

東京大学 大学院新領域創成科学研究科
基盤科学研究系
先端エネルギー工学専攻

平成 22 年度

修士論文

磁気圏型プラズマの圧力駆動不安定性に関する
平衡流効果のシミュレーションおよびモデル解析

2011 年 2 月提出
指導教員 古川 勝 准教授

47-096072 杉浦 友昭

Abstract

磁気圏型プラズマ閉じ込めの短波長 MHD 安定性について、平衡流を考慮し、時間依存性を持つアイコナールを用いて導いたバルーニング方程式の数値シミュレーション研究を行った。さらに、バルーニング方程式が持つ重要な性質を抽出した振り子方程式型のモデルを開発し、MHD 安定性に対する平衡流効果の物理の定性的解釈を試みた。

数値シミュレーションでは、安定性解析の基礎となる MHD 平衡に関して、流れによる平衡状態の変化が安定性解析の結果に影響することがないパラメータ領域に注目した。平衡流、特にそのシアによって、バルーニングモードは安定化された。安定化のメカニズムは、まず、時間依存するアイコナールから得られる波数ベクトルの時間変化スケールが、流れがない場合の成長時間と比べ大きい場合、安定化効果は小半径方向波数の時間的増加による安定化効果が主要である。この小半径方向つまり圧力勾配方向の波数増加による安定化効果は、中性流体における交換型不安定性と類似している。シアを持った平衡流の大きさが大きくなった場合、波数ベクトルの時間変化以外の、平衡流効果が現れる。それぞれの効果を抜き出すため、流れのマッハ数分布を変えてシミュレーションを行った結果から、平衡流シアが安定化効果を、平衡流が不安定化効果をもつことを示した。

振り子方程式型のモデルからは、平衡流シアは、単振動の摩擦効果として説明できることを明らかにした。

目次

第 1 章	研究の背景と目的	1
1.1	トロイダル流を含んだ MHD 安定性に関する研究	3
1.2	磁気圏型磁場配位における閉じ込め安定性の研究意義	5
1.3	研究目的	7
1.4	本論文の構成	8
第 2 章	研究手法	10
2.1	MHD 方程式	10
2.2	MHD 平衡	12
2.3	バルーニング方程式の導出	13
2.4	平衡流が無いとしたモデルの固有値問題による安定性解析との関連	18
2.5	バルーニング方程式における平衡流シア効果のモデル化	19
第 3 章	安定性に影響を与えると予想される要素	22
3.1	MHD 平衡に対する流れの効果	22
3.2	バルーニング方程式中の流れの効果	23
第 4 章	磁気圏型閉じ込めの安定性解析	25
4.1	安定性解析条件	25
4.2	MHD 平衡に対する流れの効果	28
4.3	シアを持ったトロイダル平衡流が閉じ込め安定性に与える影響 .	29

4.4	平衡流なしモデルを用いた安定化効果検証	34
4.5	波数ベクトル変化による安定化効果の物理的意味	36
4.6	中性流体の交換型不安定性との関係	38
4.7	シア流による波数ベクトルの時間変化以外の効果	41
第 5 章	モデル化による安定化効果および不安定化効果の抽出	45
5.1	平衡流シア効果	46
5.2	平衡流シアによる安定化効果の物理的意味	49
第 6 章	結論	51
付録 1		53
付録 2		57
参考文献		62
謝辞		64
学会発表		66

第 1 章 研究の背景と目的

これまで、探査機ボイジャーによる観測結果から、木星の磁気圏内ではトーラスプラズマが安定的に閉じ込められていることが明らかにされた [1,2]。また木星磁気圏では、閉じ込められたプラズマが、トロイダル方向に高速回転していることも確認されている。また磁気圏型プラズマ閉じ込めは、超高 β プラズマ閉じ込めの実験的検証を目指した RT-1[3] 実験装置や、LDX[4] 実験装置によっても実現されている。なお β 値とは、プラズマ閉じ込めの効率性を評価する指標であり、 $\beta = \frac{p}{B^2/2\mu_0}$ で表される。これは、プラズマ圧力 p と磁場圧力 $B^2/2\mu_0$ の比となっている。 β 値が高ければ、小さな磁場圧力で高圧状態のプラズマが保持されていることを意味し、高 β なプラズマ閉じ込めは効率がよいということが出来る。

ここで、RT-1 や LDX が建設される背景ともなり、磁場によるプラズマ閉じ込めに関して数多くの研究が行われた、核融合技術について述べることとする。磁場によるプラズマ閉じ込めに関しては、核融合と呼ばれる新エネルギー開発を念頭に、様々な磁場配位のもとでより高 β な閉じ込めの実現を目指した研究が行われてきた。核融合とは、比較的軽い原子核同士が融合し、より重い原子核となる反応であり、その際に放出されるエネルギーを利用する。この反応では、クーロン力という、原子核がお互いに反発する力に打ち勝ち融合するため、人工的に高温、高圧状態を作り出す必要がある。磁場閉じ込め方式の核融合炉では、強力な磁場を用い、プラズマ粒子が磁力線に沿って運動する性

質を利用している。現在主流となっている磁場配位はトカマク型と呼ばれるものであるが、その他にも様々な磁場配位のものが考案されている。その中でも、本研究の対象とした磁気圏型磁場配位は、トカマク型などに比べ非常に高い β 値が RT-1 実験装置でも実現されている。

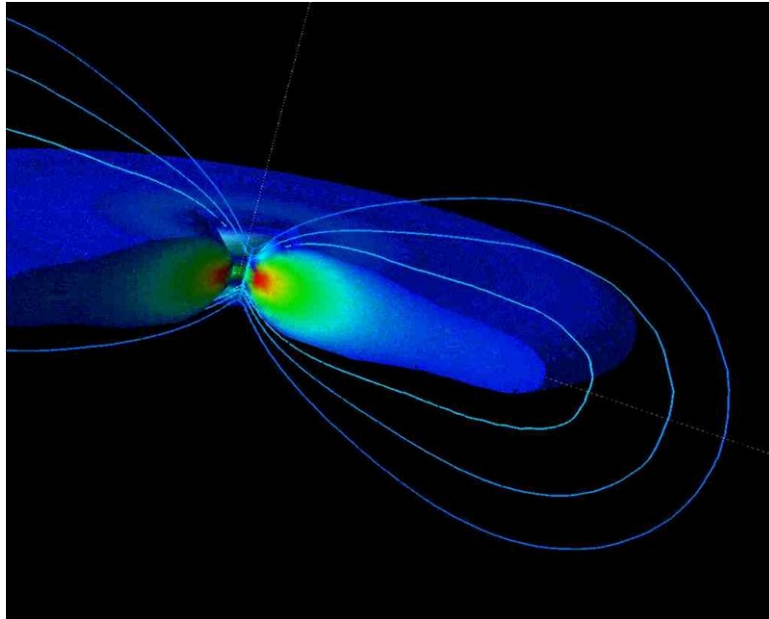


図 1 磁気圏型プラズマ閉じ込めの理論数値解析 [5]

1.1 トロイダル流を含んだ MHD 安定性に関する研究

トロイダル流を含んだ MHD 安定性に関する研究では、たとえばトカマク型磁場配位における研究が行われている。本節では、トカマク型磁場配位における過去の研究 [6] を取り上げる。この研究では、トロイダル方向のプラズマ平衡流を考慮した MHD モデルにより、シアを持った平衡流によるプラズマ閉じ込めの安定化効果が確認された。平衡流効果を含んだ波数ベクトルが、磁力線の捻れピッチを示す安全係数 q により周期的に同一の値をとることで、安定化フェーズと不安定化フェーズが現れるが、時間平均的な意味で不安定モードが安定化されることが示されている。[6]

図 2 に示すような座標系においてトロイダル方向を ζ 、ポロイダル方向を θ 、ポロイダル断面半径を r とする。トカマク型磁場配位における波数ベクトルは、時間依存性を持つアイコナールを用いて定式化を行うと、

$$\hat{\mathbf{k}} = \nabla\zeta - q\nabla\theta - (q'\theta - k_r + \Omega't)\nabla r \quad (1)$$

と表される。なお k_r は r 方向の波数である。また、 Ω はトロイダル方向の平衡流の角周波数を表す。式からも明らかなように、 r 方向波数に平衡流シアの効果が含まれている。図 3 は、平衡位置からのプラズマ変位 ξ のノルムの時間発展である [6]。平衡流シアの効果が含まれていないときは指数関数的に成長するが、平衡流シアが大きくなることで安定化フェーズが出現し、閉じ込めが安定化されることが明らかにされた。

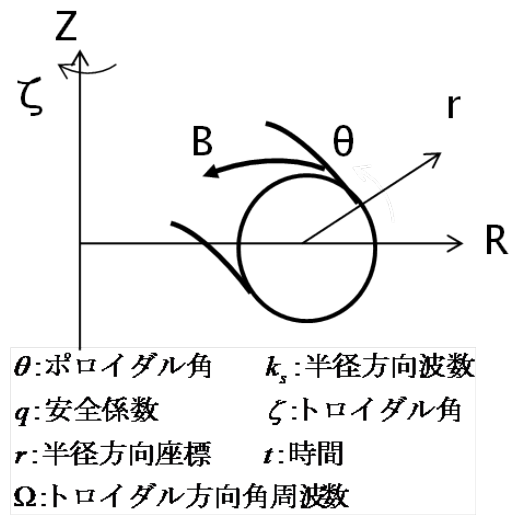


図2 トカマク型磁場配位における座標系

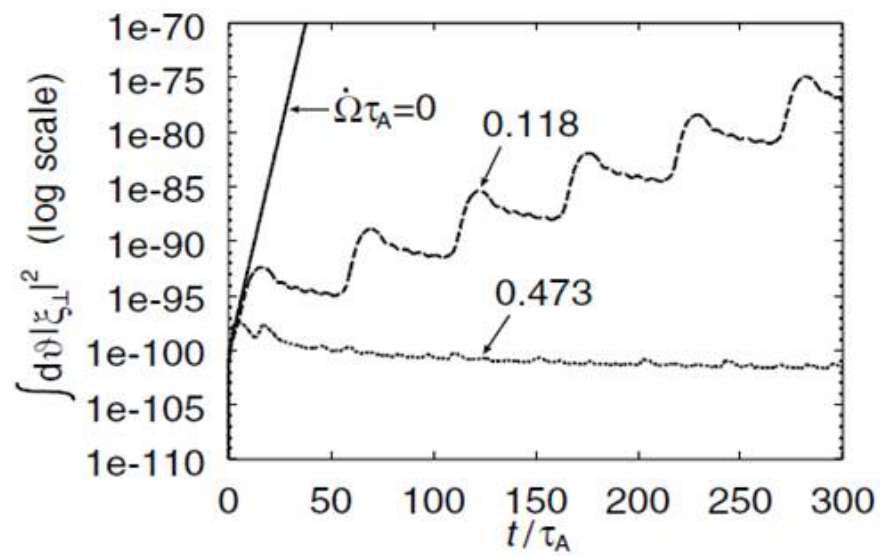


図3 トカマク配位における平衡位置からの変位の時間発展 [6]

1.2 磁気圏型磁場配位における閉じ込め安定性の研究意義

前節までに述べたように、磁気圏型磁場配位では高 β なプラズマ閉じ込めが実現されているが、閉じ込めを不安定化する要素も持ち合わせている。プラズマ閉じ込め領域において、プラズマ圧力が中心部で高圧、周辺部で低圧となることで、圧力勾配が磁場曲率と同じ向きとなっているために、交換型不安定性 [10,11,12] と呼ばれる、圧力駆動型の閉じ込め不安定性が存在している。閉じ込め不安定性の存在に関わらず、木星磁気圏や RT-1 などの実験装置で高 β な安定的閉じ込めが実現されている理由としては、磁束管の圧縮性による影響や、トロイダル方向に存在する高速プラズマ流の影響が考えられている。

磁気圏型磁場配位での閉じ込め安定性に関する研究は、RT-1 実験装置におけるセパトロリックスを含む磁場配位を対象にして、平衡流が無いとしたモデルを固有値問題で考えた安定性解析に関する研究が行われた [7]。この研究においては、磁場の圧縮性による安定化効果が、圧力駆動による不安定性を抑えていることが確認された。一方で流れを持つ磁気流体の安定性に関しては、前節に示した、トカマク配位における研究 [6] などが行われてきた。トカマク型磁場では、トロイダル方向の流れが、閉じ込め安定化効果を発揮しているという事が確かめられている [6]。しかしながら、同様にトロイダル方向の高速プラズマ流が存在する磁気圏型磁場配位においては、MHD モデルを用いた流れの効果を考慮した研究は過去に行われていない。シアをもった平衡流が、波の空間的構造を引き延ばすことによる安定性への影響について調べることは、磁気圏型磁場配位が実現している高 β 閉じ込めにおける、平衡流の効果について明らかにする

ものである。

また、磁気圏型プラズマにおける理論シミュレーション研究 [7] では、流れが無いとしたモデルに対する解析手法として、固有値解析が用いられている。流れを考慮する場合、方程式は非エルミート作用素により記述される。非エルミート作用素は固有関数が直交せず、また完全系を成さないため、固有値解析に結果をどのように解釈すれば良いのかが明らかでない。流れを含んだ場合のモデルに対し、流れが無いとした固有値解析結果との関連を調査することによって、非エルミートな問題に対する研究手法の数理科学的な適用可能性について明らかにすることができると考えている。

1.3 研究目的

磁気圏型磁場配位において、シアを持ったトロイダル平衡流がプラズマ閉じ込め安定性に与える影響を調べることは、木星磁気圏に見られるような高速プラズマ流が、磁気圏型磁場配位の高 β な閉じ込めにどのような影響を与えているかについて、明らかにするという意義ある。本研究で考える磁気圏型磁場は、磁力線が同一平面上で閉じた配位である。そのため、磁気シアを持ったトカマク型磁場配位におけるプラズマ平衡流とは、安定性に与える影響が質的に異なると考えている。

そこで本研究では、磁気圏型磁場配位の圧力駆動不安定性に対する、シアを持ったトロイダル平衡流の効果について調べる。具体的には、以下の二点を明らかにし、その物理的な意味を考察することを本研究の目的とする。

1. シアを持ったトロイダル方向のプラズマ平衡流が、安定性に与える影響
2. プラズマ平衡流が安定性に与える影響のメカニズム

1.4 本論文の構成

本論文の構成は、以下の通りである。

第 2 章では、本研究の研究手法について述べる。第 2.1 節では、平衡計算と安定性解析の基礎となる、電磁流体方程式 (MHD) 方程式を示す。また、第 2.2 節では平衡解析手法について述べ、第 2.3 節は、MHD 方程式から磁気圏型プラズマ閉じ込めにおける圧力駆動型不安定性を求める方程式について、導出を行う。第 2.4 節では、流れシアによる小半径方向波数の時間変化による安定性への影響を調べるための、流れが無いとしたモデルを用いた手法について説明する。第 2.5 節では、平衡流が大きくなったときの安定化効果抽出のためのモデル化について述べる。

第 3 章では、安定性に影響を与えると考えられる要素について分析する。第 3.1 節では流れによる平衡状態の変化について、さらに第 3.2 節ではバルーニング方程式中の流れの効果について述べる。

第 4 章では、安定性解析条件と解析結果について述べる。第 4.1 節は解析条件である。第 4.2 節では、平衡状態の変化が安定性に与える影響について検証する。第 4.3 節は、シアを持った平衡流が十分小さいとした場合の、安定性解析結果である。第 4.4 節で、第 4.3 節で行った計算の結果に対する考察を、平衡流が無いとしたモデルを用いて行う。第 4.5 節は、磁気圏型プラズマ閉じ込めにおける波数ベクトル変化とはどのような状態を指すかを示し、さらに第 4.6 節で中性流体の交換型不安定との関連について考察する。最後に第 4.7 節で、平衡流の大きさがさらに大きくなった場合の、安定性に影響を与える要素について考察

する。

第 5 章では、平衡流が大きい場合に現れる安定性に影響を与える要素について、バルーニング方程式のモデル化により、その効果の物理的な意味を考察する。第 5.1 節は解析結果である、第 5.2 節に解析結果に対する考察を示す。

第 6 章は結論である。なお巻末には、付録、参考文献、謝辞、修士課程在籍中の学会発表について示した。

第 2 章 研究手法

本研究では、平衡計算によってプラズマ閉じ込めの MHD 平衡を計算した後、マッピングコードによって円柱座標系から磁気座標系に座標変換を行い、バルーニング方程式の数値シミュレーションによる安定性解析を実行する。本章の内容は、まず平衡解析および座標変換についての概要を述べた後、MHD 方程式からバルーニング方程式の導出について記述する。その後、安定性に影響を与えると予想される要素について取り上げ、波数ベクトル変化が安定性に与える影響を説明するための、流れがないとしたモデルを解く固有値解析手法について述べる。

さらに、平衡流が大きくなった場合に現れる効果についてモデル化を行った。本章ではこのモデル方程式についても述べる。

2.1 MHD 方程式

安定性解析には、流体の運動方程式にローレンツ力の効果を導入した磁気流体力学 (MHD) 方程式を用いる。ただし本研究では、電気伝導度 σ を十分大きいとした理想 MHD 方程式を用いている。以下に、本研究で用いた理想 MHD 方程式を示す。

理想 MHD 方程式は、以下に示す流体の運動方程式と磁場に関する方程式で表

される。

$$\rho(d\mathbf{v}/dt) = -\nabla p + \frac{1}{\mu_0}(\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}, \quad (2)$$

$$(\partial\rho/\partial t) + \nabla \cdot (\rho\mathbf{v}) = 0, \quad (3)$$

$$(d/dt)(p/\rho^\gamma) = 0, \quad (4)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}). \quad (5)$$

ここで ρ は流体密度、 p は圧力、 \mathbf{B} は磁場、 \mathbf{v} は流体速度である。

2.2 MHD 平衡

磁気圏型磁場配位に閉じ込められたプラズマの平衡状態を求めるため、平衡解析コードによる計算を行う。解析には円柱座標系 (R, ϕ, Z) で表された Grad-Shafranov 方程式 [15]

$$\Delta^* \psi = -\mu_0 R^2 \left. \frac{\partial p}{\partial \psi} \right|_R - I \frac{dI}{d\psi}. \quad (6)$$

を圧力分布 $\bar{p}(\psi)$ とマッハ数分布 $\bar{M}(\psi)$ を与えて解く。ただし

$$p = \bar{p}(\psi) e^{\bar{M}^2 \left(\frac{R^2}{R_0^2} - 1 \right)}. \quad (7)$$

ここで、 μ_0 は真空の透磁率、 p はプラズマ圧力、 $I \equiv RB_t$ ただし B_t はトロイダル磁場である。ただし、今はポロイダル磁場のみを想定しているので、ポロイダル方向の電流 I は考えない。Grad-Shafranov 演算子 Δ^* は、

$$\Delta^* = R^2 \nabla \cdot \left(\frac{1}{R^2} \nabla \right) = \frac{\partial^2}{\partial R^2} - \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} + \frac{\partial^2}{\partial Z^2} \quad (8)$$

と定義される。安定性解析では、この平衡計算から得られた平衡状態をもとに、各磁気面について安定性の評価を行う。Grad-Shafranov 方程式の導出詳細は付録 1 に示した。

なお本研究では、平衡解析では円柱座標系を用い、磁束関数 $\psi(R, Z)$ が得られる一方、安定性解析には磁気座標系 [9] を用いる。そこで座標変換コードを用いて、円柱座標系から磁気座標系に座標変換を行っている。平衡解析コードによる数値解析では、磁束関数 ψ およびポロイダル角 θ を求めるにあたって円柱座標系 (R, Z) が用いられる。一方で、安定性解析には磁気座標系 (ψ, θ) を用いてい

るため

$$(\psi(R, Z), \theta(R, Z)) \implies (R(\psi, \theta), Z(\psi, \theta)) \quad (9)$$

という操作を、座標変換コードにて行う。

2.3 バルーニング方程式の導出

バルーニングモード安定性を解析するため、線形化された理想 MHD 方程式に対してトロイダルモード数が多いという条件を仮定し、バルーニング方程式を導出する [17]。圧力勾配駆動型の不安定性については、磁力線を横切る方向に短波長であるほど不安定になりやすいことが知られていること [10] から、 n をトロイダルモード数として高 n 近似を行い、スケール長による分離を行う。

まず、理想 MHD 方程式の線形化を行う。 \mathbf{r}^0 を平衡状態における流体要素の軌跡、 $\xi(\mathbf{r}^0, t)$ を平衡位置からの変位として表し、

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}^0 + \xi(\mathbf{r}^0, t) \quad (10)$$

とおくと、

$$\rho(\mathbf{r}^0 + \xi) = \rho(\mathbf{r}^0)(1 - \nabla^0 \cdot \xi), \quad (11)$$

$$p(\mathbf{r}^0 + \xi) = p(\mathbf{r}^0)(1 - \gamma \nabla^0 \cdot \xi), \quad (12)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}^0 + \xi) = \mathbf{B}(\mathbf{r}^0) - \mathbf{B} \nabla^0 \cdot \xi + \mathbf{B} \cdot \nabla^0 \xi, \quad (13)$$

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}^0 + \xi) = \mathbf{v}(\mathbf{r}^0) + \mathbf{v} \cdot \nabla^0 \xi + \partial \xi / \partial t, \quad (14)$$

となって、線形化された MHD 方程式である、最終的に以下の Frieman-Rosenbluth 方程式 [8] が得られる:

$$\rho \frac{d^2 \xi}{dt^2} = F(\xi) + \nabla \cdot (\rho \xi \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}). \quad (15)$$

ただし、

$$\mathbf{F}(\boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{\mu_0} [(\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{Q}) \times \mathbf{B} + (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{Q}] + \boldsymbol{\nabla}(\gamma p \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\nabla} p). \quad (16)$$

また、

$$\mathbf{Q} = \boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\xi} \times \mathbf{B}) \quad (17)$$

である。

Frieman-Rosenbluth 方程式において $\boldsymbol{\xi}$ をアイコナル S を用いて表すと、

$$\boldsymbol{\xi} = \hat{\boldsymbol{\xi}}(r, \theta, t) e^{inS(r, \theta, \zeta, t)}. \quad (18)$$

ここで磁力線方向に長波長、位相がプラズマ流に乗って変化するという仮定を導入すると、

$$\mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\nabla} S = 0, \quad (19)$$

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\partial S}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\nabla} S = 0 \quad (20)$$

とすることができ、このことから、アイコナル S 及び平衡位置からのプラズマ変位 $\boldsymbol{\xi}$ を以下のように表される。

$$S = \zeta + \Omega t + S_0(r), \quad (21)$$

$$\boldsymbol{\xi} = \hat{\boldsymbol{\xi}}(r, \theta, t) e^{in(\zeta + \Omega t + S_0)}. \quad (22)$$

ここで、アイコナルでシアを持ったトロイダル方向平衡流のストレッチ効果が Ωt として表している。また、平衡流効果を含む波数ベクトルはアイコナルの空間微分で定義され、

$$\hat{\mathbf{k}} \equiv \boldsymbol{\nabla} S = \boldsymbol{\nabla} \zeta + (k_r + \Omega' t) \boldsymbol{\nabla} r. \quad (23)$$

ただし k_r は、ポロイダル断面の半径 r 方向波数であり、

$$k_r = S'_0 = \frac{dS_0}{dr} \quad (24)$$

である。トカマク配位における研究との違いは、磁気圏型配位はポロイダル磁場のみの閉じた磁力線配位であり、磁力線方向に無限空間（カバーリング空間）を考える [16] 必要が無く、エンベロープにポロイダル方向の周期性を課す点である。

$n \gg 1$ とする。 $\hat{\xi}$ を磁力線の垂直方向 $\hat{\xi}_\perp$ 成分、平行方向 $\hat{\xi}_\parallel$ 成分、半径方向 $\hat{\xi}_r$ 成分で表す：

$$\hat{\xi} = \hat{\xi}_\perp \frac{\mathbf{B} \times \hat{\mathbf{k}}}{B^2} + \hat{\xi}_\parallel \mathbf{B} + \hat{\xi}_r \nabla r. \quad (25)$$

n の次数毎に集め、 ξ に関する磁場に平行な方向と垂直な方向のバレーニグ方程式は、規格化を行うと最終的に次のように表される。安定性解析では、これら垂直方向と平行方向の平衡位置からのプラズマ変位 ξ について、初期値問題として数値解析を行う。

なおこのバレーニグ方程式は、時間 2 階、空間 1 次元 2 階の偏微分方程式となっている。係数が波数ベクトルを通じて時間的に変化するため、初期値問題で解く必要がある。方程式中において、平衡流シアを表す Ω' は、波数ベクトルと垂直方向の方程式左辺第 2 項に現れる。一方、平衡流大きさを表す Ω は方程式各係数中に現れる。シアを持った平衡流の効果は、波数ベクトルの時間変化を通じ方程式の係数を変化させることに加え、 Ω' および Ω が、方程式の係数中にそれ自体が含まれる形となっている。

磁力線平行方向の規格化された方程式：

$$\begin{aligned}
& \rho \mathbf{B}^2 \frac{\partial^2 \xi_{\parallel}}{\partial t^2} + 2M_A \rho \Omega (\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{Z}}) \frac{\partial \xi_{\perp}}{\partial t} \\
&= \beta_0/2 (\mathbf{B} \cdot \nabla) \left(\frac{\gamma p \mathbf{B}^2}{\mathbf{B}^2 + \gamma p \beta_0/2} \mathbf{B} \cdot \nabla \xi_{\parallel} \right) - \frac{2}{\mathbf{B}^2 + \gamma p \beta_0} (\mathbf{B} \times \hat{\mathbf{k}}) \cdot (\gamma p \kappa - M^2 \rho R \Omega^2 \hat{\mathbf{R}}) \mathbf{B} \cdot \nabla \xi_{\perp} \\
&+ \{-\mathbf{B} \cdot \nabla [\frac{2}{\mathbf{B}^2 + \gamma p \beta_0/2} (\mathbf{B} \times \hat{\mathbf{k}}) \cdot (\gamma p \kappa - M^2 \rho R \Omega^2 \hat{\mathbf{R}})] - 4M^2 \rho \Omega \nabla \Omega \cdot \hat{\mathbf{Z}} \\
&+ \frac{4M^2 \rho R \Omega^2 (\mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{R}})}{\mathbf{B}^2 + \gamma p \beta_0/2} (\mathbf{B} \times \hat{\mathbf{k}} \cdot \kappa - M^2 [\mathbf{B}^2 + \frac{\beta_0}{2} (\gamma - 1)p] \mathbf{B} \times \hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{R}})\} \xi_{\perp} \\
&+ 2M^2 \{ \mathbf{B} \cdot \nabla (\frac{\rho R \Omega^2 \mathbf{B}^2}{\mathbf{B}^2 + \gamma p \beta_0/2} \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{R}}) - 2M^2 \frac{\mathbf{B}^2 + \frac{\beta_0}{2} (\gamma - 1)p}{p(\mathbf{B}^2 + \gamma p \beta_0/2)} (\rho R \Omega^2)^2 (\mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{R}})^2 \} \xi_{\parallel}.
\end{aligned} \tag{26}$$

磁力線垂直方向の規格化された方程式：

$$\begin{aligned}
& \rho \hat{\mathbf{k}}^2 \frac{\partial^2 \xi_{\perp}}{\partial t^2} + 2M_A \rho (\hat{\mathbf{k}} \cdot \nabla \Omega) \frac{\partial \xi_{\perp}}{\partial t} - 2M_A \rho \Omega \mathbf{B}^2 (\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{Z}}) \frac{\partial \xi_{\parallel}}{\partial t} \\
&= \mathbf{B}^2 \mathbf{B} \cdot \nabla \left(\frac{\hat{\mathbf{k}}^2}{\mathbf{B}^2} \mathbf{B} \cdot \nabla \xi_{\perp} \right) + \frac{\beta_0}{2} \frac{2\mathbf{B}^2}{\mathbf{B}^2 + \gamma p \beta_0/2} (\mathbf{B} \times \hat{\mathbf{k}}) \cdot (\gamma p \kappa - M^2 \rho R \Omega^2 \hat{\mathbf{R}}) \mathbf{B} \cdot \nabla \xi_{\parallel} \\
&+ \frac{\beta_0}{2} \left(\frac{4}{\mathbf{B}^2 + \gamma p \beta_0/2} (-\gamma p (\mathbf{B} \times \hat{\mathbf{k}} \cdot \kappa)^2 + 2M^2 \rho R \Omega^2 (\mathbf{B} \times \hat{\mathbf{k}} \cdot \kappa) (\mathbf{B} \times \hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{R}}) \right. \\
&- M^2 \frac{(\rho R \Omega^2)^2}{p \mathbf{B}^2} [\mathbf{B}^2 + (\gamma - 1)p \beta_0/2] (\mathbf{B} \times \hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{R}})^2 \\
&+ \frac{2}{\psi'} \left. \frac{\partial p}{\partial r} \right|_R \mathbf{B} \times \hat{\mathbf{k}} \cdot \kappa - M^2 \frac{\partial (\rho R \Omega^2)}{\partial r} \Big|_R \mathbf{B} \times \hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{R}} + 2M^2 \rho \Omega \Omega' \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{Z}} \} \xi_{\perp} \\
&+ 4M^2 \frac{\rho R \Omega^2 \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{R}}}{\mathbf{B}^2 + \gamma p \beta_0/2} \left(\mathbf{B}^2 \mathbf{B} \times \hat{\mathbf{k}} \cdot \kappa - M^2 \frac{\rho R \Omega^2}{p} [\mathbf{B}^2 + (\gamma - 1)p \beta_0/2] \mathbf{B} \times \hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{R}} \right) \xi_{\parallel}.
\end{aligned} \tag{27}$$

ただし以下のような規格化を行ってある。RT-1 実験装置の典型的サイズとして R_0 、典型的磁場として B_0 、圧力 p_0 、質量密度 ρ_0 、トロイダル回転角周波数 Ω_0 を用いる。このとき速度は

$$v_A = \frac{B_0}{\sqrt{\mu_0 \rho_0}} \quad (28)$$

で規格化する。さらに、時間はアルフベン時間

$$\tau_A = \frac{R_0}{v_A} \quad (29)$$

で規格化する。

さらに、マッハ数 M および典型的な β 値を

$$\bar{M}^2 \equiv \frac{p_0 R_0^2 \Omega_0^2}{2p_0} \quad (30)$$

$$\beta_0 \equiv \frac{p_0}{B_0/2\mu_0} \quad (31)$$

で定義する。バルーニング方程式中のアルフベンマッハ数 M_A は

$$M_A := \Omega_0 \tau_A \quad (32)$$

であり、熱速度に対するマッハ数 M に対し

$$M_A = \sqrt{\beta} \bar{M} \quad (33)$$

の関係がある。バルーニング方程式の各項を、以上の規格量を用いて規格化している。

2.4 平衡流が無いとしたモデルの固有値問題による安定性解析との関連

平衡流の大きさが十分小さい場合、時間の経過が小さい領域では波数ベクトルはほとんど変化せず、変位 ξ は固有模式的に時間変化すると考えられる。そのため平衡流が小さい条件での安定性は、平衡流がないとした場合のモデルを、波数ベクトルを変化させて解いた固有値解析を用いて説明できると考えられる。

トロイダル方向の平衡流が無いとした場合、線形化された MHD 方程式は

$$\rho \frac{d^2 \xi}{dt^2} = F(\xi). \quad (34)$$

ただし、

$$F(\xi) = \frac{1}{\mu} [(\nabla \times \mathbf{Q}) \times \mathbf{B} + (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{Q}] + \nabla(\gamma p \nabla \cdot \xi + \xi \cdot \nabla p). \quad (35)$$

このとき、 $F(\xi)$ に関して、物理的に適切な境界条件を適用すると、方程式はエルミート作用素で記述される。[9] エルミート作用素は、一般的には連続スペクトルおよび点スペクトルを持ち、固有関数は直交し、かつ完全系を成す。このことから、波はスペクトル分解でき、固有値問題

$$-\rho \omega^2 \xi = F(\xi) \quad (36)$$

を解けば波の安定性を知ることができる。このとき、 $\omega^2 < 0$ の固有値が見つければ、その系は指数関数的に不安定ということになる。

また、このときのプラズマ変位および波数ベクトルは

$$\xi = \hat{\xi}(s, \theta, t) e^{in(\zeta + S_0)}, \quad (37)$$

$$\hat{\mathbf{k}} = \nabla\zeta + k_r\nabla r, \quad (38)$$

となる。

本研究では、波数ベクトル変化による安定性について、上記の平衡流がないとした場合のモデルを固有値問題により解き、流れありのシミュレーション結果と比較することで、波数ベクトル変化による安定化効果について説明する。

2.5 バルーニング方程式における平衡流シア効果のモデル化

波数ベクトル変化の時間スケールが成長時間に比べ同等以下のとき、平衡流による不安定化効果と平衡流シアによる安定化効果が現れることを確認した。以下に示すようにモデル化を行い、平衡流シアによる安定化効果の物理的な意味を考察していくことにする。

シア流効果のみに注目するため、簡単化されたバルーニング方程式のモデルが導出されている [19]。これを元に、重要な性質を抽出した振り子型方程式のモデル導いていく。平衡流がない場合のバルーニング方程式について、右辺を $L(\xi)$ で表すと

$$\rho|\hat{\mathbf{k}}|^2 \frac{\partial^2 \xi_{\perp}}{\partial t^2} = L(\xi). \quad (39)$$

固有値問題を考えて、 γ を成長率とすると

$$-\rho|\hat{\mathbf{k}}|^2 \omega^2 \xi_{\perp} = \rho|\hat{\mathbf{k}}|^2 \gamma^2 \xi_{\perp} = L(\xi). \quad (40)$$

ここで、平衡流がある場合のバルーニング方程式について、平衡流シア項 $\nabla\Omega$ のみを左辺に残した方程式を考える。平衡流が十分小さいときにはバルーニング方程式中の Ω' 効果が現れず、平衡位置からの変位は固有モード的に変化する

から、モデル方程式は以下のように表される。

$$\rho|\hat{\mathbf{k}}|^2 \frac{\partial^2 \xi_{\perp}}{\partial t^2} + 2\beta_0 M_A^2 \rho(\hat{\mathbf{k}} \cdot \nabla \Omega) \frac{\partial \xi_{\perp}}{\partial t} = \rho|\hat{\mathbf{k}}|^2 \gamma^2 \xi_{\perp}. \quad (41)$$

ここでさらに、モデル方程式には波数ベクトル中に θ 方向の依存性が残っているため、 θ 方向依存性を取り除くことで再モデル化を行う。 a を Ω' に相当する定数、 λ を成長率 γ に相当する変数として表し、 θ 方向依存性を

$$R^2 |\nabla r|^2 \equiv 1 \quad (42)$$

を用いて取り除くと、最終的なモデル方程式は次のように表される。

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + \frac{2a^2 t}{1 + (at)^2} \frac{dy(t)}{dt} = \lambda^2 (at) y(t). \quad (43)$$

なお上記のモデル方程式については、T. Tatsuno や F. Volponi、Z. Yoshida によって行われた、シア流が存在する一様磁場中での交換型不安定性に関する研究 [13] においても、類似した方程式が導かれている。この研究 [13] では、シアを持つ流れの中の流れを扱うために、Kelvin の方法 [14] が導入されている。

Kelvin の方法では、流れを持つプラズマ中の線形波動を

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla u = Au \quad (44)$$

と記述する。 u は平衡位置からの変位、 \mathbf{v} は平衡プラズマ流、 A は時間に依存しないエルミート作用素である。このような記述の下で T. Tatsuno らによる過去の研究 [13] では、本節で導出したモデルと類似した、磁束関数に関する常微分方程式を導いている。

なお平衡流効果を含めたモデル化に関しては、 Ω 項を考慮した二連立モデル方程式の導出を行ったものの、解析結果の検証には至らなかった。付録 2 において、平衡流効果を含めた二連立モデル方程式と、その導出について示す。

第3章 安定性に影響を与えると予想される 要素

閉じ込め安定性については、以下の要素 1. および 2. が影響を与えると予想されるため、それぞれについて検証していくことにする。

1. MHD 平衡に対する流れの効果
2. バルーニング方程式中の流れの効果
 - (1) 波数ベクトルの時間変化
 - (2) 方程式係数中に現れる Ω の効果
 - (3) 波数ベクトル中を除く、方程式係数中に現れる Ω' の効果

以下の節では、それぞれの効果について説明を行う。

3.1 MHD 平衡に対する流れの効果

まず、MHD 平衡に対する流れの効果が安定性に影響を与える可能性について、考えなければならない。平衡計算では、圧力分布について、規格化された圧力 $\hat{p}(\psi)$ を用いて

$$p = \hat{p}(\psi)e^{\hat{M}(\psi)(R^2/(R_0)^2-1)} \quad (45)$$

で与えているため、平衡流が大きい場合、前提となる平衡状態の変化が安定性解析の解に影響を与える可能性がある。本研究では、ある平衡状態からのプラズマ変位についてその安定性を議論するため、このような前提条件の変化による影響について考慮しなければならない。

3.2 バルーニング方程式中の流れの効果

次に、安定性解析を行うために用いるバルーニング方程式における流れの効果について挙げる。バルーニング方程式中の流れの効果には、次の可能性が考えられる。

(1) 波数ベクトルの時間変化

シアを持ったトロイダル平衡流の効果が、波数ベクトル

$$\hat{\mathbf{k}} \equiv \nabla S = \nabla \zeta + (k_r + \Omega' t) \nabla r \quad (46)$$

を変化させ、安定性に影響を与えと考えられる。このとき、トカマク型磁場配位の場合とは異なり、波数ベクトルは磁気シアによる周期性を持たず、単調に変化する。

ただし平衡流が大きくなり、変位が固有モード的に時間変化しなくなったとき、波数ベクトル変化に加えて以下の二点が安定性に影響を与えと考えられる。

(2) 方程式係数中に現れる Ω の効果

バルーニング方程式の係数に含まれる Ω 項による効果。バルーニング方程

式では、平衡流の大きさによって表される Ω 項が含まれており、この項が閉じ込め安定性に影響を与える可能性がある。

(3) 波数ベクトル中を除く、方程式係数中に現れる Ω' の効果

Ω 項同様に、バレーニング方程式の係数中に含まれる Ω' 項による効果。ただし、波数ベクトル中に現れる Ω' をのぞく。この項は、波数ベクトルの Ω' とは別に方程式中に現れるため、波数ベクトル変化をもたらす Ω' とは分けてその効果を考察しなければならない。

第 4 章 磁気圏型閉じ込めの安定性解析

本章では、磁気圏型磁場配位におけるプラズマ閉じ込め安定性に関する数値解析結果を記述する。まず、安定性解析に必要なマッハ数分布や圧力分布などの安定性解析条件について述べ、平衡流が安定性にどのような影響をもたらすか、数値解析結果を述べる。平衡流が十分に小さい領域から、次第に平衡流を大きくしていき、安定性やその安定化メカニズムにどのような違いが現れるか見ていくこととする。さらに、波数ベクトル変化による安定性への影響の物理的意味や、平衡状態が安定性に与える影響、波数ベクトル変化以外の安定性へ影響を与える影響について考察する。

4.1 安定性解析条件

ここでは、安定性解析における計算条件を示す。計算には圧力分布およびマッハ数分布を与える必要があるが、最大値を 1 としたマッハ数分布および圧力分布を以下に示す。 R_0 は基準長さである。横軸を磁気面 ψ に取った分布は、図 4 に示した。閉じ込め中心部でそれぞれピークが存在するような分布としている。

$$M = M_0 \hat{\psi}(\hat{\psi} - 1), \quad (47)$$

$$p = e^{M^2(R^2/R_0^2 - 1)} \hat{\psi}(\hat{\psi} - 1)^2. \quad (48)$$

ここで横軸の値は、 $\psi_1 \leq \psi \leq \psi_2$ において

$$\hat{\psi} = \frac{\psi - \psi_1}{\psi_2 - \psi_1} \quad (49)$$

で再規格化しており、横軸 1 の位置が ψ_2 を、横軸 0 は ψ_1 を示す。図 5 は流れがないとした場合の、固有値問題を解くことで得られた各磁気面での成長率である。安定性解析には、不安定性が現れる $\psi = 165/200$ の磁気面を用いている。

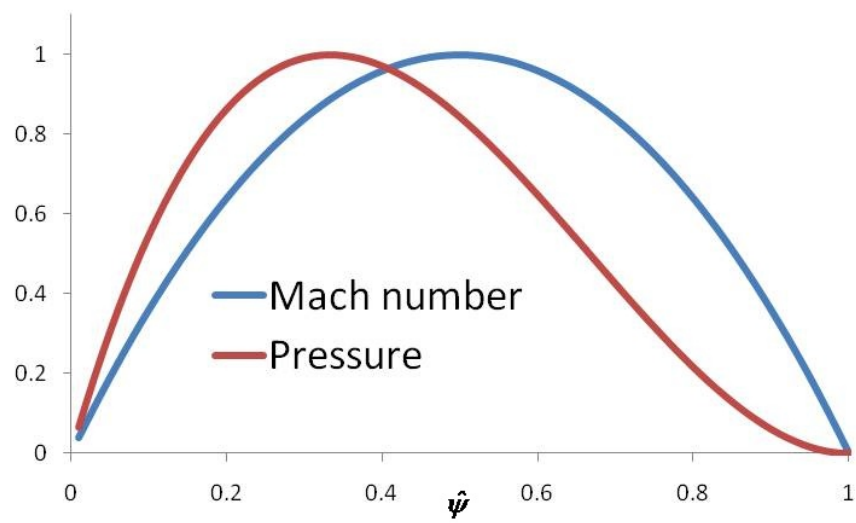


図 4 圧力分布およびマッハ数分布

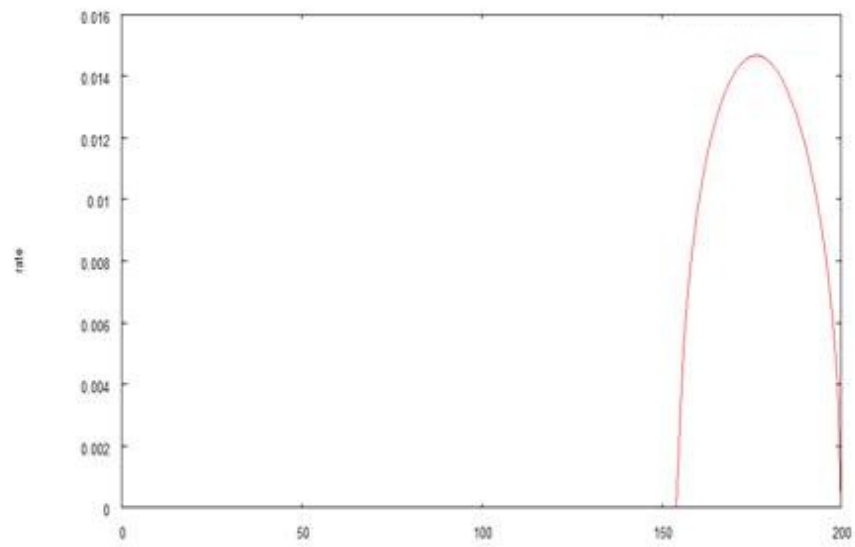


図5 各磁気面での成長率

なお初期値解析の初期値としては、図6で示した、平衡流がないとしたモデルを固有値解析で解いた、不安定性がみられる磁気面での固有関数を与える。横軸は、磁力線に対して周方向に $-\pi \leq \theta \leq \pi$ を設定している。赤のラインが水平方向の変位を、緑のラインが垂直方向の変位を表す。

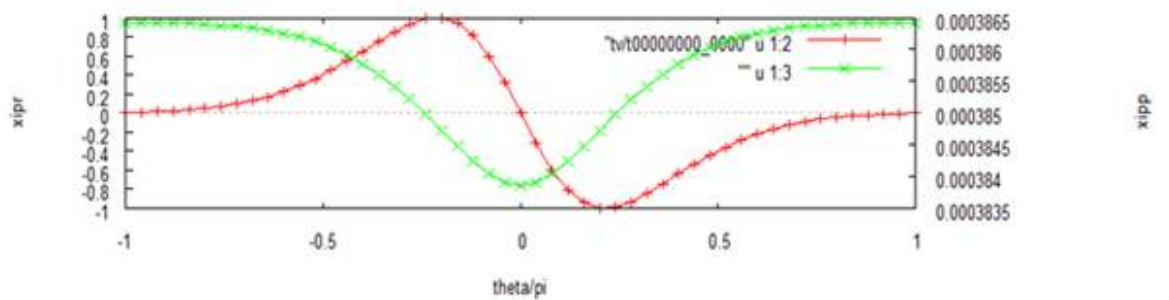


図6 初期値として与える平衡位置からのプラズマ変位

4.2 MHD 平衡に対する流れの効果

ここで、3.1 節で述べた流れによる平衡状態の変化が安定性解析に影響を与えている可能性について検証を行う。用いた手法としては、まず平衡計算でのみマッハ数を変えて計算を行い、その後、各平衡状態に対する同条件での安定性解析結果が一致していれば、そのマッハ数領域では MHD 平衡に対する流れの効果はないといえることとする。

平衡解析で与える最大マッハ数を 0.04 および 0.4 とし、瞬間成長率の出方を比較した。図 7 は、横軸を半径方向波数、縦軸を成長率とした計算結果である。流れがあるモデルの初期値解析では $k_r = 0$ とし、各時刻における瞬間成長率をプロットしている。瞬間成長率 γ は、微小変化量を Δ で表すと

$$\gamma = \frac{1}{2\Delta t} \ln \left(\Delta \int_{-\pi}^{\pi} d\theta |\xi_{||}|^2 \right) \quad (50)$$

で考えている。赤および青のプロットが Profile1 と Profile2 を用いた計算結果を示しており、黒のラインは流れ無しモデルを k_r を変化させて固有値解析で解いた結果である。図から、最大マッハ数 0.04 で平衡解析を行った結果と、0.4 で行った結果では、 r 方向波数のごく小さい領域をのぞいて、ほぼ影響が出ないことがわかる。このことから、本研究で考えるマッハ数領域においては、MHD 平衡に対する流れの効果はないと判断した。グラフ中で Profile1*は、最大マッハ数 0.04 でのマッハ数分布を示す。

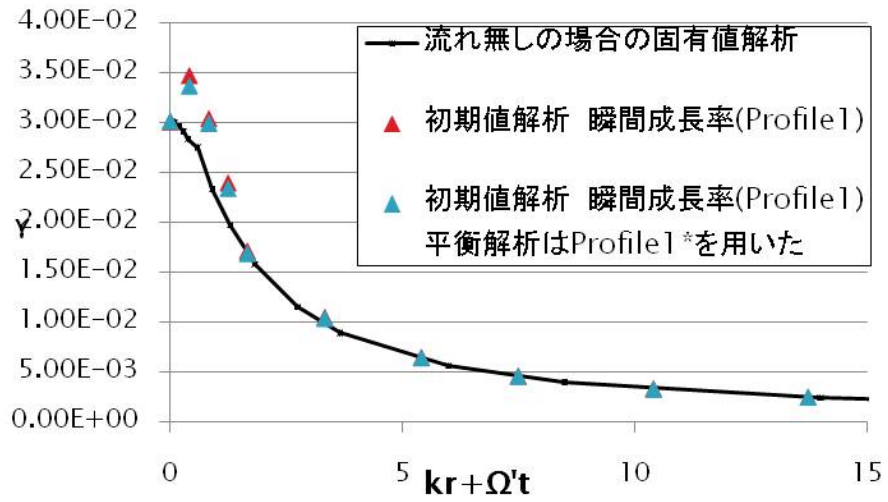


図 7 MHD 平衡に対する流れの効果検証

4.3 シアを持ったトロイダル平衡流が閉じ込め安定性に与える影響

平衡流による安定化効果について、磁気面のポロイダル方向 θ の各座標におけるプラズマ変位と変位のノルムの時間変化が、トロイダルシア流の大きさによってどのように変化するか検証を行った。このとき、波数ベクトル中に現れるトロイダル方向の角周波数 Ω は、 v を平衡流流速として

$$\Omega = \frac{v}{R} \quad (51)$$

とする。

図 8 はプラズマ変位の磁場に垂直な成分および平行な成分のノルムの時間発

展を、平衡流のない場合 ($\Omega' = 0.0$) と小さいが有限な場合 ($\Omega' = 1.04 \times 10^{-3}$)、平衡流が大きい場合 ($\Omega' = 4.16 \times 10^{-2}$) についてそれぞれ示したものである。変位のノルムは、磁力線に対して平行方向を $\int_{-\pi}^{\pi} d\theta |\xi_{\parallel}|^2$ 、垂直方向を $\int_{-\pi}^{\pi} d\theta |\xi_{\perp}|^2$ で考えている。

平衡流の効果により、プラズマ変位の増大が抑制されている。これはシア流があるときの径方向波数が時間とともに変化していくからである。平衡流が十分に小さいときは、各瞬間において、ほぼ一定の半径 r 方向波数 $k_r + \Omega' t$ に対して固有モード的な時間発展をしていると予想される。つまり、流れ無しのバレーニング方程式において、 t に対応する $\Omega' t$ と同じ値の径方向波数 k_r を与えて固有値解析したものと関係付けられると考えられる。なお、平衡流あり初期値解析では $k_r = 0$ としている。

また図 10 から図 15 は、モード構造の時間変化を、それぞれの平衡流シア条件の下で示したものである。

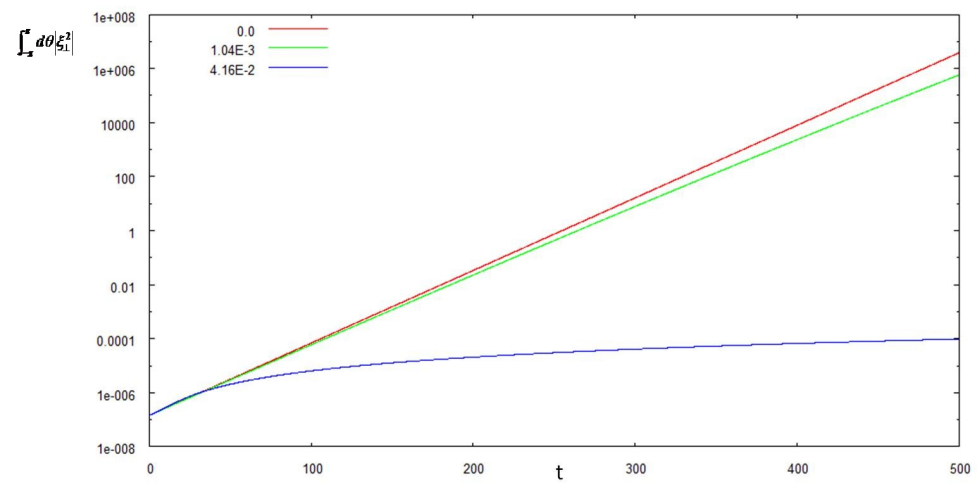


図 8 垂直方向変位ノルムの時間変化

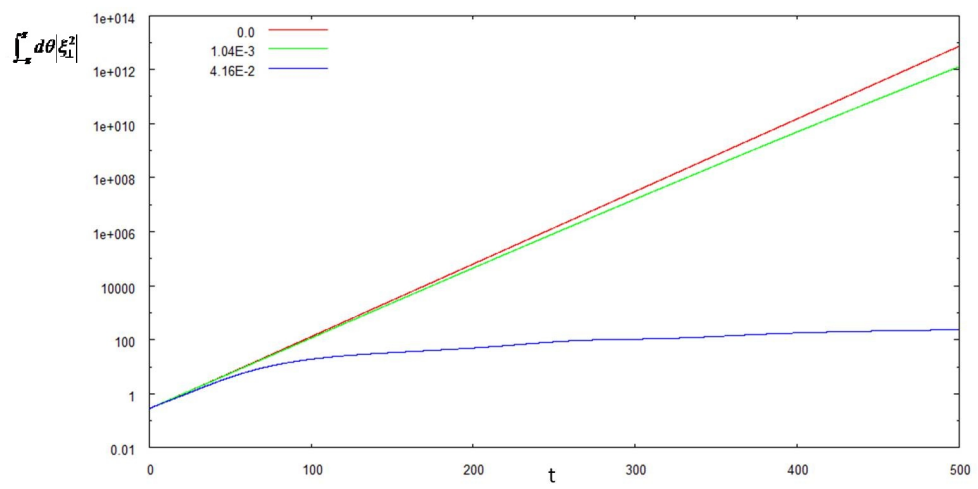


図 9 水平方向変位ノルムの時間変化

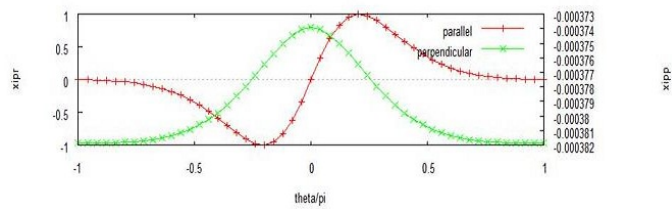


図 10 $\Omega' = 0.0 / t=0$

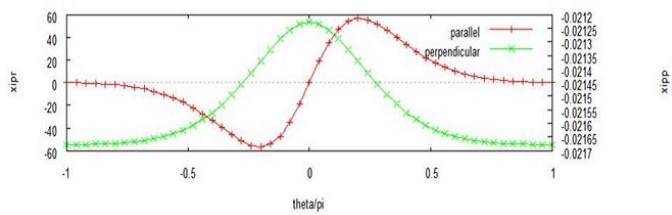


図 11 $\Omega' = 0.0 / t=150$

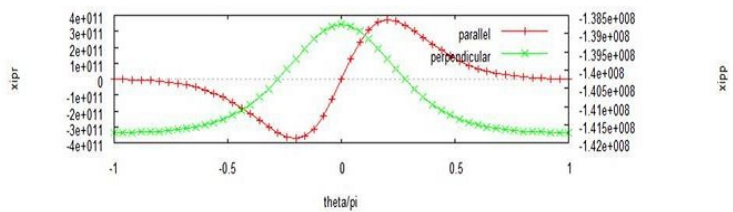


図 12 $\Omega' = 0.0 / t=900$

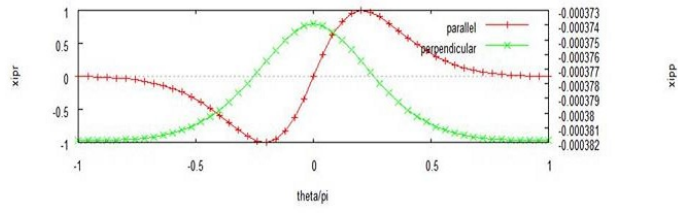


图 13 $\Omega' = 4.16 \times 10^{-2} / t=0$

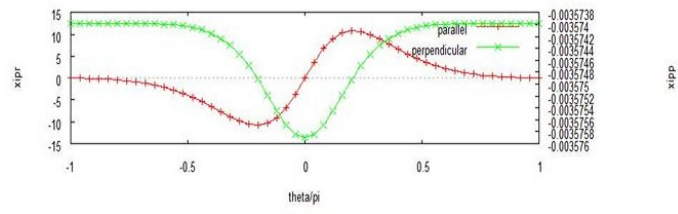


图 14 $\Omega' = 4.16 \times 10^{-2} / t=150$

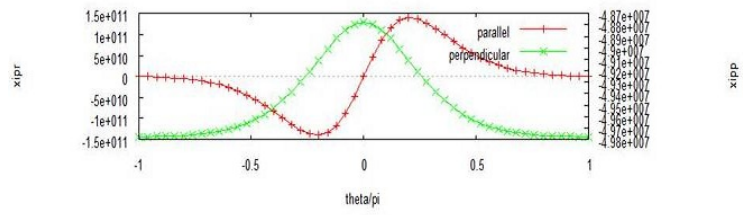


图 15 $\Omega' = 4.16 \times 10^{-2} / t=900$

4.4 平衡流なしモデルを用いた安定化効果検証

Ω' が十分に小さいときは、波数ベクトル変化が変位 ξ の変化に比べて非常に小さい。このことから、各瞬間において、変位 ξ はほぼ一定の $\tilde{k}_r = k_r + \Omega' t$ に対して固有モード的な時間発展をしていると予想される。つまり、流れ無しのバルーニング方程式において、 t に対応する \tilde{k}_r と同じ値の径方向波数 k_r を与えて固有値問題を解いた成長率と関係付けられると考えられる。

図 16 では、固有値解析から得た最大成長率と、初期値解析から得られた各瞬間における瞬間成長率を比較している。横軸は \tilde{k}_r である。これらの成長率はほぼ一致しており、流れシア Ω' が十分に小さいときには、シア流無しの固有値解析で k_r を変化させた計算結果から、シア流があるときの振舞を予測できることが分かる。

一方図 17 は、波数ベクトル変化の時間スケールが、流れがないとした問題における変位 ξ の成長時間よりも小さい場合を示している。この条件においては、変位の時間変化は固有モード的にならないと予想しているが、 r 方向波数が小さい領域を除き、平衡流なし固有値解析の結果と一致していることがわかる。時間が小さい領域で、流れありの場合の瞬間成長率が流れ無しの固有値解析の結果と一致しないのは、平衡流の大きさが大きくなることで流れありの場合の固有モードが変化し、初期値で与える流れ無しの場合の固有モードと一致しなくなったことによるものと考えられる。

以上の結果には、波数ベクトル変化による安定化効果以外にも平衡流自体の効果や平衡流シア自体の効果が含まれていると考えられ、次章ではこの分析を

中心に行っていく。

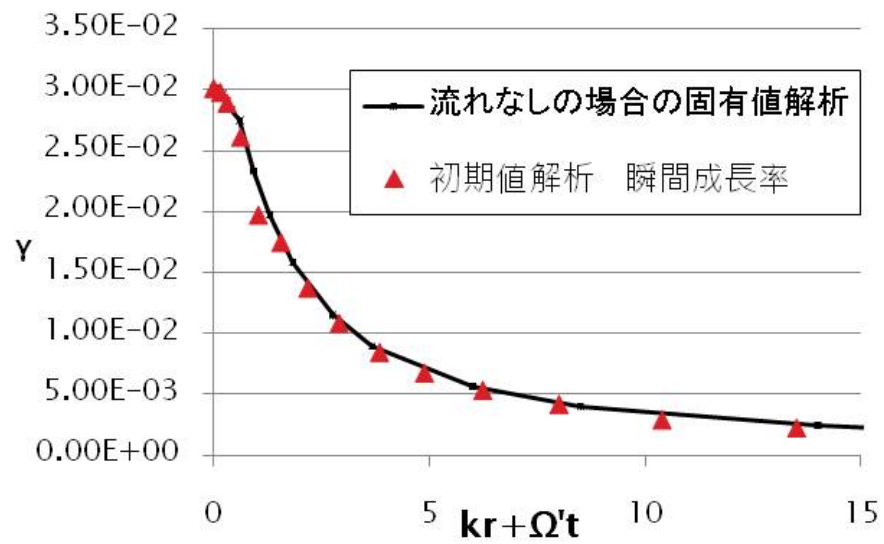


図 16 成長率の固有値解析との比較 $\Omega' = 1.04 \times 10^{-3}$

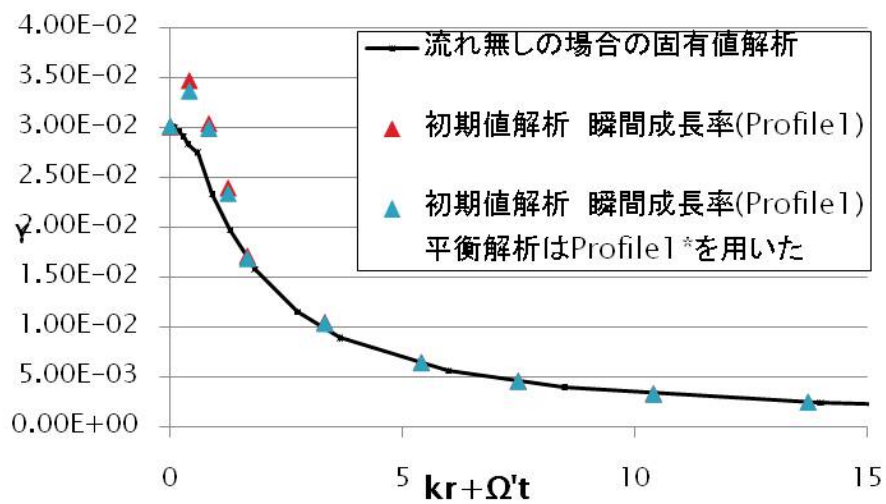


図 17 成長率の固有値解析との比較 $\Omega' = 4.16 \times 10^{-2}$

4.5 波数ベクトル変化による安定化効果の物理的意味

本節では、ここまで述べてきた波数ベクトル変化が、物理的にどのような意味を持つのか考察する。まず、波数ベクトルは ζ 方向と r 方向の波数に分けて考えることができるが、平衡流シアによって変化するのは r 方向波数である。なお本研究では、 $t = 0$ において r 方向波数が 0 としている。また、流れを含む MHD モデルを初期値問題として解く場合は、 $k_r = 0$ としている。

図 18 では、トーラスプラズマの $t = 0$ 時点での波を示しており、波数ベクトルは ζ 方向にのみ存在する。図 19 はポロイダル断面であるが、これを上方から見たときの波の状態について、図 20 で表す。図中で、右に位置する図ほど時間が経過している。このとき、平衡流が r 座標により異なっているため、シアを持つ。このことによって r 方向波数が増加し、波が時間とともに引き延ばされる。つまり、圧力勾配方向に波が増えることが、安定性が現れることにつながると言える。次節では、圧力勾配方向の波増加と交換型不安定性の安定化の関係について考察する。なお、図 20 でも概略的に示しているが、 ζ 方向には波数は増加しない。

平衡流の大きさが十分小さいとき、以上の要因によって閉じ込めが安定化される。

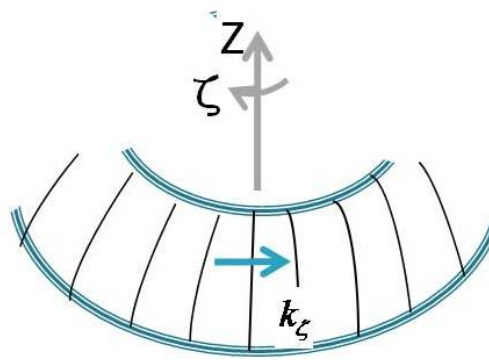


図 18 z 方向波数概略図

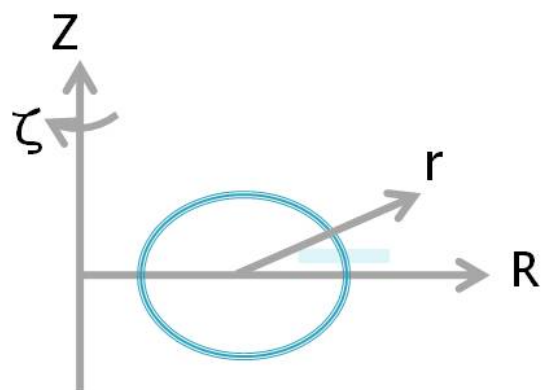


図 19 ポロイダル断面

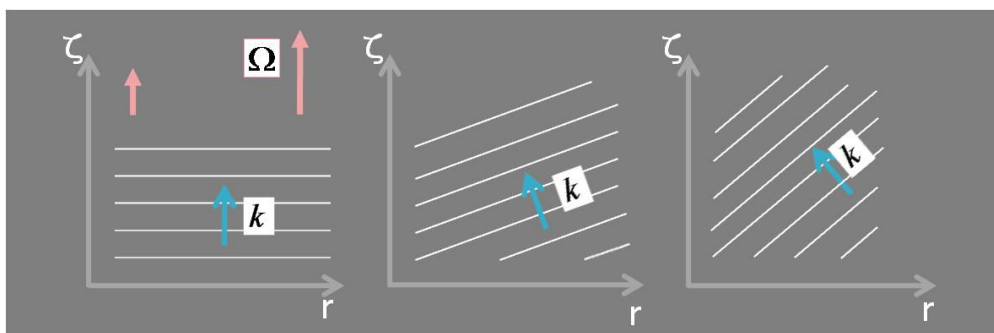


図 20 波数変化概略図

4.6 中性流体の交換型不安定性との関係

前節の圧力方向波数ベクトル増加による安定化効果は、中性流体における交換型不安定性とも関連付けられる。本節では、中性流体における交換型不安定性について述べ、その重力方向の波数変化と磁気圏型プラズマ閉じ込めにおける圧力方向の波数変化が、安定性にどのような影響を与えるか考察する。

まず図 21 で表される座標系を設定し、中性流体および z 軸負方向の重力が存在するとする。このとき非圧縮の中性流体は、次に示す運動の方程式と連続の式で表される。

$$\rho_0(dv_1/dt) = -\nabla p_1 + \rho_1 g, \quad (52)$$

$$\nabla \cdot v_1 = 0. \quad (53)$$

このとき、平衡状態を

$$v_0 = 0, \quad (54)$$

$$0 = -\nabla p_0 + \rho_0 g \quad (55)$$

とする。解を

$$\rho_1, v_1, p_1 \propto e^{i(k_x x + k_z z - \omega t)} \quad (56)$$

とおいてこれを解くと、

$$\omega^2 = -\frac{1}{1 + (k_z/k_x)^2} \frac{\rho'_0 g}{\rho_0} \quad (57)$$

となる。このとき成長率 γ を考えると、 γ は

$$\gamma \propto \frac{1}{\sqrt{1 + (k_z/k_x)^2}} \quad (58)$$

のように変化する。これは重力方向の波数 k_z と、重力が存在しない方向の波数 k_x の比の関数となっているが、磁気圏型磁場配位における圧力勾配 (重力) 方向波数 k_r と圧力勾配が存在しない方向 k_ζ とも関連付けて考えることができる。すなわち図 22 に示した k_z/k_x による成長率変化は、圧力勾配 (重力) 方向に波数が増加したとき、安定化効果が表れるということが中性流体における交換型不安定性からも確認できた。

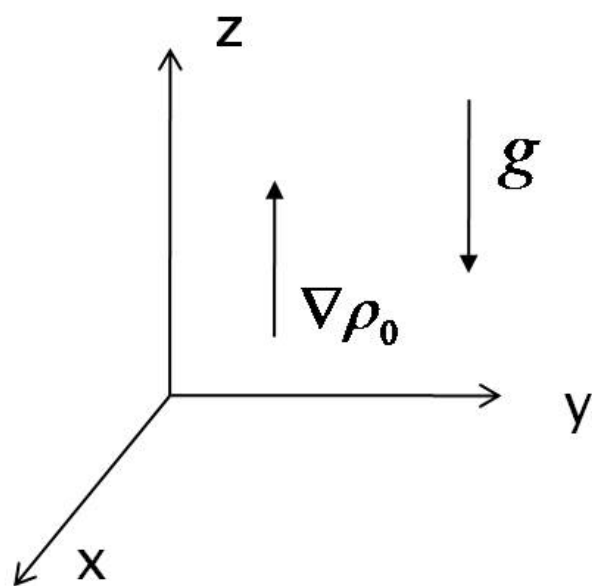


图 21 交換型不安定性座標系

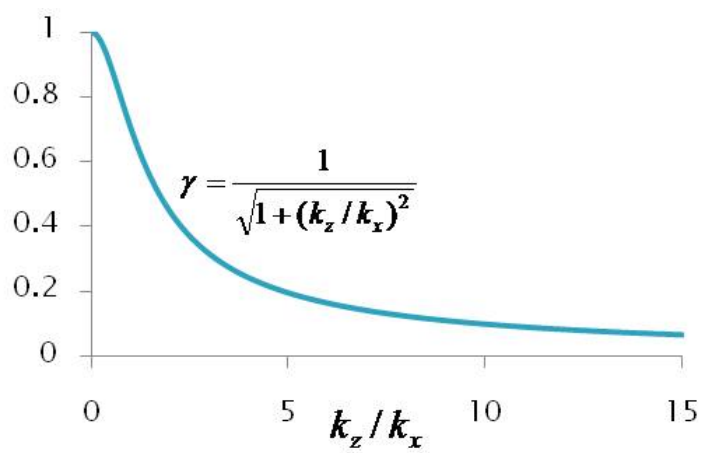


图 22 成長率变化

4.7 シア流による波数ベクトルの時間変化以外の効果

平衡流が大きい場合でも、 r 方向波数が小さい領域をのぞいて、固有値解析結果とほぼ一致する傾向が得られることを前章で確認した。ただしこれは、平衡流が十分に大きく、波数ベクトル変化の時間スケールが変位 xi の成長時間より小さい領域での安定性解析結果であり、一見固有値解析と関連付けられるように見えても、平衡流が小さい場合とは違った安定化メカニズムが働いていると十分考えることができる。このことを検証するため、 Ω および Ω' を与えるマッハ数プロファイルを変更し、方程式係数中に現れる Ω の効果と、波数ベクトル中を除く、方程式係数中に現れる Ω' の効果の分離を行うことで、平衡流および平衡流シア自体の効果を抜き出すことにする。用いたマッハ数プロファイルは図 23 であり、従来用いてきた **Profile1** と、計算磁気面において **Profile1** から平衡流の効果を除き、平衡流シアのみ残した **Profile2**、平衡流シアを取り除き平衡流のみ残した **Profile3** を設定した。

図 24 と図 25 は ξ ノルムの時間発展である。平衡流が小さい領域では各プロファイル条件で行った安定性解析の結果がほぼ一致している。平衡位置からの変位の変化が固有モード的であると考えられる平衡流が十分小さい場合には、波数ベクトルの時間変化を除く平衡流シアおよび平衡流の効果は、ほぼ現れていないことがわかる。平衡流が大きくなったとき、**Profile3** を用いた解析結果では、時間 t が大きくなった場合、元の分布 (**Profile1**) の場合よりノルムの時間変化が大きくなっている。**Profile2** を用いた解析結果では、元の分布の場合よりノルムの時間変化が小さくなる。これは、平衡流が大きくなった時、波数ベクトル

ル変化による安定化効果に加えて、方程式係数中に現れる Ω による不安定化効果と波数ベクトル中を除く、方程式係数中に現れる Ω' による安定化効果が現れることを示している。

図 26 と図 27 は半径方向波数に対する瞬間成長率である。図 26 は平衡流が十分小さい場合の結果、図 27 は平衡流が大きい場合の結果である。なお Profile3 では $\Omega' = 0$ であるために、半径方向波数変化が存在せず、瞬間成長率の図中ではその結果を示していない。ここからも、平衡流が大きくなった時、波数ベクトル変化による安定化効果に加えて、 Ω による不安定化効果と Ω' による安定化効果が現れることが分かる。ただし時間の経過で、その効果は小さくなることが見て取れる。

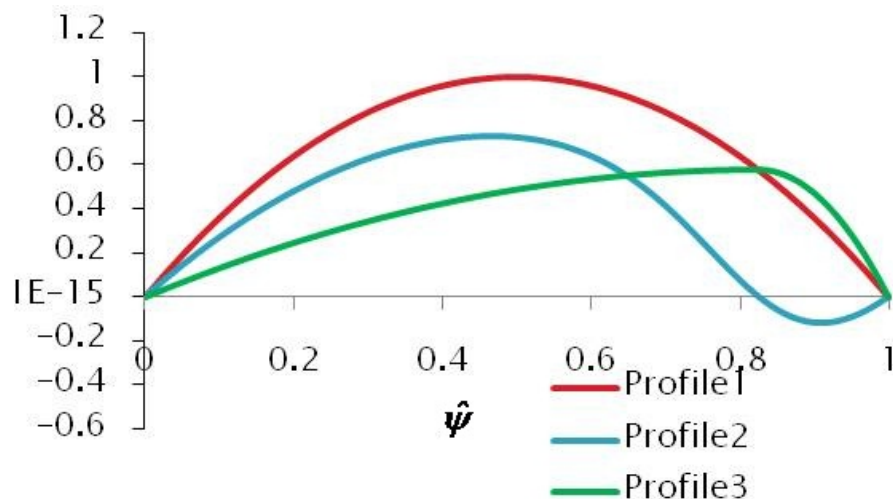


図 23 マッハ数プロファイル

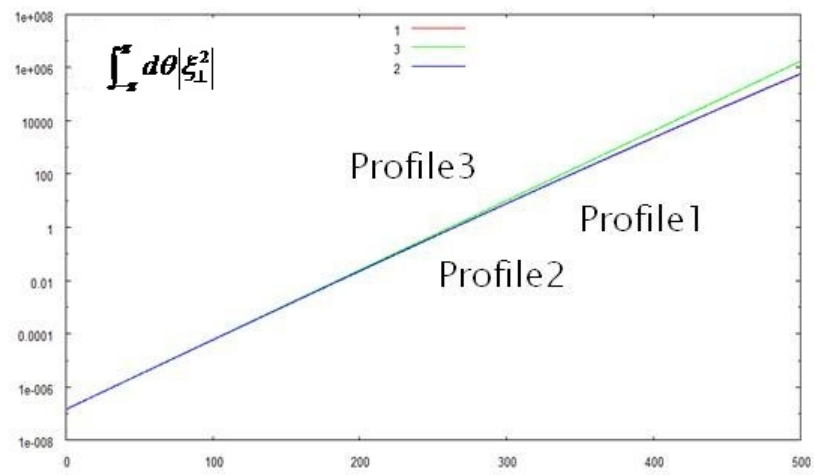


図 24 時間発展（小さい平衡流）

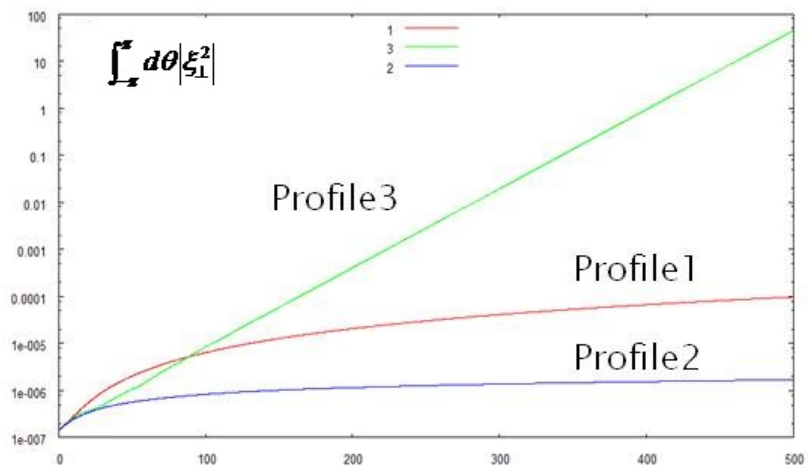


図 25 時間発展（大きい平衡流）

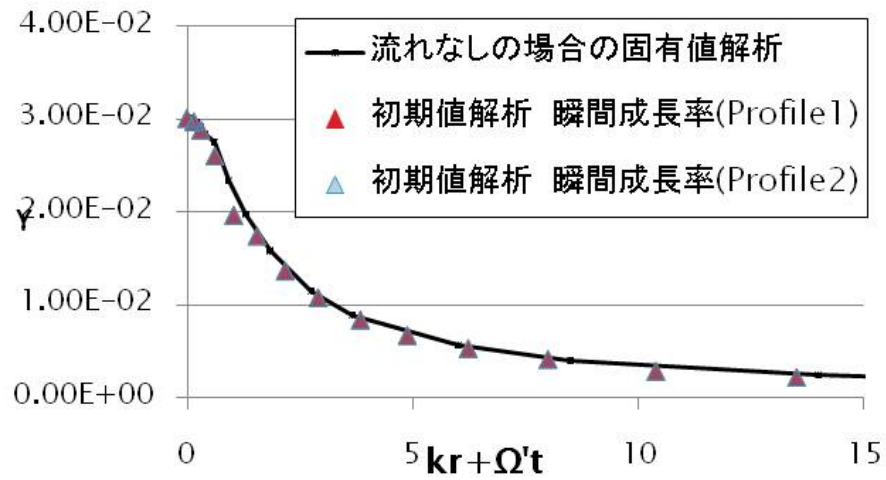


図 26 瞬間成長率（小さい平衡流）

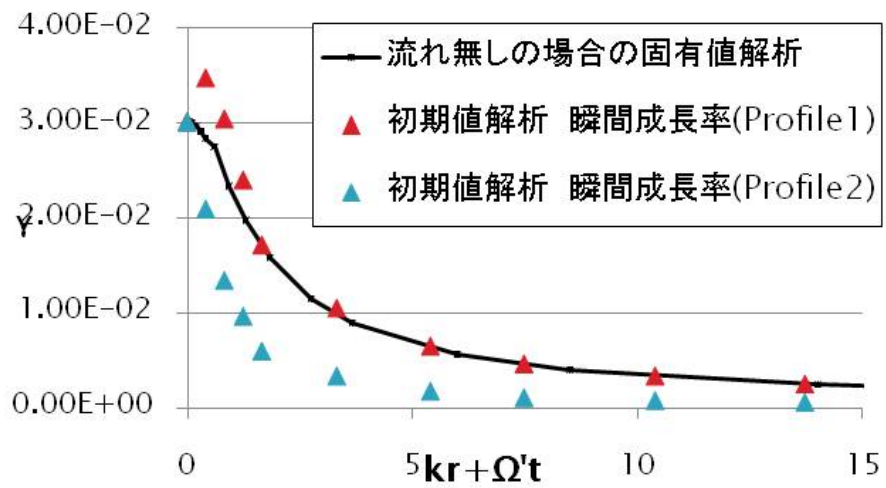


図 27 瞬間成長率（大きい平衡流）

第 5 章 モデル化による安定化効果および不安定化効果の抽出

前章では、波数ベクトル変化の時間スケールが成長時間に比べ同等以下のとき、波数ベクトル変化による安定化効果に加えて、平衡流の不安定化効果と平衡流シアの安定化効果が現れることを確認した。本章では、 Ω' による安定化効果の物理的な意味を、バルーニング方程式のモデル化により考察していくことにする。

なおこのとき、数値解析では、右辺成長率に中性流体での交換型不安定性で求めた波数変化に対する成長率変化の値を用いる。与える成長率は

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{1 + (at)^2}} \quad (59)$$

である。

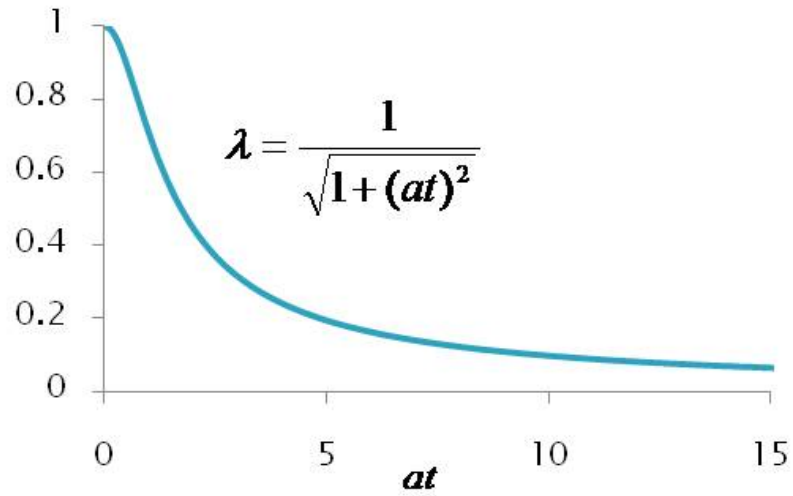


図 28 右辺成長率

5.1 平衡流シア効果

前節で導出したモデル方程式の解析を行う。バルーニング方程式中での Ω' に相当する a 項の効果について評価する。用いる手法としては、 Ω' に相当する a 項を取り除いた方程式と比較することで、平衡流シアが安定性に与える影響を明らかにする。右辺に含まれる成長率 λ には、前節で示した中性流体における交換型不安定性の成長率を与える。

モデル方程式は、

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + \frac{2a^2 t}{1+(at)^2} \frac{dy(t)}{dt} = \lambda^2(at)y(t). \quad (60)$$

またモデル方程式から、 Ω' に相当する a 項を取り除いた方程式は、

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} = \lambda^2(at)y(t) \quad (61)$$

である

図 29、および図 30 が解析結果である。図 29 では Ω' に相当する a 項が小さい条件で計算を行い、一方で図 30 は a 項が大きい条件を用いた。

図中で、赤ラインがモデルの解析結果であり、青ラインが Ω' に相当する a 項を取り除いた方程式の解析結果である。最大成長率が 1 に対し、 a 項が小さい条件では $a = 0.1$ を与え、 a 項が大きい条件では $a = 1$ を与えた。大きい条件では安定化効果が現れており、このことにより、平衡流シアによる波数変化の時間スケールが成長時間と比べて同等以下のときのバルーニング方程式の解析結果を説明することができる。

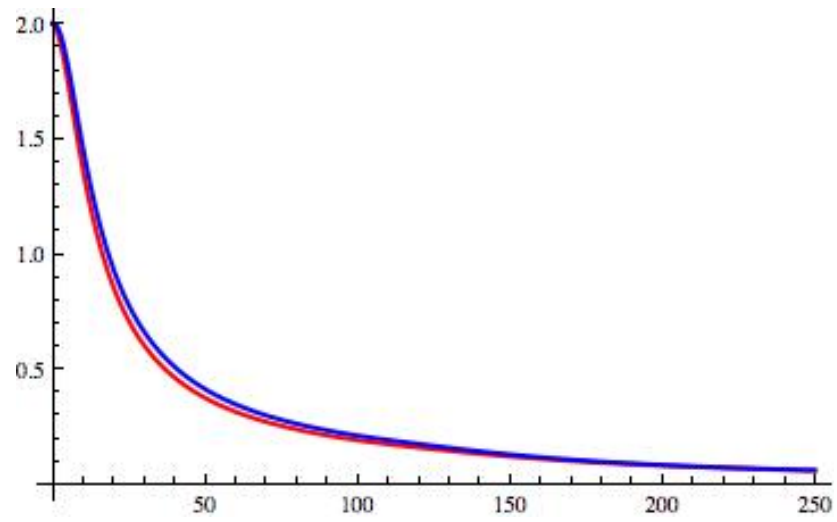


図 29 瞬間成長率 $a = 0.1$

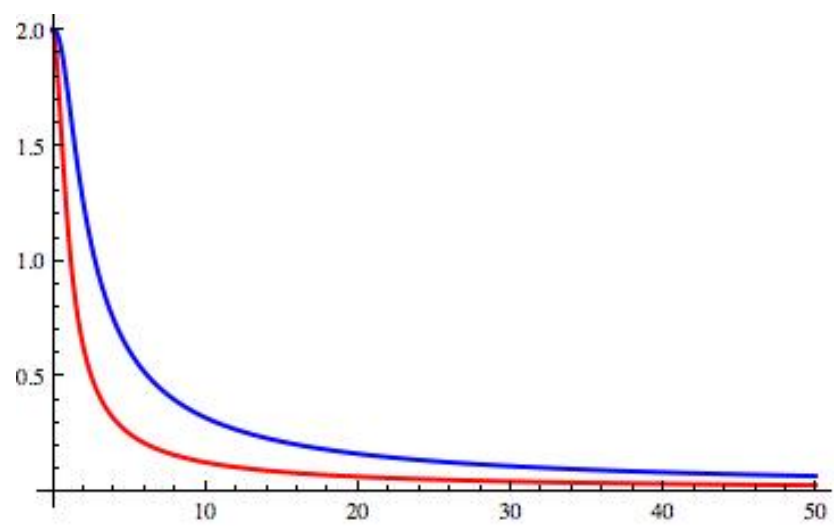


図 30 瞬間成長率 $a = 1.0$

5.2 平衡流シアによる安定化効果の物理的意味

ここでは、平衡流シアによる安定化効果が、物理的にどのような意味を持つのか考察する。 Ω' に相当する a 項を含むモデル方程式

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + \frac{2a^2 t}{1 + (at)^2} \frac{dy(t)}{dt} = \lambda^2(at)y(t) \quad (62)$$

は常微分方程式となっており、図 31 に示すようなばねにつながれた重りの単振動を表すとも考えることができる。成長率変化 λ は、ばね定数に相当する

Ω' が十分小さい場合、右辺に与えた波数ベクトル変化効果を含む成長率のみによって瞬間成長率が変化する。これは、ばね定数が時間的に変化するることによる。 Ω' に相当する a が大きい場合には、摩擦項

$$\frac{2a^2 t}{1 + (at)^2} \quad (63)$$

に相当する安定化効果が働き、図 30 の結果のように成長率が抑制される。ただし、摩擦項の時間変化をみると図 32 のようになり、効果は時間の経過と共に小さくなる。この傾向はバレーニグ方程式の数値解析結果とも一致していることが確認できる。

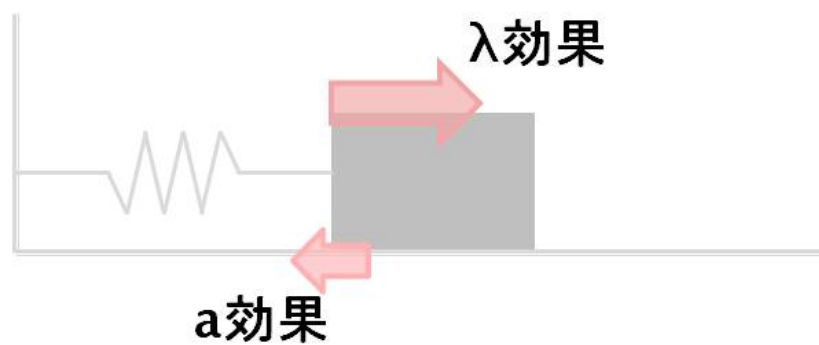


図 31 摩擦を含んだ単振動

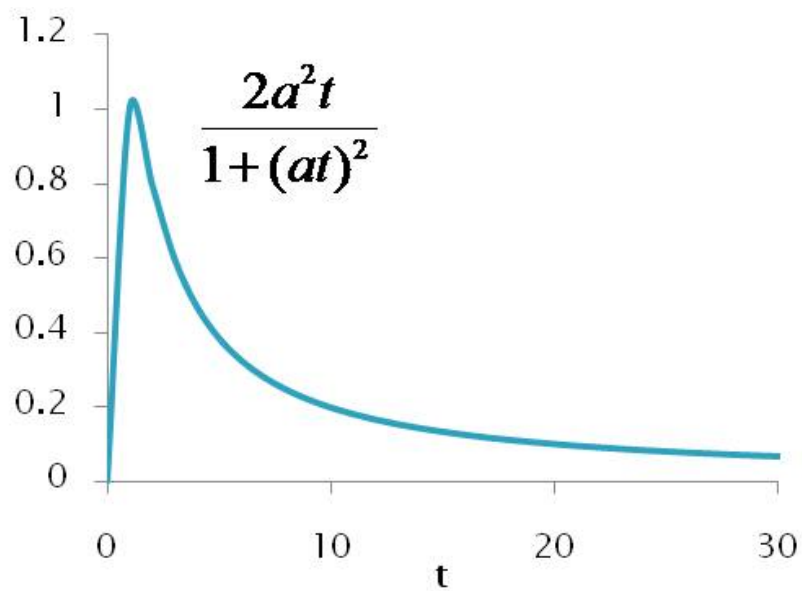


図 32 摩擦効果の時間変化

第 6 章 結論

磁気圏型磁場配位におけるトロイダル方向の平衡流を考慮したプラズマ閉じ込めの安定性に関して、線形化された理想 MHD 方程式により解析を行った。本研究の目的である、

- ・シアを持ったトロイダル方向のプラズマ平衡流が安定性に与える影響
- ・プラズマ平衡流が安定性に与える影響のメカニズム

の 2 点を明らかにすることに対し、第 3 章において、具体的な検証対象を以下の項目 1 および 2 として示した。第 4 章および第 5 章で得られた結果を基に、それぞれの項目について結論を述べることとする。

1. MHD 平衡に対する流れの効果

2. バルーン方程式中の流れの効果

- (1) 波数ベクトル変化
- (2) 方程式係数中に現れる Ω の効果
- (3) 波数ベクトル中を除く、方程式係数中に現れる Ω' の効果

まず、MHD 平衡に対する流れの効果を検証した。本研究で用いたマッハ数領域において、平衡解析で平衡流の大きさを変え、各々の平衡状態について同条件で安定性解析を行ったが、結果に大きな違いが表れないことを示した。このことから、本研究で用いた平衡流条件においては、MHD 平衡に対する流れの効果

は存在しないと結論付ける。

次に、バルーニング方程式中の流れの効果についてまとめることとする。ここでは、シアを持った平衡流がトロイダル方向に存在する場合、ポロイダル断面の半径方向波数が増加することで、閉じ込めが安定化されることを明らかにした。また、この圧力勾配方向の波数増加による安定化効果は、中性流体における交換型不安定性と類似している。ただし、磁気圏型磁場配位における閉じ込めは、トカマク型配位における平衡流による安定化効果のような、安定化フェーズと成長フェーズの繰り返し出現とは異なる安定化を実現している。

まず、波数ベクトルの時間変化スケールが、流れがないとした場合の成長時間と比べ大きい場合、安定化効果は波数ベクトル変化による波の引き延ばし効果によって説明できる。

一方、波数ベクトルの変化時間スケールが、流れがないとした場合の変位 ξ の成長時間と比べ小さい場合、波数ベクトル変化による安定化効果に加えて、方程式係数中に現れる Ω の効果と、波数ベクトル中を除く、方程式係数中に現れる Ω' の効果が現れることを示した。それぞれの効果を抜き出すため、マッハ数分布を変えて解析を行った結果から、平衡流シアが安定化効果を、平衡流が不安定化効果をもつことを明らかにした。

さらに第 5 章では、平衡流シアの効果についてモデル化を行うことで、波数ベクトル中を除く、方程式係数中に現れる Ω' の効果は単振動の摩擦効果として説明できることを明らかにした。

付録 1

付録 1 では、本研究において平衡状態を求めるために用いた、トロイダル流を含む Grad-Shafranov 方程式 [15] による数値解析手法について記述する。

Grad-Shafranov 方程式

図 33 に示すような、軸対称な磁場配位を設定する。座標系は、 (R, ϕ, Z) を用いて表される円柱座標系である。このとき、磁場を

$$\mathbf{B} = I\nabla\phi + \nabla\psi \times \nabla\phi \quad (64)$$

とすると、電流密度は

$$\mu_0 \mathbf{J} = -(\Delta^* \psi) \nabla\phi + \nabla I(\psi) \times \nabla\phi \quad (65)$$

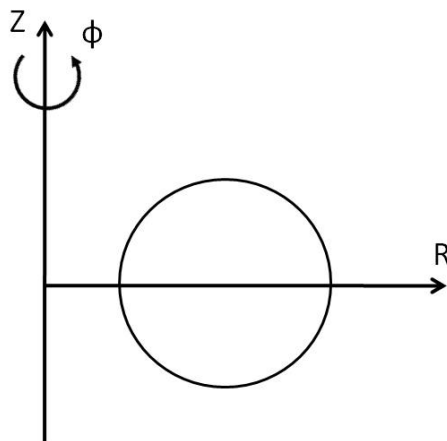


図 33 軸対象配位と座標系

となる。

次に、本研究ではトロイダル方向のプラズマ回転を考慮しているため、トロイダル回転速度 \mathbf{v} について考える。トロイダル回転は

$$\mathbf{v} = R\Omega\hat{\phi} \quad (66)$$

である。なおハット付き文字は、その方向の単位ベクトルを表す。このとき、

$$\rho\mathbf{v} \cdot \nabla\mathbf{v} = -\rho R\Omega^2\hat{R} \quad (67)$$

と計算できる。

一方温度については、同一磁力線上で一定であると仮定し、 $T = T(\psi)$ とする。

このとき、圧力は温度 $T(\psi)$ によって表され、

$$p = \rho T(\psi)/m_i \quad (68)$$

より、

$$\nabla p = \frac{1}{m_i} \left[\rho T'(\psi) \nabla\psi + T \left(\frac{\partial\rho}{\partial\psi} \Big|_R \nabla\psi + \frac{\partial\rho}{\partial R} \Big|_\psi \hat{R} \right) \right] \quad (69)$$

である。

以上を MHD 方程式に代入し、 \hat{R} 成分と $\nabla\psi$ 成分について考える。 \hat{R} 成分は、

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial\rho}{\partial R} \Big|_\psi = \frac{m_i R \Omega^2}{T} \quad (70)$$

から、

$$\rho = \bar{\rho}(\psi) e^{\frac{m_i(R^2 - R_0^2)\Omega^2}{2T}}. \quad (71)$$

さらに、

$$p = \bar{p}(\psi) e^{\frac{m_i(R^2 - R_0^2)\Omega^2}{2T}}. \quad (72)$$

ただし、 R_0 は定数、 $\bar{\rho}$ と \bar{p} は密度分布と圧力分布である。さらに $\nabla\psi$ 成分を考えると、以下の Grad-Shafranov 方程式が得られる:

$$\Delta^*\psi = -\mu_0 R J_t = -\mu_0 R^2 \left. \frac{\partial p}{\partial \psi} \right|_R - I \frac{dI}{d\psi}. \quad (73)$$

ただし J_t はトロイダル方向の電流、 μ_0 は真空の透磁率、 p はプラズマ圧力。ただし、今はポロイダル磁場のみの配位を想定しているので、ポロイダル方向の電流 I は考えない。Grad-Shafranov 演算子 Δ^* は、

$$\Delta^* = R^2 \nabla \cdot \left(\frac{1}{R^2} \nabla \right) = \frac{\partial^2}{\partial R^2} - \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} + \frac{\partial^2}{\partial Z^2}. \quad (74)$$

平衡解析では、以上に示した Grad-Shafranov 方程式を自由境界条件の下で解いている。

方程式の規格化

ここでは方程式の規格化を行う。規格化のため、典型的スケールとして圧力を p_0 、磁場を B_0 、長さを L 、トロイダル方向の電流密度を J_0 とする。このとき Grad-Shafranov 方程式は、ハット付きを規格化された量として

$$\hat{\Delta}^*\hat{\psi} = -\hat{R}\hat{J}_t = -\frac{\beta_0}{2}\hat{R}^2 \left. \frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{\psi}} \right|_{\hat{R}} - \hat{I} \frac{d\hat{I}}{d\hat{\psi}} \quad (75)$$

となる。

圧力に関して、最大値を 1 とした圧力分布を $\bar{p}(\psi)$ として

$$\hat{p}(\psi) = \bar{p}(\psi) e^{\bar{M}^2(\psi) \left(\frac{R^2}{R_0^2} - 1 \right)} \quad (76)$$

で与えている。

Mach 数は

$$\bar{M}^2(\psi) = \frac{m_i R_0^2 \Omega^2(\psi)}{2T_0} \quad (77)$$

であり、数値計算を行うために再定義を行っている。最大値を 1 としたマッハ数分布を $\hat{M}(\psi)$ 、さらに M_0 をパラメータとして

$$\bar{M}(\psi) = M_0 \hat{M}(\psi) \quad (78)$$

を用いる。

付録 2

本付録では、平衡流シア効果および平衡流効果のモデル化を行うこととする。手法としては、まず平衡流シアおよび平衡流効果を除いたバルーニング方程式の、代表値の適用やポロイダル方向依存性を除くことでモデル化を行う。その後、バルーニング方程式中の平衡流項および平衡流シア項を導入する。

まず、モデル方程式係数の簡単化のため、バルーニング方程式の平行方向成分と垂直方向成分の方程式を長さの次元で記述する。 ξ について

$$X_{\perp} \equiv \frac{|\hat{\mathbf{k}}|}{B} \xi_{\perp}, \quad (79)$$

$$X_{\parallel} \equiv B \xi_{\parallel} \quad (80)$$

という定義を行う。この X_{\perp} と X_{\parallel} により、

$$\frac{\partial \xi_{\parallel}}{\partial t} = \frac{1}{B} \frac{\partial X_{\parallel}}{\partial t}, \quad (81)$$

$$\frac{\partial^2 \xi_{\parallel}}{\partial t^2} = \frac{1}{B} \frac{\partial^2 X_{\parallel}}{\partial t^2}, \quad (82)$$

$$\frac{\partial \xi_{\parallel}}{\partial \theta} = \frac{1}{B} \frac{\partial X_{\parallel}}{\partial \theta} - \frac{\frac{\partial B}{\partial \theta}}{B^2} X_{\parallel}, \quad (83)$$

$$\frac{\partial \xi_{\perp}}{\partial t} = \frac{B}{|\hat{\mathbf{k}}|} \frac{\partial X_{\perp}}{\partial t} - \frac{B \frac{\partial |\hat{\mathbf{k}}|}{\partial t}}{|\hat{\mathbf{k}}|^2} X_{\perp}, \quad (84)$$

$$\frac{\partial^2 \xi_{\perp}}{\partial t^2} = \frac{B}{|\hat{\mathbf{k}}|} \frac{\partial^2 X_{\perp}}{\partial t^2} - \frac{2B \frac{\partial |\hat{\mathbf{k}}|}{\partial t}}{|\hat{\mathbf{k}}|^2} \frac{\partial X_{\perp}}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{B \frac{\partial |\hat{\mathbf{k}}|}{\partial t}}{|\hat{\mathbf{k}}|^2} X_{\perp}, \quad (85)$$

$$\frac{\partial \xi_{\perp}}{\partial \theta} = \frac{B}{|\hat{\mathbf{k}}|} \frac{\partial X_{\perp}}{\partial \theta} - \frac{B \frac{\partial |\hat{\mathbf{k}}|}{\partial \theta}}{|\hat{\mathbf{k}}|^2} X_{\perp} \quad (86)$$

を用いると、 $\Omega = \Omega' = 0$ とした方程式は次のように再記述できる。

$\Omega = \Omega' = 0$ とした平行方向成分の方程式:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 X_{\parallel}}{\partial t^2} = & \frac{\beta_0}{2\rho B^2} \left(\mathbf{B} \cdot \nabla \frac{\gamma p B^2}{B^2 + \frac{\beta_0}{2} \gamma p} \mathbf{B} \cdot \nabla \right) X_{\parallel} \\ & - \frac{\beta_0}{\rho B^2 (B^2 + \frac{\beta_0}{2} \gamma p)} (\mathbf{B} \times \hat{\mathbf{k}})(\gamma p \kappa) \left(\mathbf{B} \cdot \nabla \frac{B^2}{|\hat{\mathbf{k}}|} - B^{\theta} \frac{B^2 \frac{\partial |\hat{\mathbf{k}}|}{\partial \theta}}{|\hat{\mathbf{k}}|^2} \right) X_{\perp} \quad (87) \\ & - \frac{\beta_0}{\rho B^2 (B^2 + \frac{\beta_0}{2} \gamma p)} (\mathbf{B} \times \hat{\mathbf{k}})(\gamma p \kappa) B^{\theta} \frac{B^2}{|\hat{\mathbf{k}}|} \frac{\partial X_{\perp}}{\partial \theta}. \end{aligned}$$

$\Omega = \Omega' = 0$ とした垂直方向成分の方程式:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 X_{\perp}}{\partial t^2} = & \left(\frac{|\hat{\mathbf{k}}|}{\rho} (\mathbf{B} \cdot \nabla)^2 + \frac{\beta_0}{\rho |\hat{\mathbf{k}}|} \left(\frac{2}{B^2 + \frac{\beta_0}{2} \gamma p} (-\gamma p (\mathbf{B} \times \hat{\mathbf{k}} \cdot \kappa)^2) + \frac{1}{\psi'} \left(\frac{\partial p}{\partial r} \right)_R \mathbf{B} \times \hat{\mathbf{k}} \cdot \kappa \right) \right) X_{\perp} \\ & - \frac{\beta_0}{\rho |\hat{\mathbf{k}}|} \frac{B^2}{B^2 + \frac{\beta_0}{2} \gamma p} (\mathbf{B} \times \hat{\mathbf{k}})(\gamma p \kappa) B^{\theta} \frac{|\hat{\mathbf{k}}| \frac{\partial B}{\partial \theta}}{B^3} X_{\parallel} \\ & + \frac{\beta_0}{\rho |\hat{\mathbf{k}}|} \frac{B^2}{B^2 + \frac{\beta_0}{2} \gamma p} (\mathbf{B} \times \hat{\mathbf{k}})(\gamma p \kappa) B^{\theta} \frac{|\hat{\mathbf{k}}|}{B^2} \frac{\partial X_{\parallel}}{\partial \theta}. \quad (88) \end{aligned}$$

さらに以上の方程式を固有値問題として解き、得られた解に対して前節の λ と等しいとすることで、係数中に波数ベクトルの時間変化による安定化効果を導入する。また、 Ω 項および Ω' 項のみを取り出した方程式は、次のように得られる。

Ω および Ω' が入る項のみを取り出した平行方向成分方程式の左辺:

$$\frac{2M_A\Omega(\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{Z}})}{B^2} \frac{B^2}{|\hat{\mathbf{k}}|} \frac{\partial X_{\perp}}{\partial t}. \quad (89)$$

Ω および Ω' が入る項のみを取り出した平行方向成分方程式の右辺:

$$\begin{aligned} & \frac{\beta_0 M^2}{\rho B^2} \left(\mathbf{B} \cdot \nabla \left(\frac{\rho B^2 R \Omega^2}{B^2 + \frac{\beta_0}{2} \gamma p} \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{R}} \right) X_{\parallel} \right. \\ & + \left(\frac{\beta_0}{\rho B^2} (\mathbf{B} \cdot \nabla \frac{1}{B^2 + \frac{\beta_0}{2} \gamma p} (\mathbf{B} \times \hat{\mathbf{k}}) (M^2 \rho R \Omega^2 \hat{\mathbf{R}}) \right. \\ & - 2M^2 \rho \Omega \nabla \Omega \cdot \hat{\mathbf{Z}} + \frac{2M^2 R \rho \Omega^2 (\mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{R}})}{B^2 + \frac{\beta_0}{2} \gamma p} (\mathbf{B} \times \hat{\mathbf{k}} \cdot \boldsymbol{\kappa}) \left. \right) \frac{B^2}{|\hat{\mathbf{k}}|} \\ & + \frac{2M_A\Omega(\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{Z}})}{B^2} \frac{B^2}{|\hat{\mathbf{k}}|^2} \frac{\partial |\hat{\mathbf{k}}|}{\partial t} \\ & - \frac{\beta_0}{\rho B^2} \frac{1}{B^2 + \frac{\beta_0}{2} \gamma p} \mathbf{B} \times \hat{\mathbf{k}} (M^2 \rho R \Omega^2 \hat{\mathbf{R}}) \mathbf{B} \cdot \nabla \frac{B^2}{|\hat{\mathbf{k}}|^2} \frac{\partial |\hat{\mathbf{k}}|}{\partial \theta} \Big) X_{\perp} \\ & + \frac{\beta_0}{\rho B^2} \frac{1}{B^2 + \frac{\beta_0}{2} \gamma p} \mathbf{B} \times \hat{\mathbf{k}} (M^2 \rho R \Omega^2 \hat{\mathbf{R}}) \mathbf{B} \cdot \nabla \frac{B^2}{|\hat{\mathbf{k}}|} \frac{\partial X_{\perp}}{\partial \theta}. \end{aligned} \quad (90)$$

Ω および Ω' が入る項のみを取り出した垂直方向成分方程式の左辺:

$$\left(-\frac{2\frac{\partial|\hat{\mathbf{k}}|}{\partial t}}{|\hat{\mathbf{k}}|} + \frac{2M_A(\hat{\mathbf{k}} \cdot \nabla\Omega)}{|\hat{\mathbf{k}}|^2} \right) \frac{\partial X_{\perp}}{\partial t} + \frac{2M_A\Omega\mathbf{B}^2(\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{Z}})}{|\hat{\mathbf{k}}|^2} \frac{|\hat{\mathbf{k}}|}{\mathbf{B}} \frac{\partial X_{\parallel}}{\partial t}. \quad (91)$$

Ω および Ω' が入る項のみを取り出した垂直方向成分方程式の右辺:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\beta_0}{2|\hat{\mathbf{k}}|^2} \left(\frac{4}{\mathbf{B}^2 + \frac{\beta_0}{2}\gamma p} (2M^2 R\Omega^2 (\mathbf{B} \times \hat{\mathbf{k}} \cdot \boldsymbol{\kappa})(\mathbf{B} \times \hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{R}) \right. \right. \\ & \quad - \rho M^2 \frac{(R\Omega^2)^2}{p\mathbf{B}^2} (\mathbf{B}^2 + \frac{\beta_0}{2}(\gamma - 1)p)(\mathbf{B} \times \hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{R})^2) \\ & \quad + \frac{2}{\psi'\rho} \left(-M^2 \frac{\partial(\rho R\Omega^2)}{\partial r} \right) \Big|_R \mathbf{B} \times \hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{R}} + 2M^2 \rho \Omega \Omega' \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{Z}}) \\ & \quad + |\hat{\mathbf{k}}| \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\frac{\partial|\hat{\mathbf{k}}|}{\partial t}}{|\hat{\mathbf{k}}|^2} \right) + \frac{2M_A(\hat{\mathbf{k}} \cdot \nabla\Omega)}{|\hat{\mathbf{k}}|^2} \frac{\frac{\partial|\hat{\mathbf{k}}|}{\partial t}}{|\hat{\mathbf{k}}|} X_{\perp} \\ & \quad + \left(\frac{2\beta_0 M^2}{|\hat{\mathbf{k}}|} \frac{R\Omega^2 (\mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{R}})}{\mathbf{B}^2 + \frac{\beta_0}{2}\gamma p} (\mathbf{B}^2 \mathbf{B} \times \hat{\mathbf{k}} \cdot \boldsymbol{\kappa}) \frac{|\hat{\mathbf{k}}|}{\mathbf{B}^2} - \frac{\beta_0}{2\rho|\hat{\mathbf{k}}|} \frac{2\mathbf{B}^2}{\mathbf{B}^2 + \frac{\beta_0}{2}\gamma p} (\mathbf{B} \times \hat{\mathbf{k}})(M^2 \rho R\Omega^2 \hat{\mathbf{R}}) \frac{|\hat{\mathbf{k}}| \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \theta}}{\mathbf{B}^3} \right) X_{\parallel} \\ & \quad + \frac{\beta_0}{2\rho|\hat{\mathbf{k}}|} \frac{2\mathbf{B}^2}{\mathbf{B}^2 + \frac{\beta_0}{2}\gamma p} (\mathbf{B} \times \hat{\mathbf{k}})(M^2 \rho R\Omega^2 \hat{\mathbf{R}}) \frac{|\hat{\mathbf{k}}|}{\mathbf{B}^2} \frac{\partial X_{\parallel}}{\partial \theta}. \end{aligned} \quad (92)$$

ここから、ポロイダル方向依存性を

$$R^2|\nabla r|^2 \doteq 1, \quad (93)$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} = i \quad (94)$$

を用いて取り除く。さらに代表値を導入することで

$$|\hat{\mathbf{k}}| \doteq \sqrt{1 + (M_A \Omega')^2 t^2} \quad (95)$$

などとし、 $\Omega = \Omega' = 0$ とした方程式と、 Ω および Ω' が入る項のみを取り出した方程式の簡単化された方程式を導出する。最終的に両者の簡単化された方程式を足し合わせ、以下のモデル方程式を得る。なお、 y_1 が X_{\parallel} を、 y_2 が X_{\perp} を表す。また、 b は Ω 相当項である。

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y_1}{dt^2} + \frac{2M_A a b t}{\sqrt{1 + (M_A a)^2 t^2}} \frac{dy_2}{dt} = \\ ((M_A b)^2 - \beta_0) y_1 + \left(\frac{M_A^2}{\sqrt{1 + (M_A a)^2 t^2}} (3b^2 - 2ab) + \frac{2M_A^3 a^3 b t^2 - (M_A b)^2 (M_A a)^2 t}{(1 + (M_A a)^2 t^2)^{3/2}} \right. \\ \left. - \alpha \beta_0 - i \beta_0 + i \frac{M_A^2 b^2}{\sqrt{1 + (M_A a)^2 t^2}} \right) y_2, \end{aligned} \quad (96)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y_2}{dt^2} + \frac{2(M_A a)^2 t}{1 + (M_A a)^2 t^2} (1 - M_A) \frac{dy_2}{dt} - \frac{2M_A a b t}{\sqrt{1 + (M_A a)^2 t^2}} \frac{dy_1}{dt} = \\ \left(\frac{M_A^2 (-b^4 - b^2)}{1 + (M_A a)^2 t^2} + \lambda^2 - \frac{(\alpha \beta_0 - i \beta_0)(\beta_0 + i \beta_0)}{\lambda^2 - \beta_0^2} \right) y_2 \\ + \left(\frac{2(M_A b)^2}{\sqrt{1 + (M_A a)^2 t^2}} - \beta_0 + i \beta_0 - i \frac{(M_A b)^2}{\sqrt{1 + (M_A a)^2 t^2}} \right) y_1. \end{aligned} \quad (97)$$

参考文献

- [1] S. M. Krimigis *etal.*, Science **206**, 977 (1979).
- [2] L. J. Lanzerotti *etal.*, Science **257**, 1518 (1992).
- [3] Z. Yoshida, Y. Ogawa, J. Morikawa, S. Watanabe, Y. Yano, S. Mizumaki, T. Tosaka, Y. Ohtani, A. Hayakawa and M. Shibui, J. Plasma Fusion Res.**1**, 008 (2006).
- [4] J. Kesner, L. Bromberg, D. T. Garnier, and M. E. Mauel, Fusion Energy **3**,1165 (1999).
- [5] J. Shiraishi, S. Osaki and Z. yoshida, Phys. Plasmas **12**, 092901 (2005).
- [6] M. Furukawa and S. Tokuda, PRL **94**, 175001 (2005).
- [7] M. Furukawa, H. Hayashi, Z. Yoshida, Phys. Plasmas **17** 022503 (2010).
- [8] E. Frieman and M. Rotenberg, Rev. Mod. Phys. **32**, 898 (1960).
- [9] S.P. Hirshman, Curvilinear Coordinates for Magnetic Confinement Geometries, ORNL, W-7405-eng-26 (1982).
- [10] M. N. Rosenbluth and C. L. Longmire, Ann. Phys. **1**, 120(1957).
- [11] Francis F. Chen, Introduction to plasma physics, Plenum Press, New York, 1974.
- [12] 宮本健郎, プラズマ物理・核融合, 東京大学出版会, 2004.
- [13] T.Tatsuno, F.Volponi, and Z.Yoshida, phys. plasmas, **8**, 399(2001).
- [14] Load Kelvin, Philos. Mag., Ser. 5 bf 24,188(1887).

- [15] B.J.Green and H.P. Zehrfeld, Nucl. Fusion **13**, 750(1973).
- [16] J.W. Connor, R.J. Hastie, and J.B. Taylor, Proc. R. Soc. London Ser.A **365**, 1(1979).
- [17] W.A. Cooper, Plasma Phys. Control. Fusion **30**, 1805(1988).
- [18] J.P. Friedberg, Ideal Magnetohydrodynamics, Plenum Press(1987).
- [19] M. Furukawa and S. Tokuda, J. Plasma Fusion Res. Series **6**, 210(2004).

謝辞

本研究を行なうにあたり、多くの方々のお世話になりましたことをここに感謝いたします。

指導教員である古川勝准教授には、お忙しい中、丁寧かつ適切な御指導を頂き大変感謝いたします。修士での研究では、学部での専門や研究と異なる分野であったため、苦勞もし、また先生にご負担もお掛けしましたが、今振り返ると得ることも大きかったと思います。さらに外部での発表機会にも恵まれ、充実した研究生生活を送ることができました。また研究以外でも、セミナーや古川研の集まりなど、古川先生には大変お世話になりました。

吉田善章教授にはセミナー等において、研究に対する指摘や発表の仕方など、適切で親切なご指導を頂きました。要領を得ない発表をしてしまった時などは厳しく指導していただき、自身の研究内容を論理的に、かつ理解しやすく発表することの大切さや、研究に対する姿勢について学ぶことができました。先生方からのご指導で学んだ事柄は、今後の社会人人生においても大切であることばかりで、研究を通して私の未熟な点を指摘していただき、非常に感謝しております。

そして、齋藤さんや河井さん、研究室の先輩方に大変お世話になりました。吉田・古川研究室の先輩である、矢野さん、播磨さん、川面さん、金子さんには研究内容についてだけでなく様々なことについて教わり、また親切にしてくださ

き、とても感謝しております。先輩方の研究に対する厳しく、また積極的な姿勢は、見習うべきところが非常に多く恵まれた環境で研究を行うことができました。

また、同じ学年である小林君、江本君、Vogel 君とは研究について話し合ったり、励ましあったりとお互いに多くのことを学ぶことができたと思います。入学式以来、普段の講義や自身の研究活動に加え、研究室の行事やプライベートな付き合いなど、充実した研究生活を送れたことに感謝します。

さらに秘書の北山さんには、学会発表をはじめとした研究活動に対するサポートに加え、就職活動での相談など、様々なことについてお世話になりました。この場をお借りして、お礼申し上げます。

恵まれた環境の中、この二年間研究生活を送れましたことを深く感謝し、簡単ではございますが、謝辞とさせていただきます。

杉浦 友昭

学会発表

1. 日本物理学会 2010 年秋季大会 口頭発表

「磁気圏型プラズマ閉じ込めにおけるトロイダル平衡流を考慮した MHD 安定性解析」

杉浦 友昭, 古川 勝

2. 20th International Toki Conference ポスター発表

「Ballooning mode stability analysis of a toroidally rotating plasma in magnetospheric configuration」

杉浦 友昭, 古川 勝

3. 平成 22 年度 NIFS 共同研究 研究会「MHD 理論研究の進展と課題」 口頭発表

「磁気圏型プラズマ閉じ込めにおけるトロイダル平衡流を考慮した MHD 安定性解析」

杉浦 友昭, 古川 勝

4. 第 16 回 NEXT(数値トカマク) 研究会 口頭発表

「Analysis of shear flow effects on ballooning stability of a toroidally rotating plasma in magnetospheric configuration」

杉浦 友昭, 古川 勝

5. 日本物理学会第 66 回年次大会 口頭発表

「磁気圏型プラズマのバルーニング安定性に対する平衡流および流れシア効果の分析」

杉浦 友昭, 古川 勝