

東京大学大学院新領域創成科学研究科
基盤科学研究系
先端エネルギー工学専攻

平成22年度

修士論文

非線形変調するアルフベン波の
ハミルトン構造と可積分性の解析

2011年2月提出

指導教官 吉田 善章 教授

47096059 江本 伸悟

目次

第 1 章 序論	7
第 2 章 アルフベン波の数理：背景知識と先行研究	13
2.1 ハミルトン力学系とカシミール元	14
2.1.1 一般化されたハミルトン力学系	14
2.1.2 カシミール元	16
2.1.3 Beltrami 平衡	16
2.2 MHD 方程式と Beltrami 平衡	17
2.2.1 MHD 方程式の導出	18
2.2.2 Ideal MHD 方程式のハミルトン構造	20
2.2.3 Hall MHD 方程式のハミルトン構造	22
2.2.4 Hall MHD 方程式の渦構造	23
2.2.5 緩和状態としての Beltrami 平衡	25
2.2.6 線形 Beltrami 条件	29
2.3 MHD 方程式のアルフベン波	30
2.3.1 Ideal MHD 方程式のアルフベン波	31
2.3.2 Hall HMD のアルフベン波	32
2.3.3 アルフベン波に関する他の理論の紹介	33

2.4	非線形変調するアルフベン波のモデル	34
2.4.1	空間 1 次元の場合に一般化された Beltrami-Bernoulli 条件 . . .	35
2.4.2	逓減摂動法による非線形アルフベン波方程式の導出	37
2.4.3	非線形アルフベン波方程式のハミルトン構造	41
第 3 章	非線形アルフベン波方程式の定常進行波の解析	43
3.1	定常進行アルフベン波方程式の導出	44
3.2	定常進行アルフベン波方程式が持つ保存量	45
3.2.1	エンストロフィー	46
3.2.2	擬角運動量	47
3.3	定常進行アルフベン波方程式のハミルトン構造と可積分性	48
3.3.1	ハミルトン構造	48
3.3.2	ハミルトニアンの構成	49
3.3.3	可積分性	51
3.4	定常進行アルフベン波方程式の解	51
3.5	変調の無い解 (振幅一定解)	54
第 4 章	定常進行波の構造	57
4.1	ポテンシャル関数に応じた解の分類	58
4.2	変調の無い解 (無変調解)	66
4.3	周期的な変調をする解 (周期変調解)	68
4.4	局所的な変調をする解 (局所変調解)	71
4.4.1	局所変調解を得るための条件	71

4.4.2	局所変調条件の解析	72
4.4.3	局所変調解の実例	74
4.5	特異的な変調をする解 (特異解)	76
4.5.1	特異解を得るための条件	76
4.5.2	次数 $p(1 < p < 2)$ のポテンシャルによる運動	77
4.5.3	特異解の波形構造	79
第 5 章	結論	83
付録 A	ポテンシャル $-\frac{dU}{dx^2}(x^2)$ の Lipschitz 連続性	88
付録 B	変数変換による方程式の遷移	92
謝辞		101

目 次

3.1	二乗振幅一定解	56
4.1	l_0 と w_0 の値に応じたポテンシャル形状の分岐図	60
4.2	ポテンシャル関数が周期変調解を持つ条件	69
4.3	二乗振幅の周期変調	70
4.4	ポテンシャル関数が局所変調解を持つ条件	72
4.5	局所変調解を持つポテンシャル関数 $U(x^2)$	75
4.6	二乗振幅の局所変調	76
4.7	二乗振幅の不規則な局所変調	80
4.8	特異解を持つポテンシャル関数 $U(x^2)$	80
4.9	特異波の振幅変調のイメージ	81
5.1	周期、ソリトン、特異波のイメージ図	85
5.2	プラズマの秩序構造：俯瞰図	87
A.1	ポテンシャル関数 $U(x^2)$	89
A.2	ポテンシャル関数 $\tilde{U}(y)$	90

概要

プラズマは、例えば太陽コロナに見られる構造のように、流れを持つ構造を自己組織化し得る。ハミルトン力学系の観点からプラズマが形成し得る秩序構造(可積分構造)を考察するとき、その構造は系が持つ保存量によって特徴付けられる。生成作用素の位相欠陥に由来する保存量：カシミール元によって特徴付けられる秩序構造：Beltrami 平衡は、流れを持つ非自明な構造を取ることができる。また、Beltrami 平衡解をガリレイ変換することによって、定常進行波解を構成できることが知られている。このように、Beltrami 平衡解を基にして解を構成していくことによって、プラズマの秩序構造をどこまでカバーすることができるのかということが本論文の関心事である。特に、このような構造に摂動が加わったときの可積分性の揺らぎ、即ち、全ての秩序が失われ構造が崩れてしまうのか、それとも何らかの秩序を保持した新たな秩序状態が出現するのかに着目している。

本論文では、Beltrami 平衡から生じる秩序構造：アルフベン波に圧縮性(摂動)が加わったときの変調構造に関して、Hall MHD 方程式を用いた解析が為される。その結果、定常進行する変調波は秩序的な波形を持つことを示される。また、具体的な波形として、全域に渡って周期的な変調している波形、或る一箇所でのみ局所的に変調している波形、更に、無変調領域と局所変調領域とが不規則に組み合わさった波形が示される。アルフベン波解の周辺に広がる可積分構造についての解析が進められた。

第 1 章

序論

プラズマは、荷電粒子の運動と電磁場の変動とが結合して発展を遂げていく、非線形な複雑系である [1]. この非線形性、言わば自己参照性によってプラズマは、例えば太陽コロナに見られるような非自明な構造 [2] を自己組織化する.

このような自然界に生ずる自己組織化に関しては、非平衡開放系に見られる散逸構造 [3] としての文脈から語られることも多いが、本論文では緩和によってもたらされる構造 [4] として、プラズマの構造に関する考察を進めていく.

緩和構造として先ず初めに思い浮かべるのは、系のエネルギーが最小化され、マクロな運動の消失した平衡状態である. しかし、プラズマに見られる緩和構造には、エネルギー最小状態として特徴付けられる自明な構造とは別に、マクロな運動を伴う非自明な構造が存在する [5, 6]. このマクロな運動、即ち流れを伴う構造に関して、解き明かすべき問題が大きく分けて 2 つ存在する. 1 つは、このような流れを持った構造というのは、一体どのようにして存在しうるのか、数理的な観点から言って、これらの構造の起源はどこに存在するという問題である. もう 1 つは、その存在が数理的

に示唆されたとして、自然界の中ではどのようにして系がその構造に達しうるのかという問題である。

このうち、後者の、構造の生起可能性に関する問題については、選択的散逸 [7] という概念の下に、解明が進められている。選択的散逸とは、少なくとも 2 つ以上の保存量を持つ系に散逸が加わったとき、ある保存量 A の散逸速度が、他の保存量の散逸速度よりも速く、保存量 A のみが選択的に散逸されるようなことを言う。このとき、保存量 A が散逸によって最小の値を取った時点で、他の保存量の散逸は実質的には進んでおらず、未だ保存された状態にある。これらの保存量が、ある種の束縛条件となって系の構造を与えるという理論である。

一方で本論文が焦点を当てるのは、前者の構造の起源に関する問題である。流れを持つ構造の数理的な起源はどこにあるのか、これに関しては、ハミルトン力学系の枠組みから、解明が進められている [1]。ハミルトン力学系とは大雑把に言うと、ハミルトニアン \mathcal{H} と生成作用素 A によって特徴付けられる系である。このハミルトン力学系の観点から、プラズマが形成し得る秩序的な構造：可積分構造を考察したときに、この秩序構造は系が持つ保存量によって特徴付けられるはずである。2.1 節で詳しく述べられるが、ハミルトン力学系が持つ保存量の中には、ハミルトニアン \mathcal{H} の対称性に由来するものと、生成作用素 A のポアッソン代数がもつ位相欠陥に由来するものがある。後者は、カシミール元と呼ばれる。通常、ハミルトニアンの極値点として得られる平衡構造は、エネルギー最小状態という自明な構造しか持たない。しかし、このカシミール元を用いて変換されたハミルトニアン（エネルギーカシミール関数）の極値点は、マクロな運動：流れを含んだ多様な構造を持ちうる。

カシミール元を起源とした流れを持つ構造が存在する。では、このような構造は、

プラズマが持つ秩序的な構造の一体全体どれだけの領域をカバーしているのだろうか、というのが次に浮かんでくる疑問である。逆に言うなれば、カシミール元から得られる構造を基にして、プラズマの秩序構造をどれだけ構成していけるのだろうか。

これも詳しくは2.1節で述べられるが、カシミール元から直接得られる構造は Beltrami 平衡と呼ばれ、これはハミルトン力学系の定常解である。しかし、プラズマの秩序構造と言ったときに、そこには平衡構造の他にも、例えば定常進行波のような、波としての秩序構造も存在し得る。では、カシミール元が説明し得る構造は平衡構造に限られており、波のような構造に対しては沈黙を保つのかと言えそうではない。数理的には、Beltrami 平衡解をガリレイ変換することで、定常進行波解を得ることができる。つまり、観測者が動きながら Beltrami 平衡を眺めることで、あたかもそれが波として伝わっているように見えるということである。注意されたいのは、エネルギー最小状態のような一様構造をガリレイ変換したとしても、このような波は得られないということである。一様なものはどのような座標系から眺めようとも一様であり、ガリレイ変換が有効な意味を持つのは、Beltrami 平衡が流れを持った非自明な構造であるためである。

また、カシミール元から得られる構造が、摂動に対してどのような振る舞いを見せるのかというのも、非常に興味深い問題である。摂動が加わったときに、そこに存在した全ての秩序が破壊され、構造が一挙にカオス的なものへと変貌してしまうのか、あるいは、何らかの秩序が維持された、新たな秩序構造が形成されるのか。後者の場合であれば、カシミール元から得られる構造の周辺にも秩序的な構造が存在しており、それが摂動によって顕わとなるのだと言えるだろう。

このようにして、カシミール元から得られる既知の構造をもとにして、平衡構造か

ら定常進行波構造へと、また無摂動の構造から摂動のある構造へと、秩序構造の裾野を広げていくことができる。

本論文が具体的に解析の光を当てるのは、アルフベン波 [8] に摂動が加わったとき生じる構造についてである。プラズマ中を磁力線に沿って一次元的に伝わるアルフベン波は、上述の言葉を使って説明するならば、Beltrami 平衡をガリレイ変換することによって得られる、カシミール元を起源とした秩序構造である。このアルフベン波に摂動を加えた構造を解析していくことによって、カシミール元を基にした秩序構造の裾野を探索しようというのが、本論文の目的である。

この解析を行うにあたって用いるのは、プラズマの流体描像を記述する Magneto Hydro Dynamic 方程式である。MHD 方程式も、近似の程度や扱うスケールの違いによって種類が分かれるが、本論文で用いられるのは、ideal MHD 方程式と Hall MHD 方程式 [9] である。両者の違いは、先ず ideal MHD が無分散の方程式であるのに対して、Hall MHD 方程式は分散を持つ [10] という点にある。

Hall MHD 方程式から得られるアルフベン波に摂動が加わったとき、例えば定常進行波のような、波形を崩さずに伝搬する波は存在するであろうか。Hall MHD は波を崩す効果：分散性を有するため、この問いは自明な問いではないが、本研究の解析の結果、このような定常進行波が存在するということが示される。

分散性非線形偏微分方程式が持つ秩序構造に関連して、ソリトンとカオスの研究に関して簡単に振り返ってみよう [11, 12]。ソリトンは分散型非線形偏微分方程式の孤立波が示す秩序的な現象として 1960 年代に発見された。また同じく 1960 年代、カオスは少数自由度の非線形力学系が示す無秩序な現象としてその存在を認識されるようになった。秩序とは何かを考えることは、裏を返せば無秩序とは何かを考えるこ

とへと繋がる。ソリトンとカオスとは、言わば裏表の関係としてその発展を遂げて行くこととなる。

ソリトンが分散型非線形偏微分方程式の秩序構造を表すというのは、単にソリトンが方程式の定常進行波解であるというよりも強い意味を持っている。その意味する所は、ソリトン方程式は、無限自由度のハミルトン力学系として積分可能であり、この初期値問題の解がソリトン解によって構成されるということである。また、ハミルトン力学系の文脈では、カオスとは方程式の積分不可能性を意味する。3体問題のような有限自由度の非線形力学系でさえ非可積分(カオス)であることが知られていた当時、ソリトン方程式のような無限自由度の非線形波動方程式が可積分であるということは大きな衝撃であった。

Hall MHD 方程式が取り扱う構造には、乱流や層流のような様々な構造が含まれており、これら全てを、ソリトン方程式の場合のように、特定の基本解から構成できる秩序構造として捉える訳にはいかない。しかし、カシミール元によって得られる構造を基に、Hall MHD 方程式の秩序構造：可積分構造をどこまでカバーできるのかという問題を突き詰めていけば、それはどのような場合に乱流のようなカオス的構造が生まれるのかを知ることへも繋がるであろう。秩序構造とカオス構造は言わば図と地の関係であり、図である秩序構造の輪郭を知ることが、地であるカオス構造の輪郭を知ることへも繋がるのである。

本論文ではこのような問題意識を携え、圧縮性の影響の下でアルフベン波に摂動が加わり、非線形変調が生じる際、一体どのような変調構造が生起するかについて解析を行う。

第2章前半は本論文の背景知識の紹介である。ハミルトン力学系とカシミール元、

MHD 方程式と Beltrami 平衡, 緩和現象の数理, アルフベン波の数理, に関して述べる. 第 2 章後半は先行研究の紹介である. アルフベン波の圧縮性を考慮に入れるために Beltrami 条件を一般化し, 系を単純化するために漸減摂動法を行使する. また, そこから得られる非線形アルフベン波方程式のハミルトン構造について述べる. 第 3 章では, 非線形アルフベン波方程式の定常進行波の構造に関して解析を行う. 定常進行する変調波は秩序的な波形を持つことが示される. 第 4 章では, 定常進行波の二乗振幅の空間発展に関して具体的な解析を行う. 振幅が一定の波, 全域に渡って周期的な変調をする波, ソリトンのように局所的な変調をする波, 更に, 無変調領域と局所的変調領域とが組み合わさった特異的な波の存在が示される. 第 5 章にて, 得られた結果を纏める.

第 2 章

アルフベン波の数理：背景知識と先行研究

2 章では, 本研究の背景知識と先行研究を解説する. 2.1 節は, 一般化されたハミルトン力学系とカシミール元についての簡潔なる解説である. 2.2 節は, 本研究の基礎方程式となる MHD 方程式と, MHD 方程式をハミルトン力学系として見たときに, そのカシミール元から得られる Beltrami 平衡についての解説である. この Beltrami 平衡の位置付けに関して, 渦方程式, 緩和状態という 2 つの異なる観点からも解説を行う. 2.3 節では, Beltrami 平衡に含まれるある種の解をガリレイ変換することによってアルフベン波が得られることを示す. 2.4 節では, 非線形変調するアルフベン波を記述する方程式の導出, 及びその方程式のハミルトン構造に関する先行研究を解説する.

2.1 ハミルトン力学系とカシミール元

この節では, まずは一般化されたハミルトン力学系が持つハミルトニアンとポアッソン括弧という基本構造に関して解説する. 次に, この系が持つ保存量の構造に関して述べ, ポアッソン括弧の位相欠陥から生ずる保存量であるカシミール元について解説する. 最後に, このカシミール元によって特徴付けられる平衡構造である, Beltrami 平衡について解説する. 文献 [1, 13] を参考にしており, 詳細に関してはそちらを参照されたい.

2.1.1 一般化されたハミルトン力学系

ここでは, 少なくとも一つの保存量 $\mathcal{H}(u)$ (ハミルトニアン) を持つ力学系について解説する. X を実ヒルベルト空間として, $u(t) \in X$ は状態ベクトルであり, $\mathcal{H}(u)$ は下に有界な実汎関数 ($X \rightarrow \mathbf{R}$) とする. $\mathcal{H}(u)$ の勾配ベクトルを $\partial_u \mathcal{H}$ とすると¹, $\mathcal{H}(u)$ が保存するためには運動 $\partial_t u(t)$ は $\partial_u \mathcal{H}$ と直交²しなくてはならない. 従って, 勾配ベクトル $\partial_u \mathcal{H}$ を直交方向へと曲げる作用素 \mathcal{A} が存在して, $u(t) \in X$ の発展方程式を

$$\partial_t u(t) = \mathcal{A} \partial_u \mathcal{H}(u) \quad (2.1)$$

の形式に書くことができる.

実ヒルベルト空間 X で定義された内積を (a, b) として表す. このとき, X で定義さ

¹汎関数 \mathcal{F} の勾配ベクトル $\partial_u \mathcal{F}$ は以下のように定義される. 状態ベクトル u が $u \rightarrow u + \delta u$ と変化したときの \mathcal{F} の変化分を $\delta \mathcal{F}$ とする. あるベクトル $\partial_u \mathcal{F}$ が存在して $\delta \mathcal{F} = \int \partial_u \mathcal{F} \cdot \delta u dx$ と表すことができるとき, この $\partial_u \mathcal{F}$ を汎関数 \mathcal{F} の勾配ベクトルとして定義する.

²状態ベクトルの直交性は実ヒルベルト空間の内積によって定義される.

れた作用素 \mathcal{A} が反対称作用素であるとは,

$$(\mathcal{A}a, b) = -(a, \mathcal{A}b) \quad (2.2)$$

なる関係が, \mathcal{A} が作用しうる全ての $a, b \in X$ に対して成り立つことをいう. 反対称作用素はベクトルを直交方向へと曲げる性質を持つ³. \mathcal{A} と内積を用いてポアッソン括弧を

$$[\mathcal{G}(u), \mathcal{F}(u)] = (A\partial_u \mathcal{G}(u), \partial_u \mathcal{F}(u)) \quad (2.3)$$

と定義する. ここで, $\mathcal{G}(u)$ と $\mathcal{F}(u)$ は勾配の計算ができる汎関数とする. ポアッソン括弧を用いると, $u(t)$ が運動方程式 (2.1) に従って運動するときの汎関数 (ある物理量) $\mathcal{F}(u(t))$ の時間変化は,

$$\frac{d}{dt} \mathcal{F}(u(t)) = [\mathcal{H}(u), \mathcal{F}(u)] \quad (2.4)$$

として表すことができる⁴. ポアッソン括弧の反対称性から, $[\mathcal{H}, \mathcal{H}] = 0$ であるので, 方程式 (2.1) に従う運動は確かに \mathcal{H} を保存する.

これらの基本構造, 即ちハミルトニアンとポアッソン括弧をもつ力学系を, 一般化されたハミルトン力学系と呼ぶ.

³実際, 内積の公理と (2.2) を用いると, $(\mathcal{A}a, a) = (a, \mathcal{A}a) = -(\mathcal{A}a, a)$, 従って $(\mathcal{A}a, a) = 0$ となり, $\mathcal{A}a$ と a は直交している.

⁴以下のような計算による.

$$\frac{d}{dt} \mathcal{F}(u(t)) = (\partial_t u(t), \partial_u \mathcal{F}(u)) = (A\partial_u \mathcal{H}(u), \partial_u \mathcal{F}(u)) = [\mathcal{H}(u), \mathcal{F}(u)]. \quad (2.5)$$

2.1.2 カシミール元

一般化されたハミルトン力学系が持つ保存則には, その原因をハミルトニアン $\mathcal{H}(u)$ の構造に帰するものと, ポアッソン括弧の構造に帰するものがある. 物理量 $\mathcal{F}(u)$ がハミルトニアン $\mathcal{H}(u)$ と交換するときには, ポアッソン括弧の反対称性より $[\mathcal{H}(u), \mathcal{F}(u)] = 0$ となる. このとき, (2.4) より $\mathcal{F}(u)$ は保存することが分かる. 普通はこの保存量はハミルトニアン $\mathcal{H}(u)$ に依存して定まるのだが, ハミルトニアン $\mathcal{H}(u)$ に関わらず, ポアッソン括弧の構造のみに依存して定まる保存量, すなわち

$$[\mathcal{G}(u), \mathcal{C}(u)] = 0 \quad \forall \mathcal{G}(u) \quad (2.6)$$

を満たす $\mathcal{C}(u)$ (\neq 定数)が存在するとき, これをカシミール元と呼ぶ.(2.6)は

$$\mathcal{A}\partial_u \mathcal{C}(u) = 0 \quad (2.7)$$

と等価であるため, カシミール元 $\mathcal{C}(u)$ を特徴付けているのは, 反対称作用素 \mathcal{A} であるということもできる.

2.1.3 Beltrami 平衡

以下に示すように, カシミール元は Beltrami 平衡と呼ばれる平衡の構造を特徴付ける重要な保存量である. まず運動方程式(2.1)のハミルトニアンを $\mathcal{C}_j(u)$ ($j = 1, \dots, \nu$)を用いて以下のように変換する.

$$\mathcal{G}_\mu(u) = \mathcal{H}(u) - \sum_{j=1}^{\nu} \mu_j \mathcal{C}_j(u). \quad (2.8)$$

ここで、 $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_\nu)$, μ_j は任意の実定数である。(2.7) を考慮すると、ハミルトン方程式 (2.1) はこの変換に対して不変である。

$$\partial_t u(t) = \mathcal{A} \partial_u \mathcal{G}_\mu(u) = \mathcal{A} \partial_u \mathcal{H}(u). \quad (2.9)$$

この変換は、運動方程式の平衡点 (平衡構造) を見つけるのに有用な変換である。(2.8) の平衡点として最も単純なものとしては、変換される前のハミルトニアン $\mathcal{H}(u)$ の極値点、すなわち $\partial_u \mathcal{H}(u) = 0$ なる点である。しかし多くの場合には、ハミルトニアン $\mathcal{H}(u)$ はエネルギーを表現した単純な構造しか持たず、その極値点から得られる平衡構造も、エネルギー最小状態という自明な構造しか持たない。一方で、変換後のハミルトニアンであるエネルギー・カシミール関数 $\mathcal{G}_\mu(u)$ の極値点は多様な構造を持ちうる。このような平衡を Beltrami 平衡と呼ぶ。

この Beltrami 平衡の構造は、直感的には以下のように理解される。後ほどレビューされる MHD 方程式での例を参照して頂きたいが、カシミール元 $\mathcal{C}_j(u)$ は微積分を含む汎関数であり、エネルギー・カシミール関数 $\mathcal{G}_\mu(u)$ の極値条件 $\partial_u \mathcal{G}_\mu(u) = 0$ は微積分方程式となる。つまり、エネルギー・カシミール関数 $\mathcal{G}_\mu(u)$ の極値点として得られる平衡点は、微積分方程式の固有関数としての構造を備えているのである。

2.2 MHD 方程式と Beltrami 平衡

この節では、プラズマの 1 流体/2 流体描像を記述する ideal/Hall MHD 方程式と、Beltrami 平衡を与える Beltrami 条件について解説する。まずは 2.2.1 節で、ideal / Hall MHD system の導出が為される [9]。次に 2.2.2 節、2.2.3 節では、これらの HMD system をハミルトン力学系の枠組みへと翻訳し、エネルギー・カシミール関数の極

値条件として Beltrami 条件が導出される [14]. 続く 2.2.4 節では, MHD system を渦方程式として捉えたときに, Beltrami 条件は流れと渦度を平行にとする平衡を与えるということが示される [15]. 更に 2.2.5 節では, Beltrami 平衡と緩和状態との関係について述べられる. 2.2.6 節では, Beltrami 条件の解析から, Beltrami 平衡が curl 作用素の固有関数を用いて表されるということが示される [16].

2.2.1 MHD 方程式の導出

この小節ではまず Hall MHD 方程式を導き, そこからイオンスキン長に対するシステムサイズを大きくする極限を取ることで, ideal MHD 方程式を導く. この導出は [9] を参考に行っているため, 詳細に関してはそちらを参照されたい. ただし, [9] が非圧縮流を取り扱っているのに対して, ここでは圧縮流を取り扱っている点に注意されたい.

一価のイオンと電子からなる準中性プラズマを考える. 電子の運動方程式は, (イオンに比べて) 微小な慣性力を無視することで,

$$\mathbf{E} + \mathbf{V}_e \times \mathbf{B} + \frac{1}{en} \nabla p_e = 0 \quad (2.10)$$

と記述される. ここで, \mathbf{V}_e , p_e はそれぞれ, 電子流と電子圧力であり, $\mathbf{E}(\mathbf{B})$ は電場 (磁場) である. e は電子電荷を示し, n は数密度を意味する. イオン流 \mathbf{V}_i は $\mathbf{V} = (M\mathbf{V}_i + m\mathbf{V}_e) / (M + m) \approx \mathbf{V}$ なる関係により, プラズマ流 \mathbf{V} と同一視することができる. ここで, M, m はそれぞれイオン質量, 電子質量である. イオンの運動方程式は

$$\partial_t \mathbf{V} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} = \frac{e}{M} (\mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mathbf{B}) - \frac{1}{Mn} \nabla p_i \quad (2.11)$$

である. p_i はイオン圧力である. $\mathbf{V}_e = \mathbf{V} - \mathbf{j}/(en)$, $\mathbf{j} = \mu_0^{-1}\nabla \times \mathbf{B}$, $\mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{A} - \nabla\phi$ という関係式を用いて, \mathbf{E} と \mathbf{V}_e を削除することができる. ここで, \mathbf{j} は電流を, \mathbf{A} はベクトルポテンシャル, (ϕ) はスカラーポテンシャルを意味する. また, バロトロピックの関係 $n^{-1}\nabla p_j = \nabla h_j$ ($j = e, i$) を仮定する. イオン流 \mathbf{V} と数密度 n は連続の式

$$\partial_t n + \nabla \cdot (\mathbf{V}n) = 0 \quad (2.12)$$

を満たす. 任意のスケール長 L_0 , 代表的な磁場強度 B_0 , そして数密度 n_0 を持ちいて, 以下のように変数の正規化を行う.

$$\mathbf{x} = L_0 \hat{\mathbf{x}}, \quad \mathbf{B} = B_0 \hat{\mathbf{B}}, \quad n = n_0 \hat{n}, \quad t = (L_0/V_A) \hat{t},$$

$$p = (B_0^2/\mu_0) \hat{p}, \quad \phi = (L_0 B_0 V_A) \hat{\phi}, \quad \mathbf{V} = V_A \hat{\mathbf{V}}.$$

ここで, $V_A = B_0/\sqrt{\mu_0 M n_0}$ はアルフベン速度を示す. このとき方程式 (2.10), (2.11), (2.12) は

$$\partial_{\hat{t}} \hat{\mathbf{A}} = \left(\hat{\mathbf{V}} - \frac{\varepsilon}{\hat{n}} \hat{\nabla} \times \hat{\mathbf{B}} \right) \times \hat{\mathbf{B}} - \hat{\nabla} (\hat{\phi} - \varepsilon \hat{h}_e), \quad (2.13)$$

$$\partial_{\hat{t}} (\varepsilon \hat{\mathbf{V}} + \hat{\mathbf{A}}) = \hat{\mathbf{V}} \times (\hat{\mathbf{B}} + \varepsilon \hat{\nabla} \times \hat{\mathbf{V}}) - \hat{\nabla} (\varepsilon \hat{\mathbf{V}}^2/2 + \hat{\phi} + \varepsilon \hat{h}_i), \quad (2.14)$$

$$\partial_{\hat{t}} \hat{n} + \hat{\nabla} \cdot (\hat{\mathbf{V}} \hat{n}) = 0 \quad (2.15)$$

へと帰着する. ここで用いられるスケール変数 $\varepsilon = \delta_i/L_0$ はイオンスキン長

$$\delta_i = \frac{c}{\omega_{pi}} = \sqrt{\frac{M}{\mu_0 n e^2}} \quad (2.16)$$

とマクロスケール L_0 との比を表す.

以下では, 表記を簡略化するために, $\hat{}$ 記号を省略する. このようにして, Hall MHD プラズマを定める以下の方程式を得る.

$$\partial_t \mathbf{A} = \left(\mathbf{V} - \frac{\varepsilon}{n} \nabla \times \mathbf{B} \right) \times \mathbf{B} - \nabla (\phi - \varepsilon h_e), \quad (2.17)$$

$$\partial_t(\varepsilon \mathbf{V} + \mathbf{A}) = \mathbf{V} \times (\mathbf{B} + \varepsilon \nabla \times \mathbf{V}) - \nabla \left(\varepsilon \frac{1}{2} V^2 + \phi + \varepsilon h_i \right), \quad (2.18)$$

$$\partial_t n + \nabla \cdot (\mathbf{V} n) = 0. \quad (2.19)$$

(2.18) から (2.17) を引く, また (2.17) の *curl* を取ることで, 上記の方程式は, 以下のような見慣れた Hall MHD 方程式の形式へと変換される.

$$\partial_t \mathbf{V} = -(\nabla \times \mathbf{V}) \times \mathbf{V} + \frac{1}{n} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} - \nabla \left(\frac{1}{2} V^2 + h \right), \quad (2.20)$$

$$\partial_t \mathbf{B} = \nabla \times \left\{ \left(\mathbf{V} - \frac{\varepsilon}{n} \nabla \times \mathbf{B} \right) \times \mathbf{B} \right\}. \quad (2.21)$$

ここで h はモルエントロピーを意味する⁵. 極限 $\varepsilon \rightarrow 0$ を取ることで, (2.20) と (2.21) は MHD 方程式へと還元される.

2.2.2 Ideal MHD 方程式のハミルトン構造

ideal MHD 方程式は, 小節 2.2.1 より以下のように与えられる.

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t n = -\nabla \cdot (\mathbf{V} n), \\ \partial_t \mathbf{V} = -(\nabla \times \mathbf{V}) \times \mathbf{V} + \frac{1}{n} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} - \nabla \left(\frac{1}{2} V^2 + h \right), \\ \partial_t \mathbf{B} = \nabla \times (\mathbf{V} \times \mathbf{B}). \end{array} \right. \quad (2.22)$$

状態ベクトル u として, $u = {}^t(n, \mathbf{V}, \mathbf{B})$ を取り, ハミルトニアン \mathcal{H} と反対称作用素 \mathcal{A} を

$$\mathcal{H} = \int \left[n \left\{ \frac{1}{2} V^2 + \mathcal{E}(n) \right\} + \frac{1}{2} B^2 \right] dx, \quad (2.23)$$

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & -\nabla \cdot & 0 \\ -\nabla & -\frac{1}{n} (\nabla \times \mathbf{V}) \times & \frac{1}{n} (\nabla \times \circ) \times \mathbf{B} \\ 0 & \nabla \times \left(\circ \times \frac{1}{n} \mathbf{B} \right) & 0 \end{pmatrix} \quad (2.24)$$

⁵この h は熱エネルギー \mathcal{E} と $h = \frac{\partial(n\mathcal{E})}{\partial n}$ なる関係で結ばれる

とすると, ハミルトン方程式 (2.1) は ideal MHD 方程式 (2.22) を与える. この系は, 以下に示すような3つの独立なカシミール元を持つ.

$$\mathcal{C}_1 = \frac{1}{2} \int \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} dx, \quad (2.25)$$

$$\mathcal{C}_2 = \frac{1}{2} \int \mathbf{V} \cdot \mathbf{B} dx, \quad (2.26)$$

$$\mathcal{C}_3 = \int n dx. \quad (2.27)$$

$\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2,$ はそれぞれ磁気 (電子) ヘリシティ, クロスヘリシティと呼ばれる⁶. \mathcal{C}_3 は系の総粒子数である. これらのカシミール元を用いてハミルトニアン \mathcal{H} を変換することで, エネルギー・カシミール関数

$$\mathcal{G}_\mu(u) = \mathcal{H}(u) - \mu_1 \mathcal{C}_1(u) - \mu_2 \mathcal{C}_2(u) - \mu_3 \mathcal{C}_3(u) \quad (2.28)$$

を得る. このエネルギー・カシミール関数の極値条件 $\partial_u \mathcal{G}_\mu(u) = 0$ は,

$$\nabla \times \mathbf{B} - \mu_1 \mathbf{B} - \mu_2 \nabla \times \mathbf{B} = 0, \quad (2.29)$$

$$n \mathbf{V} - \mu_2 \mathbf{B} = 0, \quad (2.30)$$

$$\frac{1}{2} V^2 + h - \mu_3 = 0 \quad (2.31)$$

へと帰着する. これが, ideal MHD 方程式がもつ Beltrami 平衡を記述する条件式である. 条件 (2.31) はエネルギー密度が時間的にも空間的にも一定であるとする, 一般化された Belnoully 条件である. 簡単のため, 密度一定 $n = 1$ の場合を考えると, (2.30) を用いて (2.29) から \mathbf{V} を消去することができて

$$(1 - \mu_2^2) \nabla \times \mathbf{B} - \mu_1 \mathbf{B} = 0 \quad (2.32)$$

⁶ヘリシティとは, Gauss の絡み数を一般化して得られる概念であり, ベクトル場の流線のねじれや絡みといった幾何学的な特徴を表現する量である. ヘリシティの数理については [17] の3章を, プラズマを伝わるヘリシティ波については [18] を参照されたい.

得る. $\mu_2 \neq \pm 1$ の場合には, $\lambda = \mu_1/(1 - \mu_2^2)$ と置くことで, (2.29) と (2.30) は以下の方程式系へと帰着する.

$$\nabla \times \mathbf{B} = \lambda \mathbf{B}, \quad \mathbf{V} = \mu_2 \mathbf{B}. \quad (2.33)$$

この第1式は, \mathbf{B} が curl 作用素の固有関数であるベルトラミ関数 [19] を用いて表されることを示している. $\mu_2 = \pm 1$ の場合に得られる解を用いて, ideal MHD 方程式のアルフベン波解を構成することができる. その詳細に関しては, 2.3節を待たれたい.

2.2.3 Hall MHD 方程式のハミルトン構造

2.2.1 で得られた Hall MHD 方程式 (2.18),(2.19),(2.21), で, イオンスキン長 δ_i とシステムサイズ L_0 とを等しく取ることによって以下の系を得る.

$$\begin{cases} \partial_t n = -\nabla \cdot (\mathbf{V}n), \\ \partial_t \mathbf{P} = \mathbf{V} \times (\nabla \times \mathbf{P}) - \nabla \left(\frac{1}{2} V^2 + \phi + h_i \right), \\ \partial_t \mathbf{B} = \nabla \times \left\{ \left(\mathbf{V} - \frac{1}{n} \nabla \times \mathbf{B} \right) \times \mathbf{B} \right\}. \end{cases} \quad (2.34)$$

ここで $\mathbf{P} = \mathbf{V} + \mathbf{A}$ であり, これはイオンの正準運動量を意味する. この方程式 (2.34) を, ハミルトン力学系の形式に焼き直そう [1]. 状態ベクトル u として, $u = {}^t (n, \mathbf{P}, \mathbf{B})$ を取り, ハミルトニアン \mathcal{H} と反対称作用素 \mathcal{A} を

$$\mathcal{H} = \int \left[n \left\{ \frac{1}{2} (\mathbf{P} - \mathbf{A})^2 + \phi + \mathcal{E}_i(n) \right\} + \frac{1}{2} B^2 \right] dx, \quad (2.35)$$

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & -\nabla \cdot & 0 \\ -\nabla & -\frac{1}{n} (\nabla \times \mathbf{P}) \times & 0 \\ 0 & 0 & \nabla \times \left\{ \frac{\mathbf{B}}{n} \times (\nabla \times \circ) \right\} \end{pmatrix} \quad (2.36)$$

とすると, ハミルトン方程式 (2.1) は ideal MHD 方程式 (2.22) を与える. ここで, $\mathcal{E}_i(n)$ はイオン熱エネルギーであり, イオンモルエンタルピー h_i と $h_i = \frac{\partial(n\mathcal{E}_i)}{\partial n}$ なる関係を持つ.

この系は, 2.2.2 節で与えられた磁気ヘリシティ (2.25) と総粒子数 (2.27) に加えて, イオンヘリシティ

$$\mathcal{C}'_2 = \frac{1}{2} \int \mathbf{P} \cdot (\nabla \times \mathbf{P}) dx \quad (2.37)$$

をカシミール元として持つ. これらのカシミール元を用いてハミルトニアン \mathcal{H} を変換することで, エネルギー・カシミール関数

$$\mathcal{G}_\mu(u) = \mathcal{H}(u) - \mu_1 \mathcal{C}_1(u) - \mu_2 \mathcal{C}'_2(u) - \mu_3 \mathcal{C}_3(u) \quad (2.38)$$

を得る. このエネルギー・カシミール関数の極値条件 $\partial_u \mathcal{G}_\mu(u) = 0$ は,

$$\nabla \times \mathbf{B} - n\mathbf{V} - \mu_1 \mathbf{B} = 0, \quad (2.39)$$

$$n\mathbf{V} - \mu_2 (\nabla \times \mathbf{V} + \mathbf{B}) = 0, \quad (2.40)$$

$$\frac{1}{2} V^2 + \phi + h_i - \mu_3 = 0 \quad (2.41)$$

へと帰着する. これが, Hall MHD 方程式の Beltrami 平衡を記述する条件式である. この平衡の物理的な意味を考えるには, Hall MHD 方程式を渦方程式の観点から考察するのが良い. 続く小節を参照されたい.

2.2.4 Hall MHD 方程式の渦構造

この小節では, Hall MHD 方程式が持つ渦方程式としての構造を解説する [15, 16]. 2.2.1 節で得られた (2.17), (2.18) で, イオンスキン長 δ_i とシステムサイズ L_0 とを等し

く取ることで以下の系を得る.

$$\partial_t \mathbf{P} = \mathbf{V} \times (\nabla \times \mathbf{P}) - \nabla \left(\frac{1}{2} V^2 + \phi + h_i \right), \quad (2.42)$$

$$\partial_t \mathbf{A} = \mathbf{V}_e \times (\nabla \times \mathbf{A}) - \nabla (\phi - h_e). \quad (2.43)$$

ただし, $\mathbf{V}_e = \mathbf{V} - \frac{1}{n} \nabla \times \mathbf{B}$ であり, これは電子流を意味する. また, \mathbf{P} は 2.2.3 節と同様にイオンの正準運動量である.

イオンと電子の正準運動量 $\mathbf{P}_i, \mathbf{P}_e$, 流れ $\mathbf{U}_i, \mathbf{U}_e$, エネルギー密度 ϕ_i, ϕ_e を以下のよ
うに定義する.

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_i &= \mathbf{P} = \mathbf{V} + \mathbf{A}, & \mathbf{P}_e &= \mathbf{A}, \\ \mathbf{U}_i &= \mathbf{V}, & \mathbf{U}_e &= \mathbf{V}_e = \mathbf{V} - \frac{1}{n} \nabla \times \mathbf{B}, \\ \phi_i &= \frac{1}{2} V^2 + \phi + h_i, & \phi_e &= \phi - h_e. \end{aligned} \quad (2.44)$$

また, 渦度 Ω_i, Ω_e を

$$\Omega_i = \nabla \times \mathbf{P}_i, \quad \Omega_e = \nabla \times \mathbf{P}_e \quad (2.45)$$

で定義する. これらの記号を用いると, (2.42) と (2.43) を以下のような対称な形式で
書きなおすことができる.

$$\partial_t \mathbf{P}_j = \mathbf{U}_j \times \Omega_j - \nabla \phi_j \quad (j = i, e). \quad (2.46)$$

両辺 curl を取ると, これは渦方程式の形に書きなおされる.

$$\partial_t \Omega_j = \nabla \times (\mathbf{U}_j \times \Omega_j). \quad (2.47)$$

渦度と流れを平行とする Beltrami 条件

$$\mathbf{U}_j = \mu_j \Omega_j \quad (j = i, e) \quad (2.48)$$

と, エネルギー密度を空間一定とする Bernoulli 条件

$$\nabla\phi_j = 0 \quad (j = i, e) \quad (2.49)$$

のもとに, 運動方程式 (2.46) と渦方程式 (2.47) の平衡解を得ることができ, このよう
にして得られる \mathbf{V}, \mathbf{B} のことを, ここでは Beltrami 場と呼ぶ.

Beltrami 条件 (2.48) を具体的に書き下すと

$$n\mathbf{V} - \nabla \times \mathbf{B} = n\mu_e \mathbf{B}, \quad (2.50)$$

$$\mathbf{V} = \mu_i (\nabla \times \mathbf{V} + \mathbf{B}) \quad (2.51)$$

となる. $\mu_1 = -n\mu_e, \mu_2 = n\mu_i$ とすると, これは Hall MHD 方程式の Beltrami 平衡の
条件式 (2.39),(2.40) に他ならない. つまり, Beltrami 平衡とは, Hall MHD 方程式が
もつ平衡の中でも, 特に渦度と流れとが平行となることで得られる平衡状態だと言
うことができる.

このような観点から ideal MHD 方程式の Beltrami 平衡の条件式 (2.33) を再び考
察してみよう. ideal の場合にはイオン流, 電子流はいずれも \mathbf{V} であり, 渦度はそれ
ぞれ \mathbf{V}, \mathbf{B} となる. このことを考慮して, (2.33) を書き直すと,

$$\mathbf{V} = \frac{1}{\lambda} \nabla \times \mathbf{V}, \quad \mathbf{V} = \mu_2 \mathbf{B} \quad (2.52)$$

が得られる. これもやはり, プラズマ流 \mathbf{V} と渦度 $\nabla \times \mathbf{V}, \mathbf{B}$ とを平行とする条件式
であることが分かる.

2.2.5 緩和状態としての Beltrami 平衡

2.1 節で述べたように, Beltrami 平衡はハミルトン力学系のカシミール元から得ら
れる定常解として特徴付けられる. 一方で, Beltrami 平衡は緩和状態としての側面

を持つことが知られている [5, 6, 20]. 本論文では, 緩和の理論が直接必要となる訳ではないが, Beltrami 平衡の位置付けをより明らかにする目的で, この小節では緩和の理論を簡単に振り返る.

自己組織化の理論：散逸と選択的散逸の視点から

まずは自己組織化の理論として, 散逸構造の理論 [3] と選択的散逸の理論 [7] について簡単に振り返ろう.

熱力学第二法則の教えるところによると, 閉じた系においては無秩序さの指標となるエントロピーは増加の一途を辿ることになる. 構造を秩序として捉えたときに, この熱力学第二法則は, 閉じた系では新しい秩序=構造が自己組織化することは無いということを述べているように思える. しかしこの言及におけるエントロピー収支は, 2つの平衡状態を両端として, 系全体のエントロピーに関して計算されるということに注意しなければならない. ある平衡状態から異なる平衡状態へと遷移するとき, 始点となる平衡状態に比べて終点となる平衡状態において, エントロピーの総量が増加していることは確かであるが, その遷移過程においてエントロピーがどうなっているか, あるいは局所的なエントロピーがどうなっているかについては, 熱力学の言及するところではない [21].

散逸構造の理論とは, 非平衡開放系, 即ち, 外部環境とエネルギーをやりとりをする系に生ずる動的な構造に関する理論である. [7] に倣って, 散逸構造のエントロピー収支について考察をするならば, 系内部での構造生成によるエントロピーの減少分は, 外部環境でのエントロピーの増加分によって相殺されることとなり, 構造生成の場となる系と外部環境を含んだ大きな系の全体ではエントロピーの収支が取れてい

るといえる。この、外部環境を含んだ大きな系という視点からみると、散逸構造とは、隣の系 (外部環境) にエントロピーを吐き出すことによって自らの秩序を生成し続ける構造である。つまり、局所的な系同士の相互作用によって生ずる局所的な構造であるといえることができる。

それに対して、選択的散逸による構造は、系全体に生ずる大域的な構造であるといえることができる。もう少し具体的に言うならば、この構造は、系が持つ散逸によって大域的な緩和が進行した結果として得られる構造である。もちろん、大域的な緩和が極限まで進行すれば、行き着く先はエントロピー最大の所謂「熱的死の状態」である。しかし、何らかの束縛条件のもとに緩和が進行すれば、そこには構造が生じる可能性がある [4]。詳しくは [7] を参照されたいが、系がこのような構造を生ずるには、まず散逸のない状態では系は少なくとも 2 つの保存量を持っている必要がある。ここでは例として、磁気エネルギー E と磁気ヘリシティ K が保存しているとしよう。次に、この系に散逸が加わった際には、一方の保存量 E の散逸が、他方の保存量 K の散逸よりも速く進む、即ち選択的散逸が起こる必要がある。このような散逸のもとでは、ヘリシティ K を一定に保ちつつ、エネルギー E が最小となるような状態へと緩和が進行する。このようにして、磁力線の捻れ構造を維持した、非自明な緩和状態が出現することが分かる⁷。このような仕組みによる構造の出現とは、裏を返せば選択的に散逸される物理量における乱れの生成でもある⁸。

⁷磁気ヘリシティ K は磁力線の捻れを意味する物理量であった

⁸[7] の著者である長谷川晃氏は、このことを受けて

'beauty' (ordered structure) is subjective.

と述べている。

プラズマにおける緩和現象と Beltrami 平衡

プラズマの緩和モデルとしては, Taylor の MHD 緩和モデル [5, 6] が有名である⁹. この Taylor の理論を, 選択的散逸の観点から考察してみると, それは磁気ヘリシティ

$$K = \int_{\Omega} \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} dx \quad (2.53)$$

を保存した上で, 磁気エネルギー

$$E = \int_{\Omega} B^2 dx \quad (2.54)$$

が選択的に散逸されたときに生じる緩和構造の理論となる. この変分

$$\delta(E - \lambda K) \quad (2.55)$$

を実際に計算することで,

$$\nabla \times \mathbf{B} = \lambda \mathbf{B} \quad (2.56)$$

なる条件式が得られる. これは 2.2.2 小節で得られた Beltrami 平衡の条件式 (2.33) に他ならない. これまでの議論では, エネルギー・カシミール関数の極値点としての平衡, あるいは渦度と流れとを平行とすることによる渦度方程式の平衡として語られてきた Beltrami 平衡は, ここにきて新たに, 選択的散逸による緩和状態としての位置付けを得ることになる¹⁰. またこのような目で見ると, エネルギー密度の一様性を与えるベルヌーイ条件 (2.31), (2.41) から, Beltrami 平衡が緩和状態であるということが示唆されていることが分かる.

⁹[5] ではトロイダルプラズマにおける逆転磁場ピンチ構造に関して, [6] では更に Spheromak におけるプラズマ構造などに関して, 緩和構造としての視点から議論されている.

¹⁰この選択的散逸による自己組織化のモデルは, 磁気エネルギーとヘリシティによって規定されるアンサンブルを取ることで, 統計力学の観点からも研究されている [22].

上記の Beltrami 平衡は ideal MHD 方程式に関するものであったが, (非圧縮)Hall MHD 方程式に関しても, 緩和の観点から研究が成されている [20]. また, 選択的散逸の論理が意味を持つには, 例えば上記の例であれば, どのようにして磁気ヘリシティ K に比べて磁気エネルギー E が選択的に散逸されていくのかという議論を欠かすことができない. このような問題に関しては, [23] を参照されたい.

2.2.6 線形 Beltrami 条件

2.2.4 で得られた Beltrami 条件 (2.51) から, 直ちにイオン流 \mathbf{V} は非圧縮性 $\nabla \times \mathbf{V} = 0$ であることが導かれる. 従って, 一様密度 $n = 1$ は, 連続の式 (2.19) を満たす. この小節では, 一様密度 $n = 1$ の場合に, Beltrami 条件 (2.50), (2.51) から得られる平衡構造について解説する.

$n = 1$ を代入すると, Beltrami 条件は以下のようになる.

$$\mathbf{V} - \nabla \times \mathbf{B} = \mu_e \mathbf{B}, \quad (2.57)$$

$$\mathbf{V} = \mu_i (\nabla \times \mathbf{V} + \mathbf{B}). \quad (2.58)$$

(2.57) と (2.58) を組み合わせることにより, 以下のように \mathbf{B} と \mathbf{V} に関して対称な方程式を得ることができる.

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{u} + \left(\mu_e - \frac{1}{\mu_i} \right) \nabla \times \mathbf{u} + \left(1 - \frac{\mu_e}{\mu_i} \right) \mathbf{u} = 0, \quad (\mathbf{u} = \mathbf{B}, \mathbf{V}). \quad (2.59)$$

作用素 $\nabla \times$ を *curl* と記述することになると, この式は

$$(\text{curl} - \lambda_0)(\text{curl} - \lambda_1) \mathbf{u} = 0 \quad (2.60)$$

と書きなおすことができる. ここで, curl 作用素の固有値である λ_0, λ_1 は

$$\lambda_0 + \lambda_1 = \frac{1}{\mu_i} - \mu_e, \quad \lambda_0 \lambda_1 = 1 - \frac{\mu_e}{\mu_i} \quad (2.61)$$

なる条件を満たす. (2.60) の一般解は, 2つの Beltrami 固有関数¹¹の線形和として得られることが知られている [15, 16]. 固有値 λ_l ($l = 0, 1$) に属する Beltrami 固有関数 \mathbf{G}_l ¹²と任意定数 C_l を用いて, (2.59) の一般解

$$\mathbf{B} = C_0 \mathbf{G}_0 + C_1 \mathbf{G}_1, \quad (2.62)$$

$$\mathbf{V} = C_0 (\lambda_0 + \mu_e) \mathbf{G}_0 + C_1 (\lambda_1 + \mu_e) \mathbf{G}_1 \quad (2.63)$$

を得ることができる. このことは, \mathbf{B} (あるいは \mathbf{V}) が 2つの異なるスケール長を持つことを示している. 従って, Hall MHD 方程式では異なるスケール階層での相互作用が起こるような現象について取り扱うことが可能となる [9].

2.3 MHD 方程式のアルフベン波

この節では, Beltrami 平衡 (定常解) の中の, 或るクラスの解をガリレイ変換することによって, アルフベン波解を構成できることが知られている [14]. その直感的な意味は, 観測者が動く (ガリレイ変換する) ことで, 定常解が動いて見え, あたかも進行波のように見えるということである. しかし, $n = \mathbf{B} = \mathbf{V} = \text{const}$ のような自明な定常解からは, 例えガリレイ変換をしたとしてもこのような進行波解は生じ得ない. その意味で, アルフベン波というのは, 非自明な定常解を生み出すカシミール元によって特徴付けられる波だと言うことができる. これらのことを, [14] を参考にしつつ解説しよう.

¹¹ curl 作用素の固有関数である. [19] を参照されたい.

¹²すなわち, $\nabla \times \mathbf{G}_l = \lambda_l \mathbf{G}_l$ を満たすような関数である.

2.3.1 Ideal MHD 方程式のアルフベン波

まずは, ideal MHD 方程式の Beltrami 平衡から構成されるアルフベン波について解説しよう. 2.2.2 節では, $\mu_2 = \pm 1$ の場合の解析については保留していたのであった. まさにこの $\mu_2 = \pm 1$ の場合に得られる平衡から, アルフベン波が構成されるのである. 密度一定 $n = 1$ の場合を解析していたことを思い出すと, $\mu_2 = \pm 1$ を代入することで Beltrami 平衡の条件は

$$\mathbf{V} = \pm \mathbf{B}, \quad (2.64)$$

$$\frac{1}{2}V^2 + h = \mu_3 \quad (2.65)$$

へと帰着する. このとき, もう一つの条件 (2.29) は, $\nabla \times \mathbf{B}$ の項と $\nabla \times \mathbf{V}$ の項が相殺し, 微分方程式としての意味を失う. この条件 (2.64), (2.65) を ideal MHD 方程式 (2.22) に代入すると,

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{V} = -(\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} + (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} - \nabla(\mu_3) = 0, \\ \partial_t \mathbf{B} = \nabla \times ((\pm \mathbf{B}) \times \mathbf{B}) = 0 \end{cases} \quad (2.66)$$

となり, $\partial_t \mathbf{B} = \partial_t \mathbf{V} = 0$ となることが分かる. 即ち, 任意の $\mathbf{B} = \mathbf{B}(x, y, z)$ と $\mathbf{V} = \pm \mathbf{B}(x, y, z)$ は, Belnoully 条件 (2.65) のもとで, ideal MHD 方程式の定常解となる.

このようにして得られた定常解を

$$\mathbf{B}(x, y, z) = \mathbf{B}_0 + \tilde{\mathbf{B}}(x, y, z) = \mathbf{e}_z + \tilde{\mathbf{B}}(x, y, z) \quad (2.67)$$

と記述しよう. ここで, \mathbf{e}_z は z 軸方向の単位ベクトルである. つまり, 磁場 \mathbf{B} から背景磁場 \mathbf{B}_0 を抜き出した残りを $\tilde{\mathbf{B}}$ とした訳である. このとき,

$$\mathbf{V}(x, y, z) = \mathbf{V}_0 + \tilde{\mathbf{V}}(x, y, z) = \pm (\mathbf{e}_z + \tilde{\mathbf{B}}(x, y, z)) \quad (2.68)$$

となる. この (2.67), (2.68) を ideal MHD 方程式 (2.22) へと代入すると, (x, y, z, t) 座標系において, $n = 1, \tilde{\mathbf{V}} = \tilde{\mathbf{V}}(x, y, z), \mathbf{B} = \mathbf{B}(x, y, z)$ が³

$$\left\{ \begin{array}{l} (\partial_t + \mathbf{V}_0 \cdot \nabla) n = -\nabla \cdot (\tilde{\mathbf{V}} n), \\ (\partial_t + \mathbf{V}_0 \cdot \nabla) \tilde{\mathbf{V}} = -(\nabla \times \tilde{\mathbf{V}}) \times \tilde{\mathbf{V}} + \frac{1}{n} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} - \nabla \left(\frac{1}{2} V^2 + h \right), \\ (\partial_t + \mathbf{V}_0 \cdot \nabla) \mathbf{B} = \nabla \times (\tilde{\mathbf{V}} \times \mathbf{B}) \end{array} \right. \quad (2.69)$$

を満たすことが分かる. ここで, ガリレイ変換

$$t \rightarrow \tau, \quad z \rightarrow \zeta = z \mp t \quad (2.70)$$

を行う. このとき, (x, y, ζ, τ) 座標系において, $n = 1, \tilde{\mathbf{V}} = \tilde{\mathbf{V}}(x, y, \zeta \pm \tau), \mathbf{B} = \mathbf{B}(x, y, \zeta \pm \tau)$ が³

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_\tau n = -\nabla \cdot (\tilde{\mathbf{V}} n), \\ \partial_\tau \tilde{\mathbf{V}} = -(\nabla \times \tilde{\mathbf{V}}) \times \tilde{\mathbf{V}} + \frac{1}{n} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} - \nabla \left(\frac{1}{2} V^2 + h \right), \\ \partial_\tau \mathbf{B} = \nabla \times (\tilde{\mathbf{V}} \times \mathbf{B}) \end{array} \right. \quad (2.71)$$

を満たすということになる. 即ち, (x, y, ζ, τ) 座標系において ideal MHD 方程式 (2.22) が³, $\mathbf{B} = \mathbf{B}(x, y, \zeta \pm \tau), \tilde{\mathbf{V}} = \pm \tilde{\mathbf{B}}(x, y, \zeta \pm \tau)$ という定常進行波解を持つ. このことは, 揺動磁場, 速度 $\tilde{\mathbf{B}}, \tilde{\mathbf{V}}$ が, 任意の形状と振幅を保ちながら, 背景磁場 $\mathbf{B}_0 = \mathbf{e}_z$ に沿ってに一定速度 ∓ 1 (アルフベン速度)¹³ で伝わるということを意味しており, これはまさにアルフベン波そのものである.

2.3.2 Hall HMD のアルフベン波

次に, Hall MHD 方程式の Beltrami 平衡から構成されるアルフベン波について解説しよう. 2.2.6 小節で得られた (2.62), (2.63) にて, 固有値 $\lambda_0 = 0$ の場合を考える.

¹³ideal MHD 方程式がアルフベン速度で規格化されていたことを思い出されたい.

また, 対応する Beltrami 固有関数 $\mathbf{G}_0 = \mathbf{e}_z$ としよう. このとき, (2.61) より

$$\mu_e = \mu_i (= \mu) \quad (2.72)$$

となる. この μ を用いると, もう一方の固有値は $\lambda_1 = \mu^{-1} - \mu$ となる. $\mathbf{G}_0 = \mathbf{e}_z$ を背景磁場として \mathbf{B} が規格化されるように, $C_0 = 1$ とすると, (2.62), (2.63) は以下のよう書きなおされる.

$$\mathbf{B}(x, y, z, t) = \mathbf{e}_z + C_1 \mathbf{G}_1(x, y, z) (= \mathbf{B}_0 + \tilde{\mathbf{B}}), \quad (2.73)$$

$$\mathbf{V}(x, y, z, t) = \mu \mathbf{e}_z + \frac{C_1}{\mu} \mathbf{G}_1(x, y, z) (= \mathbf{V}_0 + \tilde{\mathbf{V}}). \quad (2.74)$$

ここで, ideal MHD 方程式の場合にもそうしたように, ガリレイ変換

$$(x, y, z, t) \rightarrow (x, y, \zeta, \tau) := (x, y, z - \mu t, t) \quad (2.75)$$

を行う. この座標系から見ると, イオン流は

$$\tilde{\mathbf{V}}(x, y, \zeta, \tau) = \mathbf{V} - \mathbf{V}_0 = \frac{C_1}{\mu} \mathbf{G}_1(x, y, \zeta + \mu\tau) \quad (2.76)$$

となり, これは背景磁場 $\mathbf{B} = \mathbf{e}_z$ に沿って一定速度 $-\mu$ で伝わる定常進行波解となる.

Beltrami 固有関数 \mathbf{G}_1 として

$$\mathbf{G}_1 = \begin{pmatrix} \sin(\lambda_1 z) \\ \cos(\lambda_1 z) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.77)$$

を取ると, これから得られる定常進行波 (2.76) は, 円偏光アルフベン波となる.

2.3.3 アルフベン波に関する他の理論の紹介

本論文に直接必要となるアルフベン波の背景知識は以上であるが, この小節ではアルフベン波に関連したその他の研究について少し紹介する. 小節 2.3.1 でも述べた

ように, ideal MHD 方程式では, 一様背景磁場 $B_0 = e_z$ に沿って任意の波形のアルフベン波が伝搬する. これはアルフベン波の周波数スペクトルが連続スペクトルであるということを意味する. これに対し, アルフベン波に対して種々の摂動が加わったときに, スペクトルに定性的な変化が見られることが知られている. 例えば, 小節 2.3.1 ではアルフベン波の伝わる背景磁場は一様なものであったが, この背景磁場の磁力線の軌道がカオス軌道になった場合には, スペクトルにギャップが生じ, 離散スペクトルが表れることが報告されている [24, 25]. また, 小節 2.3.2 ではアルフベン波はもはや任意の波形は取れないことを述べたが, これも Hall 項による ideal MHD 方程式への摂動効果であると言える. Hall 効果と有限圧力の効果を考慮すると, アルフベン波のスペクトルは連続から離散へと変化することが報告されている [10, 26].

MHD 方程式の厳密解に関する研究も為されている [27, 28]. 文献 [27] では, Hall MHD 方程式が持つ厳密解が導かれ, ideal MHD 方程式で得られたアルフベン波解と関連して解説されている. また文献 [28] では非線形波動に関する波の重ね合わせに焦点を当て, Hall MHD 方程式から線形和を取ることができる波の解を導いている.

2.4 非線形変調するアルフベン波のモデル

この節は, 先行研究 [14] の解説である. 非線形変調するアルフベン波を記述する方程式の導出が行われる. まずは, 圧縮性の波を取り扱えるように, Beltrami 条件と Bernoulli 条件の一般化を行なわれ, 続いて, 一般化された Beltrami-Bernoulli 条件を単純化するために, 漸減摂動を行なわれる.

2.4.1 空間 1 次元の場合に一般化された Beltrami-Bernoulli 条件

この小節では, 圧縮性を持つ波を扱えるように, Beltrami-Bernoulli 条件の一般化を行う. この圧縮性によって, アルフベン波は変調することになる. また, 圧縮性の導入に伴い, 密度 n も一様ではなくなる.

以下では, 全ての変数 $n, \mathbf{B}, \mathbf{V}$ が空間に関して z のみの変数であるような 1 次元のシステムについて考察する¹⁴. 更に, 磁場は

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} B_x(z, t) \\ B_y(z, t) \\ B_0 \end{pmatrix} = \mathbf{B}_\perp(z, t) + B_0 \mathbf{e}_z \quad (2.78)$$

のように書けると仮定する. ここで, B_0 は一様な背景磁場を表す. \mathbf{B} をこの背景磁場で規格化することを考えると, $B_0 = 1$ である.

このような磁場 \mathbf{B} の下で, 圧縮性を持つプラズマ流 \mathbf{V} を扱えるように, Beltrami 条件 (2.50), (2.51) を以下のように一般化する.

$$\mathbf{V} - n^{-1} \nabla \times \mathbf{B} = \mu_e \mathbf{B} + u \mathbf{e}_z, \quad (2.79)$$

$$\mathbf{V} = \mu_i (\nabla \times \mathbf{V} + \mathbf{B}) + u \mathbf{e}_z. \quad (2.80)$$

ここで, $u(z, t)$ は適当なスカラー関数であり, μ_e, μ_i は定数であるとする. (2.80) の両辺に $\nabla \cdot$ を掛けることで, 直ちに $\nabla \cdot \mathbf{V} = \partial_z u$ を得る. このことから, $u(z, t)$ の非一様性が, プラズマ流 \mathbf{V} に圧縮性を与えるということが分かる.

この 1 次元のシステムでは, $\nabla \times$ は z 成分を持たないため, (2.79) と (2.80) の z 成分はそれぞれ $V_z = \mu_e + u$ と $V_z = \mu_i + u$ へと帰着する. 従って, これを纏めて

$$V_z = \mu + u \quad (\mu := \mu_e = \mu_i) \quad (2.81)$$

¹⁴すなわち $f(x, y, z, t) = f(z, t)$

と書くことができる.

(2.80) と (2.79) を組み合わせることで

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{V}_\perp + (n\mu - \mu^{-1})\nabla \times \mathbf{V}_\perp = 0 \quad (2.82)$$

を得ることができる¹⁵. これは, (2.59) の変形である¹⁶.

(2.80) と (2.79) を運動方程式 (2.46) に代入することで,

$$\partial_t \mathbf{P}_j - u \mathbf{e}_z \times \boldsymbol{\Omega}_j = -\nabla \varphi_j \quad (j = i, e) \quad (2.84)$$

を得る.

(2.84) の *curl* を取ることで, 渦方程式

$$\partial_t \boldsymbol{\Omega}_j - \nabla \times (u \mathbf{e}_z \times \boldsymbol{\Omega}_j) = 0 \quad (j = i, e) \quad (2.85)$$

が得られる. このことは, $\boldsymbol{\Omega}_j$ が \mathbf{e}_z 方向へ流速 u で輸送されていることを意味している¹⁷. (2.84) の x, y 成分は, この渦方程式 (2.85) に等しくなる.

(2.84) の z 成分が, 一般化された Bernoulli 条件となる. $j = e, i$ に対して一般化 Bernoulli 条件を具体的に書き下すと,

$$\partial_t P_z = -\partial_z \left(\phi + h_i + \frac{1}{2} V^2 \right), \quad (2.86)$$

$$\partial_t A_z = -\partial_z (\phi - h_e) \quad (2.87)$$

¹⁵ \mathbf{B} に関して纏めるならば,

$$\nabla \times (n^{-1} \nabla \times \mathbf{B}_\perp) + (\mu - \mu^{-1} n^{-1}) \nabla \times \mathbf{B}_\perp = 0, \quad (2.83)$$

となる.

¹⁶ $\mu_e = \mu_i$ とした上で, 密度 n の非一様性が組み込まれている.

¹⁷ 流れによる渦度の輸送に関しては [29] の 7 章が詳しい.

となる。(2.86) から (2.87) を引くことで,

$$\partial_t V_z = -\partial_z \left(h + \frac{1}{2} V^2 \right) \quad (2.88)$$

が得られ, $\mathbf{V} = \mathbf{V}_\perp + V_z \mathbf{e}_z$ と分離することで, これを

$$\partial_t V_z + V_z \partial_z V_z = -\partial_z \left(h + \frac{1}{2} V_\perp^2 \right) \quad (2.89)$$

と書き換えることができる. また, $n(z, t)$ に関しては連続の式

$$\partial_t n + \partial_z (V_z n) = 0 \quad (2.90)$$

によって定められる.

纏めると, 未知変数 $n(z, t), \mathbf{V}_\perp(z, t), V_z(z, t), u(z, t)$ に関して, 一般化 Beltrami 条件 (2.81), (2.82), 一般化 Bernoulli 条件 (2.109), 連続の式 (2.90) が解くべき方程式となる.

(2.109) に含まれる h は, ポアソン方程式を用いることで ϕ に置き換え可能であることを注意しておく.

2.4.2 逡減摂動法による非線形アルフベン波方程式の導出

この小節では, 系を単純化するために, 逡減摂動法 [30] によって従属変数の数を削減する. つまり, 共通の波形を持つものを纏め上げていく.

(微小) スケールパラメータ ϵ を用いて, 従属変数を以下のように表す.

$$n = 1 + \epsilon n^{(1)} + \epsilon^2 n^{(2)} + \dots, \quad (2.91)$$

$$u = 0 + \epsilon u^{(1)} + \epsilon^2 u^{(2)} + \dots, \quad (2.92)$$

$$V_z = V_0 + \epsilon V_z^{(1)} + \epsilon^2 V_z^{(2)} + \dots, \quad (2.93)$$

$$\mathbf{V}_\perp = 0 + \epsilon \mathbf{V}_\perp^{(1)} + \epsilon^2 \mathbf{V}_\perp^{(2)} + \dots. \quad (2.94)$$

ここで, V_0 は定数であると仮定する. また,

$$h = \phi = 0 + \epsilon \phi^{(1)} + \epsilon^2 \phi^{(2)} + \dots \quad (2.95)$$

を仮定する. 独立変数に関しても, スケールパラメーター ϵ を用いて,

$$\tilde{z} = \epsilon(z - ct), \quad (2.96)$$

$$\tilde{t} = \epsilon^2 t \quad (2.97)$$

と変換する. c は後ほど決定される定数である. このスケーリングは, ion-acoustic KdV 方程式を導き出すスケーリングとは異なることを注意しておく.

これらの変数の下で, Beltrami 条件の V_z 成分 (2.81) は

$$V_0 + \epsilon V_z^{(1)} + \epsilon^2 V_z^{(2)} + \dots = \mu + (\epsilon u^{(1)} + \epsilon^2 u^{(2)}) + \dots \quad (2.98)$$

と書き換えられる. $1, \epsilon, \epsilon^2$ のオーダーから, それぞれ

$$V_0 = \mu, \quad V_z^{(1)} = u^{(1)}, \quad V_z^{(2)} = u^{(2)} \quad (2.99)$$

を得る. \mathbf{V}_\perp に関する一般化 Beltrami 条件 (2.82) は

$$\begin{aligned} & \epsilon^2 \tilde{\nabla} \times \tilde{\nabla} \times (\epsilon \mathbf{V}_\perp^{(1)} + \epsilon^2 \mathbf{V}_\perp^{(2)} + \dots) \\ & + \epsilon \left((1 + \epsilon n^{(1)} + \epsilon^2 n^{(2)} + \dots) \mu - \mu^{-1} \right) \tilde{\nabla} \times (\epsilon \mathbf{V}_\perp^{(1)} + \epsilon^2 \mathbf{V}_\perp^{(2)} + \dots) = 0 \end{aligned} \quad (2.100)$$

と書き換えられる. ϵ^3 のオーダーから,

$$(\mu - \mu^{-1}) \tilde{\nabla} \times \mathbf{V}_\perp^{(1)} = 0 \quad (2.101)$$

を得る. $\mathbf{V}_\perp^{(1)}$ に関して非自明な解を得るために,

$$\mu - \mu^{-1} = 0 \quad \leftrightarrow \quad \mu = 1 \quad (2.102)$$

として μ を定めることで, (2.101) を満たす. このとき (2.99) より,

$$V_0 = \mu = 1 \quad (2.103)$$

である. $\mu = 1$ を (2.100) に代入することで,

$$\begin{aligned} & \epsilon^2 \tilde{\nabla} \times \tilde{\nabla} \times (\epsilon \mathbf{V}_\perp^{(1)} + \epsilon^2 \mathbf{V}_\perp^{(2)} + \dots) \\ & + \epsilon (\epsilon n^{(1)} + \epsilon^2 n^{(2)} + \dots) \tilde{\nabla} \times (\epsilon \mathbf{V}_\perp^{(1)} + \epsilon^2 \mathbf{V}_\perp^{(2)} + \dots) = 0 \end{aligned} \quad (2.104)$$

を得る. ϵ^3 のオーダーより,

$$\tilde{\nabla} \times \tilde{\nabla} \times \mathbf{V}_\perp^{(1)} + n^{(1)} \tilde{\nabla} \times \mathbf{V}_\perp^{(1)} = 0 \quad (2.105)$$

を得る.

続いて, 連続の式 (2.90) を書き下すと

$$\begin{aligned} & (\epsilon^2 \partial_{\tilde{t}} - \epsilon c \partial_{\tilde{z}}) (1 + \epsilon n^{(1)} + \epsilon^2 n^{(2)} + \dots) \\ & + \epsilon \partial_{\tilde{z}} (1 + \epsilon V_z^{(1)} + \epsilon^2 V_z^{(2)} + \dots) (1 + \epsilon n^{(1)} + \epsilon^2 n^{(2)} + \dots) = 0 \end{aligned} \quad (2.106)$$

となる. ϵ^2, ϵ^3 のオーダーから, それぞれ

$$c' n^{(1)} = V_z^{(1)} \quad (c' := c - V_0 = c - 1), \quad (2.107)$$

$$\partial_{\tilde{t}} n^{(1)} + \partial_{\tilde{z}} (n^{(1)} V_z^{(1)} + V_z^{(2)} - c' n^{(2)}) = 0 \quad (2.108)$$

を得る. 更に, 一般化 Bernoulli 条件 (2.109) を書き下すと

$$(\epsilon^2 \partial_{\tilde{t}} - \epsilon c \partial_{\tilde{z}}) (1 + \epsilon V_z^{(1)} + \epsilon^2 V_z^{(2)} + \dots)$$

$$\begin{aligned}
& +\epsilon \left(1 + \epsilon V_z^{(1)} + \epsilon^2 V_z^{(2)} + \dots\right) \partial_{\bar{z}} \left(1 + \epsilon V_z^{(1)} + \epsilon^2 V_z^{(2)} + \dots\right) \\
& = -\epsilon \partial_{\bar{z}} \left\{ \left(\epsilon \phi^{(1)} + \epsilon^2 \phi^{(2)} + \dots\right) \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{2} \left(\epsilon \mathbf{V}_{\perp}^{(1)} + \epsilon^2 \mathbf{V}_{\perp}^{(2)} + \dots\right) \cdot \left(\epsilon \mathbf{V}_{\perp}^{(1)} + \epsilon^2 \mathbf{V}_{\perp}^{(2)} + \dots\right) \right\} \quad (2.109)
\end{aligned}$$

となる. ϵ^2, ϵ^3 のオーダーから, それぞれ

$$c' V_z^{(1)} = \phi^{(1)}, \quad (2.110)$$

$$\partial_t V_z^{(1)} + V_z^{(1)} \partial_{\bar{z}} V_z^{(1)} + \partial_{\bar{z}} \left(-c' V_z^{(2)} + \phi^{(2)} + \frac{1}{2} |\mathbf{V}_{\perp}^{(1)}|^2 \right) = 0 \quad (2.111)$$

を得る. 最後に, ポアソン方程式を書き下すと,

$$\begin{aligned}
& \epsilon^2 \partial_{\bar{z}}^2 \left(\epsilon \phi^{(1)} + \epsilon^2 \phi^{(2)} + \dots \right) \\
& = \left(1 + \frac{1}{T_e} \left(\epsilon \phi^{(1)} + \epsilon^2 \phi^{(2)} + \dots \right) + \frac{1}{2} \frac{1}{T_e^2} \left(\epsilon \phi^{(1)} + \epsilon^2 \phi^{(2)} + \dots \right)^2 \right) \\
& \quad - \left(1 + \epsilon n^{(1)} + \epsilon^2 n^{(2)} + \dots \right) \quad (2.112)
\end{aligned}$$

となる. ϵ, ϵ^2 のオーダーから, それぞれ

$$\frac{\phi^{(1)}}{T_e} = n^{(1)}, \quad (2.113)$$

$$\frac{\phi^{(2)}}{T_e} + \frac{1}{2} \left(\frac{\phi^{(1)}}{T_e} \right)^2 - n^{(2)} = 0 \quad (2.114)$$

を得る. (2.107), (2.110), (2.113) を纏めて書くと

$$c' n^{(1)} = V_z^{(1)}, \quad c' V_z^{(1)} = \phi^{(1)}, \quad \frac{\phi^{(1)}}{T_e} = n^{(1)} \quad (2.115)$$

となるが, これが満たされるためには

$$c' = \pm c_s := \sqrt{T_e} \quad \leftrightarrow \quad c = V_0 \pm c_s = 1 \pm c_s \quad (2.116)$$

でなければならない. このとき, (2.107), (2.110), (2.99) は

$$V_z^{(1)} = u^{(1)} = \pm c_s n^{(1)} = \pm c_s^{-1} \phi^{(1)} \quad (2.117)$$

へと帰着する. (2.108) に $\pm c_s$ を掛けたもの, (2.111), (2.114) に $-\partial_{\tilde{z}}$ を作用させたものを足しあわせて, 更に (2.117) を用いると¹⁸,

$$\partial_{\tilde{t}} u^{(1)} + \partial_{\tilde{z}} \left[\frac{1}{2} (u^{(1)})^2 + \frac{1}{4} |\mathbf{V}_{\perp}^{(1)}|^2 \right] = 0 \quad (2.118)$$

を得る. この発展方程式は, 一般化 Beltrami 条件から得られた (2.105) と同時に解かれる必要がある. (2.105) は (2.117) を用いて

$$\tilde{\nabla} \times \tilde{\nabla} \times \mathbf{V}_{\perp}^{(1)} \pm c_s^{-1} u^{(1)} \tilde{\nabla} \times \mathbf{V}_{\perp}^{(1)} = 0 \quad (2.119)$$

と書きなおされる. (2.118) と (2.119) を併せて, 非線形アルフベン波方程式と呼ぶことにする.

2.4.3 非線形アルフベン波方程式のハミルトン構造

以下では, 記法を簡略化するために, 従属変数の肩についている $\tilde{}$ 記号と⁽¹⁾記号を省略する. 更に, c_s に \pm 符号を含ませて表記する¹⁹. この記法の下で, 非線形 Beltrami 方程式 (2.118), (2.119) とを再掲すると,

$$\partial_t u + \partial_z \left[\frac{1}{2} u^2 + \frac{1}{4} |\mathbf{V}_{\perp}|^2 \right] = 0, \quad (2.123)$$

¹⁸それぞれ

$$\partial_{\tilde{t}} u^{(1)} + \partial_{\tilde{z}} \left((u^{(1)})^2 + (\pm c_s) V_z^{(2)} - (\pm c_s)^2 n^{(2)} \right) = 0, \quad (2.120)$$

$$\partial_{\tilde{t}} u^{(1)} + u^{(1)} \partial_{\tilde{z}} u^{(1)} + \partial_{\tilde{z}} \left(-(\pm c_s) V_z^{(2)} + \phi^{(2)} + \frac{1}{2} |\mathbf{V}_{\perp}^{(1)}|^2 \right) = 0 \quad (2.121)$$

$$-\partial_{\tilde{z}} \left(\phi^{(2)} + \frac{1}{2} (u^{(1)})^2 - (\pm c_s)^2 n^{(2)} \right) = 0. \quad (2.122)$$

となる. これらを足し合わせると⁽²⁾の項は相殺し, 本文の結果が得られる.

¹⁹つまり $c_s := \pm c_s$ である.

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{V}_\perp + c_s^{-1} u \nabla \times \mathbf{V}_\perp = 0 \quad (2.124)$$

となる.

ここで, 作用 $S(z, t)$ とハミルトニアン $H(u, z, t)$ を以下のように定義する.

$$u(z, t) = \partial_z S, \quad (2.125)$$

$$H(u, z, t) = \frac{1}{2} u^2 + \frac{1}{4} |\mathbf{V}_\perp|^2. \quad (2.126)$$

このとき, (2.123) を z に関して積分することによって, ハミルトン-ヤコビ方程式 [31]

$$\partial_t S + H(\partial_z S, z, t) = 0 \quad (2.127)$$

を得る. ハミルトニアンのポテンシャルエネルギーに相当する $|\mathbf{V}_\perp|^2/4$ は, (2.124) と同時に決定される必要がある. 渦度 $\Omega = \nabla \times \mathbf{V}_\perp$ を用いて, (2.124) を書き換えると,

$$\nabla \times \Omega + c_s^{-1} u \Omega = 0 \quad (2.128)$$

となる. この方程式は渦度 Ω に対して

$$\Omega = \Re \left\{ W e^{iS/c_s} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \right\} \quad (2.129)$$

として解くことができる. ここで, W は定数であり, \Re は括弧内の実部を取るという記号である. このことから直ちに, エンストロフィーの保存則を得ることができる.

$$|\Omega|^2 = |\nabla \times \mathbf{V}_\perp|^2 = W^2. \quad (2.130)$$

また, (2.129) を用いてポテンシャルエネルギー $|\mathbf{V}_\perp|^2/4$ を,

$$\frac{1}{4} |\mathbf{V}_\perp|^2 = \frac{1}{4} |\text{curl}^{-1} \Omega|^2 = \frac{1}{4} |W \int e^{iS/C_s} dz|^2 \quad (2.131)$$

と書き直すことができる. これによって, ハミルトン-ヤコビ方程式 (2.127) は独立変数 z, t , 従属変数 S を持つ偏微分方程式となる.

第 3 章

非線形アルフベン波方程式の定常進行波の解析

前章では, Hall MHD 方程式が有する秩序構造: アルフベン波に摂動が加わった際の挙動を調べるために, 以下の非線形アルフベン波方程式を導出した [14].

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{2} u^2 + \frac{1}{4} \mathbf{V}_\perp^2 \right) = 0, \\ \nabla \times \nabla \times \mathbf{V}_\perp + c_s^{-1} u \nabla \times \mathbf{V}_\perp = 0. \end{cases} \quad (3.1)$$

本章の関心は, 摂動によってアルフベン波の秩序構造が全く損なわれてしまうのか, それとも, なんらかの秩序を保った変調が生じ得るのかという点にある. 力学系の言葉で述べるならば, 方程式が全くの非可積分になってしまうのか, あるいはなんらかの可積分構造を保つのかというのが論点である.

本章の解析により, 非線形アルフベン波方程式の定常進行波解のクラスでは可積分な構造を保たれていることが明らかになる. またそのクラスの解も, 陰関数表示にて与えられる.

3.1節では、定常進行波解を解析するための常微分方程式：定常進行アルフベン波方程式が導出される。続く3.2節では、定常進行アルフベン波方程式の第一積分(保存量)が導出される。更に3.3節では、定常進行アルフベン波方程式がハミルトン力学系であることが示され、先程の第一積分の存在と併せて、この方程式が可積分であるということが示される。3.4節では、方程式の変数を分離していくことにより、方程式が解かれる。もちろん、初等関数の形で解が与えられる訳ではなく、積分方程式の陰関数として与えられることになる。3.5節では、特に二乗振幅一定の場合の解が初等関数を用いて与えられる。

3.1 定常進行アルフベン波方程式の導出

本節では、非線形アルフベン波方程式の解の中でも、一定速度 v で伝搬する定常進行波解について解析する。即ち、 $u(z, t) = u(\tilde{z})$, $\mathbf{V}_\perp(z, t) = \mathbf{V}_\perp(\tilde{z})$ なる形式の解について解析する。ここで、 $\tilde{z} = z - vt$ である。 $u(\tilde{z})$ と $\mathbf{V}_\perp(\tilde{z})$ を (3.1) の第一式に代入すると、簡単な計算¹からエネルギー保存則

$$\frac{1}{2}(u - v)^2 + \frac{1}{4}\mathbf{V}_\perp^2 = H_0 + \frac{1}{2}v^2 \quad (3.4)$$

¹ $u = u(\tilde{z})$, $\mathbf{V}_\perp = \mathbf{V}_\perp(\tilde{z})$ であるとき、 $\frac{\partial}{\partial t} = -v\frac{d}{d\tilde{z}}$, $\frac{\partial}{\partial z} = \frac{d}{d\tilde{z}}$ であることに注意すると、(3.1) は以下のように書きなおされる。

$$-v\frac{du}{d\tilde{z}} + \frac{d}{d\tilde{z}}\left(\frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{4}\mathbf{V}_\perp^2\right) = 0 \quad (3.2)$$

これは

$$\frac{d}{d\tilde{z}}\left(\frac{1}{2}(u - v)^2 - \frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{4}\mathbf{V}_\perp^2\right) = 0 \quad (3.3)$$

へと帰着し、この両辺を \tilde{z} に関して積分すると、本文の結果を得る。

を得る. ここで H_0 は定数である. この方程式は, θ, ϕ を用いて, $u - v, V_x, V_y$ を

$$\begin{cases} u - v = (2H + v^2)^{\frac{1}{2}} \cos \theta, \\ V_x = (2(2H + v^2))^{\frac{1}{2}} \sin \theta \cos \phi, \\ V_y = (2(2H + v^2))^{\frac{1}{2}} \sin \theta (-\sin \phi). \end{cases} \quad (3.5)$$

と表せることを示している. 続いて, $u - v, V_x, V_y$ を (3.1) の第二式に代入し, 簡単な計算を行うことで, 定常進行アルフベン波方程式

$$\frac{d^2}{d\tilde{z}^2} V_x + c_s^{-1} u \frac{d}{d\tilde{z}} V_y = 0, \quad (3.6)$$

$$\frac{d^2}{d\tilde{z}^2} V_y - c_s^{-1} u \frac{d}{d\tilde{z}} V_x = 0 \quad (3.7)$$

を得る.

以降では, 従属変数の肩に乗る ' は \tilde{z} での微分を表すことにする. 例えば, f' は $\frac{d}{d\tilde{z}} f$ を表す. 場合に応じて f' と $\frac{d}{d\tilde{z}} f$, どちらの記法も用いる.

3.2 定常進行アルフベン波方程式が持つ保存量

定常進行アルフベン波方程式 (3.6), (3.7) は二つの第一積分 (保存量) を持つ. 一つはエンストロフィー $\|\nabla \times \mathbf{V}_\perp\|^2$ である. これは節 2.4.3 でも述べたとおり, 元々の偏微分方程式 (3.1) でも保存されている. もう一つの第一積分は, 角運動量に相当する項を含むため, ここでは擬角運動量と名付けた. 以下ではこれら二つの第一積分の導出する.

3.2.1 エンストロフィー

(3.6) に V'_x を掛けたものと, (3.7) に V'_y を掛けたものを足し合わせると

$$V'_x V''_x + V'_y V''_y = 0 \quad (3.8)$$

となり, これは

$$\frac{d}{d\tilde{z}} \left(\frac{1}{2} (V'_x)^2 + \frac{1}{2} (V'_y)^2 \right) = 0 \quad (3.9)$$

へと帰着する. この両辺を \tilde{z} に関して積分し, 適当に定数倍すると, エンストロフィーの保存則

$$\|\nabla \times \mathbf{V}_\perp\|^2 = (V'_x)^2 + (V'_y)^2 = W_0 \quad (3.10)$$

を得る. ただし W_0 は積分定数である.

(3.5) を用いて, エンストロフィー保存則 (3.10) の変数を V_x, V_y から θ, ϕ へと書き換える. (3.5) を (3.10) に代入することで,

$$\left(\left((2(2H + v^2))^{\frac{1}{2}} \sin \theta \cos \phi \right)' \right)^2 + \left(\left((2(2H + v^2))^{\frac{1}{2}} \sin \theta (-\sin \phi) \right)' \right)^2 = W_0 \quad (3.11)$$

を得る. 規格化のために,

$$W_0 = 2(2H + v^2) w_0 \quad (3.12)$$

によって w_0 を導入し, (3.11) の両辺を $2(2H + v^2)$ で割ることで,

$$\left((\sin \theta \cos \phi)' \right)^2 + \left((\sin \theta \sin \phi)' \right)^2 = w_0 \quad (3.13)$$

を得る. ここから単純計算により,

$$\cos^2 \theta (\theta')^2 + \sin^2 \theta (\phi')^2 = w_0 \quad (3.14)$$

が得られる.

3.2.2 擬角運動量

(3.6) に V_y を掛けたものから, (3.7) に V_x を掛けたものを引くことで,

$$V_y V_x'' - V_x V_y'' + c_s^{-1} u (V_x V_x' + V_y V_y') = 0 \quad (3.15)$$

が得られる. これを書き換えて

$$\frac{d}{d\tilde{z}} (V_y V_x' - V_x V_y') + c_s^{-1} u \left(\frac{d}{d\tilde{z}} (V_x^2 + V_y^2) \right) = 0 \quad (3.16)$$

となる. ここで (3.5) を用いて, 変数を u, V_x, V_y から θ, ϕ へと書き換え, 単純計算²を行うと,

$$\frac{d}{d\tilde{z}} (\sin^2 \theta \phi') - \frac{1}{2} c_s^{-1} \left(v + (2H + v^2)^{\frac{1}{2}} \cos \theta \right) \frac{d}{d\tilde{z}} \cos^2 \theta = 0 \quad (3.20)$$

を得る. これは

$$\frac{d}{d\tilde{z}} \left\{ \sin^2 \theta \phi' - \frac{1}{2} c_s^{-1} \left(v \cos^2 \theta + \frac{2}{3} (2H + v^2)^{\frac{1}{2}} \cos^3 \theta \right) \right\} = 0 \quad (3.21)$$

へと帰着する. この両辺を \tilde{z} に関して積分すると,

$$\sin^2 \theta \phi' - \frac{1}{2} c_s^{-1} \left(v \cos^2 \theta + \frac{2}{3} (2H + v^2)^{\frac{1}{2}} \cos^3 \theta \right) = l_0 \quad (3.22)$$

²以下のような計算である. まず V_x, V_y に (3.5) を用いて,

$$\frac{d}{d\tilde{z}} (-\sin \theta \sin \phi (\sin \theta \cos \phi)' + \sin \theta \cos \phi (\sin \theta \sin \phi)') + \frac{1}{2} c_s^{-1} u \frac{d}{d\tilde{z}} \sin^2 \theta = 0, \quad (3.17)$$

左辺第一項の括弧内を計算して,

$$\frac{d}{d\tilde{z}} (\sin^2 \theta \phi') + \frac{1}{2} c_s^{-1} u \frac{d}{d\tilde{z}} \sin^2 \theta = 0, \quad (3.18)$$

V_x, V_y に (3.5) を用い, $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$ に注意すると

$$\frac{d}{d\tilde{z}} (\sin^2 \theta \phi') + \frac{1}{2} c_s^{-1} \left(v + (2H + v^2)^{\frac{1}{2}} \cos \theta \right) \frac{d}{d\tilde{z}} (1 - \cos^2 \theta) = 0. \quad (3.19)$$

これから直ちに本文での結果が得られる.

を得る. ここで l_0 は積分定数を表す. これは既に規格化のされた値であるが, (3.12) に併せて

$$L_0 = 2(2H + v^2)l_0 \quad (3.23)$$

によって L_0 を定義する. これを擬角運動量と呼ぶ.

3.3 定常進行アルフベン波方程式のハミルトン構造と可積分性

この節では先ず, 定常進行アルフベン波方程式 (3.6),(3.7) がハミルトン力学系であることを示す. 次に, 具体的なハミルトニアンを構成を行う. 最後に, この方程式が可積分であるということを述べる.

3.3.1 ハミルトン構造

定常進行変調アルフベン波方程式 (3.6),(3.7) は, 垂直磁場中の荷電粒子の運動方程式と同じ構造を持つハミルトン力学系である. このことを示すために, (3.4) を用いて u を消去したうえで, (3.6),(3.7) を書き直すと,

$$\begin{cases} \frac{d^2}{d\bar{z}^2} V_x = -c_s^{-1} \left(v \pm \sqrt{2H + v^2 - \frac{1}{2}V_x^2 - \frac{1}{2}V_y^2} \right) \frac{d}{d\bar{z}} V_y, \\ \frac{d^2}{d\bar{z}^2} V_y = c_s^{-1} \left(v \pm \sqrt{2H + v^2 - \frac{1}{2}V_x^2 - \frac{1}{2}V_y^2} \right) \frac{d}{d\bar{z}} V_x \end{cases} \quad (3.24)$$

となる. これは,

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} & & 0 \\ & & 0 \\ -c_s^{-1} \left(v \pm \sqrt{2H + v^2 - \frac{1}{2}V_x^2 - \frac{1}{2}V_y^2} \right) & & \end{pmatrix} \quad (3.25)$$

という記号を用いると

$$\frac{d^2}{d\tilde{z}^2} \mathbf{V} = \frac{d}{d\tilde{z}} \mathbf{V} \times \mathbf{B} \quad (3.26)$$

とかける. この方程式において, \tilde{z} を時間パラメーター, V_x, V_y を空間パラメーターとして見なすと, (3.26) は, 垂直磁場 \mathbf{B} 中での質点 (質量 $m = 1$, 電荷 $q = 1$) の振る舞いを記述する運動方程式 $m\ddot{\mathbf{x}} = q\dot{\mathbf{x}} \times \mathbf{B}$ と同じ構造を持つハミルトン力学系 [32] であることが分かる.

3.3.2 ハミルトニアン構成

運動方程式 (3.26) のハミルトニアン \bar{H} と正準共役変数 q_x, q_y, p_x, p_y を構成するためには, 以下のようなベクトルポテンシャル \mathbf{A} を求めればよい.

$$\mathbf{B} = \nabla_V \times \mathbf{A}, \quad \nabla_V = \begin{pmatrix} \partial_{V_x} \\ \partial_{V_y} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.27)$$

ここで, ∂_{V_x} は V_x による偏微分, ∂_{V_y} は V_y による偏微分を表す. V_x, V_y を空間パラメーターとして見なしていることに注意されたい. このような A_x, A_y が得られれば, それを用いて正準共役変数を

$$q_x = V_x, \quad q_y = V_y, \quad p_x = V'_x + A_x, \quad p_y = V'_y + A_y \quad (3.28)$$

として得ることができ, またハミルトニアンは

$$\bar{H} = \frac{1}{2} \left\{ (p_x - A_x)^2 + (p_y - A_y)^2 \right\} \quad (3.29)$$

として得られる.

このハミルトニアンを V_x, V_y, V'_x, V'_y による変数空間で記述すると,

$$\bar{H}(V_x, V_y, V'_x, V'_y) = \frac{1}{2}V_x'^2 + \frac{1}{2}V_y'^2 \quad (3.30)$$

となり, 小節 3.2.1 で得られた第一積分エンストロフィーと従属な関係にあることが分かる.

以下では具体的に \mathbf{A} を求める. (3.27) は以下の方程式に帰着する.

$$\partial_{V_x} A_y - \partial_{V_y} A_x = -c_s^{-1} \left(v \pm \sqrt{2H + v^2 - \frac{1}{2}V_x^2 - \frac{1}{2}V_y^2} \right). \quad (3.31)$$

(3.31) を満たす A_x, A_y として特に,

$$\partial_{V_y} A_x = \frac{1}{2}c_s^{-1}v \pm \frac{1}{2}c_s^{-1}\sqrt{2H + v^2 - \frac{1}{2}V_x^2 - \frac{1}{2}V_y^2}, \quad (3.32)$$

$$\partial_{V_x} A_y = -\frac{1}{2}c_s^{-1}v \mp \frac{1}{2}c_s^{-1}\sqrt{2H + v^2 - \frac{1}{2}V_x^2 - \frac{1}{2}V_y^2} \quad (3.33)$$

となるものを求める.(3.32) の両辺を V_y で,(3.33) の両辺を V_x で積分すると, 以下のように A_x, A_y が求められる.

$$\begin{aligned} A_x &= \frac{1}{2}c_s^{-1}vV_y \\ &\pm \frac{1}{4\sqrt{2}}c_s^{-1} \left\{ V_y \sqrt{2H_v - V_x^2 - V_y^2} + (2H_v - V_x^2) \sin^{-1} \left(\frac{V_y}{\sqrt{2H_v - V_x^2}} \right) \right\}, \end{aligned} \quad (3.34)$$

$$\begin{aligned} A_y &= -\frac{1}{2}c_s^{-1}vV_x \\ &\mp \frac{1}{4\sqrt{2}}c_s^{-1} \left\{ V_x \sqrt{2H_v - V_x^2 - V_y^2} + (2H_v - V_y^2) \sin^{-1} \left(\frac{V_x}{\sqrt{2H_v - V_y^2}} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (3.35)$$

3.3.3 可積分性

定常進行アルフベン波方程式 (3.24) は自由度 2 のハミルトン力学系であることが分かった。また、節 3.2 で述べたとおり、この力学系はハミルトニアン（エンストロフィー）と独立な保存量として、擬角運動量 (3.23) を保存することが分かっている。ハミルトン力学系は自由度の数だけ第一積分を持つとき可積分であるので [31]、定常進行アルフベン波方程式 (3.24) は可積分であるということが分かる。

3.4 定常進行アルフベン波方程式の解

第一積分 w_0, l_0 を用いて定常進行アルフベン波方程式 (3.6), (3.7) から変数を削除していくことで、これらの方程式は変数 $\cos^2 \theta$ と ϕ について分離できる。特に、 $\cos^2 \theta$ の発展は、以下に示すようにポテンシャル $U(\cos^2 \theta)$ によって定まる。

$$\frac{d^2}{d\tilde{z}^2} \cos^2 \theta = -\frac{d}{d\cos^2 \theta} U(\cos^2 \theta). \quad (3.36)$$

これを積分することで、 $\cos^2 \theta$ を \tilde{z} の陰関数として得ることができる。まずは、上記の方程式を導出しよう。まず、 $\partial_{\tilde{z}}^2 V_{\perp}^2$ を計算する。

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{d\tilde{z}^2} V_{\perp}^2 &= 2 \frac{d}{d\tilde{z}} (V_x V'_x + V_y V'_y) \\ &= 2 \left(V_x V''_x + (V'_x)^2 + V_y V''_y + (V'_y)^2 \right) \\ &= 2 \left(W - V_x c_s^{-1} u V'_y + V_y c_s^{-1} u V'_x \right) \\ &= 2 \left(W + c_s^{-1} u (V_y V'_x - V_x V'_y) \right) \\ &= 2 \left(2(2H + v^2) w_0 + c_s^{-1} u \left(2(2H + v^2) \right) \sin^2 \theta \phi' \right). \end{aligned}$$

3行目の計算では, (3.10) を用いて $(V'_x)^2$, $(V'_y)^2$ を消去している. また, 5行目の計算では, (3.5) を用いて $V_y V'_x - V_x V'_y$ を θ, ϕ 表示へと書き換えている. ここで更に, (3.5) を用いて左辺の V_\perp^2 を θ, ϕ 表示へと書き換え, 両辺を $2(2H + v^2)$ で割ることによって

$$\frac{d^2}{d\tilde{z}^2} \sin^2 \theta = 2 \left(w_0 + c_s^{-1} u \sin^2 \theta \phi' \right) \quad (3.37)$$

を得る. この左辺は, 以下のように変数を $\sin^2 \theta$ から $\cos^2 \theta$ へと変更できる.

$$l.h.s = \frac{d^2}{d\tilde{z}^2} (1 - \cos^2 \theta) = -\frac{d^2}{d\tilde{z}^2} \cos^2 \theta. \quad (3.38)$$

次に右辺の計算を更に進める. 簡略化記号として $H_v = 2H + v^2$ を導入している.

$$\begin{aligned} r.h.s &= 2 \left[w_0 + c_s^{-1} \left(v + H_v^{\frac{1}{2}} \cos \theta \right) \left\{ l_0 + \frac{1}{2} c_s^{-1} \left(v \cos^2 \theta + \frac{2}{3} H_v^{\frac{1}{2}} \cos^3 \theta \right) \right\} \right] \\ &= \frac{d}{d \cos^2 \theta} \left[2w_0 (\cos^2 \theta - 1) + 2 \left\{ l_0 + \frac{1}{2} c_s^{-1} \left(v \cos^2 \theta + \frac{2}{3} H_v^{\frac{1}{2}} \cos^3 \theta \right) \right\}^2 \right] \\ &= \frac{d}{d \cos^2 \theta} U (\cos^2 \theta). \end{aligned} \quad (3.39)$$

1行目の変形では, (3.5) を用いて u を消去しており, 更に (3.22) を用いて $\sin^2 \theta \phi'$ を消去している. 2行目の変形では, $\cos^2 \theta$ による積分を行っている³. (3.38) と (3.39) を纏めることで, $\cos^2 \theta$ に関するポテンシャル方程式 (3.36) を得る. これを具体的なポテンシャル関数表示の下に再掲しよう.

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{d\tilde{z}^2} \cos^2 \theta &= -2 \left[w_0 + c_s^{-1} \left(v + H_v^{\frac{1}{2}} \cos \theta \right) \left\{ l_0 + \frac{1}{2} c_s^{-1} \left(v \cos^2 \theta + \frac{2}{3} H_v^{\frac{1}{2}} \cos^3 \theta \right) \right\} \right] \\ &= -\frac{d}{d \cos^2 \theta} \left[2w_0 (\cos^2 \theta - 1) + 2 \left\{ l_0 + \frac{1}{2} c_s^{-1} \left(v \cos^2 \theta + \frac{2}{3} H_v^{\frac{1}{2}} \cos^3 \theta \right) \right\}^2 \right]. \end{aligned} \quad (3.40)$$

(3.36) に $\frac{d}{d\tilde{z}} \cos^2 \theta$ を掛けて積分すると,

$$\frac{d}{d\tilde{z}} \cos^2 \theta \cdot \frac{d^2}{d\tilde{z}^2} \cos^2 \theta + \frac{d}{d\tilde{z}} \cos^2 \theta \cdot \frac{d}{d \cos^2 \theta} U (\cos^2 \theta) = 0, \quad (3.41)$$

³積分定数の取り方がやや不自然に見えるのは, 後の計算の都合である.

$$\frac{d}{d\tilde{z}} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{d}{d\tilde{z}} \cos^2 \theta \right)^2 + U(\cos^2 \theta) \right) = 0, \quad (3.42)$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{d}{d\tilde{z}} \cos^2 \theta \right)^2 + U(\cos^2 \theta) = E_0 \quad (3.43)$$

となる. ここで E_0 は積分定数であるが, 実は $E_0 = 0$ であることが以下に示される.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left(\frac{d}{d\tilde{z}} \cos^2 \theta \right)^2 + U(\cos^2 \theta) \\ = & \frac{1}{2} (2 \cos \theta \sin \theta \theta')^2 + U(\cos^2 \theta) \\ = & 2 \cos^2 \theta \sin^2 \theta (\theta')^2 + U(\cos^2 \theta) \\ = & 2 \sin^2 \theta (w_0 - \sin^2 \theta (\psi')^2) + U(\cos^2 \theta) \\ = & 2 (1 - \cos^2 \theta) w_0 - 2 (\sin^2 \theta (\psi')^2) + U(\cos^2 \theta) \\ = & 2 (1 - \cos^2 \theta) w_0 - 2 \left\{ l_0 + \frac{1}{2} c_s^{-1} \left(v \cos^2 \theta + \frac{2}{3} H_v^{\frac{1}{2}} \cos^3 \theta \right) \right\}^2 + U(\cos^2 \theta) \\ = & 2 (1 - \cos^2 \theta) w_0 - 2 \left\{ l_0 + \frac{1}{2} c_s^{-1} \left(v \cos^2 \theta + \frac{2}{3} H_v^{\frac{1}{2}} \cos^3 \theta \right) \right\}^2 \\ & + 2w_0 (\cos^2 \theta - 1) + 2 \left\{ l_0 + \frac{1}{2} c_s^{-1} \left(v \cos^2 \theta + \frac{2}{3} H_v^{\frac{1}{2}} \cos^3 \theta \right) \right\}^2. \\ = & 0 \end{aligned} \quad (3.44)$$

3行目から4行目に至る計算では, (3.14) によって $\cos^2 \theta (\theta')^2$ を消去している. また, 5行目から6行目に至る計算では, (3.22) を用いて $\sin^2 \theta (\psi')^2$ を消去している. 6行目から7行目に至る計算では, (3.39) にて定義される $U(\cos^2 \theta)$ を代入している. 結局

$$\frac{1}{2} \left(\frac{d}{d\tilde{z}} \cos^2 \theta \right)^2 + U(\cos^2 \theta) = 0 \quad (3.45)$$

であり, $E_0 = 0$ であったことが分かる.

この方程式を積分していくことで, \tilde{z} の逆関数として $\cos^2 \theta$ を得ることができる.

まず, (3.45) を変形して

$$\frac{d}{d\tilde{z}} \cos^2 \theta = \pm 2 \sqrt{(1 - \cos^2 \theta) w_0 - \left(l_0 + \frac{1}{2} c_s^{-1} \left(v \cos^2 \theta + \frac{2}{3} H_v^{\frac{1}{2}} \cos^3 \theta \right) \right)^2} \quad (3.46)$$

を得る. この右辺は $\cos^2 \theta$ のみの関数であるので, 変数分離することができて

$$\int \frac{d \cos^2 \theta}{2\sqrt{(1 - \cos^2 \theta) w_0 - \left(l_0 + \frac{1}{2} c_s^{-1} \left(v \cos^2 \theta + \frac{2}{3} H_v^{\frac{1}{2}} \cos^3 \theta \right) \right)^2}} = \pm (\tilde{z} - \tilde{z}_0) \quad (3.47)$$

と積分することができる. ここで, \tilde{z}_0 は \tilde{z} の初期値を決定する積分定数である. これは即ち, \tilde{z} を $\cos^2 \theta$ の積分を含む関数として得たことになり, この逆関数を考えることで, $\cos^2 \theta(\tilde{z})$ を得る. このようにして得られた $\cos^2 \theta(\tilde{z})$ を (3.22) に代入し, 両辺を積分することで,

$$\phi - \phi_0 = \int \frac{l_0 + \frac{1}{2} c_s^{-1} \left(v \cos^2 \theta + \frac{2}{3} (2H + v^2)^{\frac{1}{2}} \cos^3 \theta \right)}{1 - \cos^2 \theta} d\tilde{z} \quad (3.48)$$

を得る. ここで, ϕ_0 は ϕ の初期値を決定する積分定数である. このようにして, $\phi(\tilde{z})$ を \tilde{z} の積分を含む関数として表すことができる.

結局, 保存量 $l_0, w_0, \phi_0, \tilde{z}_0$ を用いて, $\cos^2 \theta, \phi$ に関して定常進行アルフベン波方程式の解を得た. しかし, $\cos^2 \theta$ に関しては (3.47) の逆関数として定義されており⁴, この形からでは解の性質は掴み難い. ϕ に関しても, 逆関数として得られた $\cos^2 \theta$ を陽に含んでいるため, このままでは解の性質は明らかではない. 解の具体的な性質に関しては, ポテンシャル関数の考察を通じて, 4章にて議論される. その前に, 次節にて解が具体的に初等関数表示できる場合を示しておこう.

3.5 変調の無い解 (振幅一定解)

定常進行アルフベン波方程式 (3.6),(3.7) の解の中でも, 二乗振幅 $V_{\perp}^2 = V_x^2 + V_y^2$ を一定に保つ, 変調の無い解に関しては, 初等関数を用いて表すことができる.

⁴これは楕円関数の形に似ているが, (3.47) の左辺は $\cos^2 \theta$ に関する積分であるため, その被積分関数は次数 $3/2, 5/2$ の項を含む. 従って, 単純に楕円関数論の知識を適応する訳にはいかない

(3.6)+i(3.7) を計算すると,

$$\frac{d^2}{d\tilde{z}^2} (V_x + iV_y) - ic_s^{-1}u \frac{d}{d\tilde{z}} (V_x + iV_y) = 0 \quad (3.49)$$

が得られる. u は

$$u = v \pm \sqrt{2H + v^2 - \frac{1}{2}V_x^2 - \frac{1}{2}V_y^2} = v \pm \sqrt{2H + v^2 - \frac{1}{2}V_{\perp}^2} \quad (3.50)$$

であり, V_x, V_y の関数であるため,(3.49) は非線形方程式である. しかし, 二乗振幅 V_{\perp}^2 を一定値 $V_{\perp 0}^2$ に保つような運動の場合には,

$$u = u_0 = v \pm \sqrt{2H + v^2 - \frac{1}{2}V_{\perp 0}^2} \quad (3.51)$$

として u も一定に保たれる. 従ってこのような運動を考える際には,(3.49) は

$$\frac{d^2}{d\tilde{z}^2} (V_x + iV_y) - ic_s^{-1}u_0 \frac{d}{d\tilde{z}} (V_x + iV_y) = 0 \quad (3.52)$$

のように線形化され, これは簡単に解くことができる. ただし,(3.49) は実際には非線形方程式であるため, 重ね合わせの原理は成り立たず, 得られた解の線形結合を取ることはできないということに注意されたい. 方程式 (3.52) の解は,

$$\begin{cases} V_x = V_{x0} \\ V_y = V_{y0} \end{cases}, \quad \begin{cases} V_x = V_{x0} \cos(c_s^{-1}u_0\tilde{z}) - V_{y0} \sin(c_s^{-1}u_0\tilde{z}) \\ V_y = V_{y0} \cos(c_s^{-1}u_0\tilde{z}) + V_{x0} \sin(c_s^{-1}u_0\tilde{z}) \end{cases} \quad (3.53)$$

となる. ただし V_{x0}, V_{y0} は V_x, V_y の初期値である. これらの解は確かに二乗振幅を一定に保つ. 図 3.1 は, (3.53) の第 2 式目の解を, $c_s = 1, H = 1, v = 1, V_{x0} = 2, V_{y0} = 0$ の場合に図示したものである. ベクトル $(V_x(\tilde{z}), V_y(\tilde{z}), u(\tilde{z}) + \tilde{z})$ の先端をプロットしている.

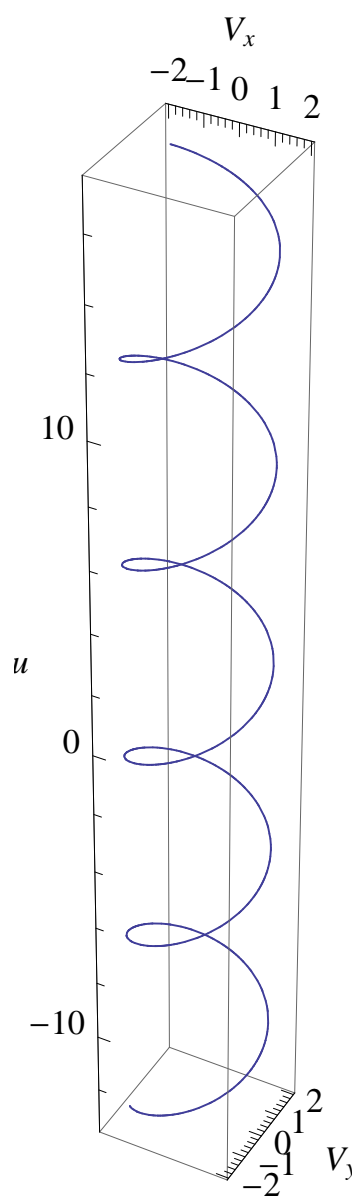


图 3.1 二乘振幅一定解

第 4 章

定常進行波の構造

前章では $\cos^2 \theta$ のポテンシャル関数 $U(\cos^2 \theta)$ を求め、そこから求積法によって $\cos^2 \theta$ を \tilde{z} の逆関数として求めた。しかし、この逆関数による表現から、 $\cos^2 \theta$ が具体的にどのような発展をするのかは明らかでない。一方で、ポテンシャル関数 $U(\cos^2 \theta)$ の形状を知ることができれば、ポテンシャル中での質点の運動として $\cos^2 \theta$ の定性的な挙動を理解することができる。そこでこの章では、パラメーター v, H_0, w_0, l_0 の値に応じて、ポテンシャル関数 $U(\cos^2 \theta; v, H_0, l_0, w_0)$ の形状を分類することで、 $\cos^2 \theta$ の発展に関する定性的な解析を行う。

以下では簡略化のために、 $x = \cos \theta$ とする。また、3.4 で導入した簡略化記号 $H_v = 2H_0 + v^2$ をここでも用いる。更に、

$$f(x^2; v, H_0) = \frac{1}{2} c_s^{-1} \left(vx^2 + \frac{2}{3} H_v^{\frac{1}{2}} x^3 \right), \quad (4.1)$$

$$g(x^2; v, H_0) = \frac{d}{dx^2} f(x^2; v, H_0) = \frac{1}{2} c_s^{-1} \left(v + H_v^{\frac{1}{2}} x \right) \quad (4.2)$$

なる関数を適宜用いる。これらの記号と関数を用いて、前章で得られた結果を再掲

する.

$$\frac{d^2}{dz^2}x^2 = -\frac{d}{dx^2}U(x^2), \quad (4.3)$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{d}{dz}x^2\right)^2 + U(x^2) = 0, \quad (4.4)$$

$$U(x^2) = -2w_0(1-x^2) + 2\{l_0 + f(x^2)\}^2, \quad (4.5)$$

$$\frac{d}{dx^2}U(x^2) = 2w_0 + 4\{l_0 + f(x^2)\}g(x^2), \quad (4.6)$$

$$\begin{cases} l_0 = (1-x_0^2)\phi'_0 - f(x_0^2), \\ w_0 = x_0^2(\theta'_0)^2 + (1-x_0^2)(\phi'_0)^2. \end{cases} \quad (4.7)$$

$-1 \leq x = \cos \theta \leq 1$ であることと, (4.4) から, 運動は $0 \leq x^2 \leq 1, U(x^2) \leq 0$ となる領域でのみ可能となる.

4.1 ポテンシャル関数に応じた解の分類

$0 \leq v, 0 \leq x \leq 1$ の場合のポテンシャル関数 $U(x^2; v, H_0, w_0, l_0)$ の形状を, 以下に示す手順で分類する.(4.6) を,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx^2}U(x^2) &= 2w_0 + S(x^2; v, H_0, l_0), \\ S(x^2; v, H_0, l_0) &= 4\left\{l_0 + \frac{1}{2}c_s^{-1}\left(vx^2 + \frac{2}{3}H_v^{\frac{1}{2}}x^3\right)\right\}\left\{\frac{1}{2}c_s^{-1}\left(v + H_v^{\frac{1}{2}}x\right)\right\} \end{aligned} \quad (4.8)$$

と書き直すと, パラメーター v, H_0, l_0 に応じて $\frac{d}{dx^2}U(x^2)$ の形状 $S(x^2; v, H_0, l_0)$ が定まり, 次にパラメーター w_0 に応じて $\frac{d}{dx^2}U(x^2)$ の正負が定まるということが分かる.

そこで, $S(x^2)$ の形状を求めたいが, これを x^2 の関数として考えると, 計算が煩雑になる. $0 \leq x \leq 1$ の範囲では $x \rightarrow x^2$ は順序を保つ全単射であるので, まずは S を x の関数 $S(x)$ として求め, 後に縮尺を正して考えればよい.

$\frac{d}{dx}S(x), \frac{d^2}{dx^2}S(x)$ を計算すると

$$\frac{d}{dx}S(x) = 2c_s^{-1} \left\{ l_0 H_v^{\frac{1}{2}} + c_s^{-1} \left(v^2 x + \frac{5}{2} v H_v^{\frac{1}{2}} x^2 + \frac{4}{3} H_v x^3 \right) \right\}, \quad (4.9)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dx^2}S(x) &= 2c_s^{-2} \left(v^2 + 5v H_v^{\frac{1}{2}} x + 4H_v x^2 \right) \\ &= 2c_s^{-2} \left(4H_v^{\frac{1}{2}} x + v \right) \left(H_v^{\frac{1}{2}} x + v \right) \end{aligned} \quad (4.10)$$

となる. $0 \leq v, 0 \leq x \leq 1$ の場合を考えているので, $\frac{d^2}{dx^2}S(x) \geq 0$ である. 従って $\frac{d}{dx}S(x)$ は $0 \leq x \leq 1$ の範囲で単調増加関数である. 後は, l_0 の値に応じて $\frac{d}{dx}S(x)$ の正負, つまり $S(x)$ の増減が定まる. 更に w_0 の値に応じて, $\frac{d}{dx^2}U(x^2)$ の正負が定まり, $U(x^2)$ の増減が決まる.

従って, まずは l_0 に関して場合分けを行い, つぎに w_0 に関して場合分けを行うことになる.

これらの手続きを, 分岐図 4.1 を用いて見直してみよう. 図は左から右へ読む. まず, 1 列目に示されるように, $\frac{d^2}{dx^2}S(x) \geq 0$ である. 従って, $\frac{d}{dx}S(x)$ は単調増加関数であるが, l_0 の値に応じて, 2 列目のように 3 パターンに分かれる. ここから, 3 列目に示されるように, $S(x)$ の形状が 4 パターン得られる. 更にここから w_0 の値に応じて, 4 列目に示されるように $\frac{d}{dx^2}U(x^2)$ は 12 パターンに分類される. このそれぞれのパターンから, $U(x^2)$ の形状を描いたものが 5 列目である.

以下では具体的な計算と分類を示す.

I $\frac{dS}{dx}(1) \leq 0$ の場合

$c_s^{-1} > 0$ よりこの条件は

$$l_0 \leq - \left(c_s^{-1} / H_v^{\frac{1}{2}} \right) \left(v^2 + \frac{5}{2} v H_v^{\frac{1}{2}} + \frac{4}{3} H_v \right) \quad (4.11)$$

$\frac{d^2}{dx^2} S(x)$	$\frac{d}{dx} S(x)$	$S(x)$	$\frac{d}{dx^2} U(x^2)$	$U(x^2)$	
	I 		a 		
			b 		
			c 		
	II 		II - i	a 	
			b 		
			c 		
			d 		
			a 		
			b 		
			c 		
	d 				
	III 		a 		

図 4.1 l_0 と w_0 の値に応じたポテンシャル形状の分岐図

と書き換えられる. このとき, $\frac{dS}{dx}$ が x に関して単調増加関数であることから, $0 \leq x \leq 1$ の範囲において $\frac{dS}{dx}(x) \leq 0$ である. 従って, $S(x)$, つまり $\frac{d}{dx^2}U(x^2)$ は $0 \leq x \leq 1$ において単調減少関数である.

I-a $\frac{dU}{dx^2}(0) \leq 0$ の場合

この条件は

$$0 \leq w_0 \leq -c_s^{-1}vl_0 \quad (4.12)$$

と書き換えられる. このとき, $\frac{dU}{dx^2}$ が x に関して単調減少関数であることから, $0 \leq x \leq 1$ の範囲において $\frac{dU}{dx^2} \leq 0$ である. 従って, $U(x^2)$ は $0 \leq x^2 \leq 1$ において単調減少関数である.

I-b $\frac{dU}{dx^2}(1) < 0 < \frac{dU}{dx^2}(0)$ の場合

この条件は

$$-c_s^{-1}vl_0 < w_0 < -c_s^{-1} \left\{ l_0 + \frac{1}{2}c_s^{-1} \left(v + \frac{2}{3}Hv^{\frac{1}{2}} \right) \right\} \left(v + Hv^{\frac{1}{2}} \right) \quad (4.13)$$

と書き換えられる. このとき $0 < \beta < 1$ なる β で,

$$\begin{cases} \frac{dU}{dx^2}(x) > 0 & (0 \leq x < \beta) \\ \frac{dU}{dx^2}(x) = 0 & (x = \beta) \\ \frac{dU}{dx^2}(x) < 0 & (\beta < x \leq 1) \end{cases} \quad (4.14)$$

を満たすものが存在する. 従って, $U(x^2)$ は $0 \leq x^2 \leq 1$ において上に凸な関数であるということが分かる.

I-c $0 \leq \frac{dU}{dx^2}(1)$ の場合

この条件は

$$-c_s^{-1} \left\{ l_0 + \frac{1}{2}c_s^{-1} \left(v + \frac{2}{3}Hv^{\frac{1}{2}} \right) \right\} \left(v + Hv^{\frac{1}{2}} \right) < w_0 \quad (4.15)$$

と書き換えられる. このとき, $\frac{dU}{dx^2}$ が x に関して単調減少関数であることから, $0 \leq x \leq 1$ の範囲において $\frac{dU}{dx^2} \geq 0$ である. 従って, $U(x^2)$ は $0 \leq x^2 \leq 1$ において単調増加関数である.

II $\frac{dS}{dx}(0) < 0 < \frac{dS}{dx}(1)$ の場合

$c_s^{-1} > 0$ よりこの条件は

$$-\left(c_s^{-1}/H_v^{\frac{1}{2}}\right)\left(v^2 + \frac{5}{2}vH_v^{\frac{1}{2}} + \frac{4}{3}H_v\right) < l_0 < 0 \quad (4.16)$$

と書き換えられる. このとき, $0 < \alpha < 1$ なる α で,

$$\begin{cases} \frac{dS}{dx}(x) < 0 & (0 \leq x < \alpha) \\ \frac{dS}{dx}(x) = 0 & (x = \alpha) \\ \frac{dS}{dx}(x) > 0 & (\alpha < x \leq 1) \end{cases} \quad (4.17)$$

を満たすものが存在する. 従って, $S(x)$ は $0 \leq x \leq 1$ において下に凸な関数であるということが分かる. 更に $S(0)$ と $S(1)$ の大小に応じて場合分けをする.

II-i $S(0) > S(1)$ の場合

II-i-a $\frac{dU}{dx^2}(0) \leq 0$ の場合

この条件は

$$0 \leq w_0 \leq -c_s^{-1}vl_0 \quad (4.18)$$

と書き換えられる. このとき, $0 \leq x \leq 1$ の範囲において $\frac{dU}{dx^2} \leq 0$ である.

従って, $U(x^2)$ は $0 \leq x^2 \leq 1$ において単調減少関数である.

II-i-b $\frac{dU}{dx^2}(1) < 0 \leq \frac{dU}{dx^2}(0)$ の場合

この条件は

$$-c_s^{-1}vl_0 < w_0 < -c_s^{-1} \left\{ l_0 + \frac{1}{2}c_s^{-1} \left(v + \frac{2}{3}Hv^{\frac{1}{2}} \right) \right\} \left(v + Hv^{\frac{1}{2}} \right) \quad (4.19)$$

と書き換えられる. このとき $0 < \beta < \alpha$ なる β で,

$$\begin{cases} \frac{dU}{dx^2}(x) > 0 & (0 \leq x < \beta) \\ \frac{dU}{dx^2}(x) = 0 & (x = \beta) \\ \frac{dU}{dx^2}(x) < 0 & (\beta < x \leq 1) \end{cases} \quad (4.20)$$

を満たすものが存在する. 従って, $U(x^2)$ は $0 \leq x^2 \leq 1$ において上に凸な関数であるということが分かる.

II-i-c $\frac{dU}{dx^2}(\alpha) \leq 0 \leq \frac{dU}{dx^2}(1)$ の場合

この条件は

$$\begin{cases} -c_s^{-1} \left\{ l_0 + \frac{1}{2}c_s^{-1} \left(v + \frac{2}{3}Hv^{\frac{1}{2}} \right) \right\} \left(v + Hv^{\frac{1}{2}} \right) < w_0 \\ w_0 < -c_s^{-1} \left\{ l_0 + \frac{1}{2}c_s^{-1} \left(v\alpha^2 + \frac{2}{3}Hv^{\frac{1}{2}}\alpha^3 \right) \right\} \left(v + Hv^{\frac{1}{2}}\alpha \right) \end{cases} \quad (4.21)$$

と書き換えられる. このとき $0 < \beta < \alpha < \gamma < 1$ なる β, γ で,

$$\begin{cases} \frac{dU}{dx^2}(x) > 0 & (0 \leq x < \beta) \\ \frac{dU}{dx^2}(x) = 0 & (x = \beta) \\ \frac{dU}{dx^2}(x) < 0 & (\beta < x < \gamma) \\ \frac{dU}{dx^2}(x) = 0 & (x = \gamma) \\ \frac{dU}{dx^2}(x) > 0 & (\gamma < x < 1) \end{cases} \quad (4.22)$$

を満たすものが存在する. 従って, $U(x^2)$ は図 4.1 の **II-i-c** のような関数形となる.

II-i-d $0 \leq \frac{dU}{dx^2}(\alpha)$ の場合

この条件は

$$-c_s^{-1} \left\{ l_0 + \frac{1}{2} c_s^{-1} \left(v \alpha^2 + \frac{2}{3} H_v^{\frac{1}{2}} \alpha^3 \right) \right\} \left(v + H_v^{\frac{1}{2}} \alpha \right) < w_0 \quad (4.23)$$

と書き換えられる. このとき, $0 \leq x \leq 1$ の範囲において $\frac{dU}{dx^2} \geq 0$ である.

従って, $U(x^2)$ は $0 \leq x^2 \leq 1$ において単調増加関数である.

II-ii $S(0) \leq S(1)$ の場合

II-ii-a $\frac{dU}{dx^2}(1) \leq 0$ の場合

この条件は

$$0 \leq w_0 < -c_s^{-1} \left\{ l_0 + \frac{1}{2} c_s^{-1} \left(v + \frac{2}{3} H_v^{\frac{1}{2}} \right) \right\} \left(v + H_v^{\frac{1}{2}} \right) \quad (4.24)$$

と書き換えられる. このとき, $0 \leq x \leq 1$ の範囲において $\frac{dU}{dx^2} \leq 0$ である.

従って, $U(x^2)$ は $0 \leq x^2 \leq 1$ において単調減少関数である.

II-ii-b $\frac{dU}{dx^2}(0) < 0 \leq \frac{dU}{dx^2}(1)$ の場合

この条件は

$$-c_s^{-1} \left\{ l_0 + \frac{1}{2} c_s^{-1} \left(v + \frac{2}{3} H_v^{\frac{1}{2}} \right) \right\} \left(v + H_v^{\frac{1}{2}} \right) < w_0 < -c_s^{-1} v l_0 \quad (4.25)$$

と書き換えられる. このとき $\alpha < \beta < 1$ なる β で,

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dU}{dx^2}(x) < 0 \quad (0 \leq x < \beta) \\ \frac{dU}{dx^2}(x) = 0 \quad (x = \beta) \\ \frac{dU}{dx^2}(x) > 0 \quad (\beta < x \leq 1) \end{array} \right. \quad (4.26)$$

を満たすものが存在する. 従って, $U(x^2)$ は $0 \leq x^2 \leq 1$ において下に凸な関数であるということが分かる.

II-ii-c $\frac{dU}{dx^2}(\alpha) \leq 0 \leq \frac{dU}{dx^2}(0)$ の場合

この条件は

$$-c_s^{-1}vl_0 < w_0 < -c_s^{-1} \left\{ l_0 + \frac{1}{2}c_s^{-1} \left(v\alpha^2 + \frac{2}{3}H_v^{\frac{1}{2}}\alpha^3 \right) \right\} \left(v + H_v^{\frac{1}{2}}\alpha \right) \quad (4.27)$$

と書き換えられる. このとき $0 < \beta < \alpha < \gamma < 1$ なる β, γ で,

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dU}{dx^2}(x) > 0 \quad (0 \leq x < \beta) \\ \frac{dU}{dx^2}(x) = 0 \quad (x = \beta) \\ \frac{dU}{dx^2}(x) < 0 \quad (\beta < x < \gamma) \\ \frac{dU}{dx^2}(x) = 0 \quad (x = \gamma) \\ \frac{dU}{dx^2}(x) > 0 \quad (\gamma < x < 1) \end{array} \right. \quad (4.28)$$

を満たすものが存在する. 従って, $U(x^2)$ は図 4.1 の **II-ii-c** のような関数形となる.

II-ii-d $0 \leq \frac{dU}{dx^2}(\alpha)$ の場合

この条件は

$$-c_s^{-1} \left\{ l_0 + \frac{1}{2}c_s^{-1} \left(v\alpha^2 + \frac{2}{3}H_v^{\frac{1}{2}}\alpha^3 \right) \right\} \left(v + H_v^{\frac{1}{2}}\alpha \right) < w_0 \quad (4.29)$$

と書き換えられる. このとき, $0 \leq x \leq 1$ の範囲において $\frac{dU}{dx^2} \geq 0$ である.

従って, $U(x^2)$ は $0 \leq x^2 \leq 1$ において単調増加関数である.

III $0 \leq \frac{dS}{dx}(0)$ の場合

$c_s^{-1} > 0$ よりこの条件は

$$0 \leq l_0 \quad (4.30)$$

と書き換えられる. このとき, $\frac{dS}{dx}$ が x に関して単調増加関数であることから,

$0 \leq x \leq 1$ の範囲において $\frac{dS}{dx}(x) \geq 0$ である. 従って, $S(x)$ は $0 \leq x \leq 1$ におい

て単調増加関数である. 更にこのとき, $\frac{dU}{dx^2}(0) = 2w_0 + 2c_s^{-1}vl_0 > 0$ となるので, $0 \leq x \leq 1$ において $\frac{dU}{dx^2}(x^2) > 0$ である. 従って, $U(x^2)$ は $0 \leq x^2 \leq 1$ において単調増加関数である.

$0 \leq v, 0 \leq x \leq 1$ の場合の, ポテンシャル関数 $U(x^2)$ の形状の定性的な分類は上記の通りである. これらのポテンシャル形状からは, 解 $x^2(\tilde{z})$ のうち, $0 \leq x \leq 1$ という条件を満たすものとしては, 振幅一定解, 周期変調解, 局所変調解の3つの場合が予想される. また更に, ポテンシャルの持つ特異性から, 不規則に局所的な変調を繰り返すような解も得られることが明らかになる. 以下の節では, これら4つの場合について更に詳しく解析する.

4.2 変調の無い解 (無変調解)

振幅一定解が満たすべき条件は,

$$\begin{cases} \frac{dU}{dx^2}(x_0^2) = 2w_0 + 4\{l_0 + f(x_0^2)\}g(x_0^2) = 0 \\ U(x_0^2) = -2w_0(1 - x_0^2) + 2\{l_0 + f(x_0^2)\}^2 = 0 \end{cases} \quad (4.31)$$

である. 以下ではこれらの条件を満たす振幅一定解を具体的に求めていく. まずは(4.31)の第1式を

$$w_0 = -2\{l_0 + f(x_0^2)\}g(x_0^2) \quad (4.32)$$

として(4.31)の第2式に代入すると,

$$\{l_0 + f(x_0^2)\}\{l_0 + f(x_0^2) + 2(1 - x_0^2)g(x_0^2)\} = 0 \quad (4.33)$$

となる.

$$l_0 + f(x_0^2) = 0 \quad (4.34)$$

の場合には (4.32) より

$$w_0 = 0 \quad (4.35)$$

となる. このとき, (4.7) は

$$\begin{cases} (1 - x_0^2) \phi'_0 = 0 \\ x_0^2 (\theta'_0)^2 = 0 \end{cases} \quad (4.36)$$

となり

$$\begin{cases} \phi'_0 = 0 \\ \theta'_0 = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} x_0 = 1 \\ \theta'_0 = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} x_0 = 0 \\ \phi'_0 = 0 \end{cases} \quad (4.37)$$

へと帰着する.(4.36) が成り立つとき, (4.31) も成り立つ.

この場合に得られる振幅一定解は, (4.35) より, エンストロフィー $W_0 = 0$ なる場合の解である. これは, 3.5 節で得られた解 (3.53) の第 1 式目の場合に相当する解である.

次に

$$l_0 + f(x_0^2) + 2(1 - x_0^2)g(x_0^2) = 0 \quad (4.38)$$

の場合を解析しよう. このとき (4.32) より

$$w_0 = 4(1 - x_0^2)g(x_0^2)^2 \quad (4.39)$$

となる. このとき, (4.31) の第 3,4 式は

$$\begin{cases} (1 - x_0^2)(\phi'_0 + 2g(x_0^2)) = 0 \\ 4(1 - x_0^2)g(x_0^2)^2 = x_0^2(\theta'_0)^2 + (1 - x_0^2)(\phi'_0)^2 \end{cases} \quad (4.40)$$

となり

$$\begin{cases} \phi'_0 = -2g(x_0^2) \\ \theta'_0 = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} x_0 = 1 \\ \theta'_0 = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} \phi'_0 = -2g(x_0^2) \\ x_0 = 0 \end{cases}, \quad (4.41)$$

へと帰着する。(4.40) が成り立つとき, (4.31) も成り立つ.

(4.41) の第1式, 第3式目から得られる振幅一定解は, (4.39) より, エンストロフィー $W_0 \neq 0$ なる場合の解である. これは, 3.5節で得られた解 (3.53) の第2式目の場合に相当する解である.

4.3 周期的な変調をする解 (周期変調解)

周期変調解を持ちうるポテンシャルの形状は, **II-i-c**, **II-ii-b**, **II-ii-c** の場合である. ここでは, **II-ii-b** の場合のポテンシャルが実際に周期変調解を持つための条件を求める. まず **II-ii-b** の条件を満たすために, l_0, w_0 は以下の条件を満たす必要がある.

$$\begin{cases} -\left(c_s^{-1}/H_v^{\frac{1}{2}}\right)\left(v^2 + \frac{5}{2}vH_v^{\frac{1}{2}} + \frac{4}{3}H_v\right) < l_0 < 0 \\ -2\{l_0 + f(1)\}g(1) < w_0 < -2\{l_0 + f(0)\}g(0) \end{cases} \quad (4.42)$$

このとき, ポテンシャルの形状¹と, $\frac{1}{2}\left(\frac{d}{dz}x^2\right)^2 + U(x^2) = 0, U(1) = 2\{l_0 + f(1)\}^2 \geq 0$ であることを考慮すると,

$$\begin{cases} U(x_1^2) = -2w_0(1 - x_1^2) + 2\{l_0 + f(x_1^2)\}^2 = 0 \\ \frac{dU}{dx^2}(x_1^2) = 2w_0 + 4\{l_0 + f(x_1^2)\}g(x_1^2) < 0 \\ 0 \leq x_1 < 1 \end{cases} \quad (4.43)$$

という条件を満たす x_1 が存在すれば, このポテンシャルは周期変調解を持つ. 図 4.2 はこれらの条件を図示したものである.

¹図 4.1 の **II-ii-b** の図を参照されたい.

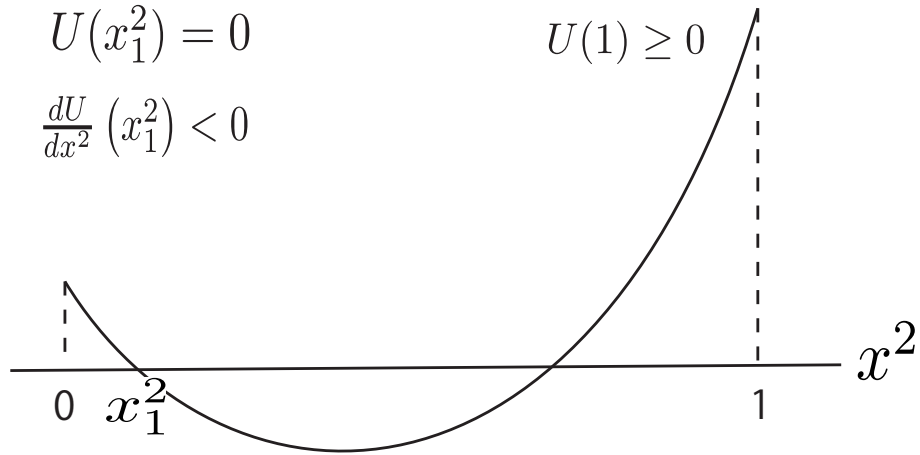


図 4.2 ポテンシャル関数が周期変調解を持つ条件

(4.43) の第 1 式を用いて, 第 2 式から w_0 を消去し, 変形すると

$$\begin{cases} (1 - x_1^2) w_0 = \{l_0 + f(x_1^2)\}^2 \\ -f(x_1^2) - 2(1 - x_1^2) g(x_1^2) < l_0 < -f(x_1^2) \end{cases} \quad (4.44)$$

が得られる. 初期値 $x_0 = x_1$ の場合を考えると, (4.7) より (4.44) の第 1 式は

$$(1 - x_0^2) \{x_0^2 (\theta'_0)^2 + (1 - x_0^2) (\phi'_0)^2\} = \{(1 - x_0^2) (\phi'_0)\}^2 \quad (4.45)$$

となり, これから直ちに

$$x_0 = 0, \quad \theta'_0 = 0 \quad (4.46)$$

が得られる. 以下では特に,

$$\theta'_0 = 0 \quad (4.47)$$

の場合に限って解析を続ける.(4.44) の第 2 式は

$$-f(x_0^2) - 2(1 - x_0^2) g(x_0^2) < (1 - x_0^2) \phi'_0 - f(x_0^2) < -f(x_0^2) \quad (4.48)$$

となり, これから直ちに

$$-2g(x_0^2) < \phi'_0 < 0 \quad (4.49)$$

が得られる。(4.7),(4.47) を (4.42) に代入すると

$$\left\{ \begin{array}{l} -\left(c_s^{-1}/Hv^{\frac{1}{2}}\right)\left(v^2 + \frac{5}{2}vHv^{\frac{1}{2}} + \frac{4}{3}Hv\right) < (1-x_0^2)\phi'_0 - f(x_0^2) < 0 \\ -2\{(1-x_0^2)\phi'_0 - f(x_0^2) + f(1)\}g(1) < (1-x_0^2)(\phi'_0)^2 \\ (1-x_0^2)(\phi'_0)^2 < -2\{(1-x_0^2)\phi'_0 - f(x_0^2) + f(0)\}g(0) \end{array} \right. \quad (4.50)$$

が得られる. 初期値 x_0, ϕ_0 が (4.49),(4.50) を満たすとき, そこから得られる解は周期変調解となる. 特別な場合として, $c_s = 1, H = 4, v = 1, x_0 = \frac{1}{2}$ の場合に (4.49),(4.50) を解いて ϕ_0 が満たすべき条件を求めると,

$$-\frac{5}{2} < \phi'_0 < 0 \quad (4.51)$$

が得られる. 図 4.3 は, $c_s = 1, H = 4, v = 1, x_0 = \frac{1}{2}, \theta'_0 = 0, \phi'_0 = -\frac{1}{2}$ の場合の解を数値計算によって描いたものである. 規格化された二乗振幅を表す $1-x^2$ を縦軸にとってある.

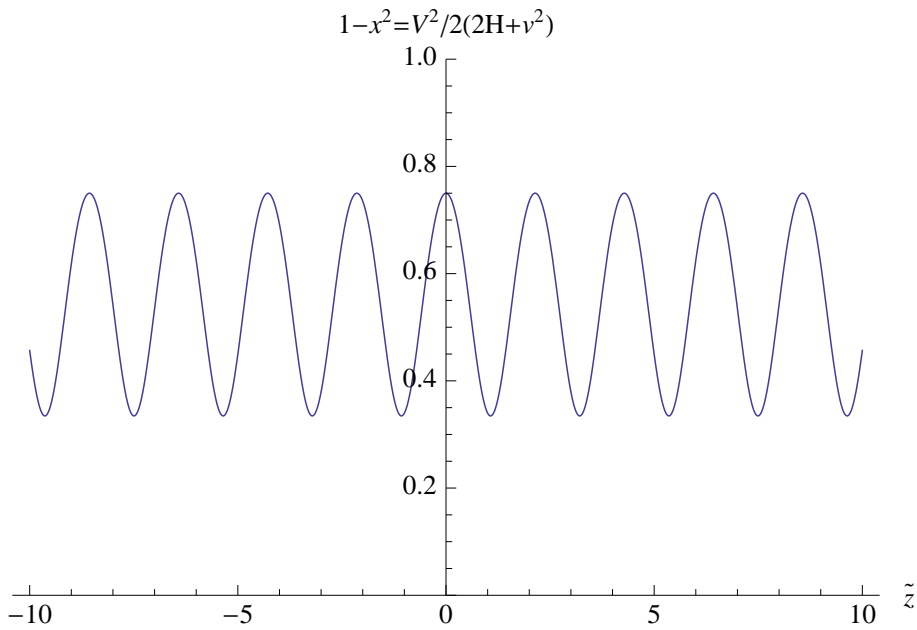


図 4.3 二乗振幅の周期変調

4.4 局所的な変調をする解 (局所変調解)

4.4.1 局所変調解を得るための条件

局所変調解を持ちうるポテンシャルの形状は、**II-i-c**の場合と**II-ii-c**の場合に限られる。**II-i-c**あるいは**II-ii-c**の条件を満たすには、 l_0, w_0 は以下の条件を満たせば良い。

$$\begin{cases} -\left(c_s^{-1}/H_v^{\frac{1}{2}}\right)\left(v^2 + \frac{5}{2}vH_v^{\frac{1}{2}} + \frac{4}{3}H_v\right) < l_0 < 0 \\ \max\left[-c_s^{-1}vl_0, -c_s^{-1}\left\{l_0 + \frac{1}{2}c_s^{-1}\left(v + \frac{2}{3}H_v^{\frac{1}{2}}\right)\right\}\left(v + H_v^{\frac{1}{2}}\right)\right] \leq w_0 \\ w_0 < -c_s^{-1}\left\{l_0 + \frac{1}{2}c_s^{-1}\left(v\alpha^2 + \frac{2}{3}H_v^{\frac{1}{2}}\alpha^3\right)\right\}\left(v + H_v^{\frac{1}{2}}\alpha\right) \end{cases} \quad (4.52)$$

ここで α は $\frac{dS}{dx}(\alpha) = 0$ かつ $0 < \alpha < 1$ を満たす値である。

$$\begin{cases} \frac{dS}{dx}(\alpha) = 2c_s^{-1}\left\{l_0H_v^{\frac{1}{2}} + c_s^{-1}\left(v^2\alpha + \frac{5}{2}vH_v^{\frac{1}{2}}\alpha^2 + \frac{4}{3}H_v\alpha^3\right)\right\} = 0 \\ 0 < \alpha < 1 \end{cases} \quad (4.53)$$

このとき、4.1節でも述べたように、 $0 < \beta < \alpha$ なる β で、

$$\frac{dU}{dx^2}(\beta^2) = 2w_0 + 4\left\{l_0 + f(\beta^2)\right\}g(\beta^2) = 0 \quad (4.54)$$

を満たすものが存在する。 $\frac{1}{2}\left(\frac{d}{dz}x^2\right)^2 + U(x^2) = 0$ であることを考慮すると、このポテンシャルが実際に局所変調解を持つためには、 β と $\beta < \delta \leq 1$ なる δ に対して

$$U(\beta^2) = 0 \quad (4.55)$$

という条件が満たされる必要がある。このとき $\beta < \delta \leq 1$ なる δ が存在して

$$U(\delta^2) = 0 \quad (4.56)$$

を満たす。初期値 x_0 は、

$$\beta < x_0 \leq \delta \quad (4.57)$$

なる条件を満す必要がある. これらのことを踏まえると, ポテンシャルが局所変調解を持つための最終的な条件は (4.52) と以下を合わせたものになる. 図 4.4 はこれらの条件を図示したものである.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dU}{dx^2}(\beta^2) = 2w_0 + 4\{l_0 + f(\beta^2)\}g(\beta^2) = 0 \\ U(\beta^2) = -2w_0(1 - \beta^2) + 2\{l_0 + f(\beta^2)\}^2 = 0 \\ U(\delta^2) = -2w_0(1 - \delta^2) + 2\{l_0 + f(\delta^2)\}^2 = 0 \\ 0 \leq \beta < x_0 \leq \delta \leq 1 \end{array} \right. \quad (4.58)$$

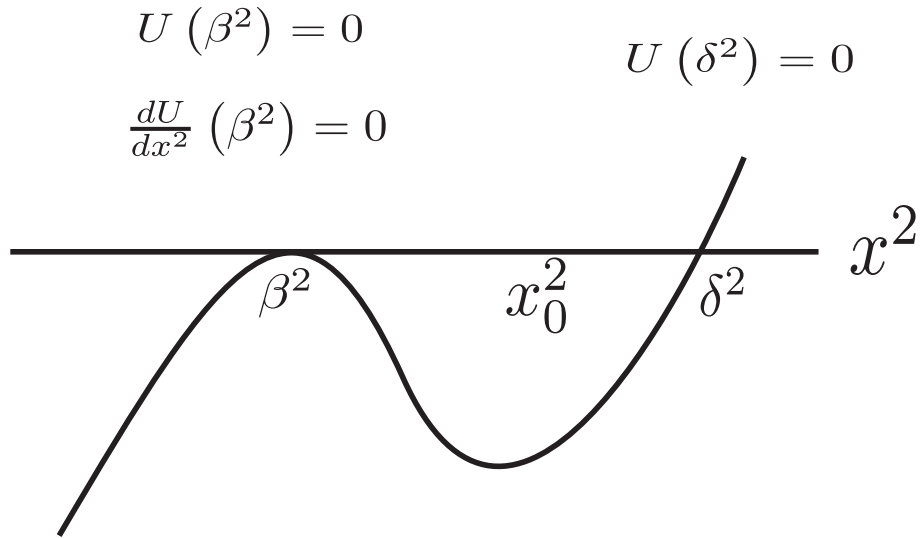


図 4.4 ポテンシャル関数が局所変調解を持つ条件

4.4.2 局所変調条件の解析

以下ではこれらの条件を満たす局所変調解を具体的に求めていく. まずは (4.58) の第 1 式を用いて第 2 式から w_0 を消去すると

$$\{l_0 + f(\beta^2)\} \{l_0 + f(\beta^2) + 2(1 - \beta^2)g(\beta^2)\} = 0 \quad (4.59)$$

が得られる.

$$l_0 + f(\beta^2) = 0 \quad (4.60)$$

とすると, (4.58) の第 1 式より $w_0 = 0$ となり, これは条件 (4.52) を満たさない. そこで

$$l_0 + f(\beta^2) + 2(1 - \beta^2)g(\beta^2) = 0 \quad (4.61)$$

を選択する. このとき, (4.58) の第 1,2 式は

$$\begin{cases} w_0 = 4(1 - \beta^2)g(\beta^2)^2 \\ l_0 + f(\beta^2) + 2(1 - \beta^2)g(\beta^2) = 0 \end{cases} \quad (4.62)$$

とまとめられる. 更に, (4.7) を用いて l_0, w_0 を消去すると, (4.7) は

$$\begin{cases} x_0^2(\theta'_0)^2 + (1 - x_0^2)(\phi'_0)^2 - 4(1 - \beta^2)g(\beta^2)^2 = 0 \\ (1 - x_0^2)\phi'_0 - f(x_0^2) + f(\beta^2) + 2(1 - \beta^2)g(\beta^2) = 0 \\ -\{x_0^2(\theta'_0)^2 + (1 - x_0^2)(\phi'_0)^2\}(1 - \delta^2) + \{(1 - x_0^2)\phi'_0 - f(x_0^2) + f(\delta^2)\}^2 = 0 \\ 0 \leq \beta < x_0 \leq \delta \leq 1 \end{cases} \quad (4.63)$$

となる. $x_0 = \delta$ の場合を考える. このとき, (4.63) の第 3 式は

$$(1 - x_0^2)x_0^2(\theta'_0)^2 = 0 \quad (4.64)$$

に帰着する.(4.62) の第 4 式から $x_0 \neq 0$ であるので,

$$(1 - x_0^2)(\theta'_0)^2 = 0 \quad (4.65)$$

となる. 以下では

$$\theta'_0 = 0 \quad (4.66)$$

を選択する. このとき (4.63) の第 1,2 式は

$$\begin{cases} (1-x_0^2)(\phi_0')^2 - 4(1-\beta^2)g(\beta^2)^2 = 0 \\ (1-x_0^2)\phi_0' - f(x_0^2) + f(\beta^2) + 2(1-\beta^2)g(\beta^2) = 0 \end{cases} \quad (4.67)$$

となる. また (4.52) は

$$\begin{cases} -\left(c_s^{-1}/H_v^{\frac{1}{2}}\right)\left(v^2 + \frac{5}{2}vH_v^{\frac{1}{2}} + \frac{4}{3}H_v\right) < (1-x_0^2)\phi_0' - f(x_0^2) < 0 \\ -2\{(1-x_0^2)\phi_0' - f(x_0^2) + f(1)\}g(1) < (1-x_0^2)(\phi_0')^2 \\ -2\{(1-x_0^2)\phi_0' - f(x_0^2) + f(0)\}g(0) < (1-x_0^2)(\phi_0')^2 \\ (1-x_0^2)(\phi_0')^2 < -2\{(1-x_0^2)\phi_0' - f(x_0^2) + f(\alpha)\}g(\alpha) \end{cases} \quad (4.68)$$

となる.

4.4.3 局所変調解の実例

ここでは局所変調解の具体例を挙げる. $c_s = 1, v = 1, H = 4 + \frac{9}{4}\sqrt{3}, x_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}, x_0' = 0, \phi_0 = 0, \phi_0' = -\frac{1}{4}(9 + 7\sqrt{3})$ は (4.66), (4.67), (4.68) を満たす具体的なパラメーターである. このとき, $U(x^2)$ は

$$\begin{aligned} U(x^2) &= \frac{1}{32} \left\{ (64 + 32\sqrt{3})x^6 + (32 + 32\sqrt{3})x^5 + 16x^4 \right. \\ &\quad \left. - (216 + 136\sqrt{3})x^3 + (132 + 86\sqrt{3})x^2 - (9 + 6\sqrt{3}) \right\} \\ &= \frac{1}{4} \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \left(x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \left\{ (8 + 4\sqrt{3})x^3 \right. \\ &\quad \left. + (18 + 12\sqrt{3})x^2 + (30 + 16\sqrt{3})x + (6 + 3\sqrt{3}) \right\} \end{aligned} \quad (4.69)$$

となり, $x^2 = \frac{1}{4}$ ($x = \frac{1}{2}$) と $x^2 = \frac{3}{4}$ ($x = \sqrt{3}/2$) に零点を持つ. また $\frac{dU}{dx^2}$ は

$$\frac{dU}{dx^2}(x^2) = \frac{1}{16} \left\{ (96 + 48\sqrt{3})x^4 + (40 + 40\sqrt{3})x^3 \right.$$

$$\begin{aligned}
& +16x^2 - (162 + 102\sqrt{3})x + (66 + 43\sqrt{3}) \} \\
= & \frac{1}{8} \left(x - \frac{1}{2}\right) \left\{ (48 + 24\sqrt{3})x^3 \right. \\
& \left. + (44 + 32\sqrt{3})x^2 + (30 + 16\sqrt{3}) - (66 + 43\sqrt{3}) \right\} \quad (4.70)
\end{aligned}$$

となり, $U(x^2)$ は $x^2 = \frac{1}{4}$ で極値を取る.

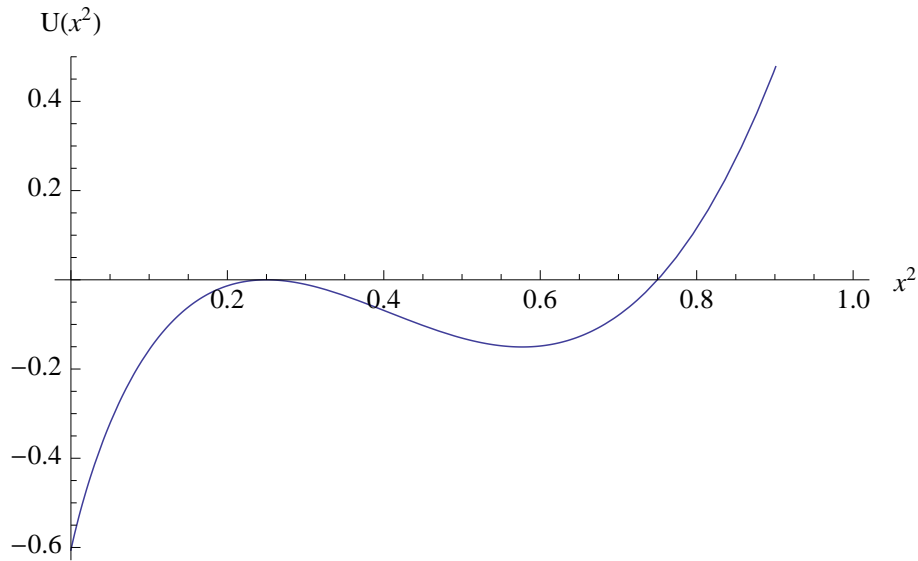


図 4.5 局所変調解を持つポテンシャル関数 $U(x^2)$

図 4.5 はポテンシャル $U(x^2)$ を x^2 の関数として図示したものである. これらのパラメーター, 初期値から得られる解は, 図 4.6 のようにソリトンの形態を取る. 規格化された二乗振幅を表す $1 - x^2$ を縦軸にとってある.

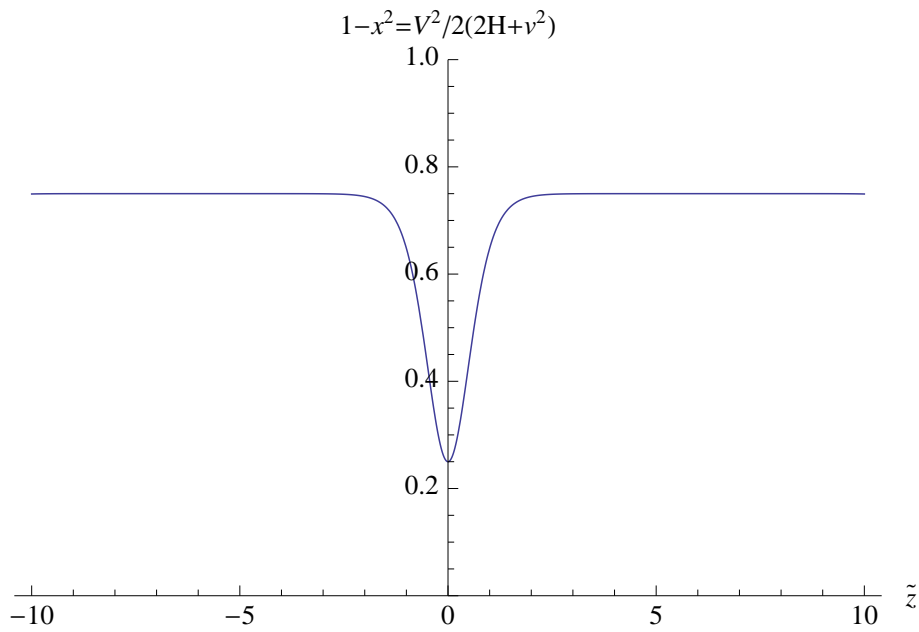


図 4.6 二乗振幅の局所変調

4.5 特異的な変調をする解 (特異解)

4.5.1 特異解を得るための条件

特異解は, (4.66), (4.67), (4.68) において特に $\beta = 0$ とした場合に得られる. このとき, (4.67) は

$$\begin{cases} (1 - x_0^2) (\phi_0')^2 - c_s^{-2} v^2 = 0 \\ (1 - x_0^2) \phi_0' - \frac{1}{2} c_s^{-1} \left(v x_0^2 + \frac{2}{3} H_v^{\frac{1}{2}} x_0^3 \right) + c_s^{-1} v = 0 \end{cases} \quad (4.71)$$

と書き換えられる. 方程式 (4.71) が成り立つとき, 条件 (4.68) も成り立つ.² このとき, ポテンシャル関数 $U(x^2)$ と $\frac{dU}{dx^2}(x^2)$ は

$$U(x^2) = 2c_s^{-2}x^3 \left(\frac{1}{9}H_v x^3 + \frac{1}{3}vH_v^{\frac{1}{2}}x^2 + \frac{1}{4}v^2x - \frac{2}{3}vH_v^{\frac{1}{2}} \right), \quad (4.73)$$

$$\frac{dU}{dx^2}(x^2) = 2c_s^{-1}x \left(\frac{1}{3}H_v x^3 + \frac{5}{6}vH_v^{\frac{1}{2}}x^2 + \frac{1}{2}v^2x - vH_v^{\frac{1}{2}} \right) \quad (4.74)$$

となり, $U(x^2)$ は図 4.8 のように $x^2 = 0$ を零点かつ極大値として持つ. これは小節 4.4.3 で得られたポテンシャルとよく似ているが, $x^2 = 0$ はポテンシャル関数 $U(x^2)$ の特異点となっていることに注意しなければならない. 以下では先ずこの特異性に関して説明し, このポテンシャル $U(x^2)$ からどのような運動が生じうるかを考察する.

4.5.2 次数 $p(1 < p < 2)$ のポテンシャルによる運動

$x^2 \ll 0$ なる領域において, $U(x^2)$ の主要項は $-\frac{4}{3}c_s^{-1}vH_v^{\frac{1}{2}}x^3$ となり, $U(x^2)$ を x^2 の関数としてみたとき, その次数は $\frac{3}{2}$ となる. そこで, まず次数 $p(1 < p < 2)$ のポテン

²実際, 方程式 (4.71) を用いると

$$-\left(c_s^{-1}/H_v^{\frac{1}{2}}\right) \left(v^2 + \frac{5}{2}vH_v^{\frac{1}{2}} + \frac{4}{3}H_v \right) < -c_s^{-1}v \quad (4.72)$$

$$\begin{aligned} & \max \left[-c_s^{-1}vl_0, -c_s^{-1} \left\{ l_0 + \frac{1}{2}c_s^{-1} \left(v + \frac{2}{3}H_v^{\frac{1}{2}} \right) \right\} \left(v + H_v^{\frac{1}{2}} \right) \right] \\ = & \max \left[c_s^{-2}v^2, \frac{1}{2}c_s^{-2} \left(v - \frac{2}{3}H_v^{\frac{1}{2}} \right) \left(v + H_v^{\frac{1}{2}} \right) \right] = c_s^{-2}v^2 \\ & -c_s^{-1} \left\{ l_0 + \frac{1}{2}c_s^{-1} \left(v\alpha^2 + \frac{2}{3}H_v^{\frac{1}{2}}\alpha^3 \right) \right\} \left(v + H_v^{\frac{1}{2}}\alpha \right) \\ = & \left(1 - \frac{1}{4}\alpha \right) c_s^{-2}v^2 + \frac{1}{24}\alpha(18 - 5\alpha^2)c_s^{-2}vH_v^{\frac{1}{2}} > c_s^{-2}v^2 \end{aligned}$$

となり, 確かに条件 (4.68) は満たされている. 最後の式変形では, (4.53) の第 1 式を用いていることに注意されたい.

シャルによる運動が持つ特徴³に関して復習しよう.

ポテンシャル関数

$$\Phi(x) = -|x|^p, \quad (1 < p < 2) \quad (4.75)$$

によって定まる運動方程式

$$\frac{d^2}{dt^2}x = -\frac{d}{dx}\Phi(x) \quad (4.76)$$

の解が持つ特性について解説する. 粒子がポテンシャル関数 $\Phi(x)$ の平衡点に静止した状態を意味する初期条件 $x(0) = 0, x'(0) = 0$ からは,

$$x(t) = \begin{cases} 0, & (0 \leq t \leq t_0) \\ \pm [\sqrt{2}r(t - t_0)]^{1/r}, & (t_0 < t) \end{cases} \quad (4.77)$$

という解が得られる. ここで $r = \frac{2-p}{p}$ である. また, $t_0 (\geq 0)$ は任意のパラメーターである. この解は, 時刻 t_0 まで静止していた粒子が, $t = t_0$ から急に運動を始めること表す. つまり, 初期状態では粒子がポテンシャル関数 Φ の平衡点に静止してあっても, これがいつ動き始めてポテンシャル関数の坂を下り始めるのかわからないという状況である.

また (4.77) の時間反転した解として,

$$x(t) = \begin{cases} \pm [\sqrt{2}r(t_0 - t)]^{1/r}, & (0 \leq t \leq t_0) \\ 0, & (t_0 < t) \end{cases} \quad (4.78)$$

を考えることもできる. これは先程の解とは逆のプロセスで, 適当な初期条件を与えることで, 粒子をポテンシャル関数 $\Phi(x)$ の平衡点に向けて打ち出し, $t = t_0$ でピタリと平衡点で静止するような運動である.

³文献 [29] の 2 章, [33] の 1 章などが詳しい

この例は、次数 $p(1 < p < 2)$ のポテンシャルから生まれる運動の2つの大きな特徴を物語っている。まず、特定の初期条件から得られる解であるにも関わらず、解に任意パラメーター t_0 が含まれており、解が一意に定まらないこと。これはポテンシャルが Lipschitz 不連続点を持つためである。これは、粒子が突然動き出したり止まったりする、予測不可能な運動を示すことの数学的な表現となっている。また、(4.78) の場合には特に分かりやすいが、粒子が有限時間 t_0 の間に、ポテンシャルの頂点へと達しているのも、大きな特徴である⁴。

4.5.3 特異解の波形構造

これらのことを踏まえると、 $\tilde{z} = 0$ で $x^2 = x_0^2$ から始まる x^2 の運動は、有限の区間で $x^2 = 0$ に達することが分かる。また、一度平衡点 $x^2 = 0$ に達して運動が静止した後にも、粒子が再びポテンシャル関数 $U(x^2)$ の山を降り始め、運動を再開する可能性がある。ポテンシャルの形状 (図 4.8) を考慮すると、運動を再開した後には、有限の区間のうちに $x^2 = x_0^2$ に至り、再び $x^2 = 0$ へと戻ることが予想される。従って、定常進行アルフベン波の波形として、無変調領域と局所的な変調領域とを任意に組み合わせようような波形が得られることになる。このような波形の概念図を、図 4.9 に示している。

図 4.8 は、 $c_s = 1, H = 13, v = 1, \theta_0 = \pi/6, \theta'_0 = 0, \phi = 0, \phi'_0 = 2$ という条件のもとに得られるポテンシャル関数 $U(x^2)$ のグラフである。アルフベン波の振幅変調のイメージを、図 4.9 に示す。

なおポテンシャル関数 $U(x^2)$ の $x^2 = 0$ おける Lipschitz 不連続性に関しては付録

⁴線形モデルの場合には、無限の時間を掛けてポテンシャル頂点へと漸近するのであった。

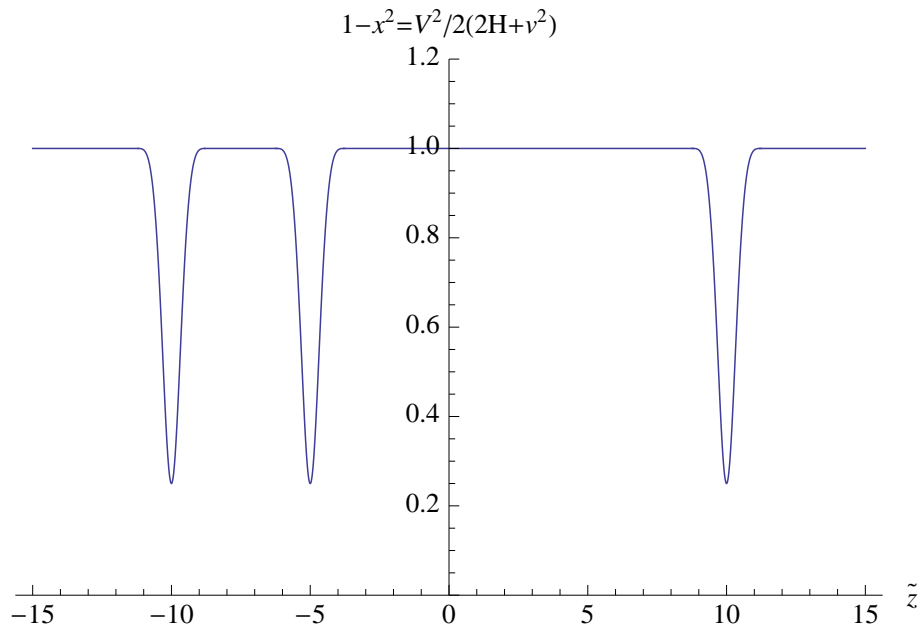


図 4.7 二乗振幅の不規則な局所変調

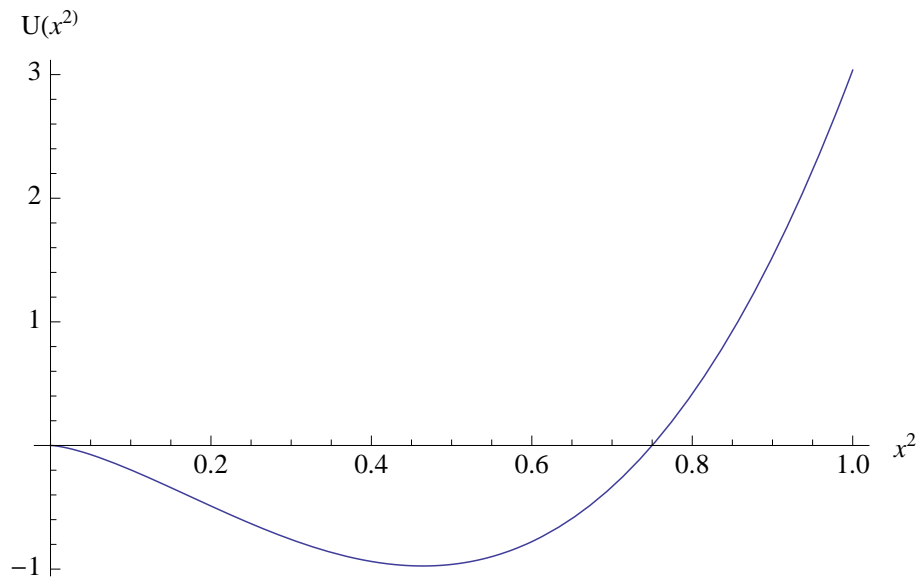


図 4.8 特異解を持つポテンシャル関数 $U(x^2)$

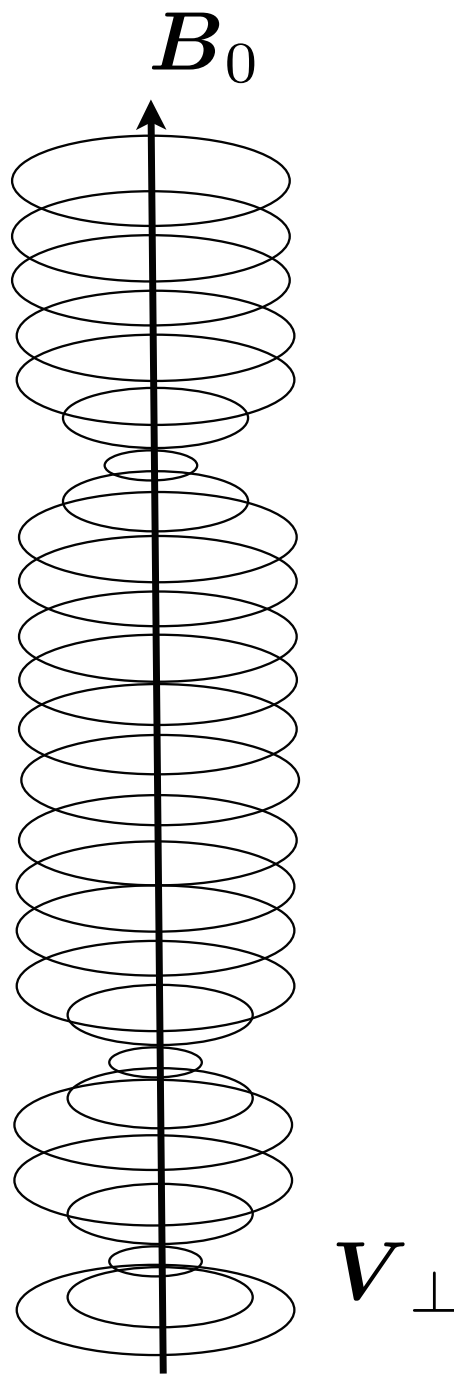


図 4.9 特異波の振幅変調のイメージ

Aにて証明されている.

第 5 章

結論

プラズマは、流れを持つ平衡のように、エネルギー最小状態から離れた非自明な秩序構造を有する。本論文の問題意識は、このような秩序構造 (可積分構造) の仕組みを、プラズマ方程式のカシミール元から得られる構造を基にして解析していくことであった。本論文では特に、Hall MHD 方程式のカシミール元から生じる秩序構造：アルフベン波に、圧縮性という摂動が加わったときに生じる変調波の構造について、理論的な解析を行った。

解析に用いた方程式は、先行研究により、Hall MHD 方程式から逡減摂動法を経て導出された非線形アルフベン波方程式である。この方程式が持つ、定常進行波解の空間的な構造を調べるために、定常進行アルフベン波方程式を導出し、これを解析した。

まずは、ハミルトニアン の定式化と第一積分の発見から、定常進行アルフベン波方程式は可積分であること、つまり

定常進行する変調波は秩序的な波形を持つ

ということが示された。つまり、自然界にあふれる摂動の中でアルフベン波が圧縮を

受けたとしても、そこに存在した全ての秩序構造が失われ、波形が一挙にカオティックになるわけではなく、定常進行波という形で一定の秩序構造が保たれるという意味である。

次に、第一積分 l_0, w_0 を用いて変数を消去していくことで、

定常進行アルフベン波方程式を変数分離し、積分することが可能である

ということを示した。この変数分離型は、楕円積分を複雑にした型であり、もちろんその解を初等関数で表すことはできない。しかし、二乗振幅に関連する変数 x^2 の発展はポテンシャル $U(x^2; l_0, w_0)$ に従うので、このポテンシャル形状を l_0, w_0 の値に応じて分類することで、二乗振幅の変調構造を調べることができる。まずは

基本的な波形として、無変調、周期変調、ソリトンパターンが存在する

ことが示された。無変調パターンは、振幅変調の無い波形、無摂動の場合である。周期変調パターンは、波形の全域に渡って周期的な変調をしている波形である。ソリトンパターンは、波の大部分においては変調は生じていないが、ある一箇所だけで、局所的に波の変調が生じているパターンである。この局所変調は、線形ポテンシャルからは生じ得ない、本質的に非線形な変調構造である。

更に、ポテンシャル $U(x^2)$ が持つ特異点 $x^2 = 0$ に由来して生ずるパターンとして、

無変調領域と局所変調領域とが不規則に組み合わさった波形が存在する

ことが示された。この波形は、変調の無い領域が続いたかと思うと、ふとした箇所で局所的に変調している。その局所変調がどこで起こるのか、また何箇所で起こるのかは任意であるような波形である。このような解が得られるのは、ポテンシャルが Lipschitz 不連続な点を持つことに由来する。Lipschitz 不連続性は微分方程式の解の

一意性, 今の場合には波形の空間構造の一意性を壊すが, このことは逆に, 波形が任意の箇所で変調できることを示している. 自然界でのアルフベン波の変調を考えたときに, このように所々に局所の変調が生じることは十分に考え得る状況である. このような変調構造が数学的に定式化されたことは, 非常に興味深い成果である.

図 5.1 は, アルフベン波の振幅変調のイメージ図である. 左から, 周期変調, ソリトン変調, 特異変調を示す.

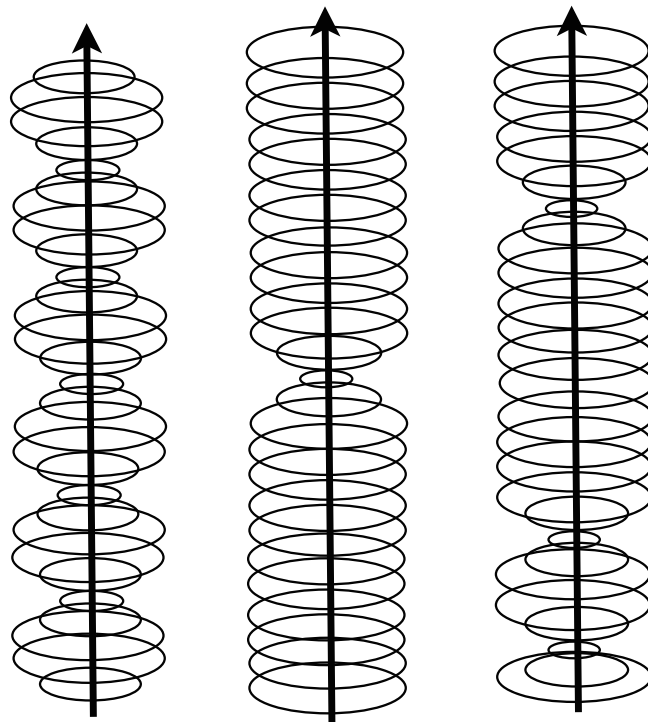


図 5.1 周期、ソリトン、特異波のイメージ図

最後に, カシミール元から得られる既知の構造を基にして, プラズマの新しい秩序構造を探求するという当初の目的に照らし合わせて, これらの成果を次ページの図 5.2 に纏めた. まずプラズマの秩序構造の全体を考えよう. その中には, 例えばエネルギー最小状態のような構造もあるが, 本研究ではカシミール元から得られる秩序

構造に焦点を当てた。特に、アルフベン波という構造に摂動が加わった際に生起する構造について調べた。その結果、定常進行波として変調するアルフベン波の構造は秩序的であることが示された。そのような秩序構造として特に、周期変調、局所変調、局所不規則変調といった構造が存在することが示された。このように、カシミール元から得られる構造の裾野を広げ、上記に挙げられたような新たな種類の秩序構造を発見した。

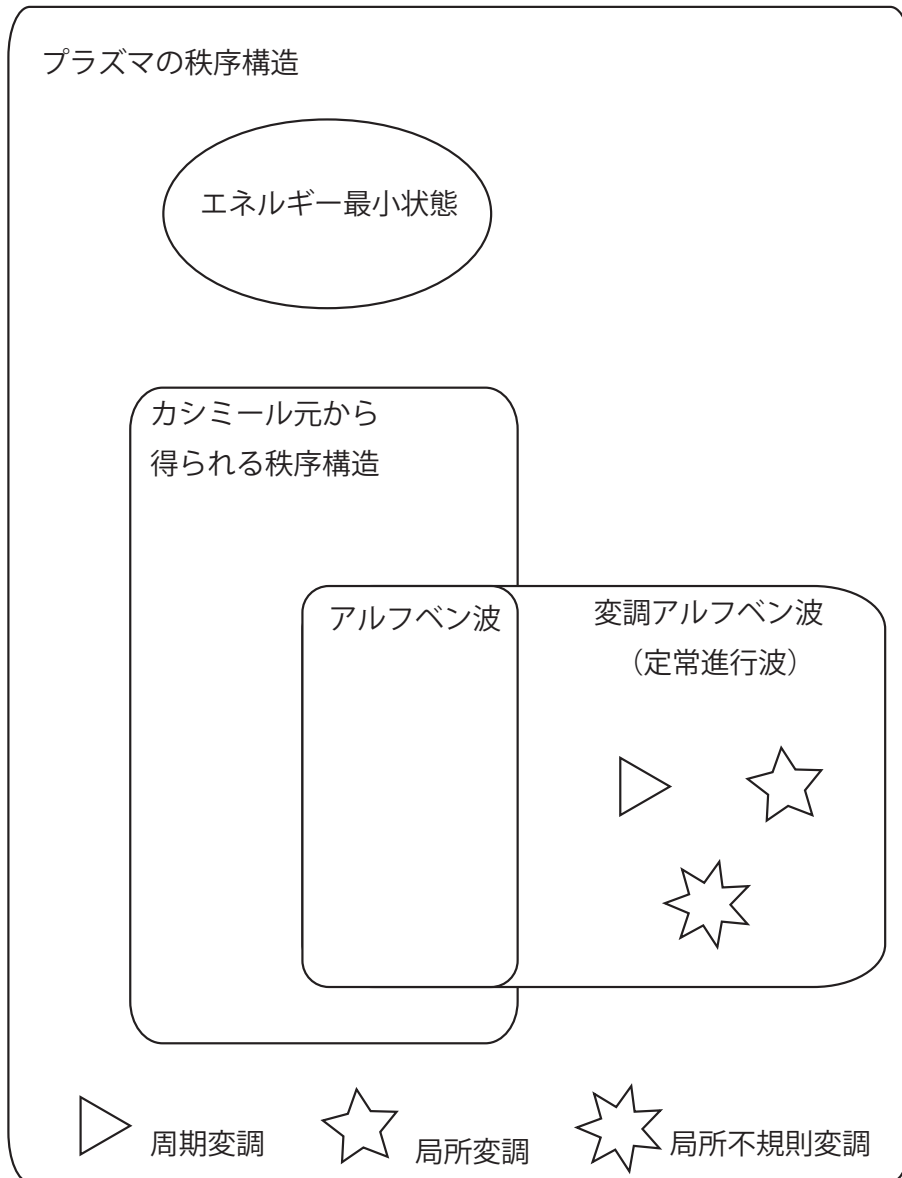


図 5.2 プラズマの秩序構造：俯瞰図

付録 A

ポテンシャル力 $-\frac{dU}{dx^2}(x^2)$ の Lipschitz 連続性

ここでは、節 4.5 で得られたポテンシャル $U(x^2)$ の与える力 $-\frac{dU}{dx^2}(x^2)$ が、 $x^2 = 0$ において Lipschitz 不連続であることを示す。

4 章では $0 \leq x \leq 1$ の場合に限って解析を行ったが、ここでは $-1 \leq x \leq 1$ の範囲で解析を行う。そのために先ず、 $-1 \leq x < 0$ の場合に得られるポテンシャル $U(x^2)$ (これを $U_m(x^2)$ と記す) と、 $0 \leq x \leq 1$ の場合に得られるポテンシャル $U(x^2)$ (これを $U_p(x^2)$ と記す) との接続を行なう。図 A.1 に示されるように、 $U_p(x^2)$ と $U_m(x^2)$ は $0 \leq x^2 \leq 1$ の範囲に重複して存在する。 x の正負に応じて、いずれのポテンシャル関数を選ばれるのかが決まることになる。ポテンシャル関数の変更は、 $x^2 = 0$ となる瞬間、従って $x = 0$ となる瞬間に行われる。 $x > 0$ の場合、従って $U_p(x^2)$ に従う運動で、 x が 0 へと至る場合を考える。この時、 x の運動が $x = 0$ でもまだ止まらなければ、引き続き x は $x < 0$ に突入し、運動を定めるポテンシャルは $U_m(x^2)$ へ変更さ

れる。つまり x^2 の運動は、 $U_p(x^2)$ のポテンシャル面に乗って 0 へと向かい、 $x^2 = 0$ となった瞬間に運動の向きを反転し、今度は $U_m(x^2)$ のポテンシャル面に乗って運動を始めるということになる。 $U_m(x^2)$ のポテンシャルを $x^2 = 0$ の軸に関して折り返して得られるポテンシャルを $U_{mm}(x^2)$ とすると、上記の運動は $U_p(x^2)$ と $U_{mm}(x^2)$ を繋ぎあわせたポテンシャル面 (図 A.2 参照) での運動だと見なすことができる。ただしこの描像では、 x^2 がマイナスの値に至るが、最終的な x^2 の値としてはその絶対値を取ればよい。

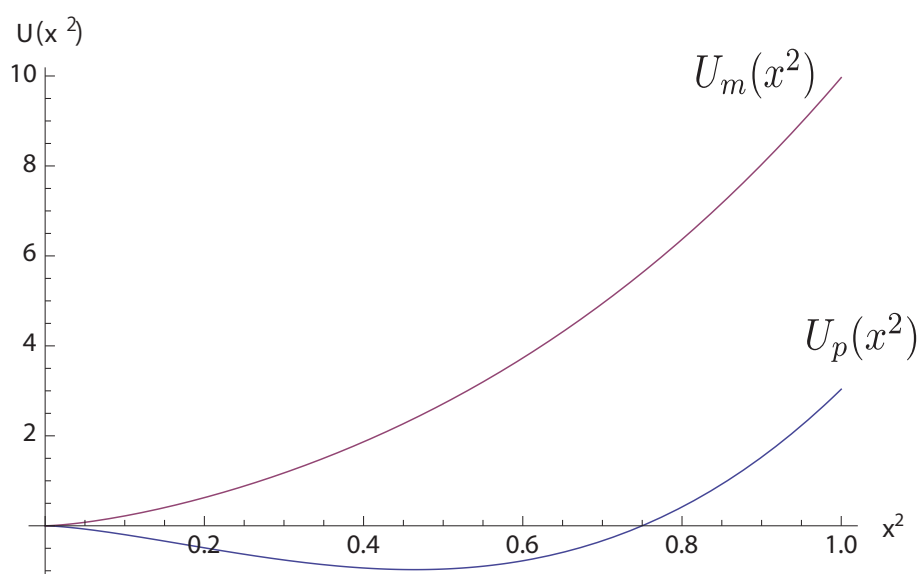


図 A.1 ポテンシャル関数 $U(x^2)$

以下では、 $U_p(x^2)$ と $U_{mm}(x^2)$ を繋ぎあわせたポテンシャルを $\tilde{U}(y)$ と記す。ここで、 $|y| = x^2$ である¹。この記号のもとで、節 4.5 で得られたポテンシャルを $-1 \leq y \leq 1$

¹ $x^2 = -\frac{1}{2}$ などの誤解を招きがちな記述を防ぐための記号導入である。

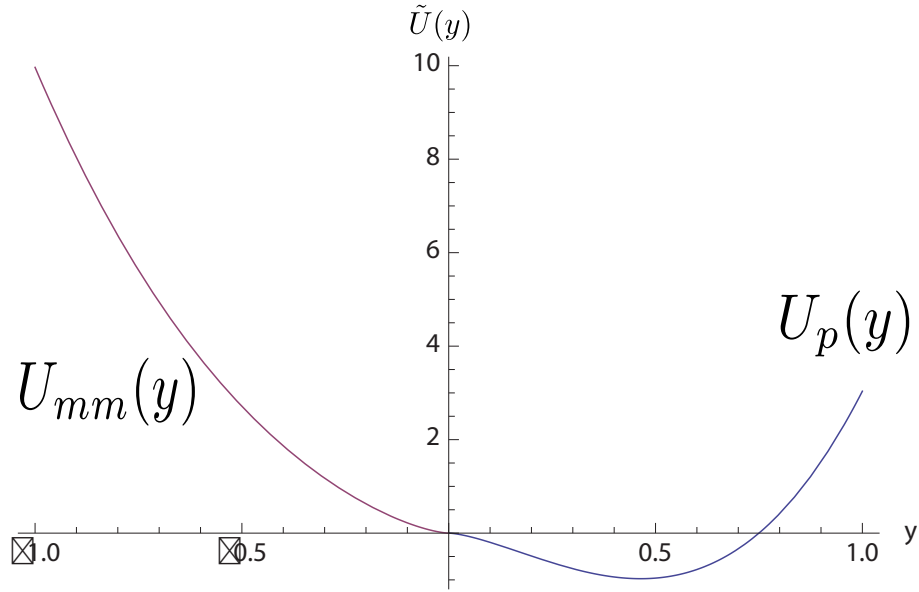


図 A.2 ポテンシャル関数 $\tilde{U}(y)$

の範囲に拡張して再掲すると,

$$\tilde{U}(y) = \begin{cases} 2c_s^{-2} \left(\frac{1}{9}H_v|y|^3 + \frac{1}{3}vH_v^{\frac{1}{2}}|y|^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{4}v^2|y|^2 - \frac{2}{3}vH_v^{\frac{1}{2}}|y|^{\frac{3}{2}} \right) & (0 \leq y \leq 1) \\ 2c_s^{-2} \left(\frac{1}{9}H_v|y|^3 - \frac{1}{3}vH_v^{\frac{1}{2}}|y|^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{4}v^2|y|^2 + \frac{2}{3}vH_v^{\frac{1}{2}}|y|^{\frac{3}{2}} \right) & (-1 \leq y < 0) \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

$$\frac{d\tilde{U}}{dy}(y) = \begin{cases} 2c_s^{-1} \left(\frac{1}{3}H_v|y|^2 + \frac{5}{6}vH_v^{\frac{1}{2}}|y|^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}v^2|y| - vH_v^{\frac{1}{2}}|y|^{\frac{1}{2}} \right) & (0 \leq y \leq 1) \\ 2c_s^{-1} \left(-\frac{1}{3}H_v|y|^2 + \frac{5}{6}vH_v^{\frac{1}{2}}|y|^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}v^2|y| - vH_v^{\frac{1}{2}}|y|^{\frac{1}{2}} \right) & (-1 \leq y < 0) \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

$d\tilde{U}/dy$ が $y = 0$ において Lipschitz 不連続であることを背理法によって示す。 $d\tilde{U}/dy$ が $y = 0$ で Lipschitz 連続であると仮定する。このとき, 或る $M > 0$ が存在して, 任意の $y \in (0, 1]$ に対して

$$\left| \frac{d\tilde{U}}{dy}(y) - \frac{d\tilde{U}}{dy}(0) \right| \leq M|y - 0| = My \quad (\text{A.3})$$

となる。即ち、

$$\left| 2c_s^{-1} \left(\frac{1}{3} H_v y^2 + \frac{5}{6} v H_v^{\frac{1}{2}} y^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2} v^2 y - v H_v^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{2}} \right) \right| \leq M y \quad (\text{A.4})$$

となる。この両辺を y で割ると、

$$\left| 2c_s^{-1} \left(\frac{1}{3} H_v y + \frac{5}{6} v H_v^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} v^2 - v H_v^{\frac{1}{2}} y^{-\frac{1}{2}} \right) \right| \leq M \quad (\text{A.5})$$

となる。絶対値の三角不等式を用いると、これより

$$\left| \left| 2c_s^{-1} v H_v^{\frac{1}{2}} y^{-\frac{1}{2}} \right| - \left| 2c_s^{-1} \left(\frac{1}{3} H_v y + \frac{5}{6} v H_v^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} v^2 \right) \right| \right| \leq M \quad (\text{A.6})$$

が得られる。 y を小さくとれば、(A.6)の左辺はいくらでも大きな値を取れる。これは、 M の定義に反するので、矛盾である。背理法により、 $d\tilde{U}/dy$ は $y = 0$ において Lipschitz 不連続である。

付録 B

変数変換による方程式の遷移

本論文では Hall MHD 方程式の Generalized Beltrami-Bernoulli 条件から始まり二乗振幅の発展方程式に至るまでに、度重なる変数変換が為された。この付録では、それに伴う方程式の遷移過程を纏めている。

まずは小節 2.4.1 の Generalized Beltrami-Bernoulli 条件から始めよう。ここでは、
磁場

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_\perp(z, t) + B_0 \mathbf{e}_z, \quad (\text{B.1})$$

の下に、Beltrami 条件を

$$\begin{aligned} \mathbf{V} &= \mu_i (\nabla \times \mathbf{V} + \mathbf{B}) + u(z, t) \mathbf{e}_z, \\ \mathbf{V} - n^{-1} \nabla \times \mathbf{B} &= \mu_e \mathbf{B} + u(z, t) \mathbf{e}_z, \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

と一般化し、更に Bernoulli 条件を一般化することで、 $n(z, t)$, $u(z, t)$, $V_z(z, t)$, $\mathbf{V}_\perp(z, t)$ が満たすべき条件として以下の方程式系を得た。

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{V}_\perp + (n\mu - \mu^{-1})\nabla \times \mathbf{V}_\perp = 0 \quad (\text{B.3})$$

$$\partial_t V_z + V_z \partial_z V_z = -\partial_z \left(h + \frac{1}{2} V_\perp^2 \right) \quad (\text{B.4})$$

$$\partial_t n + \partial_z (V_z n) = 0 \quad (\text{B.5})$$

次に、小節 2.4.2 では上記の方程式系を通減摂動することで簡略化した。アルフベン速度 + 音速で動く座標系

$$\begin{cases} \tilde{z} = \epsilon(z - ct), & c = 1 \pm c_s, \\ \tilde{t} = \epsilon^2 t, \end{cases} \quad (\text{B.6})$$

の下で、

$$\begin{cases} n = 1 \pm \epsilon c_s^{-1} u^{(1)} + \dots, \\ u = 0 + \epsilon u^{(1)} + \dots, \\ V_z = 1 + \epsilon u^{(1)} + \dots, \\ \mathbf{V}_\perp = 0 + \epsilon \mathbf{V}_\perp^{(1)} + \dots, \end{cases} \quad (\text{B.7})$$

のように定義される $u^{(1)}(\tilde{z}, \tilde{t})$, $\mathbf{V}_\perp^{(1)}(\tilde{z}, \tilde{t})$ が満たすべき方程式系として非線形アルフベン波方程式を得た。

$$\tilde{\nabla} \times \tilde{\nabla} \times \mathbf{V}_\perp^{(1)} \pm c_s^{-1} u^{(1)} \tilde{\nabla} \times \mathbf{V}_\perp^{(1)} = 0 \quad (\text{B.8})$$

$$\partial_{\tilde{t}} u^{(1)} + \partial_{\tilde{z}} \left[\frac{1}{2} (u^{(1)})^2 + \frac{1}{4} |\mathbf{V}_\perp^{(1)}|^2 \right] = 0 \quad (\text{B.9})$$

続いて、節 3.1 では、上記の方程式系の定常進行波解を求めるために、

$$\begin{cases} u^{(1)} = u(\tilde{z} - v\tilde{t}) = u(\zeta) \\ \mathbf{V}_\perp^{(1)} = \mathbf{V}_\perp(\tilde{z} - v\tilde{t}) = \mathbf{V}_\perp(\zeta), \end{cases} \quad (\text{B.10})$$

を方程式に代入することで、以下の定常進行アルフベン波方程式を得た。

$$\frac{1}{2}(u-v)^2 + \frac{1}{4}\mathbf{V}_\perp^2 = H + \frac{1}{2}v^2 \quad (\text{B.11})$$

$$\frac{d^2}{d\zeta^2}V_x + c_s^{-1}u\frac{d}{d\zeta}V_y = 0 \quad (\text{B.12})$$

$$\frac{d^2}{d\zeta^2}V_y - c_s^{-1}u\frac{d}{d\zeta}V_x = 0 \quad (\text{B.13})$$

更に、節 3.4 では、(B.11) から、 u, V_x, V_y を

$$\begin{cases} u - v = (2H + v^2)^{\frac{1}{2}} \cos \theta \\ V_x = (2(2H + v^2))^{\frac{1}{2}} \sin \theta \cos \phi \\ V_y = (2(2H + v^2))^{\frac{1}{2}} \sin \theta (-\sin \phi). \end{cases} \quad (\text{B.14})$$

と表し、(B.12), (B.13) を用いることで、 $\cos^2 \theta$ の発展を定める以下のポテンシャル方程式を得た。

$$\begin{aligned} & \frac{d^2}{d\zeta^2} \cos^2 \theta \\ &= -2 \left[w_0 + c_s^{-1} \left(v + H_v^{\frac{1}{2}} \cos \theta \right) \left\{ l_0 + \frac{1}{2} c_s^{-1} \left(v \cos^2 \theta + \frac{2}{3} H_v^{\frac{1}{2}} \cos^3 \theta \right) \right\} \right] \\ &= -\frac{d}{d \cos^2 \theta} \left[2w_0 (\cos^2 \theta - 1) + 2 \left\{ l_0 + \frac{1}{2} c_s^{-1} \left(v \cos^2 \theta + \frac{2}{3} H_v^{\frac{1}{2}} \cos^3 \theta \right) \right\}^2 \right] \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

$\cos^2 \theta$ の発展パターンを解析する 4 章では、記号の省略の為に

$$\cos \theta = x \quad (\text{B.16})$$

とした。この記号の下で、(B.15) は

$$\begin{aligned}
\frac{d^2}{d\zeta^2}x^2 &= -2 \left[w_0 + c_s^{-1} \left(v + H_v^{\frac{1}{2}} x \right) \left\{ l_0 + \frac{1}{2} c_s^{-1} \left(vx^2 + \frac{2}{3} H_v^{\frac{1}{2}} x^3 \right) \right\} \right] \\
&= -\frac{d}{dx^2} \left[2w_0 (x^2 - 1) + 2 \left\{ l_0 + \frac{1}{2} c_s^{-1} \left(vx^2 + \frac{2}{3} H_v^{\frac{1}{2}} x^3 \right) \right\}^2 \right]
\end{aligned}
\tag{B.17}$$

となる. 節 4.5 では, 特に

$$\begin{cases} w_0 = c_s^{-2} v^2 \\ l_0 = -c_s^{-1} v \end{cases}
\tag{B.18}$$

の場合に生じうる特異的な波に関して議論している. このとき, (B.17) を展開して下記を得る.

$$\begin{aligned}
\frac{d^2}{d\zeta^2}x^2 &= -2c_s^{-1} \left(\frac{1}{3} H_v x^4 + \frac{5}{6} v H_v^{\frac{1}{2}} x^3 + \frac{1}{2} v^2 x^2 - v H_v^{\frac{1}{2}} x \right) \\
&= -\frac{d}{dx^2} \left\{ 2c_s^{-2} \left(\frac{1}{9} H_v x^6 + \frac{1}{3} v H_v^{\frac{1}{2}} x^5 + \frac{1}{4} v^2 x^4 - \frac{2}{3} v H_v^{\frac{1}{2}} x^3 \right) \right\}
\end{aligned}
\tag{B.19}$$

付録 A では, 上記の式が x ではなく x^2 に関する方程式であること明示的に示すために,

$$|y| = x^2
\tag{B.20}$$

なる変数変換によって, (B.19) を下記の方程式へと書き換えている. ここで, 「 $x < 0$ から得られる x^2 」を「 $y < 0$ から得られる x^2 」へ, 「 $x \geq 0$ から得られる x^2 」を「 $y \geq 0$ から得られる x^2 」へと対応させている.

$$\frac{d^2}{d\zeta^2}y = \begin{cases} -2c_s^{-1} \left(\frac{1}{3}H_v|y|^2 + \frac{5}{6}vH_v^{\frac{1}{2}}|y|^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}v^2|y| - vH_v^{\frac{1}{2}}|y|^{\frac{1}{2}} \right) & (0 \leq y \leq 1) \\ -2c_s^{-1} \left(-\frac{1}{3}H_v|y|^2 + \frac{5}{6}vH_v^{\frac{1}{2}}|y|^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}v^2|y| - vH_v^{\frac{1}{2}}|y|^{\frac{1}{2}} \right) & (-1 \leq y < 0) \end{cases} \quad (\text{B.21})$$

なお、本文中では⁽¹⁾ や $\tilde{}$ を省略するなどして、 z という記号が繰り返し用いていたが、本付録中ではそのような省略はせず、変数変換の度に新しい記号を用いた。そのため、本文中とは記号の用いられ方が異なることに注意されたい。

参考文献

- [1] 吉田善章. 流れのある平衡・安定性理論の課題. プラズマ・核融合学会誌, Vol. 86, No. 4, pp. 209–219, April 2010.
- [2] L. Acton, M. Bruner, J. Lemen, S. Tsuneta, Y. Ogawara, J. Nishimura, R. Bentley, L. Culhane, R. Canfield, H. Hudson, G. Doschek, E. Hiei, T. Hirayama, T. Kosugi, T. Watanabe, J. Lang, K. Makishima, and Y. Uchida. The yokoh mission for High-Energy solar physics. *Science*, Vol. 258, No. 5082, pp. 618–625, October 1992.
- [3] 森肇, 蔵本由紀. 散逸構造とカオス. 岩波書店, November 2000.
- [4] 吉田善章. 緩和現象の物理. プラズマ・核融合学会誌, Vol. 76, No. 8, pp. 713–723, August 2000.
- [5] J. B. Taylor. Relaxation of toroidal plasma and generation of reverse magnetic fields. *Physical Review Letters*, Vol. 33, No. 19, p. 1139, November 1974.
- [6] J. B. Taylor. Relaxation and magnetic reconnection in plasmas. *Reviews of Modern Physics*, Vol. 58, No. 3, p. 741, July 1986.
- [7] A. Hasegawa. Self-organization processes in continuous media. *Advances in Physics*, Vol. 34, No. 1, p. 1, 1985.

- [8] Z. Yoshida and S.M. Mahajan. Perturbation theory for the alfvén wave. *International Journal of Modern Physics B*, Vol. 9, No. 22, pp. 2857–2898, 1995.
- [9] Z. Yoshida, S. M. Mahajan, and S. Ohsaki. Scale hierarchy created in plasma flow. *Physics of Plasmas*, Vol. 11, No. 7, p. 3660, 2004.
- [10] S. Ohsaki and S. M. Mahajan. Hall current and alfvén wave. *Physics of Plasmas*, Vol. 11, No. 3, p. 898, 2004.
- [11] 川原琢治. ソリトンからカオスへ—非線形発展方程式の世界. 朝倉書店, May 1993.
- [12] 和達三樹. 非線形波動. 岩波書店, June 2000.
- [13] 吉田善章. 新版 応用のための関数解析—その考え方と技法. サイエンス社, 新版, October 2006.
- [14] Z.Yoshida. Integrable structures built around the casimir. 京都大学・数理解析研究所講究録. 非線形波動の現象の多様性と普遍性, 京都大学数理解析研究所, 2010年10月13日-10月15日, 2011年発行予定.
- [15] Z. Yoshida and S.M. Mahajan. Simultaneous beltrami conditions in coupled vortex dynamics. *Journal of Mathematical Physics*, Vol. 40, No. 10, p. 5080, October 1999.
- [16] S. M. Mahajan and Z. Yoshida. Double curl beltrami flow: Diamagnetic structures. *Physical Review Letters*, Vol. 81, No. 22, p. 4863, November 1998.
- [17] 吉田善章. 集団現象の数理. 岩波書店, February 1995.

- [18] Z. Yoshida. Helicity waves propagating in a plasma. *Journal of Plasma Physics*, Vol. 45, No. 03, pp. 481–488, 1991.
- [19] Z. Yoshida and Y. Giga. Remarks on spectra of operator rot. *Mathematische Zeitschrift*, Vol. 204, No. 1, pp. 235–245, December 1990.
- [20] S. Ohsaki. Variational principle of hall magnetohydrodynamics. *Journal of Fusion Energy*, Vol. 26, No. 1-2, pp. 135–137, 2006.
- [21] 田崎晴明. 熱力学—現代的な視点から. 培風館, April 2000.
- [22] N. Ito and Z. Yoshida. Statistical mechanics of magnetohydrodynamics. *Physical Review E*, Vol. 53, No. 5, p. 5200, May 1996.
- [23] Z. Yoshida and S. M. Mahajan. Variational principles and Self-Organization in Two-Fluid plasmas. *Physical Review Letters*, Vol. 88, No. 9, p. 095001, February 2002.
- [24] Z. Yoshida. Quasiperiodic perturbations for the alfvn-wave continuous spectra. *Physical Review Letters*, Vol. 68, No. 21, p. 3168, May 1992.
- [25] Y. Yamakoshi, K. Muto, and Z. Yoshida. Numerical analysis of quasiperiodic perturbations for the alfvn wave. *Physical Review E*, Vol. 50, No. 2, p. 1437, 1994.
- [26] A. Ito, A. Hirose, S. M. Mahajan, and S. Ohsaki. Remarks on the discrete alfvn wave spectrum induced by the hall current. *Physics of Plasmas*, Vol. 11, No. 12, p. 5643, 2004.

- [27] S. M. Mahajan and V. Krishan. Exact solution of the incompressible hall magnetohydrodynamics. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society: Letters*, Vol. 359, No. 1, pp. L27–L29, 2005.
- [28] S. M. Mahajan and H. Miura. Linear superposition of nonlinear waves. *Journal of Plasma Physics*, Vol. 75, No. 02, pp. 145–152, 2009.
- [29] 吉田善章. 非線形科学入門. 岩波書店, June 1998.
- [30] 谷内俊弥, 西原功修. 非線形波動. 岩波書店, May 1977.
- [31] 大貫義郎, 吉田春夫. 力学. 岩波書店, June 2001.
- [32] 久保謙一. 解析力学. 裳華房, December 2001.
- [33] 吉田善章. 非線形とは何か—複雑系への挑戦. 岩波書店, January 2008.

謝辞

修士2年間の研究活動にあたって、親身になってご指導して下さった吉田善章教授、古川勝准教授に感謝いたします。

吉田先生には、研究テーマの設定から、日々の研究の中でのアドバイス、時には奨学金に関する相談まで、多岐に渡ってお世話になりました。私は生命の自己組織化現象に関心を抱いて入学してきましたが、そのようなテーマに対して数理的な側面から斬り込んでいくために、一体どのようなモチーフを描いていけば良いのかを、一緒になって考えていただきました。また、数学にも物理にも無知で、暗中を模索するかのように進んでいた私に、幾度と無く助言の光を当ててくださり、進むべき道を照らし出していただきました。また、本研究室への入学を決意する機縁となった、吉田先生の著書：非線形科学入門は、今でも研究を進める際の手引書となっており、数理の世界に親しむにつれて、この本の味わいをより深く噛み締めるに至っております。心から感謝いたします。

古川先生には、直接の指導教員ではないにも関わらず、様々の件でお世話になりました。教科書を読み進めていく上で、分からぬ処を質問させていただくことがありました。研究に対する、私の纏まりない説明を、辛抱強く聞いていただくこともありました。また、奨学金の文章や、本論文の文章を校正して頂きました。誠に有難く感じております。

森川助教の、そのさばさばとした笑顔のお陰で、肩の張りも取れて、研究室へと上手く馴染み込むことができました。

齋藤助教の研究への取り組み様は、まさに研究者の鏡とも言うべきものであり、その鏡へと映る自分の姿を眺めては、自身の研究者としての姿勢を立て直すことができました。

私の入学当初、D3であった矢野さんには、研究室での作法について色々と教えて頂き、またいつも私の研究状況などを気にかけて頂きました。D1であった播磨さんには、ソリトンに関する勉強を始めた頃に、参考書の案内をして頂きました。M2であった川面さんには、星の数ほどのパソコントラブルを解決していただきました。今は卒業された水島さんは研究室を笑顔で、忠地さんは安心して包みこんでくれています。また同期の小林君と杉浦君、Vogel君がいたお陰で、楽しい2年間で過ごせました。小林君には、病気のときに家にノートを運んできて貰ったことがありました。杉浦君には、買出しなどに付き合っ貰うことも多かったです。Vogel君からは、国外の思想を学び、自分の思考の枠を広げることができました。

また、事務の北山さんには、事務手続きはもちろん、日常生活の中の細かなことでもお世話になりました。北山さんのいる曜日は、研究室に柔らかな空気が流れているようでした。

この修士論文は、皆様の有形無形の手助けの上に書き上げられたものです。皆様、本当にありがとうございました。ここに、深く感謝の意を記します。

研究発表

1. 江本 伸悟, 吉田 善章, 非線形変調するアルフベン波のハミルトン構造と可積分性の解析, 日本物理学会, 2010 年 9 月 (大阪府立大学)
2. 江本 伸悟, 吉田 善章, 自己変調するアルフベン波の振幅発展パターンの分類, 日本物理学会, 2011 年 3 月 (新潟大学) (発表予定)