 卷 , 第 4 号 ( 2001 )
- [24] 洲鎌英雄 , 若谷誠宏 , 数理解析研究所講究録 , 800 卷 , 197 ( 1992 )

# 学会発表

1. 日本物理学会 2009 年秋季大会 口頭発表

「磁気圏型プラズマ閉じ込めにおける抵抗性ドリフト波安定性解析」

忠地慧，古川勝

2. 日本物理学会 2010 年春季大会 口頭発表

「線形ドリフト波安定性解析における非一様磁場の効果」

忠地慧，古川勝