Ueber die

Darstellbarkeit willkürlicher Functionen durch Reihen die nach den Wurzeln einer transcendenten Gleichung fortschreiten.

von

Dr. Phil. R. Fujisawa.

Neben den trigonometrischen Reihen werden, in der mathematischen Physik, die ihnen naheverwandten, nach den Wurzeln einer gewissen transcendenten Gleichung fortschreitenden Reihen vielfach angewandt; daher wird es wünschenswerth sein, wenigstens für alle Fälle der Natur, d. h., unter beschränkenden, jedoch für die physikalische Anwendung hinreichend allgemeinen Voraussetzungen über die Natur der Function, zu beweisen, dass die Reihe wirklich gegen den Werth der gegebenen Function convergire. Dass der von Sturm und Liouville herrührende, von Heine vervollständigte Beweis unzureichend ist, habe ich schon in einer früheren arbeit discutirt.* Es handelt sich hier darum, die Convergenz jener in Rede stehenden Reihe darzuthun, wie für die trigonometrischen Reihen durch die berühmte Arbeit Dirichlet's geschehen ist.

Die Reihe in ihrer allgemeinsten Form ist wie folgt beschaffen; sie schreitet nach den gegebenen Functionen $\theta\,(x, \lambda)$, welche einen

* Ueber eine in der Wärmeleitungstheorie auftretende, nach den Wurzeln einer transcendenten Gleichung fortschreitende unendliche Reihe, Inaugural-Dissertation, Strassburg 1886.

Parameter λ enthält, für den man alle Wurzeln einer gegebenen transcendenten Gleichung $\phi(\lambda)=0$ zu setzen hat. In dieser Form wird aber der in Rede stehende Beweis wohl schwerlich durchzuführen sein, ohne dass man sehr beschränkende Voraussetzungen über θ und ϕ zu machen genöthigt ist; es empfiehlt sich daher, von vornherein den Beweis an einem bestimmten Beispiele durchzuführen und dadurch den Weg zu zeigen, wie man auch in andern Fällen zu verfahren hat.

Ein so directer Weg, wie der Dirichlet's ist hier der Natur der Sache nach wohl nicht möglich; es lässt sich aber dieser Fall auf einen durch das Theorem Dirichlet's erledigten Fall zurückführen wie ich in meiner eben citirten Arbeit für eine Reihe aus der Wärmeleitungstheorie dargethan habe. Es war die Reihe:

$$u=\frac{1}{r}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\left(\lambda_n \frac{a}{l}\right)^2 t} \sin\left(\lambda_n \frac{r}{l}\right)\frac{\int_0^l \rho f(\rho)\sin\left(\lambda_n \frac{\rho}{l}\right)d\rho}{\int_0^l \left(\sin \lambda_n \frac{\rho}{l}\right)^2 d\rho},$$

wo $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ die, der Grösse nach geordneten positiven Wurzeln der Gleichung

$$\phi(\lambda)=\cos\lambda+(\alpha-1)\sin\lambda=0 \qquad (\alpha>0)$$

bedeuten.

Für die Wärmeleitungsaufgabe genügt es nachzuweisen, dass u mit positiv abnehmendem t gegen $f(r)$ convergirt. Stellt die für $t=0$ formirte Reihe

$$v=\frac{1}{r}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(\lambda_n \frac{r}{l}\right)\frac{\int_0^l \rho f(\rho)\sin\left(\lambda_n \frac{\rho}{l}\right)d\rho}{\int_0^l \left(\sin \lambda_n \frac{\rho}{l}\right)^2 d\rho}$$

$f(r)$ dar, so ist dies nach einem bekannten Satze über Potenzreihen hierfür ausreichend, aber nicht nothwendig. Dieser, wie ich glaube, bisher unbeachtete Umstand spielt eine wesentliche Rolle bei meinem Beweise; die Methode des Beweises selbst lässt sich auch auf die für $t=0$ formirte Reihe v anwenden, wie ich seiner Zeit bemerkt habe. Dies zu zeigen ist der Zweck der vorliegenden Arbeit.

§. 1.

Wir beschäftigen uns mit der Reihe

$$\text{I.} \quad v = \frac{1}{r} \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\lambda_n \frac{r}{l}\right) \frac{\int_0^l \rho f(\rho) \sin\left(\lambda_n \frac{\rho}{l}\right) d\rho}{\int_0^l \left(\sin \lambda_n \frac{\rho}{l}\right)^2 d\rho},$$

worin $\lambda_1, \lambda_2, \cdots$ die der Grösse nach geordneten positiven Wurzeln der Gleichung.

$$\text{II.} \quad \phi(\lambda) = \lambda \cos \lambda + (\alpha - 1) \sin \lambda = 0 \qquad (\alpha > 0)$$

bedeuten. Diese Reihe lässt sich, wenn man die Integration im Nenner ausführt, auch wie folgt schreiben:

$$\text{III.} \quad v = \frac{2}{rl} \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\lambda_n \frac{r}{l}\right) \frac{\int_0^l \rho f(\rho) \sin\left(\lambda_n \frac{\rho}{l}\right) d\rho}{1 - \frac{\sin \lambda_n \cos \lambda_n}{\lambda_n}}.$$

Es soll nachgewiesen werden, dass diese Reihe v, unter Voraussetzung der bekannten Dirichletschen Bedingungen hinsichtlich der Function $f(\rho)$, zur Summe $f(r)$ hat.

Zu dem Zwecke sei angeführt die bekannte Ausdrucksform von λ_n,

$$\lambda_n = \frac{2n-1}{2} \pi \pm \delta_n, \qquad 0 < \delta_n < \frac{\pi}{2}, \qquad (\alpha \gtrless 1).$$

Für $\alpha = 1$ wird

$$\lambda_n = \frac{2n-1}{2} \pi;$$

und wenn wir die Reihe v für den speciellen werth von $\alpha = 1$ mit v' bezeichnen, so lautet dieselbe:

$$v' = \frac{2}{r\,l} \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{2n-1}{2}\,\frac{r}{l}\right) \int_0^l \rho f(\rho) \sin\left(\frac{2n-1}{2}\,\frac{\rho}{l}\right) d\rho.$$

Von dieser Reihe ist bekannt, dass sie sich aus der Entwickelung von $r\,f(r)\cos\frac{\pi r}{2l}$ nach den Sinus der *ganzen* Vielfachen von $\frac{\pi r}{l}$ ergibt, also dass, mit Ausschluss der Grenzen $r = 0$ und $r = l$, zwischen denselben $f(r)$ zur Summe hat.

Es handelt sich darum, zu zeigen dass die beiden Summen v und v' gegen die nämliche Grenze convergiren.

§. 2.

Wofern

$$\phi(\lambda_n) = \lambda_n \cos\lambda_n + (\alpha - 1)\sin\lambda_n = 0$$

ist, haben wir

$$\frac{\sin\left(\lambda_n \frac{r}{l}\right) \cdot \sin\left(\lambda_n \frac{\rho}{l}\right)}{1 - \frac{\sin\lambda_n \cos\lambda_n}{\lambda_n}} = \frac{\lambda_n \cdot \sin\left(\lambda_n \frac{r}{l}\right) \cdot \sin\left(\lambda_n \frac{\rho}{l}\right)}{\sin\lambda_n \cdot \phi'(\lambda_n)},$$

also auch

$$\frac{\sin\left(\lambda_n \frac{r}{l}\right) \cdot \sin\left(\lambda_n \frac{\rho}{l}\right)}{1 - \frac{\sin\lambda_n \cos\lambda_n}{\lambda_n}} = \frac{(\alpha - 1)\sin\left(\lambda_n \frac{r}{l}\right) \cdot \sin\left(\lambda_n \frac{\rho}{l}\right)}{\cos\lambda_n \cdot \phi'(\lambda_n)}.$$

Setzt man

$$w(z) = \frac{(\alpha - 1) \cdot \sin\left(z \frac{r}{l}\right) \cdot \sin\left(z \frac{\rho}{l}\right)}{\cos z \cdot \phi(z)},$$

so stellt w eine einwerthige Function einer complexen Variabele z dar, welche für endliche Werthe von z nur in den Punkten

$$z = \pm \lambda_1, \quad \pm \lambda_2, \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

und

$$z = \pm \frac{\pi}{2}, \quad \pm \frac{3\pi}{2}, \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

unstetig wird. In den beiden Punkten $z = \pm \lambda_n$ hat sie das Residuum

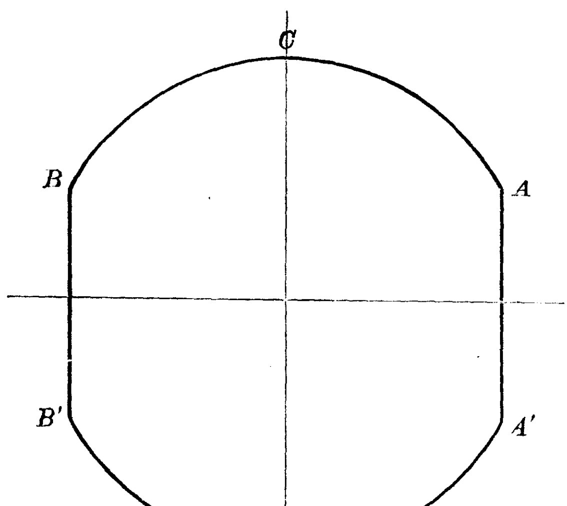
$$R(\pm \lambda_n) = \frac{\sin\left(\lambda_n \frac{r}{l}\right) \cdot \sin\left(\lambda_n \frac{\rho}{l}\right)}{1 - \frac{\sin \lambda_n \cos \lambda_n}{\lambda_n}};$$

und für $z = \pm \frac{2n-1}{2} \pi$ das folgende:

$$R\left(\pm \frac{2n-1}{2} \pi\right) = - \sin\left(\frac{2n-1}{2} \frac{\pi r}{l}\right) \cdot \sin\left(\frac{2n-1}{2} \frac{\pi \rho}{l}\right).$$

Dies vorangeschickt, sei nun in der z-ebene eine Fläche E* vorgelegt, welche wie folgt entsteht: in den Punkten $m\pi$ und $-m\pi$, unter m eine positive ganze Zahl verstanden, errichte man auf der x-axe Perpendikel AA' und BB', wo

$$A = m\pi + i\sqrt{m\pi},$$
$$B = -m\pi + i\sqrt{m\pi},$$
$$A' = m\pi - i\sqrt{w\pi},$$
$$B' = -m\pi - i\sqrt{m\pi};$$



* Diese Fläcke E kommt bei Gelegenheit einer ähnlichen Untersuchung bei Heine vor. Crelle's Journal, Bd. 89.

vom Anfangspunkt 0 aus schlage man mit dem Radius $\sqrt{(m\pi)^2+m\pi}$ Kreisbogen ACB und $A'C'B'$. Diese durch die in sich zurückkehrende Linie $A'ACBB'C'A'$ eingeschlossene Fläche möge E heissen.

Alsdann haben wir nach dem Residuensatze von Cauchy

$$2\left[\sum_{n=1}^{m} R\left(\frac{2n-1}{2}\pi\right)+\sum_{n=1}^{m} R(\lambda_n)\right]=\frac{1}{2\pi i}\cdot\int_{(E)} w(z)\,dz,$$

wo die Integration über $A'ACBB'C'A$ zu erstrecken ist.

Da die Funktion w eine ungerade Function von $z=x+iy$ ist, so ist offenbar

$$\int\Big|_{A'}^{A} w\,dz=\int\Big|_{B}^{B'} w\,dz=Q$$

$$\int\Big|_{A}^{B}{}_{C}\; w\,dz=\int\Big|_{B'}^{A'}{}_{C'}\; w\,dz=P;$$

und wir haben

$$\sum_{n=1}^{m} R\left(\frac{2n-1}{2}\pi\right)+\sum_{n=1}^{m} R(\lambda_n)=\frac{1}{2\pi i}[Q+P].$$

Setzen wir hierin die Werthe von $R\left(\frac{2n-1}{2}\pi\right)$ und $R(\lambda_n)$ wieder ein, so ergibt sich

$$\sum_{n=1}^{m}\frac{\sin\left(\lambda_n\frac{r}{l}\right)\cdot\sin\left(\lambda_n\frac{\rho}{l}\right)}{1-\frac{\sin\lambda_n\cos\lambda_n}{\lambda_n}}-\sum_{n=1}^{m}\sin\left(\frac{2n-1}{2}\frac{\pi r}{l}\right)\cdot\sin\left(\frac{2n-1}{2}\frac{\pi\rho}{l}\right)$$
$$=\frac{1}{2\pi i}[Q+P].$$

Multiplicirt man die beiden Seiten dieser Gleichung mit

$$\frac{2}{r.l}\,\rho.\,f(\rho).\,d\rho,$$

und integrirt sodann nach ρ zwischen den Grenzen 0 und l, so folgt:

$$\left|\begin{array}{l} \frac{2}{r.\,l}\sum_{n=1}^{m}\sin\left(\lambda_n\frac{r}{l}\right)\frac{\int_0^l \rho\, f(\rho)\sin\left(\lambda_n\frac{\rho}{l}\right)d\rho}{1-\frac{\sin\lambda_n\cos\lambda_n}{\lambda_n}} \\ -\frac{2}{r.\,l}\sum_{n=1}^{m}\sin\left(\frac{2n-1}{2}\frac{\pi r}{l}\right)\int_0^l \rho f(\rho)\sin\left(\frac{2n-1}{2}\frac{\pi\rho}{l}\right)d\rho \end{array}\right| = \frac{1}{r.l.\pi i}\int_0^l \rho f(\rho)[Q+P]\,d\rho.$$

Wir setzen

$$\Delta = \frac{1}{r.l.\,\pi i}\int_0^l \rho f(\rho)\,[Q+P]\,d\rho$$

und lassen m, die Reihe der ganzen Zahlen durchlaufend, über alle Grenze hinanswachsen, so haben wir, die Convergenz beiderseits vorausgesetzt,

$$v - v' = \mathrm{Lim}_{m=\infty}\,\Delta.$$

Nun lässt sich aber zeigen, dass die rechte Seite dieser Gleichung in der That verschwindet.

§. 3.

Wir haben gesetzt

$$\Delta = \frac{1}{r.l.\,\pi i}\int_0^l \rho f(\rho)\,[Q+P]\,d\rho;$$

mithin

$$\mathrm{Mod}\,\Delta \leqq \frac{1}{r.\,l.\,\pi}\int_0^l \rho\ \mathrm{Mod}\,f(\rho)\ [\mathrm{Mod}\ Q + \mathrm{Mod}\ P]\,d\rho.$$

Zunachst beschäftigen wir uns mit Q und P.

Es ist

$$Q = \int\Big|_{A'}^{A} w\,dz = i\int_{-\sqrt{m\pi}}^{\sqrt{m\pi}} w\,(m\pi + iy)\,dy,$$

worin

$$w(z) = \frac{(\alpha - 1)\sin\left(z\,\frac{r}{l}\right).\sin\left(z\,\frac{\rho}{l}\right)}{\cos z\,.\ \phi(z)},$$

$$\phi(z) = z\cos z + (\alpha - 1)\sin z$$

ist.

Bezeichnet man durch

$$Cy = \frac{1}{2}(e^y + e^{-y}) = 1 + \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} + \cdots\cdot$$

$$Sy = \frac{1}{2}(e^y - e^{-y}) = y + \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} + \cdots\cdot,$$

so ist

$$\sin(x + iy) = \sin x\, Cy + i\cos x\, Sy$$

$$\cos(x + iy) = \cos x\, Cy - i\sin x\, Sy.$$

Das gibt:

$$\text{Mod}\sin(x + iy) = \sqrt{Cy^2 - \cos x^2} = \sqrt{Sy^2 + \sin x^2},$$

$$Sy \leqq \text{Mod}\sin(x + iy) \lesseqqgtr Cy,$$

und, insbesondere,

$$\text{Mod}\sin\frac{r}{l}(x + iy) \lesseqqgtr C\left(\frac{r}{l}\,y\right)$$

$$\text{Mod}\sin\frac{\rho}{l}(x + iy) \lesseqqgtr C\left(\frac{\rho}{l}\,y\right),$$

also

$$\text{Mod}\left|\sin\frac{r}{l}(x + iy)\cdot\sin\frac{\rho}{l}(x + iy)\right| \lesseqqgtr C\left(\frac{r}{l}\,y\right)\cdot C\left(\frac{\rho}{l}\,y\right).$$

Entwickelt man $\varphi(x + iy)$,

$$\varphi\,(x+iy) = \left|\begin{array}{c} x\cos x\, Cy \\ +\, y \sin x\, Sy \\ +\,(\alpha-1)\sin x\, Cy \end{array}\right| + i \left|\begin{array}{c} y\cos x\, Cy \\ -\, x\sin x\, Sy \\ +\,(\alpha-1)\cos x\, Sy \end{array}\right|$$

und bildet alsdann den Modul, so erhält man durch einfache Reduction

$$\text{Mod}\ \varphi\,(x+iy) = \left|\begin{array}{c} [x\cos x + (\alpha-1)\sin x]^2 \\ +\,[y\, Cy + (\alpha-1)\, Sy]^2 \\ +\, x^2\, Sy^2 \sin x^2 \end{array}\right|^{\frac{1}{2}}.$$

Hierin setze man $x = m\pi$, $\sin m\pi = 0$, $\cos m\pi = \pm 1$ ein, so erhält man

$$\text{Mod}\ \phi\,(m\pi + iy) = \sqrt{m\pi^2 + (y\, Cy + (\alpha-1)\, Sy)^2 + m\pi^2\, Sy^2}$$

$$= \sqrt{m^2\pi^2 Cy^2 + (y\, Cy + (\alpha-1)\, Sy)^2}\,,$$

also

$$\text{Mod}\ \phi\,(m\pi + iy) \geqq m\pi\ Cy.$$

Es folgt hieraus

$$\text{Mod}\ w\,(m\pi + iy) \leqq \text{Mod}\,(\alpha-1)\cdot\frac{1}{m\pi}\cdot\frac{C\left(\frac{r}{l}\,y\right)\cdot C\left(\frac{\rho}{l}\,y\right)}{Cy^2}.$$

Es ist aber, wofern

$$0 < r < l,\quad 0 \leqq \rho \lesseqgtr l,$$

für jeden Werth von y

$$C\left(\frac{r}{l}\,y\right) \geqq Cy,\quad C\left(\frac{\rho}{l}\,y\right) \geqq Cy,$$

folglich

$$\frac{C\left(\frac{r}{l}\,y\right)}{Cy}\cdot\frac{C\left(\frac{\rho}{l}\,y\right)}{Cy} \leqq 1\,.$$

Wir haben demnach

$$\text{Mod } w\,(m\pi + iy) \leqq \text{ Mod }(\alpha - 1) \cdot \frac{1}{m\pi}\,.$$

Wir wenden den bekannten Modulsatz an und erhalten

$$\text{Mod } Q \leqq \int_{-\sqrt{m\pi}}^{\sqrt{m\pi}} \text{Mod } w\,(m\pi + iy)\,dy$$

$$\leqq \text{ Mod }(\alpha - 1) \cdot \frac{1}{m\pi} \int_{-\sqrt{m\pi}}^{\sqrt{m\pi}} dy$$

$$\leqq \text{ Mod }(\alpha - 1) \cdot \frac{2}{\sqrt{m\pi}}\,,$$

gültig für jeden der Ungleichheit $0 < r < l$ genügenden Werth von r und für jeden der Ungleichheit $0 \leqq \rho \gtreqless l$ genügenden Werth von ρ.

Untersuchen wir nun

$$P = \int \begin{vmatrix} B \\ C \\ A \end{vmatrix} w\,dz = \int \begin{vmatrix} B \\ C \\ A \end{vmatrix} (z.\,w)\,\frac{dz}{z}$$

und bezeichnen zu dem Ende durch θ das Azimuth von z, so ist auf der Kreisperipherie $A\,C\,B$

$$z = \sqrt{m^2\pi^2 + m\pi} \cdot e^{i\theta}\,, \qquad \frac{dz}{z} = id\theta\,;$$

also

$$P = i \int \begin{vmatrix} B \\ C \\ A \end{vmatrix} (z.\,w)\,d\theta\,,$$

woraus weiter folgt:

$$\text{Mod } P \leqq \int \begin{vmatrix} B \\ C \\ A \end{vmatrix} \text{Mod }(z.\,w)\,d\theta\,.$$

Zufolge der Construction des Kreisbogens $A\,C\,B$, ist auf demselben

$$y \geqq \sqrt{m\pi}$$

Es lässt sich nun leicht zeigen (Vergl. loc. cit. §. 5.) dass, wofern y von Null verscheiden ist,

$$\text{Mod}\ \phi\ (x + iy) \geqq (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} \cdot Sy \cdot \frac{1}{\Omega},$$

wo Ω eine stets von Null verscheidene für erhebliche Werth von y nahezu gleich der Einheit und mit wachsendem y schliesslich gegen die Einheit convergirende Zahl bedeutet. Unter Festhaltung dieser Bedeutung von Ω findet man weiter für die Werthe von y, die von Null verschieden sind,

$$\text{Mod}\ (z.w) \leqq \text{Mod}\ (\alpha - 1) \cdot \Omega \cdot \frac{C\left(\frac{r}{l}\, y\right) \cdot C\left(\frac{\rho}{l}\, y\right)}{Sy^2}$$

Auf dem Kreisbogen $A\ C\ B$ ist nun y positiv. Mit Rücksicht hierauf bringen wir

$$\Omega \cdot \frac{C\left(\frac{r}{l}\, y\right) \cdot C\left(\frac{\rho}{l}\, y\right)}{Sy^2}$$

in die Form:

$$\Omega \cdot \frac{\left(1 + e^{-2\frac{r}{l}y}\right)\left(1 + e^{-2\frac{\rho}{l}y}\right)}{(1 - e^{-2y})^2} \cdot e^{-2\left(2 - \frac{r+\rho}{l}\right)y}.$$

Für erhebliche positive Werthe von y ist der Faktor

$$\frac{\left(1 + e^{-2\frac{r}{l}y}\right)\left(1 + e^{-2\frac{\rho}{l}y}\right)}{(1 - e^{-2y})^2}$$

nur sehr wenig von der Einheit verschieden und convergirt mit wachsendem y sehr rasch gegen dieselbe; dasselbe gilt auch von Ω, also auch von ihrem Producte, welches wir der Kürze halber mit ω bezeichnen wollen, so dass

$$\omega = \Omega \cdot \frac{(1+e^{-2\frac{r}{l}})\ (1+e^{-2\frac{r}{l}\rho})}{(1-e^{-2y})^2} \,.$$

Der Faktor

$$e^{-2(2-\frac{r+\rho}{l})y}$$

hat, wofern $y > 0$, $0 < r < l$ und $0 \leqq \rho \lesseqqgtr l$, als Funktion von ρ betrachtet, seinen grössten Werth für $\rho = l$, und dieser Werth ist

$$e^{-2(1-\frac{r}{l})y} \,.$$

Wir haben demnach

$$\text{Mod } (z.\, w) \leqq \text{Mod } (\alpha - 1)\, w.\, e^{-2(1-\frac{r}{l})y} \,,$$

gültig für jeden der Ungleichheit $0 \leqq \rho \lesseqqgtr l$ genügenden Werth von ρ.

Auf dem Kreisbogen $A\ C\ B$ ist

$$y = \sqrt{m^2\pi^2 + m\pi}\ \sin\theta \,;$$

mithin

$$\text{Mod } P \leqq \text{Mod } (\alpha - 1) \int \begin{vmatrix} B \\ C \\ A \end{vmatrix} \omega\, e^{-2(1-\frac{r}{l})\sqrt{m^2\pi^2 + m\pi}\ \sin\theta}\, d\theta \,.$$

Die beiden Faktoren unter dem Integralzeichen sind positiv; es ist desshalb nach dem Mittelsatze von Cauchy

$$\text{Mod } P \leqq \text{Mod } (\alpha - 1)\, \omega_0 \int \begin{vmatrix} B \\ C \\ A \end{vmatrix} e^{-2(1-\frac{r}{l})\sqrt{m^2\pi^2 + m\pi}\ \sin\theta}\, d\theta \,,$$

wo ω_0 einen gewissen Mittelwerth von ω auf dem Kreisbogen $A\ C\ B$ bedeutet, welcher für erhebliche Werthe von m nahezu gleich Eins wird, und mit wachsendem m gegen die Einheit convergirt.

Es ist nun

$$\int_0^{\pi} e^{-C \sin \theta}\, d\theta < \frac{\pi}{C}$$

und

$$\int \left|\begin{matrix} B \\ C \\ A \end{matrix}\right| e^{-C \sin \theta}\, d\theta < \int_0^{\pi} e^{-C \sin \theta}\, d\theta .$$

Es folgt hieraus

$$\text{Mod } P \leqq \text{Mod } (\alpha - 1) \cdot \omega_0 \cdot \frac{\pi}{2\left(1 - \frac{r}{l}\right) \sqrt{m^2\pi^2 + m\pi}}$$

gültig für jeden der Ungleichheit $0 \leqq \rho \leqq l$ genügenden Werth von ρ.

Somit erhalten wir für jeden der Ungleichheit $0 \leqq \rho \lesseqgtr l$ genügenden Werth von ρ die Ungleichheit

$$\text{Mod } Q + \text{Mod } P \leqq \text{Mod } (\alpha - 1) \cdot \frac{2}{\sqrt{m\pi}}$$

$$+ \text{Mod } (\alpha - 1) \cdot \omega_0 \cdot \frac{\pi}{2\left(1 - \frac{r}{l}\right) \sqrt{m^2\pi^2 + m\pi}},$$

mit den Zusatze, dass ω_0 eine für erhebliche Werthe von m nahezu der Einheit gleiche und mit wachsendem m gegen Eins convergirende Zahl bedeutet.

§. 4.

Wir verstärken die Ungleichheit

$$\text{Mod } \Delta \leqq \frac{1}{r.l.\pi} \int_0^{l} \rho \text{ Mod } f(\rho) \left[\text{Mod } Q + \text{Mod } P\right] d\rho,$$

dadurch dass wir [Mod Q + Mod P] durch die in dem vorangehenden

Paragraph nachgewiesene Zahl ersetzen, welche die Eigenschaft hat, für jeden $0 \leqq \rho \overline{\overline{<}} l$ genügenden Werth von ρ stets grösser als [Mod Q + Mod P] zu sein:

$$\text{Mod}\ \Delta \leqq \frac{1}{r.\,l.\,\pi} \cdot \text{Mod}\ (\alpha-1) \Bigg[\frac{2}{\sqrt{m\pi}}$$
$$+\ \omega_0 \frac{\pi}{2\left(1-\frac{r}{l}\right)\sqrt{m^2\pi^2+m\pi}}\Bigg] \int_0^l \rho\ \text{Mod}\, f(\rho)\, d\rho.$$

Den grössten Werth von Mod $f(\rho)$ zwischen den Grenzen 0 und l, welcher der Voraussetzung nach endlich ist, bezeichnen wir mit A; so ist

$$\int_0^l \rho\ \text{Mod}\, f(\rho)\, d\rho \overline{\overline{<}} \int_0^l \rho\ A\ d\rho$$
$$\overline{\overline{>}}\ \frac{A l^2}{2},$$

wo die Gleichheit stattfindet, wenn $f(\rho)$ constant und gleich A ist. Mithin haben wir endlich

$$\text{Mod}\ \Delta \leqq \frac{1}{r} \cdot \text{Mod}\ (\alpha-1) \cdot A\, \frac{l}{2} \Bigg[\frac{2\pi}{\sqrt{m\pi}} + \omega_0 \frac{1}{2\left(1-\frac{r}{l}\right)\sqrt{m^2\pi^2+m\pi}}\Bigg].$$

Lässt man nun hierin m, die Reihe der ganzen Zahlen durchlaufend, über alle Grenze hinauswachsen, wofern $0 < r < l$ ist; es folgt, dass Mod Δ, also auch Δ selbst verschwindet zwischen $r = 0$ und $r = l$ mit Ausschluss der Grenzen, wenn die Gliederzahl m ins Unendliche wachst.

Es ist somit bewiesen (Vergl §. 2. zu Ende) dass die Differenz der beiden Summen $v - v'$ gleich Null ist; d. h. dass, da v' für sich allein convergirt und mit Ausschluss der Grenzen $r=0$ und $r=l$ zwischen denselben $f(r)$ zur Summe hat, dasselbe also auch von v

gilt. Wir gelangen also zu dem Satze:

Die unendliche Reihe

$$v = \frac{1}{r}\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\lambda_n \frac{r}{l}\right) \frac{\int_0^l \rho f(\rho) \sin\left(\lambda_n \frac{\rho}{l}\right) d\rho}{\int_0^l \left(\sin \lambda_n \frac{\rho}{l}\right)^2 d\rho}$$

hat $f(r)$ zur Summe für $0 < r < l$ mit Ausschluss der Grenzen $r = 0$ und $r = l$.