Beitraege zur Theorie der Bewegung der Erdatmosphaere und der Wirbelstuerme

(Zweite Abhandlung)

von

Dr. Phil. Diro Kitao.

Professor für Physik und Mathematik an der Kaiserlichen Akademie für Forst-und Landwirthschaft zu Tôkyô.

---

§ *VIII. Wirbelgebiet der geradlinigen Isobaren.*

Ganz so vollständig wie der Fall eines kreisförmigen Gebietes der Verticalströmung* lässt sich nun derjenige Fall behandeln, wo das Gebiet der Verticalströmung durch zwei unendlich grosse Ebenen begrenzt ist.

Wir nehmen an: die Ebenen, welche das Gebiet der Verticalströmung begrenzen, seien parallel gerichtet der (yz) Ebene und ihr gegenseitiger Abstand sei δ. Wenn wir den Coordinatenanfang in *die* Ebene legen, welche diesen Abstand der beiden unendlichen Ebenen halbirt, welche wir die Mittelebene nennen wollen, so hat man bekanntlich als Potential† einer mit der Masse $\frac{\gamma}{4\pi}$ erfüllten unendlich grossen Schichte von der Dicke δ für einen äusseren Punkt

---

* Dr. Diro Kitao. Beiträge zur Theorie der Bewegung der Erdatmosphäre und der Wirbelstürme. Dieses Journal. Vol. I pag. 183—209.

† Thomson und Tait. Handbuch der theoret. Physik. übersetzt von H. Helmholtz und G. Wertheim. 1874 Band I zweiter Theil pag. 41.

$$\varphi_a = -\frac{\gamma\delta}{2}x + Const$$

und für einen inneren Punkt

$$\varphi_i = -\frac{\gamma}{2}x^2 + Const$$

so dass also die Bedingungen, denen φ genügen muss

$$\Delta\,\varphi_a = 0 \qquad \Delta\,\varphi_i = -\gamma$$

und

$$\frac{\partial\varphi_a}{\partial x} = \frac{\partial\varphi_i}{\partial x} \qquad \text{für } x = \frac{\delta}{2}$$

erfüllt sind, da die Normale der unendlichen Ebene überall mit der Richtung der x Achse zusammenfällt. Für die negative Hälfte der (xy) Ebene hat man dabei überall δ negativ zu setzen.

Wir fassen zunächst den Fall in's Auge, wo die Verticalströmung eine aufsteigende ist und setzen wieder

$$u = \frac{\partial W}{\partial y} + \frac{\partial\varphi}{\partial x} \qquad v = -\frac{\partial W}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}$$

Es ist sehr leicht die Bewegung in äusseren wirbelfreien Gebiete zu finden. Da, wie wir allgemein gefunden haben

$$W_a = \frac{2\lambda\,sin\,\theta}{\kappa}\cdot\varphi_a$$

und in dem vorliegenden Fall W_a von y unabhängig ist, so folgt augenblicklich

$$u = \frac{\partial\varphi_a}{\partial x} = -\frac{\gamma\delta}{2}$$

$$v = -\frac{\partial W}{\partial x} = \frac{2\lambda\,sin\,\theta}{\kappa}\frac{\gamma\delta}{2} \qquad w = 0$$

Die Geschwindigkeit der Luft im äusseren wirbelfreien Gebiet ist demnach constant und jedes Lufttheilchen strömt auf der positiven (südlichen) Hälfte der unendlichen (xy) Ebene von SW her, und auf der negativen (nördlichen) Hälfte aber von NO her, und zwar geradlinig, da die Gleichung für Windbahn $\frac{dy}{dx} = \frac{v}{u}$ ergiebt

$$y = -\frac{2\lambda \sin\theta}{\kappa} \cdot x + Const$$

Als Isodynamen erhält man ferner aus (50) (pag. 172. vol. I d. Journals)

$$\Phi = \frac{\gamma\delta}{2}\left(\kappa + \frac{4\lambda^2 \sin^2\theta}{\kappa}\right) x + Const$$

Hieraus findet man für den Druck im äusseren wirbelfreien Gebiet

$$p_a = Const + \mu\, G + \frac{\mu\gamma\delta}{2}\left(\kappa + \frac{4\lambda^2 \sin\theta^2}{\kappa}\right) x - \frac{\mu\gamma^2\delta^2}{8}\left(1 + \frac{4\lambda^2 \sin^2\theta}{\kappa^2}\right)$$

Die Isobaren sind demnach der y Achse parallele Geraden, und ihre Gradienten dabei constant, $= \frac{\mu\gamma\delta}{\kappa}\left(\kappa + \frac{4\lambda^2 \sin\theta^2}{\kappa}\right)$.

Um die Bewegung im inneren wirbelerfüllten Gebiete zu bestimmen brauchen wir nur W für einen inneren Punkt aufzustellen. Zu dem Ende setzen wir den Werth für φ_i in die Gleichung (42) (pag. 169, Vol. I) so dass wir unter der Voraussetzung, dass die Bewegung eine stationäre sei, erhalten

$$-\gamma x \frac{d\Delta W_i}{dx} + (\kappa - \gamma)\, \Delta W_i + 2\lambda \sin\theta\, \gamma = 0 \qquad (84)$$

Wenn wir hierbei zunächst annehmen, dass $\kappa \gtrless \gamma$ sei, und $\frac{\kappa}{\gamma} = m$ setzen, so folgt durch Integration

$$\Delta W_i = Ax^{(m-1)} - \frac{2\lambda \sin\theta}{(m-1)} = \frac{d^2 W_i}{dx^2}$$

wo A eine willkürliche Constant ist. Eine nochmalige Integration ergiebt hieraus

$$\frac{dW_i}{dx} = \frac{Ax^m}{m} - \frac{2\lambda \sin\theta x}{(m-1)}.$$

Die zweite Integrationsconstante ist $= 0$ zu setzen, wenn die Geschwindigkeit in der Mittelebene ($x=0$) verschwinden soll, während die erste Integrationsconstante A gemäss der Grenzbedingung

$$\frac{\partial W_i}{\partial x}=\frac{\partial W_a}{\partial x} \qquad \text{für } x=\frac{\delta}{2}$$

bestimmt werden muss. Dies ergiebt

$$A=+\frac{\lambda \sin\theta.\delta}{(m-1)}\left(\frac{2}{\delta}\right)^{m.}=\frac{2\lambda \sin\theta}{(m-1)}\left(\frac{2}{\delta}\right)^{(m-1)}$$

mithin folgt

$$\frac{dW_i}{dx}=\frac{2\lambda \sin\theta.x}{(m-1)}\left[\frac{1}{m}\left(\frac{2x}{\delta}\right)^{m-1}-1\right]$$

Weiter folgt aus $\varDelta W_i=-\zeta+2\lambda\sin\theta$ als Rotationsgeschwindigkeit eines Luftheilchens

$$\zeta=\frac{2\lambda\sin\theta}{(m-1)}\left[m-\left(\frac{2x}{\delta}\right)^{m-1}\right]$$

und folglich als Deviationswinkel

$$tag\ i=\frac{2\lambda\sin\theta}{\kappa(m-1)}\left[m-\left(\frac{2x}{\delta}\right)^{m-1}\right]$$

Der Deviationswinkel nimmt demnach stetig nach der Mittelebene zu, wo entweder $tag\ i=\frac{2\lambda\sin\theta\, m}{\kappa(m-1)}$ oder $=\infty$, je nachdem $m>1$ oder $m<1$ ist. Als Componenten der Geschwindigkeit im inneren wirbelerfüllten Gebiete erhalten wir ferner

$$\begin{aligned} u&=-\gamma x \\ v&=-\frac{2\lambda\sin\theta.x}{(m-1)}\left[\frac{1}{m}\left(\frac{2x}{\delta}\right)^{m-1}-1\right] \qquad (84_a) \\ w&=\gamma.z. \end{aligned}$$

Die Componenten v ist positiv für die nördliche Hemisphäre auf der positiven Hälfte der $(x\ y)$ Ebene, gleichgiltig, ob $m > 1$ oder $m < 1$ ist. Ist nämlich $m > 1$, so ist, da $\frac{2x}{\delta}$ immer ein echter Bruch ist, die eingeklammerte Grösse demnach negativ. Ist dagegen $m < 1$, so ist $\frac{1}{m}\left(\frac{2x}{\delta}\right)^{m-1} > 1$, da $\left(\frac{2x}{\delta}\right)$ ein echter Bruch ist, und die eingeklammerte Grösse daher positiv. Da aber $(m-1)$ zugleich negativ ist, so folgt, dass v auch in diesem Fall positiv sein muss. Als Windbahn findet man

$$y = -\frac{2\lambda \sin\theta\, x}{\gamma(m-1)} \cdot \left[1 - \frac{1}{m^2}\left(\frac{2x}{\delta}\right)^{m-1}\right] + const. \qquad (84_b)$$

also im Allgemeinen eine Parabel höheren Grades, welche die Normale der Mittelebene unter einem Winkel schneidet, dessen trigonometrische Tangente $= \frac{2\lambda \sin\theta . m}{(m-1)}$ ist, wenn $m > 1$. Sie geht aber parallel zur Mittelebene, wenn $m < 1$ ist.

Die Bewegung der Luft im wirbelerfüllten Gebiete lässt sich etwa, wie folgt, charakterisiren. Auf der südlichen Hälfte der (xy) Ebene strömt die Luft in der Richtung N z. O, und nährt sich, sich allmälig umbiegend in der Nähe der Mittelebene, um so rascher dem reinen Ost je grösser γ gegen κ ist, d. i. je grösser die Geschwindigkeit der aufsteigenden Strömung gegen Reibungswiderstand an der Erdoberfläche ausfällt. Die Luftbewegung geschieht auf der nördlichen Hälfte in diametral entgegengesetzter Richtung; sie ist anfangs S z. W und geht in der Nähe der Mittelebene allmälig zum reinen West über, und zwar um so rascher, je grösser γ gegen κ ausfällt. Die Figur (1) Taf. XXV. veranschaulicht den ungefähren Verlauf der Windbahnen im innern und äusseren Gebiete für die nördliche Hemisphäre

In Folge der vertical aufsteigenden Strömung beschreibt dabei jedes Lufttheilchen eine Curve doppelter Krümmung, deren horizontale Projection jene Parabel höheren Grades ist. Aus der ersten und dritten Gleichung in (84_a) ergiebt sich durch Integration

$$x\, z = const.$$

Die Projection der Strömungslinien auf die ($x\, z$) Ebene ist eine Hyperbel. Diejenige auf die ($z\, y$) Ebene ist, wenn wir die Coordinaten eines Theilchens zur Zeit 0 mit x_0, y_0, z_0 bezeichnen

$$y = -\frac{2\,\lambda \sin\theta}{(m-1)}\left(\frac{z_0 x_0}{z}\right)\left[1-\frac{1}{m^2}\left(\frac{2x_0 z_0}{z.\delta}\right)^{m-1}\right] + const.$$

Diese Gleichung stellt im Allgemeinen eine hyperbelartige Curve dar, welche die Axen der Coordinaten z und y zu ihren Asymptoten hat, wenn $m > 1$ ist. Indem ein Lufttheilchen also auf solchen Linien hinaufströmt, erreicht es nie die Mittelebene, wenn es einmae um ein Endliches von derselben entfernt war; denn die Zeit, welch dazu nöthig ist, erweist sich als unendlich gross. Aus der ersten, und dritten Gleichung in (84_a) ergiebt sich durch Integration

$$x = x_0 e^{-\gamma t} \qquad z = z_0 e^{+\gamma t}.$$

und hieraus weiter durch Elimination von x aus (84_b)

$$y = -\frac{2\,\lambda \sin\theta}{(m-1)}\frac{x_0}{\gamma}\left[e^{-\gamma t} - \frac{1}{m^2}\left(\frac{2x_0}{\delta}\right)^{(m-1)} e^{-\gamma t}\right] + const.$$

Um die Mittelebene muss daher thatsächlich eine Windstille herrschen, da die Luft nur vertical aufwärts strömt.

Von nicht geringerem Interess ist der Ausdruck für den Druck. Die Gleichung für die Isodynamen (44) (pag. 170 Vol. I) verwandelt sich in unserem besonderen Fall in

$$\frac{d^2\Phi}{dx^2} = \frac{d^2W_i}{dx^2}\frac{dW_i}{dx} + \left(\frac{d^2W_i}{dx^2} - 2\,\lambda \sin\theta\right)\frac{d^2W_i}{dx^2} + \kappa\gamma$$

Indem man für $\frac{d^3 W_i}{dx^3}$ $\frac{d^2 W_i}{dx^2}$ und $\frac{dW_i}{dx}$ ihren bereits bekannten Werth einsetzt, und zweimal integrirt, erhält man

$$\Phi_i = \frac{\delta^2 \lambda^2 \sin^2\theta}{2m^2(m-1)^2}\left(\frac{2x}{\delta}\right)^{2m} - \frac{\lambda^2 \sin^2\theta\, \delta^2}{(m-1)^2\,(m+1)}\left(\frac{2x}{\delta}\right)^{m+1} + \frac{x^2}{2}\left(\frac{4\lambda^2 \sin^2\theta m}{(m-1)^2} + \kappa\gamma\right) + Cx + C'$$

wo C und C' zwei willkürliche Constanten sind, die gemäss der Bedingungen, die an der Grenzebene zu erfüllen sind, bestimmt werden müssen; d. i. gemäss der Bedingungen

$$\Phi_i = \Phi_a \qquad \frac{d\Phi_i}{dx} = \frac{d\Phi_a}{dx} \qquad \text{für } x = \frac{\delta}{2}$$

woraus die beiden Gleichungen hervorgehen,

$$C' + C\frac{\delta}{2} + \left(\frac{\lambda \sin\theta . \delta}{m-1}\right)^2 \left(\frac{1}{2m^2} - \frac{1}{m+1}\right) + \frac{\delta^2}{8}\left(m\,\frac{4\lambda^2 \sin\theta}{(m-1)^2} + \kappa\gamma\right) = \frac{\gamma\delta^2}{2}\left(\kappa + \frac{4\lambda^2 \sin^2\theta}{\kappa}\right) + Const$$

$$C + \frac{2}{\delta}\left(\frac{\lambda \sin\theta . \delta}{m-1}\right)^2 \left(\frac{1}{m} + 1\right) + \frac{2}{\delta}\left(m\,\frac{4\lambda^2 \sin^2\theta}{(m-1)^2} + \kappa\gamma\right) = \frac{\gamma\delta}{2}\left(\kappa + \frac{2\lambda^2 \sin^2\theta}{\kappa}\right)$$

Da in der ersten Gleichung rechter Hand eine dritte willkürliche Constante auftritt, so können wir $C' = 0$ setzen, und erhalten somit

$$C = \frac{\gamma\delta}{2}\left(\kappa + \frac{4\lambda^2 \sin^2\theta}{\kappa}\right) - \frac{2}{\delta}\left[\left(\frac{\delta\lambda \sin\theta}{m-1}\right)^2 \left(\frac{1}{m} + 1\right) + m\,\frac{4\lambda^2 \sin^2\theta}{(m-1)^2} + \kappa\gamma\right]$$

Das Quadrat der resultirenden Geschwindigkeit ist

$$= \gamma^2 (x^2 + z^2) + \left(\frac{2}{\delta}\right)^{2m} \left(\frac{\delta\lambda \sin\theta}{m-1}\right)^2 \frac{x^{2m}}{m^2} - \frac{4}{m}\left(\frac{2}{\delta}\right)^m \frac{\delta\lambda^2 \sin^2\theta}{(m-1)^2}\, x^{m+1} + \frac{4\lambda^2 \sin^2\theta}{(m-1)^2}\, x^2$$

$$= \gamma^2 (x^2 + z^2) + \frac{1}{m^2}\left(\frac{\delta\lambda \sin\theta}{m-1}\right)^2 \left(\frac{2x}{\delta}\right)^{2m}$$

$$- \frac{2}{m} \frac{\lambda^2 \sin^2\theta . \delta^2}{(m-1)^2}\left(\frac{2x}{\delta}\right)^{m+1} + \frac{4\lambda^2 \sin^2\theta}{(m-1)^2} x^2$$

da

$$\Phi = \frac{1}{2} (u^2 + v^2 + w^2) + \frac{p}{\mu} - G$$

ist, so folgt schliesslich als Gleichung für Druck

$$p_i = \mu\, G - \gamma^2 \frac{\mu}{2} (x^2 + z^2) + \frac{\mu}{m\,(m+1)}\left(\frac{\delta\lambda \sin\theta}{m-1}\right)^2 \left(\frac{2x}{\delta}\right)^{m+1}$$

$$+ \frac{\mu x^2}{2}\left(\frac{4\lambda^2 \sin^2\theta}{(m-1)} + \kappa\gamma\right) + C\mu x$$

oder etwas anderes geordnet

$$p_i = \mu G - \frac{\mu\gamma^2}{2} z^2 + \frac{\mu}{m\,(m+1)}\left(\frac{\delta\lambda \sin\theta}{m-1}\right)^2 \left(\frac{2x}{\delta}\right)^{m+1}$$

$$+ \frac{\mu x^2}{2}\left[\frac{4\lambda^2 \sin^2\theta}{(m-1)} + \gamma^2 (m-1)\right] + C\mu x.$$

Der Druck ist, wis es zu erwarten stand, um die Mittelebene ein Minimum, und wächst nach Aussen zu stetig, so lange $m > 1$, d. h. $\kappa > \gamma$ ist. Wird $m < 1$ d. h. $\kappa < \gamma$, so wird der Factor von x^2 negativ, so könnte es innerhalb des Wirbelgebietes ein Maximum geben, weil der zweite Differentialquotient von p_i auch innerhalb der Wirbelgebietes einmal verschwinden kann, was auch der Fall ist, wenn γ grösser als $2\lambda \sin\theta$ ist. Es ist nämlich

$$\frac{d^2 p_i}{dx^2} = \mu\left[\left(\frac{\delta\lambda \sin\theta}{1-m}\right)^2 \left(\frac{2}{\delta}\right)^{m+1} x^{m-1} - \frac{4\lambda^2 \sin^2\theta}{(1-m)} - \gamma^2 (1-m)\right]$$

Setzt man dies $= 0$, so erhält man

$$\left(\frac{2x}{\delta}\right)^{(m-1)} = \left(\frac{2x}{\delta}\right)^{-(1-m)} = (1-m) + \frac{\gamma^2 (1-m)^3}{4\lambda \sin^2\theta.}$$

woraus das oben Gesagte hervorgeht. Ob aber das Maximum in der That einem inneren Punkte angehört, das hängt von einem sehr verwickelten Verhältniss zwischen $\lambda \sin\theta$, γ und κ ab.

Wir erledigen jetzt den Fall, wo $\kappa = \gamma$ wird, und gehen von der Gleichung (84) aus, welche sich in diesem besonderen Fall verwandelt in

$$-\gamma x \frac{d\Delta W_i}{dx} + 2\lambda \sin\theta . \gamma = 0$$

Das Integral hiervon ist

$$\Delta W_i = 2\lambda \sin\theta \log(x) + C$$

wo C eine willkürliche Constante ist. Die Rotationsgeschwindigkeit der Lufttheilchen in der Mittelebene wird demnach unendlich gross. Die nochmalige Integration ergiebt

$$\frac{dW_i}{dx} = 2\lambda \sin\theta . x. [\log(x) - 1] + Cx$$

Die zweite willkürliche Constante ist $= 0$ zu setzen, wenn die Geschwindigkeit in der Mittelebene verschwinden soll. Der Grenzbedingung wird es gegnügt, wenn wir setzen

$$C = -2\lambda \sin\theta \log\left(\frac{\delta}{2}\right)$$

so dass wir erhalten

$$\frac{dW_i}{dx} = -2\lambda \sin\theta \left(1 - \log\frac{2x}{\delta}\right)$$

Als Geschwindigkeitscomponenten findet man somit

$$u = -\gamma x$$
$$v = 2\lambda \sin\theta x. \left(1 - \log\frac{2x}{\delta}\right)$$
$$w = \gamma . z.$$

als Rotationsgeschwindigkeit

$$\zeta = 2\,\lambda\,sin\,\theta - \Delta W_i = 2\,\lambda\,sin\,\theta\left[1 - log\left(\frac{2x}{\delta}\right)\right]$$

und hieraus als Deviationswinkel

$$tag\,i = \frac{2\,\lambda\,sin\,\theta}{\kappa}\left[1 - log\left(\frac{2x}{\delta}\right)\right]$$

Da $tag\,i = \infty$ wird für $x = 0$, so müssen die Lufttheilchen in der Nähe der Mittelebene parallel zu derselben strömen. Demgemäss ist die Gleichung der Windbahn

$$y = -\frac{2\,\lambda\,sin\,\theta}{\kappa}\cdot x\left[2 - log\left(\frac{2x}{\rho}\right)\right] + const$$

eine transcendente Curve, welche sich der y Achse fortwährend nährt, ohne sie je zu erreichen.

Die Figur (2) Taf. XXV stellt den Verlauf der Windbahnen in diesem Fall dar.

Die Lufttheilchen, welche einmal nicht auf der Erdoberfläche waren, werden dabei durch die Verticalströmung emporgerissen, und steigen hinauf auf Linien doppelter Krümmung, deren horizontale Projection jene transcendente Linie ist, deren verticale Projectionen auf die $(x\,z)$ Ebene und auf die $(z\,y)$ Ebene aber durch folgende Gleichungen

$$x\,z = const.$$

$$y = -\frac{2\,\lambda\,sin\,\theta}{\kappa}\left(\frac{z_0 x_0}{z}\right)\left[2 - log\left(\frac{2 z_0 x_0}{\delta^2}\right)\right] + const.$$

bestimmt sind. Die erste Curve ist wieder eine Hyperbel, und die zweite eine transcendente Linie, bestehnd aus zwei Zweigen, die sich sowohl y Achse als der z Achse asymptotisch nähren.

Sowohl die Isodynamen, als die Isobaren bestehn selbstredend aus zur y Achse parallelen Geraden, und ihre Ausdrücke können auch ohne mindeste Schwierigkeit gefunden werden.

Ganz eben so leicht und vollständig, wie der vorhergehende Fall, lässt sich auch der Fall behandeln, wo die Luft in dem durch zwei unendliche parallele Ebenen begrenzten Gebiete niederströmt, mit der Geschwindigkeit $w = -\gamma . z.$, ein Fall, in welchem wieder, wie in dem Fall des kreisförmigen Gebietes der Verticalströmung, alle für den Fall der vertical aufsteigenden Strömung aufgestellten Ausdrücke ungiltig werden, da sie, wenn wir statt γ überall $-\gamma$ einführen, bei jedem Werthe von γ, in der Mittelebene unendlich gross werden. Wir setzen

$$\varphi_a = \frac{\gamma}{2}\,\delta x + const. \qquad \varphi_i = \frac{\gamma}{2} x^2$$

so dass die Bedingungen

$$\Delta\varphi_a = 0 \qquad \Delta\varphi_i = \gamma \qquad \frac{\partial\varphi_i}{\partial x} = \frac{\partial\varphi_a}{\partial x} \qquad \text{für } x = \frac{\delta}{2}$$

erfüllt werden.

Wenn wir die Hülfsfunction W für das innere Gebiet bilden, so begegnen wir auch hier derselben Erscheinung, wie in dem Fall eines kreisförmigen Gebietes der Verticalströmung, dass im inneren Gebiete nur Wirbel mit constanter Rotationsgeschwindigkeit vorhanden sein können. Es ist daher

$$\Delta W_i = const.$$

Aus der Gleichung (84) fliesst ohne Weiteres, indem wir $-\gamma$ für γ setzen

$$\Delta W_i = \frac{2\lambda \sin\theta . \gamma}{\kappa + \gamma}$$

Mithin folgt

$$\frac{dW_i}{dx} = \frac{2\lambda \sin\theta . \gamma}{\kappa + \gamma} . x$$

wo die Integrationsconstante $= 0$ zu setzen ist, da $\frac{dW_i}{dx}$ in der Mittelebene verschwinden soll.

Die für das äussere Gebiet giltige Lösung, $W_a = \frac{2\lambda \sin\theta}{\kappa}\varphi_a$ genügt auch hier der Grenzbedingung nicht. Es ist hieraus zu schliessen, dass auch in dem vorliegenden Fall Wirbel mit variabler Rotationsgeschwindigkeit ausserhalb des Gebietes der Verticalströmung existiren müssen. Die Gleichung (43) (pag. 169. Vol. I.) wird in dem vorliegenden Fall

$$\frac{\partial\varphi_a}{\partial x}\frac{\partial \Delta W_a}{\partial x} + \kappa \Delta W_a = 0$$

d. h.

$$\frac{\gamma\delta}{2}\frac{d\Delta W_a}{dx} + \kappa\Delta W_a = 0$$

Das Integral hiervon ist

$$\Delta W_a = C\, e^{-\frac{2\kappa}{\gamma\delta}\cdot x}$$

wo C eine Constante ist. Hieraus folgt weiter

$$\frac{dW_a}{dx} = -\frac{\gamma\delta}{2\kappa}Ce^{-\frac{2\kappa}{\delta\gamma}x} + C'$$

Die zweite Integrationsconstante C' bestimmt sich durch die Bemerkung, dass $\frac{dW_a}{dx}$ für unendlich grosses x, $= \frac{\gamma\delta}{2}\left(\frac{2\lambda\sin\theta}{\kappa}\right)$ werden muss. Mithin folgt

$$\frac{dW_a}{dx} = -\frac{\gamma\delta}{2\kappa}Ce^{-\frac{2\kappa}{\gamma\delta}x} + \frac{\gamma\delta}{2}\cdot\frac{2\lambda\sin\theta}{\kappa}$$

Der Grenzbedingung

$$\frac{dW_a}{dx} = \frac{dW_i}{dx} \qquad \text{für } x = \frac{\delta}{2}$$

genügt man, indem man setzt

$$C = \frac{2\lambda\sin\theta.\gamma}{(\gamma+\kappa)}\ e^{\frac{\kappa}{\gamma}}$$

so dass wir schliesslich erhalten

$$\frac{dW_a}{dx} = \frac{\gamma\delta\lambda \sin\theta}{\kappa}\left[1 - \frac{\gamma}{\gamma+\kappa} e^{-\frac{\kappa}{\gamma}\left(\frac{2x}{\delta}-1\right)}\right]$$

Die Componenten der Geschwindigkeit im inneren Gebiete sind

$$u = \gamma x$$

$$v = -\frac{2\lambda \sin\theta . \gamma}{(\kappa+\gamma)} . x$$

$$w = -\gamma . z.$$

und die Rotationsgeschwindigkeit eines Luftheilchens

$$\zeta = \frac{2\lambda \sin\theta}{(\kappa+\gamma)}\kappa.$$

und hieraus folgt als Deviationswinkel

$$tag\, i = \frac{2\lambda \sin\theta}{(\kappa+\gamma)}$$

also constant, und wird um so kleiner, je grösser γ gegen κ ausfällt. Als Windbahn findet man

$$y = -\frac{2\lambda \sin\theta}{\kappa+\gamma} \cdot x + const$$

also eine Gerade, welche mit der positiven y Achse einen Winkel einschliesst, dessen trigonometrische Tangente $= -\frac{2\lambda \sin\theta.}{(\kappa+\gamma)}$ ist.

Indem die Luftheilchen niederwärts strömen, fahren sie aus der Grenzebene heraus auf Curven, deren Projectionen auf die $(z\,x)$ und $(y\,z)$ Ebene durch die Gleichungen dargestellt werden.

$$x\,z = const. \qquad y\,z = const.$$

d. h. ein System gleichseitiger Hyperbeln.

Als Ausdruck der Isodynamen findet man ferner für einen inneren Punkt

$$\Phi_i = -\gamma\kappa\left(1 + \frac{4\lambda^2 \sin^2\theta}{(\kappa+\gamma)^2}\right)\frac{x^2}{2} + const$$

Da das Quadrat der resultirenden Geschwindigkeit

$$= \gamma^2 z^2 + \gamma^2 x^2 \left(1 + \frac{4\lambda^2 \sin^2\theta}{(\kappa+\gamma)^2}\right)$$

ist, so kommt hieraus, als Ausdruck für den Druck des inneren Gebietes

$$p_i = Const + \mu G - \frac{\gamma^2 z^2}{2} - \gamma(\kappa+\gamma)\left(1 + \frac{4\lambda \sin^2\theta}{(\kappa+\gamma)^2}\right)\frac{x^2}{2}$$

Wir wenden uns zu, zu der Betrachtung der Bewegung im äusseren Gebiete. Die Componenten der Geschwindigkeit sind gegeben in

$$u = \frac{\gamma\delta}{2}$$

$$v = -\frac{\gamma\delta \sin\theta}{\kappa}\left(1 - \frac{\gamma}{\gamma+\kappa}\, e^{-\frac{\kappa}{\gamma}\left(\frac{2x}{\delta}-1\right)}\right)$$

Die Rotationsgeschwindigkeit eines Theilchens ist

$$\zeta = 2\lambda \sin\theta\left(1 - \frac{\gamma}{\kappa+\gamma}\, e^{-\frac{\kappa}{\gamma}\left(\frac{2x}{\delta}-1\right)}\right)$$

Hieraus folgt als Deviationswinkel

$$tay\ i = \frac{2\lambda \sin\theta}{\kappa}\left(1 - \frac{\gamma}{\kappa+\gamma}\, e^{-\frac{\kappa}{\gamma}\left(\frac{2x}{\delta}-1\right)}\right)$$

tag i wird sonach an der Grenzebene, $= \frac{2\lambda \sin\theta}{\kappa+\gamma}$, und wächst von da ab allmälig bis zum Maximum $\frac{2\lambda \sin\theta}{\kappa}$.

Als Windbahn findet man

$$y = -\frac{2\lambda \sin\theta}{\kappa}\left(x + \frac{\gamma^2\delta}{2\kappa(\gamma+\kappa)}\, e^{-\frac{\kappa}{\gamma}\left(\frac{2x}{\delta}-1\right)}\right) + const.$$

Die ist demnach eine Exponentialcurve, welche sich der Gerade $y = -\frac{2\lambda \sin\theta}{\kappa} \cdot x + const.$ asymptotisch nährt. Die Figur (3) Taf. XXV. veranschaulicht den ungefähren Verlauf der Windbahnen in den beiden Gebieten

Die Isobaren sind zur x Achse senkrechte parallele Geraden wie die Isodynamen, deren Gleichung

$$\Phi_a = - \frac{2\lambda \sin^2 \theta\, \gamma^3 \delta^2}{\kappa^2(\gamma+\kappa)} \left(1 - \frac{\gamma}{4(\gamma+\kappa)} e^{-\frac{\kappa}{\gamma}\left(\frac{2x}{\delta}-1\right)}\right) e^{-\frac{\kappa}{\gamma}\left(\frac{2x}{\delta}-1\right)} + Const.$$

ist. Da das Quadrat der resultirenden Geschwindigkeit

$$= \frac{\gamma^2\delta^2}{4} + \frac{\lambda^2 \sin^2 \theta}{\kappa^2} \gamma^2 \delta^2 \left(1 - \frac{\gamma}{\gamma+\kappa} e^{-\frac{\kappa}{\gamma}\left(\frac{2x}{\delta}-1\right)}\right)^2$$

ist, so folgt als Ausdruck für den Druck im äusseren Gebiete

$$p_a = Const. + \mu G - \frac{\gamma^2\delta^2\mu}{8}\left(1 + \frac{4\lambda^2 \sin^2 \theta}{\kappa^2}\right) - \frac{3\mu\lambda^2 \sin^2\theta\, \gamma^3\delta^2}{\kappa^2(\gamma+\kappa)} e^{-\frac{\kappa}{\gamma}\left(\frac{2x}{\delta}-1\right)}$$

Wie es zu erwarten war, herrscht um die Mittelebene ein Maximum des Drucks, welcher dann nach Aussen zu stetig abnimmt, um schliesslich in hinreichend grosser Entfernung vom Gebiete der Verticalströmung zu einem neuen Maximum asymptotisch aufzusteigen. Was die Bewegung der Lufttheilchen unter diesem Druckverhältniss anbelangt, so strömen sie durchaus im anticyklonalen Sinne; sie gehen auf der nördlichen Hälfte geradlinig in der Richtung S z.W und auf der südlichen Hälfte des inneren Gebietes in der Richtung N z.O. und indem sie aus der Grenzebene heraustreten, wird ihre Strömungsrichtung noch mehr nach W respect. O abgelenkt., und die Bahnen welche sie beschreiben, krümmen sich zuerst rasch nach W. resp. O., um in hinreichender Ferne vom Gebiete der Verticalströmung wieder geradlinig zu werden.

Die bisher entwickelten Ausdrück gelten für die nördliche Hemisphäre. Offenbar erhält man hieraus solche für die südliche Hemisphäre, wenn man überall statt θ, $-\theta$ einführt. Die Ausdrücke für den Druck, wie für die Geschwindigkeitscomponenten u und w änderen sich nicht, wohl aber für die Componente der Geschwindigkeit parallel zum Parallelkreis; sie wechselt ihr Vorzeichen, wenn man für $+\theta$, $-\theta$ setzt. Es folgt hieraus, dass die Strömungsrichtung der Luft unter denselben Umständen auf der südlichen Hemisphäre um einen rechten Winkel im Sinne der Erdrotation gedreht erscheinen muss.

Haben die beiden unendlichen Ebenen welche das Gebiet der Verticalströmung begrenzen, eine andere Lage, als *die* parallel zur y Achse (zum Parallelkreis), so ist der Fall leicht auf den oben gefundenen zurückführbar. Es sei ψ der Winkel, welchen die unendlichen Ebenen mit der positiven y Achse, d. h. mit der Richtung von W. nach O. einschliessen. Wir führen ein anderes Coordinatensystem ξ, η ein, welche so definirt sind, dass

$$\xi = x \cos\psi + y \sin\psi$$

$$\eta = y \cos\psi - x \sin\psi$$

Dann giebt $\xi = \frac{\delta}{2}$ die eine unendliche Ebene, und $\xi = -\frac{\delta}{2}$ die andere. Da ferner die Linien $\xi = Const.$, $\eta = Const.$ Geraden sind, und sich senkrecht schneiden, so ist

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial \eta^2} = 0 \qquad oder = \pm\gamma$$

erfüllt, so wie

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial \eta^2} = -\xi + 2\lambda \sin\theta$$

Wenn wir in die allgemeine Gleichung ((42) pag. 169 Vol. I) statt x, y, ξ, η einführen, so finden wir

$$\left(\frac{\partial \Delta W}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \Delta W}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)$$

$$+\left(\frac{\partial \Delta W}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial \Delta W}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial \varphi}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y}-\frac{\partial W}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x}-\frac{\partial W}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)$$
$$+(\kappa-\gamma)\Delta W+2\lambda \sin\theta.\gamma=0$$

Wenn wir hierin setzen

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \eta}=0 \qquad \frac{\partial \Delta W}{\partial \eta}=0 \qquad \frac{\partial W}{\partial \eta}=0$$

so dass wir und φ, W und ΔW als Functionen von ξ allein vorzustellen haben, so folgt

$$\frac{\partial \Delta W}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial W}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)+\frac{\partial \Delta W}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y}-\frac{\partial W}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)$$
$$+(\kappa-\gamma)\Delta W+2\lambda \sin\theta.\gamma=0$$

d. i.

$$\frac{\partial \Delta W}{\partial \xi}\frac{\partial \varphi}{\partial \xi}\left[\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2\right]+(\kappa-\gamma)\Delta W+2\lambda \sin\theta.\gamma=0$$

Da aber

$$\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2=\cos^2\psi+\sin^2\psi=1$$

so folgt

$$\frac{d\varphi}{d\xi}\frac{d\Delta W}{d\xi}+(\kappa-\gamma)\Delta W+2\lambda \sin\theta.\gamma=0$$

ganz wie die Gleichung (84), wenn wir hierin

$$\varphi=\pm\frac{\gamma\xi^2}{2}+const.$$

setzen.

Sind daher die beiden unendlichen Ebenen gegen den Parallelkreis um den Winkel ψ geneigt, so findet man die für diesen Fall giltige Lösung, wenn man in alle bisher aufgestellte Ausdrücke statt x, y, $x\cos\psi+y\sin\psi$, respect. $y\cos\psi-x\sin\psi$ einsetzt.

§ IX. *Mehrfache Wirbelbildungen in der Erdatmosphäre.*

Existiren in der Atmosphäre mehr als ein wirbelerfüllter cylindrischer Raum der Verticalströmung, so wird die Bewegung der Luft so verwickelt, und die dadurch verursachte analytische Schwierigkeit auch in den einfachsten Fällen so bedeutend, dass es bisher gelungen ist, die Aufgabe bis zum gewissen Grade zu lösen, und zwar nicht einmal strenge, sondern nur unter der Voraussetzung, dass die gegenseitigen Abstände der Wirbelgebiete gegen die Querschnitte derselben unendlich gross seien, oder was dasselbe ist, dass die Querschnitte der Wirbelgebiete gegen ihren Abstand, der dann endlich sein darf, unendlich klein seien.

Es seien in der Atmosphäre n wirbelerfüllte cylindrische Räume von gegebenem Querschnitte vorhanden, gebildet theils von vertical aufsteigender, theils von vertical niedersteigender Strömung, deren Geschwindigkeiten durch die Gleichungen

$$w_1 = \pm\gamma_1 z \qquad w_2 = \pm\gamma_2 z \qquad w_3 = \pm\gamma_3 z \qquad u.\ s.\ w.$$

bestimmt sind, wo das obere Zeichen im Fall der aufsteigenden Luftströmung, und das untere im Fall der niedersteigenden Luftströmung zu nehmen ist. Dabei wollen wir annehmen, dass das Gebiet der vertical aufsteigenden Strömung immer mit dem Wirbelgebiete zusammenfalle, und dass, wenn gleich das Gebiet der niedersteigenden Strömung möglicherweise mit dem Wirbelgebiet *nicht* zusammenfällt, und dieses gegen jenes unendlich gross ist, der Querschnitt des anticyklonalen Wirbelgebietes doch noch gegen die Entfernungen je zweier Wirbelgebiete unendlich klein sei.

Wir betrachten zunächst die Gleichung

$$\frac{\partial \Delta W}{\partial t}+\frac{\partial \Delta W}{\partial x}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}+\frac{\partial W}{\partial x}\right)+\frac{\partial \Delta W}{\partial y}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}-\frac{\partial W}{\partial x}\right)+(\kappa-\gamma)\Delta W+2\lambda \sin\theta.\gamma=0$$

wo W, φ Functionen von x, y, t sind, welche innerhalb des Wirbelgebietes, dem x, y gehören, die Bedingungen

$$\Delta W = -\zeta + 2\lambda \sin\theta \qquad \Delta\varphi = \mp \gamma$$

und ausserhalb desselben aber die Bedingungen

$$\Delta W = 0 \qquad \Delta\varphi = 0$$

erfüllen müssen.

Es seien $x_1\, y_1$, $x_2\, y_2$, x_3, y_3 *u. s. w.* die Coordinaten eines Punktes innerhalb des Wirbelgebietes 1, 2, 3, *u*, *s*, w., und, W_1, W_2, W_3, *u. s*, *w* und φ_1, φ_2, φ_2 *u*, *s*, *w*. die Lösungen der Gleichungen

$$\Delta W_1 = -\zeta_1 + 2\lambda \sin\theta \qquad \Delta W_2 = -\zeta_2 + 2\lambda \sin\theta$$

$$\Delta W_3 = -\zeta_3 + 2\lambda \sin\theta$$

oder allgemein

$$\Delta W_m = -\zeta_m + 2\lambda \sin\theta \tag{85}$$

und $\quad \Delta\varphi_1 = \mp \gamma_1 \qquad \Delta\varphi_2 = \mp \gamma_2, \qquad \Delta\varphi_3 \mp \lambda_3$

oder allgemein

$$\Delta\varphi_m = \mp \gamma_m \tag{86}$$

Wenn wir setzen

$$W = \sum_1^n W_m \qquad \varphi = \sum_1^n \varphi_m$$

so befriedigen diese Functionen für jeden Punkt ausserhalb der Wirbelgebiete die Bedingungen

$$\Delta W = 0 \qquad \Delta\varphi = 0$$

da diese Gleichungen linear und homogen sind. Für einen Punkt innerhalb eines Wirbelgebietes verschwinden in

$$\Delta W = \sum_1^n \Delta W_m \qquad \Delta\varphi = \sum_1^n \Delta\varphi_m$$

alle Glieder, bis auf ein Glied für das Wirbelgebiet, innerhalb dessen der Punkt x, y liegt, so dass für das Wirbelgebiet m

$$\Delta W = \Delta W_m = - \zeta_m + 2\lambda \sin \theta$$

$$\Delta \varphi = \Delta \varphi_m = \mp \gamma_m$$

Wir erhalten somit als Bestimmungsgleichung für W_m, wenn n Wirbelgebiete vorhanden sind,

$$\frac{\partial \Delta W_m}{\partial t} + \frac{\partial \Delta W_m}{\partial x}\left(\frac{\partial \sum_1^n \varphi_m}{\partial x} + \frac{\partial \sum_1^n W_m}{\partial y}\right) + \frac{\partial \Delta W_m}{\partial y}\left(\frac{\partial \sum_1^n \varphi_m}{\partial y} - \frac{\partial \sum_1^n W_m}{\partial y}\right)$$

$$+ (\kappa - \gamma)\, \Delta W_m \pm 2\lambda \sin \theta . \gamma_m = 0 \qquad (89)$$

Die Anzahl solcher Gleichungen ist n und reicht daher hin, für n Gebiete die Hilfsfunction W_n zu bestimmen.

Die Ausdrücke für die Geschwindigkeitscomponenten sind dann für das m'te Gebiet

$$u_m = \frac{\partial \sum_1^n W_m}{\partial y} + \frac{\partial \sum_1^n \varphi_m}{\partial x} \qquad v_w = - \frac{\partial \sum_1^n W_m}{\partial x} + \frac{\partial \sum_1^n \varphi_m}{\partial y}$$

$$w_m = \pm \gamma_m . z$$

während für das äussere wirbelfreie Gebiet im Allgemeinen

$$u = \frac{\partial \sum_1^n W_m}{\partial y} + \frac{\partial \sum_1^n \varphi_m}{\partial x} \qquad v = - \frac{\partial \sum_1^n \varphi_m}{\partial x} + \frac{\partial \sum_1^n \varphi_m}{\partial x}$$

$$w = 0$$

vorausgesetzt, dass die Grenzbedingungen erfüllt sind

$$- \frac{\partial \sum_1^n W_m}{\partial n_a} = \frac{\partial \sum_1^n W_m}{\partial n_i} \qquad - \frac{\partial \sum_1^n \varphi_m}{\partial n_a} = \frac{\partial \sum_1^n \varphi_m}{\partial n_i} \qquad (88)$$

wo n_a die nach Aussen und n_i die nach Innen des Wirbelgebietes m gezogene Normale bedeutet.

Wir setzen

$$W_m = \frac{1}{2\pi} \iint (\zeta_m - 2\,\lambda \sin\theta) \log \rho_m \, dx_m \, dy_m$$

$$\varphi_m = \mp \frac{\gamma_m}{2\pi} \iint \log \rho_m \, dx_m \, dy_m$$

wo

$$\rho_m = \sqrt{(x - x_m)^2 + (y - y_m)^2}$$

ist, und die Integration in dem ersteren Ausdruck über das Wirbelgebiet, und diejenige in dem letzteren Ausdruck über das Gebiet der Verticalströmung auszudehnen ist. Die Functionen

$$W = \frac{1}{2\pi} \sum_1^n \iint (\zeta_m - 2\lambda \sin\theta) \log \rho_m \, dx_m \, dy_m$$

$$\varphi = \frac{1}{2\pi} \sum_1^n \mp \gamma_m \iint \log \rho_m \, dx_m \, dy_m$$

genügen den Gleichungen (85) (86), so wie der Grenzbedingung (88) und wenn W_n gemäss der Gleichungen (87) für jedes vorhandene Wirbelgebiet bestimmt ist, so ist die Bewegung der Luft sowohl im Inneren als Äusseren der Wirbelgebiete vollständig bestimmt.

Nun vereinfachen sich die Gleichungen (87) wesentlich durch die Einführung der Annahme, dass die Querdimension der Wirbelgebiete gegen ihre Entfernungen zu einander unendlich klein sei. Wenn wir den ersten Differentialquotienten

$$\frac{\partial \sum_1^n W_m}{\partial x} = \frac{1}{2\pi} \sum_1^n \iint (\zeta_m - 2\lambda \sin\theta) \frac{(x - x_m)}{\rho_m^2} \, dx_m \, dy_m$$

betrachten, so sieht man, da ρ_n in jedem Summengliede, dessen Index nicht m ist, unendlich gross ist, dass dann $\frac{x - x_n}{\rho_n^2}$ unendlich klein ist, wie $\frac{1}{\rho_n}$. Jedes Glied, dessen Index nicht m ist, daher unendlich klein gegen dasjenige, dessen Index m ist.

Bezeichnen wir die Summe der Gleider, welche den Index m nicht haben, mit R_m, so dass für das Wirbelgebiet m

$$R_m = \frac{1}{2\pi}\sum_1^{n-1}\iint(\zeta_m - 2\lambda \sin\theta)\, log(\sqrt{(x-x_m)^2+(y-y_m)^2}\, dx_m'\, dy_m'$$

Die Coordinaten $x_1\ y_1,\ x_2,\ y_2\ u.\ s.\ w.$ sind unendlich gross, da die Entfernungen der anderen $(n-1)$ Wirbelgebiete unendlich gross sind, und da der Spielraum der Coordinaten x, y, insofern sie einen Punkt innerhalb des Wirbelgebietes m bestimmen, dagegen unendlich klein ist, so können wir mit Vernachlässigung von unendlich kleiner Grösse, wie $\frac{1}{\rho_1}$ etc., in R_m x, y, mit den Coordinaten eines gewissen mitteleren Punktes in dem Wirbelgebiete (m) vertauchen, so dass wir schreiben können

$$R_m = \frac{1}{2\pi}\sum_1^{(n-1)} log\left(\sqrt{(x_n-x_m)^2+(y_n-y_m)}\right)\iint(\zeta_m - 2\lambda \sin\theta)\, dx_m\, dy_m$$

Diese Grösse hängt nun von x, y gar nicht ab. Es folgt daher, dass innerhalb des Wirbelgebietes m überall gesetzt werden können, mit Vernachlässigung unendlich kleiner Grösse, wie $\frac{1}{\rho_1^2}$ etc

$$\frac{\partial R_m}{\partial x} = \frac{\partial R_m}{\partial x_m} = A_m \qquad\qquad \frac{\partial R_m}{\partial y} = \frac{\partial R_m}{\partial y_m} = B$$

Bezeichnet man ferner die Summe der Glieder in $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial y}$, deren Indix nicht m ist, mit R_m', so folgt durch dieselbe Betrachtung, wie oben, dass man überall setzen kann

$$\frac{\partial R_m'}{\partial x} = \frac{\partial R_m'}{\partial x_m} = A_m' \qquad\qquad \frac{\partial R_m'}{\partial y_m} = \frac{\partial R_m'}{\partial x_m} = B_m'$$

Diese Grössen A_m, B_m, A_m', B_m' hängen von x, y nicht ab, sind aber im allgemeinen Functionen von der Zeit, welche zu ermitteln sind, gemäss der Differentialgleichungen, welche wir noch aufzustellen haben.

Die Gleichung (89) wird dann

$$\frac{\partial \Delta W_m}{\partial t} + \frac{\partial \Delta W_m}{\partial x}\left(\frac{\partial W_m}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_m}{\partial x} + B_m + A'_m\right) + \frac{\partial \Delta W_m}{\partial y}$$
$$\left(\frac{\partial \varphi_m}{\partial y} - \frac{\partial W_m}{\partial x} + B'_m - A_m\right) + (\kappa - \gamma)\Delta W_m + 2\lambda \sin\theta . \gamma_m = o. \qquad (89\,a)$$

Macht man hierin

$$W_m = W'_m - (B'_m - A_m)\, x - (A'_m + B_m)\, y. \qquad (89\,b)$$

was die Bedingungsgleichung, welcher W_m genügt, ebenfalls erfüllt, wenn W'_m einer solchen genügt, da

$$\Delta W_m = \Delta W'_m - \Delta\,[(B'_m - A_m)\, x + (A'_m + B_m)\, y] = \Delta W'_m.$$

ist, so folgt aus (89 a) als Bestimmungsgleichung der neuen Function W'_m augenblicklich

$$\frac{\partial \Delta W_m}{\partial t} + \frac{\partial \Delta W'_m}{\partial x}\left(\frac{\partial W'_m}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_m}{\partial x}\right) + \frac{\partial \Delta W'_m}{\partial y}\left(\frac{\partial \varphi_m}{\partial y} - \frac{\partial W'_m}{\partial x}\right)$$
$$+ (\kappa + \gamma)\Delta W'_m + 2\lambda \sin\theta . \gamma_m = 0$$

Es erhellt hieraus, dass der Einfluss, welchen die Rotationsgeschwindigkeit eines Lufttheilchens in einem Wirbelgebiete von $(n-1)$ anderen Wirbelgebieten erleidet, unter diesen Umständen hinreichend berücksichtigt ist, wenn man W_m für einen Punkt innerhalb des Wirbelgebietes so bildet, als wäre das Wirbelgebiet allein vorhanden und der so gebildeten Function W_m das Glied $-(B'_m - A_m)\, x - (A'_m + B_m)\, y$ hinzufügt.

§ X. *Luftbewegung im äusseren wirbelfreien Gebiete bei mehrfachen Wirbelbildungen.*

Für das Gebiet der Erdatmosphäre, wo die Lufttheilchen keine andere Rotationsgeschwindigkeit haben, als die durch Erdrotation veranlasste, lassen sich die Bewegungen der Luft auch hier ganz allgemein verfolgen, wenn sie stationär sind. Die allgemeine Lösung für ein solches äussere Gebiet ist wieder

$$W = \frac{2\lambda \sin\theta}{\kappa} \cdot \varphi$$

Mithin

$$W = \frac{2\lambda \sin \theta}{\kappa} \sum_1^n \varphi_m$$

Hieraus erhalten wir als Componenten der Geschwindigkeit

$$u = \frac{2\lambda \sin \theta}{\kappa} \sum_1^n \frac{\partial \varphi_m}{\partial y} + \sum_1^n \frac{\partial \varphi_m}{\partial x}$$

$$v = -\frac{2\lambda \sin \theta}{\kappa} \sum_1^n \frac{\partial \varphi_m}{\partial x} + \sum_1^n \frac{\partial \varphi_m}{\partial y}$$

Die Differentialgleichung für die Windbahn ist, wenn wir setzen

$$K = \frac{2\lambda \sin \theta}{\kappa}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sum_1^n \frac{\partial \varphi_m}{\partial y} - K \sum_1^n \frac{\partial \varphi_m}{\partial x}}{\sum_1^n \frac{\partial \varphi_m}{\partial x} + K \sum_1^n \frac{\partial \varphi_m}{\partial y}}$$

woraus folgt

$$K\left(\sum_1^n \frac{\partial \varphi_m}{\partial y} dy + \sum_1^n \frac{\partial \varphi_m}{\partial x} dx\right) = \sum_1^n \frac{\partial \varphi_m}{\partial y} dx - \sum_1^n \frac{\partial \varphi_m}{\partial x} dy \qquad (89\ c)$$

Behufs der Integration dieser Gleichung betrachten wir ein Integral von der Form

$$\psi = \frac{1}{2}\left(\int \sum_1^n \frac{\partial \varphi_m}{\partial y} dx - \int \sum_1^n \frac{\partial \varphi_m}{\partial x} dy\right)$$

Es ist

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{1}{2}\left(\sum_1^n \frac{\partial \varphi_m}{\partial y} - \int \sum_1^n \frac{\partial^2 \varphi_m}{\partial x_2} dy.\right)$$

da aber vermöge $\Delta \varphi_m = 0$, $\frac{\partial^2 \varphi_m}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 \varphi_m}{\partial y^2}$ ist, so folgt,

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \sum_1^n \frac{\partial \varphi_m}{\partial y} \qquad (90)$$

Bildet man ferner $\frac{\partial \psi}{\partial y}$, so findet man,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\sum_1^n \frac{\partial \varphi_m}{\partial x} \qquad (91)$$

die Substitution der Ausdrücke (90) (91) in (89 c) ergiebt

$$K\left(\sum_1^n \frac{\partial \varphi_m}{\partial x} dx + \sum_1^n \frac{\partial \varphi_m}{\partial y} dy\right) = -\frac{\partial \psi}{\partial y} dy - \frac{\partial \psi}{\partial x} dx = -d\psi$$

Mithin folgt durch Integration

$$K \sum_1^n \varphi_m + \psi = const.$$

d. h.

$$K \sum_1^n \varphi_m + \frac{1}{2}\left[\int \sum_1^n \frac{\partial \varphi_m}{\partial y} dx - \int \sum_1^n \frac{\partial \varphi_m}{\partial x} dy\right] = const.$$

Wenn nun φ_m lauter symmetrische Functionen von $x - x_m$, $y - y_m$ sind, wo x_m, y_m die Coordinaten eines gewissen mitteleren Punkt in dem Wirbelgebiete (m) bedeuten, so lässt sich diese Gleichung der Windbahn in eine andere Form bringen. Wir setzen

$$\sum_1^n \psi_m = \frac{1}{2} \sum_1^n \left(\int \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_m} dy_m - \int \frac{\partial \varphi_m}{\partial y_m} dx_m\right)$$

Da φ_n symmetrisch in Bezug auf $(x - x_m)$, $(y - y_m)$ gebaut sein soll so ist

$$\frac{\partial \varphi_m}{\partial x_m} = -\frac{\partial \varphi_m}{\partial x} \qquad \frac{\partial \varphi_m}{\partial y_m} = -\frac{\partial \varphi_m}{\partial y}$$

Mithin

$$\sum_1^n \psi_m = -\frac{1}{2} \sum_1^n \int \frac{\partial \varphi_m}{\partial x} dy_m + \frac{1}{2} \sum_1^n \int \frac{\partial \varphi_m}{\partial y} dx_m = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \int \sum_1^n \varphi_m dy_m$$
$$+ \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} \int \sum_1^n \varphi_m dx_m$$

Es ist andererseits

$$\sum_1^n \int \varphi_m dy_m = \sum_1^n \iint \frac{\partial \varphi_m}{\partial y} dy_m dy = -\sum_1^n \iint \frac{\partial \varphi_m}{\partial y_m} dy_m dy = -\sum_1^n \int \varphi_m dy$$
$$\sum_1^n \int \varphi_m dx_m = \sum_1^n \iint \frac{\partial \varphi_m}{\partial x} dx_m dx = -\sum_1^n \iint \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_m} dx_n dx = -\sum_1^n \int \varphi_m dx$$

so folgt

$$\sum_1^n \psi_m = \frac{1}{2} \int \sum_1^n \frac{\partial \varphi_m}{\partial x} dy - \frac{1}{2} \int \sum_1^n \frac{\partial \varphi_m}{\partial y} dx \text{ d. h.} = -\psi$$

Es folgt hieraus als Gleichung der Windbahn

$$\sum_1^n \left[K\varphi_m + \frac{1}{2}\int \left(\frac{\partial \varphi_m}{\partial y_m} dx_m - \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_m} dy_m \right) \right] = const.$$

Drückt man die Variabeln y_m, x_m in Polarcoordinaten aus, so dass

$$y - y_m = \rho_m \sin X_m \qquad (x - x_m) = \rho_m \cos X_m$$

so erhält man leicht

$$\sum_1^n \left(\kappa\varphi_m + \frac{1}{2}\int \frac{\partial \varphi_m}{\partial \log \rho_m} d X_m - \frac{1}{2}\int \frac{\partial \varphi_m}{\partial X_m} d \log \rho_m \right) = const.$$

Eine particuläre Lösung der Gleichung $\Delta\varphi_m = 0$, ist

$$\varphi_m = \mu_m \log \rho_m$$

wo μ_m eine gewisse Constante ist, welche noch näher bestimmt werden muss. Es folgt für diesen Fall unmittelbar

$$\sum_1^n \mu_m \ (K \log \rho_m + \frac{1}{2} \ X_m) = Const.$$

oder indem man wieder zum rechtwinkeligen Coordinatensystem zurückkehrt

$$\sum_1^n \mu_m \left(K \log \sqrt{(x-x_m)^2 + (y-y_m)^2} + \frac{1}{2} \ arctag \ \frac{(y-y_m)}{(x-x_m)} \right) = const. \quad (92)$$

also eine transcendente Spirale von ausserordentlich verwickelter Natur.

Der Deviationswinkel ist auch hier constant, so dass

$$tag \ i = \frac{2\lambda \sin \theta}{\kappa}$$

Die Windbahnen können hiernach gezeichnet werden, wenn die Isodynamen bekannt sind. Als Gleichung dieser erhalten wir für unseren Fall

$$\Phi = -\left(\kappa + \frac{4\lambda \sin^2\theta}{\kappa} \right) \sum_1^n \varphi_m$$

woraus für unseren besonderen Fall hervorgeht

$$\Phi = -\left(\kappa + \frac{4\lambda^2 sin^2\,\theta}{\kappa}\right)\sum_1^n \mu_m\, log \sqrt{(x-x_m)^2+(y-y_m)^2}$$

Als Ausdruck für den Druck findet man hieraus, da die Resultirende der Geschwindigkeit

$$= \sqrt{\left(1 + \frac{4\lambda^2 sin^2\,\theta}{\kappa^2}\right)\left[\left(\frac{\partial \sum_1^n \varphi_m}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \sum_1^n \varphi_m}{\partial y}\right)^2\right]}$$

ist,

$$p = Const. - \mu\left(\kappa + \frac{4\lambda^2 sin^2\,\theta}{\kappa}\right)\sum_1^n \varphi_m$$

$$-\frac{\mu}{2}\left(1 + \frac{4\lambda^2 sin^2\,\theta}{\kappa^2}\right)\left[\left(\frac{\partial \sum_1^n \varphi_m}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \sum_1^n \varphi_m}{\partial y}\right)^2\right] + \mu G$$

woraus für unseren speciellen Fall hervorgeht

$$p = Const. - \mu\left(\kappa + \frac{4\lambda^2 sin^2\,\theta}{\kappa}\right)\sum_1^n \mu_m\, log. \sqrt{(x-x_m)^2+(y-y_m)^2}$$

$$-\frac{\mu}{2}\left(1 + \frac{4\lambda^2 sin^2\,\theta}{\kappa^2}\right)\left[\left(\sum_1^n \frac{\mu_m(x-x_m)}{(x-x_m)^2+(y-y_m)^2}\right)^2\right.$$

$$\left.+\left(\sum_1^n \frac{\mu_m(y-y_m)}{(x-x_m)^2+(y-y_m)^2}\right)^2\right] + \mu G$$

die Isobaren fallen demnach in diesem Fall mit Isodynamen nicht zusammen.

§ X. *Eigenbewegungen der Wirbelgebiete.*

Die also bestimmten Windbahnen wie Isodynamen, und Isobaren verändern indessen ihre Lage gegen die Axen der Coordinaten, wie ihre Gestalten fortwährend., denn ein jedes Wirbelgebiet verharrt nicht an seiner Stelle, sondern es bewegt sich um einen gewissen ruhenden Punkt in Folge der Luftströmungen, welche die anderen Wirbelgebiete in der Atmosphäre hervorbringen. Da nun $x_1\, y_1$, $x_2\, y_2$

$u.\ s.\ w.$ wie festgesetzt wurde, einen gewissen mittleren Punkt je eines Wirbelgebietes bestimmen, so ist nöthig $x_1\ y_1\ x_2\ y_2,\ u.\ s.\ w,$ als Functionen von der Zeit t darzustellen.

Behufs dieses wollen wir die Coordinaten $x_1\ y_1$ etc. so definiren, dass für jedes Wirbelgebiet

$$x_m\iint(\zeta_m - 2\lambda \sin\theta)\, d\omega_m = \iint(\zeta_m - 2\lambda \sin\theta)\, x\, d\omega_m$$

$$y_m\iint(\zeta_m - 2\lambda \sin\theta)\, d\omega_m = \iint(\zeta_m - 2\lambda \sin\theta)\, y\, d\omega_m$$

wo $d\omega_m$ ein Querschnittelement des Wirbelgebietes bedeutet, und nennen diesen Punkt den Schwerpunkt des entsprechenden Wirbelgebietes. Da nun die Bewegung stationär ist, und die Grössen, ζ_m, $d\omega_m$ von t nicht abhängen, so folgt durch Differentiation

$$\frac{dx_m}{dt}\iint(\zeta_m - 2\lambda \sin\theta)\, dx_m = \iint(\zeta_m - 2\lambda \sin\theta)\, \frac{dx}{dt}\, d\omega_m$$

$$\frac{dy_m}{dt}\iint(\zeta_m - 2\lambda \sin\theta)\, d\omega_m = \iint(\zeta_m - 2\lambda \sin\theta)\, \frac{dy}{dt}\, d\omega_m$$

Setzt man hierin

$$\frac{dx}{dt} = u = \sum_1^n \frac{\partial W_m}{\partial y} + \sum_1^n \frac{\partial \varphi_m}{\partial x} \qquad W_m = \frac{1}{2\pi}\int(\zeta'_m - 2\lambda \sin\theta)\, \log \rho_m\, d\omega'_m$$

$$\frac{dy}{dt} = v = -\sum_1^n \frac{\partial W_m}{\partial x} + \sum_1^n \frac{\partial \varphi_m}{\partial y} \qquad \varphi_m = \mp\frac{\gamma_m}{2\pi}\int \log \rho_m\, d\omega'_m$$

so kommt

$$\frac{dx_m}{dt}\iint(\zeta_n - 2\lambda \sin\theta)\, d\omega_n$$

$$= \frac{1}{2\pi}\sum_1^n\iint(\zeta'_m - 2\lambda \sin\theta)\, \frac{(y-y'_m)}{\rho_m^2}\, (\zeta_n - 2\lambda \sin\theta)\, d\omega_n\, d\omega'_m$$

$$+ \frac{1}{2\pi}\sum_1^n \mp \gamma_m\iint\frac{(x-x'_m)}{\rho_m^2}\cdot (\zeta'_m - 2\lambda \sin\theta)\, d\omega_n\, d\omega'_m$$

$$\frac{dy_m}{dt}\iint(\zeta_n - 2\lambda \sin\theta)\, d\omega_n$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\sum_1^n\iint(\zeta'_m - 2\lambda \sin\theta)\, (\zeta_n - 2\lambda \sin\theta)\, \frac{(x-x_m)}{\rho_m^2}\, d\omega_n\, d\omega'_m$$

$$+ \frac{1}{2\pi}\sum_1^n \mp \gamma_m\iint\frac{(y-y'_m)}{\rho_m^2}\, (\zeta'_m - 2\lambda \sin\theta)\, d\omega_n\, d\omega'_m$$

Das m'te Glied der ersten Reihe in der ersten Gleichung verschwindet, denn; vertauscht man in dem m'ten Gliede x' mit x, was offenbar auf das schliessliche Resultat der Integration gleichgiltig ist, so erhält man

$$-\iint(\zeta_m - 2\lambda\, sin\ \theta)(\zeta'_m - 2\lambda\, sin\ \theta)\ \frac{(x'_m - x)}{\rho^2_m}\, d\omega'_m\, d\omega_m$$
$$= \iint(\zeta'_m - 2\lambda\, sin\ \theta)(\zeta_m - 2\lambda\, sin\ \theta)\ \frac{(x - x'_m)}{\rho^2_m}\, d\omega_m\, d\omega'_m$$

woraus nothwendig vervorgeht, dass

$$\iint(\zeta_m - 2\lambda\, sin\ \theta)(\zeta'_m\ 2\lambda\, sin\ \theta)\ \frac{(x - x'_m)}{\rho'_m}\, d\omega_m\, d\omega'_m = 0$$

Was das m'te Glied in der zweiten Reihe anbetrifft, so verschwindet es im allgemeinen nicht. Um zu untersuchen, ob es überhaupt verschwinden kann, setzen wir

$$\Omega = \int log\ \rho_m\, d\omega_m$$

wo die Integration über das Gebiet der Verticalströmung auszudehnen ist, so dass wir erhalten

$$\iint(\zeta'_m - 2\lambda\, sin\ \theta)\left(\frac{x - x'_m}{\rho^2_m}\right) d\omega'_m\, d\omega'_m = \int(\zeta'_m - 2\lambda\, sin\ \theta)\ \frac{\partial\Omega}{\partial x}\, d\omega'_m$$

Da nun aber

$$(\zeta'_m - 2\lambda\, sin\theta)\ \frac{\partial\Omega}{\partial x} = \frac{\partial[(\zeta'_m - 2\lambda\, sin\ \theta)\Omega]}{\partial x} - \Omega\,\frac{\partial\zeta'_m}{\partial x}$$

so folgt

$$\iint(\zeta'_m - 2\lambda\, sin\ \theta)\ \frac{(x - x_m)}{\rho^2_m}\, d\omega_m\, d\omega'_m = \int\frac{\partial[\zeta'_m - 2\lambda\, sin\ \theta)\,\Omega]}{\partial x}\, d\omega'_m - \int\Omega\,\frac{\partial\zeta'_m}{\partial x}\, d\omega'_m$$

Die Function Ω hängt nur von der Gestalt der cylindrischen Gebietes der Verticalströmung ab; sie erleidet keinerlei Sprünge, wenn der Punkt x, y durch die Grenzfläche der Verticalströmung hindurchgeht, und änderte nirgends ihr Vorzeichen. Bezeichnet man ein Umfangselement des Querschnittes des Wirbelgebietes mit *ds*, die nach Innen gezogene Normale des Umfangs mit n, so lässt sich das erste Glied in dem vorstehenden Ausdrück auch so schreiben

$$-\int \overline{\Omega}\,(\overline{\zeta}_m - 2\lambda \sin\theta)\cos(nx)\,ds$$

wo $\overline{\Omega}$, $\overline{\zeta}_m$ den Werth von Ω und ζ_n an der Grenzfläche des Wirbelgebietes bedeutet. Nun haben die Luftttheilchen an der Grenzfläche keine andere Rotationsgeschwindigkeit als durch die Erdrotation. hervorgerufene, so dass demnach $\overline{\zeta}_n = 2\lambda \sin\theta$ ist; das Integral über den Umfang des Querschnittes verschwindet.

Wir erhalten somit

$$\iint (\zeta'_m - 2\lambda \sin\theta)\frac{(x-x'_m)}{\rho^2}\,d\omega'_m = -\int \Omega \frac{\partial \zeta'_m}{\partial x}\,d\omega'_m$$

Das rechter Hand stehende Integral ist offenbar eine Grösse wesentlich abhängig von der Gestalt des Wirbelgebietes und von der Art und Weise, wie ζ_m in dem Wirbelgebiete vertheilt ist. Wenn nun die Grenzlinie des Wirbelgebiets so beschaffen ist, dass durch passende Verlegung der Coordinatenaxen, das Wirbelgebiet durch $x-$, respect. $y-$Achse in je zwei vollkommen symmetrische Flächenstücke getheilt werden kann, so dass Ω eine positive symmetrische Function von x, y, wird, und wenn ζ_m, welches sein Vorzeichen innerhalb des Wirbelgebietes nicht änderen soll, so in Bezug auf die Coordinatenaxen vertheilt ist, dass auch ζ_m eine positive symmetrische Function von x, y und daher $\frac{\partial \zeta_m}{\partial x}$ wie $\frac{\partial \zeta_m}{\partial y}$, für positives x, respect. y positiv und für negatives x, respect. y, negativ wird, und dem absoluten Werthe nach gleich wird für das dem absoluten Werthe nach nämliche x und y, so verschwindet das Integral $\int \Omega \frac{\partial \zeta'_m}{\partial x} d\omega'_m$. Da die Gleider, die unter diesen Umständen verschwinden

$$\iint(\zeta'_m-2\lambda\sin\theta)(\zeta_m-2\lambda\sin\theta)\left(\frac{y-y'_m}{\rho_m^2}\right)d\omega_m d\omega'_m$$

$$\mp\gamma_m\iint(\zeta'_m-2\lambda\sin\theta)\left(\frac{x-x'_m}{\rho_m^2}\right)d\omega_m d\omega'_m$$

$$-\iint(\zeta'_m-2\lambda\sin\theta)(\zeta_m-2\lambda\sin\theta)\left(\frac{x-x'_m}{\rho_m^2}\right)d\omega_m d\omega'_m$$

$$\mp\gamma_m\iint(\zeta'_m-2\lambda\sin\theta)\left(\frac{y-y'_m}{\rho_m^2}\right)d\omega_m d\omega'_m$$

die Componenten derjenigen Geschwindigkeit bedeuten, welche das Wirbelgebiet (m) sich selbst ertheilt haben würde, wenn es allein in der Erdatmosphäre existirte, so folgt, dass ein jedes Wirbelgebiet sich selbst keine fortschreitende Bewegung zu ertheilen mag, wenn es symmetrisch in Bezug auf einen inneren Punkt gebildet und die Rotationsgeschwindigkeit eines jeden Lufttheilchens gleichfalls symmetrisch in Bezug auf denselben Punkt vertheilt ist. Wenn nicht, dann wohl. Dann sind $-\int\Omega\,\frac{\partial\zeta'_m}{\partial x}\,d\omega'_m$ und $-\int\Omega\,\frac{\partial\zeta'_m}{\partial y}\,d\omega_m$ für jedes Wirbelgebiet individuelle Constanten, welche wir mit α_m und β_m bezeichnen wollen, unabhängig von x_m und y_m, also auch von der Zeit. Denn setzt man

$$x=x_m+\alpha\,\xi+\beta\,\eta\qquad \alpha=\sin\psi\qquad \beta=\cos.\psi$$

$$y=y_m+\beta\,\xi-\alpha\,\eta$$

wo ζ, η die neuen Coordinaten sind, und ψ der Winkel ist, welchen die ξ Achse mit der x Achse einschliesst. Die Function Ω ändert sich gar nicht, da ρ_m^2 sich nicht ändert, und so auch ζ_m. Es ist nämlich

$$\frac{dx}{dt}=\frac{dx_m}{dt}+\alpha\frac{d\xi}{dt}+\beta\frac{d\eta}{dt}\qquad\qquad \frac{dy}{dt}=\frac{dy_m}{dt}+\beta\frac{d\xi}{dt}-\alpha\frac{d\eta}{dt}$$

oder

$$u_m=u_m+\alpha u'+\beta v'\qquad v=v_m+\beta u'-\alpha v'$$

Hieraus folgt durch Differentiation, da u_m und v_m von x, y nicht abhängt

$$\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u'}{\partial \xi}(\alpha\,\beta-\alpha\,\beta)+\frac{\partial v'}{\partial y}(-\alpha\,\beta+\alpha\,\beta)$$
$$+\frac{\partial v'}{\partial \xi}(\alpha^2+\beta^2)-\frac{\partial u'}{\partial y}(\alpha^2+\beta^2)$$

d. h, da $\alpha^2+\beta^2=1$ ist

$$\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v'}{\partial \xi}-\frac{\partial u'}{\partial \eta}$$

Da ferner

$$\frac{\partial \zeta'}{\partial x}=\frac{\partial \zeta'}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial \zeta'}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}=\frac{\partial \zeta'}{\partial \xi}\beta-\frac{\partial \zeta'}{\partial \eta}\alpha.$$
$$\frac{\partial \zeta'}{\partial y}=\frac{\partial \zeta'}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial \zeta'}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}=\frac{\partial \zeta'}{\partial \xi}\alpha+\frac{\partial \zeta'}{\partial \eta}\cdot\beta.$$

so folgt

$$\int\Omega\frac{\partial \zeta'_m}{\partial x}d\omega'_m=\beta\int\Omega\frac{\partial \zeta'_m}{\partial \xi}d\omega'_m-\alpha\int\Omega\frac{\partial \zeta'_m}{\partial \eta}d\omega'_m=-\alpha_m$$
$$\int\Omega\frac{\partial \zeta'_m}{\partial y}d\omega'_m=\alpha\int\Omega\frac{\partial \zeta'_m}{\partial \xi}d\omega'_m+\beta.\int\Omega\frac{\partial \zeta'_m}{\partial \eta}d\omega'_m=-\beta_m$$

was das oben Gesagte enthält.

Als Bewegungsgleichungen für den Schwerpunkt des *m*'ten Wirbelgebietes erhalten wir somit

$$\frac{dx_m}{dt.}\int(\zeta_m-2\lambda\sin\theta)\,d\omega_m=\mp\frac{\gamma_m\alpha_m}{2\pi}$$
$$+\sum_1^{(n-1)}\frac{1}{2\pi}\iint\frac{(\zeta_m-2\lambda\sin\theta)(\zeta'_m-2\lambda\sin\theta)(y-y'_m)}{\rho^2_m}d\omega_m\,d\omega'_m$$
$$+\sum_1^{(n-1)}\mp\frac{\gamma_n}{2\pi}\iint\frac{(\zeta'_m-2\lambda\sin\theta)(x-x'_m)}{\rho^2_m}d\omega_m\,d\omega'_m$$

$$\frac{dy_m}{dt.}\int(\zeta_m-2\lambda\sin\theta)\,d\omega_m=\mp\frac{\gamma_m\beta_m}{2\pi}$$
$$-\sum_1^{(n-1)}\frac{1}{2\pi}\iint\frac{(\zeta'_m-2\lambda\sin\theta)(\zeta_m-2\lambda\sin\theta)(x-x'_m)}{\rho^2}d\omega_m\,d\omega'_m$$
$$+\sum_1^{(n-1)}\mp\frac{\gamma_m}{2\pi}\iint\frac{(\zeta'_m-2\lambda\sin\theta)(y-y'_m)}{\rho^2_m}d\omega_m\,d\omega'_m$$

Diejenigen für andere Wirbelgebiete sind nach diesem Muster aufzustellen.

Die unter dem Summenzeichen stehenden Ausdrücke sind als Functionen von den Coordinaten zu bestimmen, welche den Schwerpunkt eines jeden Wirbelgebietes bestimmen, was leicht bewerkstelligt werden kann, da ζ_m sich nicht ändert, wenn man die Coordinatenaxen, worauf die Integration bezogen ist, anderes verlegt.

Wesentlich einfacher gestaltet sich die Sache indessen, wenn wir annehmen, dass die Querschnitte eines jeden Wirbelgebietes unendlich klein sei gegen ihre gegenseitigen Abstände. Wir betrachten zunächst eine Function von der Form

$$W_m = \frac{1}{2\pi} \sum_1^{(n-1)} \int (\zeta_m - 2\lambda \sin \theta) \log (\rho_{n.m}) \, d\omega_m$$

wo ρ_{nm} die Entfernung des Schwerpunktes x_m y_m im m'ten Wirbelgebiete von einem Punkt im n'ten Wirbelgebiete bedeutet, so dass

$$\rho_{nm} = \sqrt{(x_m - x_m)^2 + (y_n - y_m)^2}$$

ist. Differentirt man nun W_m nach x_m, so ist

$$\frac{\partial W_m}{\partial x_m} = -\frac{1}{2\pi} \sum_1^{n-1} \int (\zeta_m - 2\lambda \sin \theta) \frac{(x_n - x_m)}{\rho^2_{n.m}} \, d\omega_m$$

Nun ist $\frac{x_n - x_m}{\rho_{nm}}$ der Cosinus des Winkels, welchen eine den Schwerpunkt des m'ten Gebietes mit einem Punkt des n'ten Gebietes verbindende Linie mit der x Achse einschliesst. Ist nun der Querschnitt des m'ten Gebietes unendlich klein gegen die Entfermung ρ_{nm}, so unterscheidet sich ρ_{nm} um unendliches Kleines von der Entfernung je zweier Schwerpunkte, und $\frac{x_n - x_m}{\rho_{nm}}$ auch um unendlich Kleines von dem Cosinus des Winkels, welchen die Verbindungslinien zweier Schwerpunkte im Gebiete n und m mit

x Achse einschliesst, so kann man mit Vernachlässigung unendlich kleiner Grösse höherer Ordnung als $\frac{1}{\rho_{mn}}$ setzen

$$\frac{\partial W_m}{\partial x_m} = \frac{1}{2\pi}\left[\sum_1^{(n-1)} \frac{(x_m - x_n)}{\rho_{mn}^2} \cdot \int (\zeta_m - 2\lambda \sin \theta)\, d\omega_m\right]$$

wo x_n, y_n jetzt die Coordinaten des Schwerpunktes im n'ten Gebiete bedeuten. Oder indem man setzt

$$\int (\zeta_m - 2\lambda \sin \theta) = M_m.$$

erhält man

$$\frac{\partial W_m}{\partial x_m} = \frac{1}{2\pi} \sum_1^{(n-1)} M_n \frac{\partial \log (\rho_{mn})}{\partial x_m}$$

Auf ganz dieselbe Weise erhält man

$$\frac{\partial W_m}{\partial x_m} = \frac{1}{2\pi} \sum_1^{(n-1)} M_n \frac{\partial \log (\rho_{mn})}{\partial y_m}$$

Setzt man ferner

$$\varphi_m = \frac{1}{2\pi} \sum_1^{(n-1)} \mp \gamma_n \int \log \rho_{nm}\, d\omega_n$$

so erhält man durch dieselbe Betrachtung

$$\frac{\partial \varphi_m}{\partial x_m} = \frac{1}{2\pi} \sum_1^{(n-1)} \mp \lambda_n Q_n \frac{\partial \log \rho_{nm}}{\partial x_m} \qquad \frac{\partial \varphi_n}{\partial y_n} = \frac{1}{2\pi} \sum_1^{(n-1)} \mp \gamma_n Q_n \frac{\partial \log \rho_{mn}}{\partial y_m}$$

wo

$$\int d\omega_n = Q_n$$

ist, demnach den Querschnitt des n'ten Gebietes der Verticalströmung bedeutet

Betrachten wir andererseits ein Integral von der Form

$$\int (\zeta_m - 2\lambda \sin \theta) \frac{(x_n - x_m)}{\rho_m^2}\, d\omega_m.$$

wo x_m y_m einen Punkt im m'ten Wirbelgebiet, und x_n y_n den Schwerpunkt des n'ten Wirbelgebietes bestimmen. Ist nun wieder ρ_m gegen dem Querschnitt des m'ten Gebietes unendlich gross, so ist dieses Integral ersetzbar durch

$$\frac{x_n - x_m}{\rho_{nm}} \int (\zeta_m - 2\lambda \sin\theta)\, d\omega_m = \frac{\partial \log \rho_{nm}}{\partial x_n} M_m.$$

Es geht demnach aus dieser Betrachtung hervor: Ist der Querschnitt eines jeden Wirbelgebietes unendlich klein gegen die gegenseitigen Abstände, so ist für das n'te Wirbelgebiet

$$\sum_1^{n-1} \frac{1}{2\pi} \iint (\zeta_m - 2\lambda \sin\theta)(\zeta'_m - 2\lambda \sin\theta) \frac{(x - x_m)}{\rho_m} d\omega_n d\omega'_m$$
$$= \frac{M_n}{2\pi} \sum_1^{(n-1)} M_m \frac{\partial \log \rho_{nm}}{\partial x_n}$$

$$\frac{1}{2\pi} \sum_4^{(n-1)} \iint (\zeta_n - 2\lambda \sin\theta)(\zeta'_m - 2\lambda \sin\theta) \frac{(y - y_m)}{\rho_m^2} d\omega_n d\omega'_m$$
$$= \frac{M_n}{2\pi} \sum_1^{n-1} M_m \frac{\partial \log \rho_{nm}}{\partial y_n}$$

$$\frac{1}{2\pi} \sum_1^{n-1} \mp \gamma_m \iint (\zeta_n - 2\lambda \sin\theta) \frac{x - x_m}{\rho_m^2} d\omega_n d\omega'_m = \frac{M_n}{2\pi} \sum_1^{(n-1)} \mp \gamma_m Q_m \frac{\partial \log \rho_{nm}}{\partial x_n}$$

$$\frac{1}{2\pi} \sum_1^{n-1} \mp \gamma_m \iint (\zeta_n - 2\lambda \sin\theta) \frac{(y - y_m)}{\rho_m^2} d\omega_n d\omega'_m = \frac{M_n}{2\pi} \sum_1^{n-1} \mp \gamma_m Q_m \frac{\partial \log \rho_{nm}}{\partial y_n}$$

Mithin erhalten wir als Bewegungsgleichungen des Schwerpunktes des n'ten Wirbelgebietes

$$\frac{dx_n}{dt} = \frac{1}{2\pi} \sum_1^{n-1} M_m \frac{\partial \log \rho_{mn}}{\partial y_n} + \frac{1}{2\pi} \sum_1^{n-1} \mp \gamma_m Q_m \frac{\partial \log \rho_{nm}}{\partial x_n} \mp \frac{\gamma_n \alpha_n}{2\pi M_n}$$

$$\frac{dy_n}{dt} = - \frac{1}{2\pi} \sum_1^{(n-1)} M_m \frac{\partial \log \rho_{nm}}{\partial x_n} + \frac{1}{2\pi} \sum_1^{n-1} \mp \gamma_m Q_m \frac{\partial \log \rho_{nm}}{\partial x_n} \mp \frac{\gamma_n \beta_n}{2\pi M_n}$$

Zwischen den Constanten M_m, und $\gamma_m Q_m$ besteht nun eine Beziehung, welche uns in den Stand setzt, diese Gleichungen noch einfacher zu schreiben. Er sei n_n die Normale an dem Wirbelgebiete (n). Damit die Grenzbedingung

$$\frac{\partial W_i}{\partial n_n} = \frac{\partial W_a}{\partial n_n}$$

erfüllt sei, muss

$$\sum_1^n \int \frac{(\zeta_m - 2\lambda \sin \theta)}{\rho_m} \frac{\partial \rho_m}{\partial n_n} d\omega_m = K \sum_1^n \frac{\partial \varphi_m}{\partial n_n} = K \sum_1^n \int \frac{\mp \gamma_m}{\rho_m} \frac{\partial \rho_m}{\partial n_n} d\omega_n$$

da $W_a = K \varphi_a$ und

$$\frac{\partial \rho_m}{\partial n_n} = \frac{(x-x_m)}{\rho_m} \cos (n_n x) + \frac{(y-y_m)}{\rho_m} \cos (n_n y)$$

ist, so folgt durch Vergleich

$$\sum_1^n \int \frac{(\zeta_m - 2\lambda \sin \theta)}{\rho_m^2} (x - x_m) d\omega_m = K \sum_1^n \mp \gamma_m \int \frac{(x - x_m)}{\rho_m^2} d\omega_m$$

$$\sum_1^n \int \frac{(\zeta_m - 2\lambda \sin \theta)}{\rho_m^2} (y - y_m) d\omega_m = K \sum_1^n \mp \gamma_m \int \frac{(y - y_m)}{\rho_m^2} d\omega_m$$

Nun denken wir uns in dem n'ten Wirbelgebiete ζ_n so bestimmt, dass

$$\int \frac{(\zeta_n - 2\lambda \sin \theta)(x - x_n)}{\rho_m^2} d\omega_n = \mp K \gamma_n \int \frac{(x - x_n)}{\rho_n^2} d\omega_n$$

$$\int \frac{(\zeta_n - 2\lambda \sin \theta)(y - y_n)}{\rho_m^2} d\omega_n = \mp K \gamma_n \int \frac{(y - y_n)}{\rho_m^2} d\omega_n$$

wo die Integration rechter Hand über das n'te Gebiet der Verticalströmung auszudehnen ist, so dass

$$\sum_1^{(n-1)} \int \frac{(\zeta_m - 2\lambda \sin \theta)(x - x_n)}{\rho_m^2} d\omega_m = K \sum_1^{n-1} \mp \gamma_m \int \frac{(x - x_m)}{\rho_m^2} d\omega_m$$

$$\sum_4^{(n-1)} \int \frac{(\zeta_m - 2\lambda \sin \theta)(y - y_m)}{\rho_m^2} d\omega_m = K \sum_1^{(n-1)} \mp \gamma_m \int \frac{(y - y_m)}{\rho_m^2} d\omega_m$$

Da hierin x, y einem Punkt an der Grenze des n'ten Wirbelgebietes angehören, so können wir bei der Annahme, die wir gemacht haben, x, y überall mit x_n, y_n vertauschen so dass

$$\sum_1^{(n-1)} \frac{(x_n - x_m)}{\rho_{n\,m}^2} M_m = K \sum_1^{(n-1)} \mp \gamma_m Q_m \frac{(x_n - x_m)}{\rho_{n\,m}^2}$$

$$\sum_1^{(n-1)} \frac{(y_n - y_m)}{\rho_{n\,m}^2} M_m = K \sum_1^{(n-1)} \mp \gamma_m Q_m \frac{(y_n - y_m)}{\rho_{n\,m}^2}$$

woraus dann folgt,

$$M_m = \mp \gamma_m Q_m K \tag{92$_a$}$$

Die Bewegungsgleichungen des Schwerpunktes werden mit Rücksicht auf diese Beziehung

$$\frac{dx_n}{dt} = \frac{K}{2\pi} \sum_1^{(n-1)} \mp \gamma_n Q_m \frac{\partial \log \rho_{nm}}{\partial y_n} + \frac{1}{2\pi} \sum_1^{(n-1)} \mp \gamma_m Q_m \frac{\partial \log \rho_{nm}}{\partial x_n} \mp \frac{\gamma_n \alpha_n}{2\pi M_n}$$

$$\frac{dx_n}{dt} = -\frac{K}{2\pi} \sum_1^{(n-1)} \mp \gamma_m Q_m \frac{d \log \rho_{nm}}{\partial x_n} + \frac{1}{2\pi} \sum_1^{(n-1)} \mp \gamma_m Q_m \frac{\partial \log \rho_{nm}}{\partial y_n} \mp \frac{\gamma_n \beta_n}{2\pi M_n}$$

Diese Gleichungen lassen sich noch mehr vereinfachen. Wir nennen das Produkt $\gamma_m Q_m$ die Masse* des Wirbelgebietes m, indem wir eine negative und positive Masse unterscheiden, und setzen der Abkürzung halber $\mp \gamma_m Q_m = \mu_m$ so dass (92$_b$)

$$\begin{aligned} \frac{dx_n}{dt} &= \frac{K}{2\pi} \sum_1^{(n-1)} \mu_m \frac{\partial \log \rho_{nm}}{\partial y_n} + \frac{1}{2\pi} \sum_1^{(n-1)} \mu_m \frac{\partial \log \rho_{nm}}{\partial x_n} \mp \frac{\gamma_n \alpha_n}{2\pi M_n} \\ \frac{dy_n}{dt} &= -\frac{K}{2\pi} \sum_1^{(n-1)} \mu_m \frac{\partial \log \rho_{nm}}{\partial x_n} + \frac{1}{2\pi} \sum_1^{(n-1)} \mu_m \frac{\partial \log \rho_{nm}}{\partial y_n} \mp \frac{\gamma_n \beta_n}{2\pi M_n} \end{aligned} \tag{93}$$

und ferner

$$\Phi = \frac{K}{2\pi} \sum_1^n \sum_1^n \mu_m \mu_k \log (\rho_{mk})$$

$$\psi = \frac{1}{2\pi} \sum_1^n \sum_1^n \mu_m \mu_k \log (\rho_{mk})$$

wo die Summation nur auf einfache Combination von m und κ zu beziehen ist. Es ist dann

---

* Berechtigung zu dieser Benennung liegt in dem Umstande, dass, da γ die Geschwindigkeit der Luft in Längeneinheit über der Erdoberfläche ist, γQ die Luftmasse bedeutet, welche in der Zeiteinheit durch *diesen* Querschnitt strömt. Da aber des Querschnitt des anticyklonalen Wirbelgebietes möglicherweise nicht mit dem Querschnitt des Gebietes der Verticalströmung zusammenfällt., und Q den Querschnitt des Wirbelgebietes bedeutet, so trifft diese Deutung des Produktes γQ für positives γ nicht zu; es ist möglicherweise grösser als die Luftmasse, welche in der Zeiteinheit durch jenen Querschnitt des Gebietes der Verticalströmung strömt.

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_n} = \frac{K}{2\pi}\left(\mu_1 \mu_n \frac{\partial \log \rho_{1n}}{\partial x_n} + \mu_2 \mu_n \frac{\partial \log \rho_{2n}}{\partial x_n} + etc\right) = \frac{K\mu_n}{2\pi} \sum_1^{(n-1)} \mu_m \frac{\partial \log \rho_{nm}}{\partial x_n}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y_n} = \frac{K}{2\pi} \mu_n \sum_1^{(n-1)} \mu_m \frac{\partial \log \rho_{mm}}{\partial x_n}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_n} = \frac{\mu_n}{2\pi} \sum_1^{(n-1)} \mu_m \frac{\partial \log \rho_{mn}}{\partial x_n}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y_n} = \frac{\mu_n}{2\pi} \sum_1^{(n-1)} \mu_m \frac{\partial \log \rho_{mn}}{\partial y_n}$$

Die Einführung dieser Ausdrücke in (93) ergiebt

$$\mu_n \frac{dx_n}{dy_n} = \frac{\partial \Phi}{\partial y_n} + \frac{\partial \psi}{\partial x_n} \mp \frac{\gamma_n \alpha_n \mu_n}{2\pi M_n}$$

$$\mu_m \frac{dy_n}{dt} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x_n} + \frac{\partial \psi}{\partial y_n} \mp \frac{\gamma_n \alpha_n \mu_n}{2\pi M_n}$$

Die Bewegungsgleichungen die Schwerpunktes für jedes einzelne Wirbelgebiet erhält man hieraus, indem man $n = 1, 2, 3,$........setzt, so dass das System der $2n$. Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} &\mu_1 \frac{dx_1}{dt} = \frac{\partial \Phi}{\partial y_1} + \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \mp \frac{\gamma_1 \alpha_1 \mu_1}{2\pi M_1} \qquad \mu_2 \frac{dx_2}{dt} = \frac{\partial \Phi}{\partial y_2} + \frac{\partial \psi}{\partial x_2} \mp \frac{\gamma_2 \alpha_2 \mu_2}{2\pi M_2} \qquad \text{etc} \\ &\mu_1 \frac{dy_1}{dt} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + \frac{\partial \psi}{\partial y_1} + \frac{\gamma_1 \beta_1 \mu_1}{2\pi M_1} \qquad \mu_2 \frac{dy_2}{dt} = -\frac{\partial \Phi}{dt_2} + \frac{\partial \psi}{\partial y_2} \mp \frac{\gamma_2 \beta_2 \mu_2}{2\pi M_2} \qquad \text{etc.} \end{aligned} \tag{94}$$

zu integriren ist, um die Bewegung eines jeden Wirbelgebietes zu finden.

Wenn gleich nicht gut möglich ist, diese Differentialgleichungen ganz allgemein zu integriren, so lassen sich jedoch unschwer einige Beziehungen ableiten, die wichtig sind. Addirt man die erste und zweite Horizontalreihe, so kommt

$$\sum_1^n \mu_m \frac{dx_m}{dt} = \sum_1^n \frac{\partial \Phi}{\partial y_m} + \sum_1^n \frac{\partial \psi}{\partial x_n} + \sum_1^n \mp \frac{\gamma_m \alpha_m \mu_m}{2\pi M_m}$$

$$\sum_1^n \mu_m \frac{dy_m}{dt} = -\sum_1^n \frac{\partial \Phi}{\partial x_m} + \sum_1^n \frac{\partial \psi}{\partial y_m} + \sum_1^n \mp \frac{\gamma_m \beta_m \mu_m}{2\pi M_m}$$

Es ist nun, weil ρ_{mk} symmetrisch ist in Bezug auf x_m, x_k und y_m y_k

$$\frac{\partial \log \rho_{mk}}{\partial x_m} = -\frac{\partial \log \rho_{mk}}{\partial x_k}$$

$$\frac{\partial \log \rho_{mk}}{\partial y_m} = -\frac{\partial \log \rho_{mk}}{\partial y_k}$$

Da aber in $\sum_1^n \frac{\partial \Phi}{\partial x_m}$, und $\sum_1^n \frac{\partial \Phi}{\partial y_m}$, log ρ_{mk} einmal nach x_m, und y_m das andere Mal nach x_k und y_k differentirt ist, und die Coefficienten μ_m μ_k in Bezug auf die Indices symmetrisch sind, so treten in $\sum_1^n \frac{\partial \Phi}{\partial x_m}$, und $\sum_1^n \frac{\partial \Phi}{\partial y_m}$ je zwei Glieder auf, welche bei gleichem absolutem Werthe entgegengesetzte Vorzeichen besitzen. Mithin ist

$$\sum_1^n \frac{\partial \psi}{\partial x_m} = 0 \qquad \sum_1^n \frac{\partial \Phi}{\partial y_m} = 0$$

und aus demselben Grund

$$\sum_1^n \frac{\partial \psi}{\partial x_m} = 0 \qquad \sum_1^n \frac{\partial \psi}{\partial y_m} = 0$$

folglich

$$\sum_1^n \mu_m \frac{dx_m}{dt} = \sum_1^n \mp \frac{\gamma_m \alpha_m \mu_m}{2\pi M_m}$$

$$\sum_1^n \mu_m \frac{dy_m}{dt} = \sum_1^n \mp \frac{\gamma_m \beta_m \mu_m}{2\pi M_m}$$

Da aber μ_m von t unabhängig ist, so kommt durch Integration

$$\sum_1^n \mu_m x_m = \sum_1^n \mp \frac{\gamma_m \alpha_m \mu_m}{2\pi M_m}, t + Const. \qquad \sum_1^n \mu_m y_m = \sum_1^n \mp \frac{\gamma_m \beta_m \mu_m}{2\pi M_m}, t + Const. \tag{94$_a$}$$

Wir fassen einen Punkt ξ, η in's Auge, der, wie folgt, definirt ist

$$\xi \sum_1^n \mu_m = \sum_1^n \mu_m x_m \qquad \eta \sum_1^n \mu_m = \sum_1^n \mu_\mu x_m$$

also ein Punkt, der nichts anderes ist, als der gemeinsame Schwerpunkt aller Wirbelgebiete, und in der Endlichkeit liegt, wenn $\sum_1^n \mu_m$ nicht verschwindet. Die Gleichungen (94_a) verwandeln sich sodann in

$$\xi = \frac{\sum_1^n \mp \left(\frac{\gamma_m \alpha_m \mu_m}{2\pi M_m}\right)}{\sum_1^n \mu_m} . t + Const. \qquad \eta = \frac{\sum_1^n \mp \left(\frac{\gamma_m \beta_m \mu_m}{2\pi M_m}\right)}{\sum_1^n \mu_m} . t + Const.$$

Wenn demnach α_m und β_m für jedes Gebiet nicht verschwinden oder wenigstens $\sum_1^n \mp \frac{\gamma_m \alpha_m \mu_m}{2\pi M_m}$, $\sum_1^n \mp \frac{\gamma_m \beta_m \mu_m}{2\pi M_m}$ nicht verschwinden, so schreitet der gemeinsame Schwerpunkt aller Wirbelgebiete geradlinig und mit constanter Geschwindigkeit fort. Was die Richtung dieser Bewegung anbetrifft, so hängt sie offenbar davon ab, ob die Summe $\sum \mu_m$ für die cyklonalen Bewegungsformen oder die anticyklonalen oder was, wie aus der Beziehung (92_b) hervorgeht, dasselbe ist, ob die Produktensumme $\sum \gamma_m Q_m$ für die aufsteigende Strömung, oder die niedersteigende Strömung überwiegt, vorausgesetzt, dass α_m und β_m für jedes Wirbelgebiet positiv ist, was wiederum eine bestimmte Vertheilung der Rotationsgeschwindigkeit in jedem Wirbelgebiete voraussetzt. Es ist daher nicht möglich ohne specialisirende Annahmen über die Dimension der Querschnitte der Wirbelgebiete, über die Geschwindigkeiten der Verticalströmungen, und vor allem über die Vertheilung der Rotationsgeschwindigkeit in jedem Wirbelgebiete, über die Richtung der fortschreitenden Bewegung des Schwerpunktes aller Wirbelgebiete etwas Bestimmtes auszusagen.

Zu einer anderen allgemeinen Beziehung gelangt man auf folgende Weise. Multiplizirt man die erste Horizontalreihe der Gleichungen (94) mit $\frac{dy_1}{dt}$, $\frac{dy_2}{dt}$ etc, und die zweite Horizontalreihe mit $\frac{dx_1}{dt}$, $\frac{dx_2}{dt}$ etc, so kommt durch Addition

$$\sum_1^n \mu_m \frac{dx_m}{dt}\frac{dy_m}{dt} = \sum_1^n \frac{\partial \Phi}{\partial y_m}\frac{dy_m}{dt} + \sum_1^n \frac{\partial \psi}{\partial x_m}\frac{dy_m}{dt} + \sum A_m \frac{dy_m}{dt}$$

$$\sum_1^n \mu_m \frac{dy_m}{dt}\frac{dx_m}{dt} = -\sum_1^n \frac{\partial \Phi}{\partial x_m}\frac{dx_m}{dt} + \sum_1^n \frac{\partial \psi}{\partial y_m}\frac{dx_m}{dt} + \sum B_m \frac{dx_m}{dt}$$

wo zur Abkürzung

$$\mp \frac{\gamma_m \alpha_m \mu_m}{2\pi M_m} = A_m \qquad \mp \frac{\gamma_m \beta_m \mu_m}{2\pi M_m} = B_m$$

gesetzt worden ist.

Die Subtraction ergiebt hieraus

$$0 = \sum_1^n \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_m} \frac{dx_n}{dt} + \frac{\partial \Phi}{\partial y_m} \frac{dy_m}{dt} \right) + \sum_1^n \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_m} \frac{dy_m}{dt} - \frac{\partial \psi}{\partial y_n} \frac{dx_m}{dt} \right) + \sum \left(A_m \frac{dy_m}{dt} - B_m \frac{dx_m}{dt} \right)$$

Da nun ψ die Bedingung

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_m^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y_m^2} = 0$$

erfüllt, so ist

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_m} dy_m - \frac{\partial \psi}{\partial y_m} dx_n$$

ein totales Differential. Die Integration ergiebt daher

$$const = \Phi + \sum_1^n \int \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_m} dy_m - \frac{\partial \psi}{\partial y_m} dx_m \right) + \sum_1^n \left(A_m y_m - B_m x_m \right) \qquad (95)$$

Multiplizirt man die erste Horizontalreihe mit $\frac{dx_1}{dt}, \frac{dx_2}{dt}$, etc, und die zweite Horizontalreihe mit $\frac{\partial y_1}{dt}, \frac{dy_2}{dt}$, etc, so entsteht durch Addition

$$\sum_1^n \mu_m \left[\left(\frac{dx_m}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy_m}{dt} \right)^2 \right] = \sum_1^n \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_m} \frac{dx_m}{dt} + \frac{\partial \psi}{\partial y_m} \frac{dy_m}{dt} \right)$$
$$+ \sum_1^n \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y_m} \frac{dx_m}{dt} - \frac{\partial \Phi}{\partial x_m} \frac{dy_m}{dt} \right) + \sum_1^n \left(A_m \frac{dx_m}{dt} + B_m \frac{dy_m}{dt} \right)$$

Da nun Φ wieder die Gleichung

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_m^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y_m^2} = 0$$

befriedigt, so ist

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y_m} dx_m - \frac{\partial \Phi}{\partial x_m} dy_m \right)$$

ein totales Differential. Setzt man dieses $= d\, U_m$, so ist

$$\sum_1^n \mu_m \left[\left(\frac{dx_m}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy_m}{dt}\right)^2\right]=\frac{d\psi}{dt}+\sum_1^n\frac{dU_m}{dt}+\frac{d}{dt}\sum_1^n(A_m x_n+B_n y_n)$$

wo

$$U_m=\int\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y_m}\,dx_m-\frac{\partial\Phi}{\partial x_m}\,dy_m\right)$$

ist.

Da nun aber

$$\Phi=K\psi$$

so folgt

$$U_m=K\int\left(\frac{\partial\psi}{\partial y_m}\,dx_m-\frac{\partial\psi}{\partial x_m}\,dy_m\right)$$

Weil in Folge der Gleichung (95)

$$\sum_1^n\int\left(\frac{\partial\psi}{\partial y_m}\,dx_m-\frac{\partial\psi}{\partial x_m}\,dy_m\right)=-\,const+\sum_1^n(A_m y_m-B_m x_m)+K\psi$$

ist, so ist

$$\sum_1^n U_m=-\,const.\;K+K\sum_1^n\Big((A_m y_m-B_m x_m)+K^2\psi$$

Mithin folgt

$$\sum_1^n\mu_m\left[\left(\frac{dx_n}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy_m}{dt}\right)^2\right]=(1+K^2)\,\frac{d\psi}{dt^1}+\frac{d}{dt}\sum_1^n\Big[A_m(x_m+Ky_m)$$
$$+B_n(y_m-Kx_m)\Big]$$

Noch zwei andere Beziehungen lassen sich durch Einführung der Polarcoordinaten ableiten. Man setze

$$x_1=\rho_1\cos X_1 \qquad x_2=\rho_2\cos X_2\;\ldots\ldots\ldots$$

$$y_1=\rho_1\sin X_2 \qquad y_2=\rho_2\sin X_2\;\ldots\ldots\ldots$$

$$\rho_1^2=x_1^2+y_1^2 \qquad \rho_2^2=x_2^2+y_2^2\;\ldots\ldots\ldots$$

Es ist dann, wenn man dies in die Gleichungen (94) einführt

$$\mu_m\frac{d\rho_m}{dt}\sin X_m+\mu_m\rho_m\cos X_m\frac{dX_m}{dt}=-\frac{1}{}\frac{\partial\Phi}{\partial\rho_m}\cos X_m$$
$$+\frac{\sin X_m}{\rho_m}\frac{\partial\Phi}{\partial X_m}+\frac{\partial\psi}{\partial\rho_m}\sin X_m+\frac{\partial\psi}{\partial X_m}\frac{\cos X_m}{\rho_m}+A_m$$

$$\mu_m \frac{d\rho_m}{dt} \cos X_m - \mu_m \rho_m \sin X_m \frac{dX_m}{dt} = \frac{\partial \Phi}{\partial \rho_m} \sin X_m$$
$$+ \frac{\cos X_m}{\rho_m} \frac{\partial \Phi}{\partial X_m} + \frac{\partial \psi}{\partial \rho_m} \cos X_m - \frac{\partial \psi}{\partial X_m} \frac{\sin X_m}{\rho_m} + B_m.$$

Hieraus findet man durch Auflösung dieser Gleichungen nach $\frac{d\rho_m}{dt}$ und $\frac{dX_m}{dt}$

$$\mu_m \frac{d\rho_m}{dt} = \frac{\partial \Phi}{\partial X_m} \frac{1}{\rho_m} + \frac{\partial \psi}{\partial \rho_m} + A_m \sin X_m + B_m \cos X_m$$

$$\mu_m \rho_m \frac{dX_m}{dt} = - \frac{\partial \Phi}{\partial \rho_m} + \frac{\partial \psi}{\partial X_m} \frac{1}{\rho_m} + A_m \cos X_m - B_m \sin X_m$$

oder indem man beide Seiten mit ρ_m multiplizirt

$$\mu_m \rho_m \frac{d\rho_m}{dt} = \frac{\partial \Phi}{\partial x_m} + \frac{\partial \psi}{\partial \log \rho_m} + \rho_m (A_m \sin X_m + \beta_m \cos X_m)$$

$$\mu_m \rho_m^2 \frac{dX_m}{dt} = - \frac{\partial \Phi}{\partial \log \rho_m} + \frac{\partial \psi}{\partial X_m} + \rho_m (A_m \cos X_m - \beta \sin X_m)$$

Mithin folgt

$$\sum_1^n \mu_m \rho_m \frac{d\rho_m}{dt} = \sum_1^n \frac{\partial \Phi}{\partial X_m} + \sum_1^n \frac{\partial \psi}{\partial \log \rho_m} + \sum_1^n \rho_m (A_m \sin X_m + \beta_m \cos X_m)$$

$$\sum \mu_m \rho_m^2 \frac{dX_m}{dt} = - \sum_1^n \frac{\partial \Phi}{\partial \log \rho_m} + \sum_1^n \frac{\partial \psi}{\partial X_m} + \sum_1^n \rho_m (A_m \cos X_m - \beta_m \sin X_m)$$

Weil, wie leicht zu beweisen,

$$\sum_1^n \frac{\partial \Phi}{\partial X_m} = \sum_1^n \frac{\partial \psi}{\partial X_m} = 0$$

und

$$\sum_1^n \frac{\partial \Phi}{\partial \log \rho_m} = \frac{K}{2\pi} \sum_1^n \sum_1^n \mu_m \mu_k \qquad \sum_1^n \frac{\partial \psi}{\partial \log \rho_m} = \frac{1}{2\pi} \sum_1^n \sum_1^n \mu_m \mu_k$$

so erhalten wir die Beziehungen

$$\sum_1^n \mu_m \rho_m \frac{d\rho_m}{dt} = \frac{1}{2\pi} \sum_1^n \sum_1^n \mu_m \mu_k + \sum_1^n \rho_m (A_m \sin X_m + B_m \cos X_m) \tag{96}$$

$$\sum \mu_m \rho_m^2 \frac{dX_m}{dt} = - \frac{K}{2\pi} \sum_1^n \sum_1^n \mu_m \mu_k + \sum_1^n \rho_m (A_m \cos X_m - B_m \sin X_m) \tag{97}$$

Wesentlich einfacher werden die abgeleiteten Beziehungen, wenn die Wirbelgebiete so symmetrisch gebildet sind und ζ_m selbst in dem einzelnen Wirbelgebiete so symmetrisch vertheilt ist, dass A_m und B_m für jedes Gebiet verschwindet, also dass der gemeinsame Schwerpunkt aller vorhandenen Wirbelgebiete sich nicht bewegt, *d. i.*

$$\sum_1^n \mu_m x_m = const \qquad \sum_1^n \mu_m y_m = const \tag{98}$$

wird. Es werden dann unter denselben Annahmen

$$const = \Phi + \sum_1^n \int \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_m} dy_m - \frac{\partial \psi}{\partial y_m} dx_m \right) \tag{99}$$

$$\sum_1^n \mu_m \left[\left(\frac{dx_m}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy_m}{dt} \right)^2 \right] = (1 + K^2) \frac{d\psi}{dt}$$

Dann wird die Gleichung (96) integrabel, so dass

$$\sum_1^n \mu_m \rho_m^2 = \frac{1}{\pi} \sum_1^n \sum_1^n \mu_m \mu_{n'} \, t + const \tag{100}$$

und die Gleichung (97) kann dann auch so geschrieben werden

$$\sum_1^n \mu_m \int \rho_m^2 d\chi = - \frac{K}{2\pi} \sum_1^n \sum_1^n \mu_m \mu_{n'} \, t + const. \tag{101}$$

eine Gleichung, welche nichts anderes ausspricht, als den Flächensatz, dass die algebraische Summe der von allen Leitstrahlen, welche je zwei Schwerpunkte mit einander verbinden, in der Zeiteinheit beschriebenen Flächen multiplizirt mit der Massen der Wirbelgebiete von der Zeit nicht abhängt.

Wenn nun in der Atmosphäre nicht mehr als drei Wirbelgebiete vorhanden sind, so lässt sich die Aufgabe dem Princip nach auf Quadraturen zurückführen, wie in dem Fall, wo keine Verticalströmung vorhanden ist, und auf die Wirbelbewegung der Flüssigkeit die Erdrotation nicht ablenkend wirkt, weil die Beziehungen (98)—(101) schon vier Integrale der Bewegungsgleichungen darstellen. Allein; da die Beziehung (99) nicht algebraisch und die Zurückführung der Aufgabe auf Quadraturen daher practisch nicht möglich ist, wollen wir uns lediglich auf eingehendere Betrachtung des Falls beschränken, wo nur zwei cylindrische Wirbelgebiete von sonst beliebigem Querschnitte vorhanden sind.

Wir nehmen zunächst an, dass die Summe $\mu_1 + \mu_2$ nicht verschwinde. Dann ergiebt sich aus der Gleichung (98) unmittelbar, als Coordinaten des gemeinsamen Schwerpunktes der beiden Wirbelgebiete

$$\xi = \frac{\mu_1 x_1 + \mu_2 x_2}{\mu_1 + \mu_2} \qquad \eta = \frac{\mu_1 y_1 + \mu_2 y_2}{\mu_1 + \mu_2} \tag{102}$$

ξ und η ändert sich nicht mit der Zeit.
Wir führen die Polarcoordinaten ein, so dass

$$x_1 = \rho_1 \cos \chi_1 \qquad y_1 = \rho_1 \sin \chi_1$$
$$x_2 = \rho_2 \cos \chi_2 \qquad y_2 = \rho_2 \sin \chi_2$$

so verwandelt sich (102) in

$$\xi\left(1 + \frac{\mu_2}{\mu_1}\right) = \rho_1 \cos \chi_1 + \frac{\mu_2}{\mu_1} \rho_2 \cos \chi_2$$
$$\eta\left(1 + \frac{\mu_2}{\mu_1}\right) = \rho_1 \sin \chi_1 + \frac{\mu_2}{\mu_1} \rho_2 \sin \chi_2$$

Bisher war der Anfangspunkt der Coordinatenaxe willkürlich. Verlegt man denselben jetzt in den Schwerpunkt der beiden Wirbelgebiete, so ist, da ξ und η endlich ist

$$\rho_1 \cos \chi_1 + \frac{\mu_2}{\mu_1} \rho_2 \cos \chi_2 = 0$$

$$\rho_1 \sin \chi_1 + \frac{\mu_2}{\mu_1} \rho_2 \sin \chi_2 = 0$$

Diese beiden Gleichungen sind nur dann gleichzeitig zu befriedigen, wenn

$$\chi_1 = \chi_2 \tag{103}$$

$$\rho_1 + \frac{\mu_2}{\mu_2} \rho_2 = 0 \qquad d.\,i.\ \rho_1 = -\frac{\mu_2}{\mu_1} \rho_2 \tag{104}$$

Nun ist nach (100)

$$\rho_1^2 + \frac{\mu_2}{\mu_1}\rho_2^2 = \frac{1}{\pi}\mu_2 t + Const.$$

Aus dieser und der Gleichung (104) ergeben sich

$$\rho_1^2 = \sqrt{\frac{\mu_2^2}{\pi(\mu_1+\mu_2)}\cdot t + Const.} = \sqrt{\frac{\mu_2^2}{\pi(\mu_1+\mu_2)}\cdot t + \rho_{01}^2} \quad (105)$$

$$\rho_2 = -\sqrt{\frac{\mu_1^2}{\pi(\mu_1+\mu_2)}\cdot t + Const.} = -\sqrt{\frac{\mu_1^2}{\pi(\mu_1+\mu_2)}\cdot t + \rho_{02}^2} \quad (106)$$

wo ρ_{01} ρ_{02} die Entfernungen der beiden Wirbelgebiete von dem gemeinsamen Schwerpunkte zur Zeit $t = 0$ bedeuten. Die beiden Wirbelgebiete müssen sich demnach von gemeinsamen Schwerpunkt entweder entfernen, oder näheren, je nachdem $(\mu_1+\mu_2)$ positiv oder negativ ist.

Mit Rücksicht auf (104) folgt aus (101)

$$\mu_1\int \rho_1^2\, \alpha\, \chi_1 + \frac{\mu_2\mu_1^2}{\mu_2^2}\int \rho_1^2\, d\,\chi_1 = -\frac{K}{2\pi}\mu_1\,\mu_2 t + const.$$

d. i.

$$\int \rho_1^2\, d\,\chi_1 = -\frac{K\,\mu_2^2}{2\pi(\mu_1+\mu_2)}\cdot t + const.$$

Differentirt man dies nach χ_1 und eliminirt ρ_1 aus (105), so folgt

$$-\frac{K\,\mu_2^2}{2\pi(\mu_1+\mu_2)}\frac{dt}{d\chi_1} = \left(\frac{\mu_2^2}{\pi(\mu_1+\mu_2)}t + const.\right)$$

Hieraus findet man durch Integration

$$\chi_1 = Const. - \frac{K}{2}\cdot log\left(\frac{\mu_2^2}{\pi(\mu_1+\mu_2)}\cdot t + \rho_{01}^2)\right)$$

oder indem man die willkürliche Constante ändert, erhält man

$$\chi_1 = Const. - \frac{K}{2} log\left[\frac{1}{(\mu_1+\mu_2)\pi}\left(\frac{\mu_2}{\rho_0}\right)^2 t + 1\right]$$

Setzt man ferner in (101) $\rho_1 = -\frac{\mu_2}{\mu^1}\rho_2$ ein, so folgt wieder

$$\chi_2 = const - \frac{K}{2} log\left[\frac{1}{(\mu_1+\mu_2)\pi}\left(\frac{\mu_1}{\rho_{02}}\right)^2 t + 1\right]$$

Da nun $\rho_1^2 = \left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^2\rho_2^2$, mithin auch $\left(\frac{\rho_{10}}{\mu_2}\right)^2 = \left(\frac{\rho_{10}}{\mu_1}\right)^2$ ist, so folgt in der That

$$\chi_1 = \chi_2$$

d. h. die Gerade, welche durch den gemeinsamen Schwerpunkt der beiden Wirbelgebiete hindurch gehend ihre Schwerpunkte mit einander verbindet, rotirt um den gemeinsamen Schwerpunkt mit der Winkelgeschwindigkeit

$$\frac{d\chi_1}{dt} = -\frac{K}{2\left[t + \pi \frac{\rho_{01}^2}{\mu_2^2}(\mu_1 + \mu_2)\right]} \tag{107}$$

Ist demnach $(\mu_1 + \mu_2)$ positiv, so nimmt die Rotationsgeschwindigkeit allmälig ab, — ist $(\mu_1 + \mu_2)$ dagegen negativ, so wächst sie nach und nach und wird unendlich gross nach dem Verfluss der Zeit $\pi\left(\frac{\rho_{01}}{\mu_2}\right)^2(\mu_1 + \mu_2)$, wo dann so wohl ρ_1 als ρ_2 unendlich klein ist. Da χ in dem Sinn wachsend genommen werden muss, in welchem eine Gerade, um den rechten Winkel gedreht werden muss, um aus einer Lage parallel der positiven x Achse in die Lage parallel der positiven y Achse zu gelangen, *d. h.* in dem Sinne der Erdrotation, da ja die positiv x Achse gegen Süden, und die positive y Achse gegen Osten gekehrt ist, so drehen sich beide Wirbelgebiete auf der nördlichen Hemisphäre *mit* der Sonne, da $\frac{d\chi_1}{dt}$ negativ ist, wenn $(\mu_1 + \mu_2)$ positiv ist und wenn $(\mu_1 + \mu_2)$ hingegen negativ ist, *gegen* die Sonne, da $\frac{d\chi_1}{dt}$ dann positiv ist, während sie sich gleichzeitig entfernen respect. näheren, mit der fortwährend abnehmenden, respect. zunehmenden Geschwindigkeit

$$\begin{aligned} \frac{d\rho_1}{dt} &= \frac{1}{2\pi}\frac{\mu_2^2}{(\mu_1 + \mu_2)}\frac{1}{\sqrt{\frac{\mu_2^2}{\pi(\mu_1 + \mu_2)}t + \rho_{01}^2}} \\ \frac{d\rho_2}{dt} &= -\frac{1}{2\pi}\frac{\mu_1^2}{(\mu_1 + \mu_2)}\frac{1}{\sqrt{\frac{\mu_1^2}{\pi(\mu_1 + \mu_2)}t + \rho_{02}^2}} \end{aligned} \tag{107$_b$}$$

je nachdem $(\mu_1+\mu_2)$ positiv oder negativ ist. Auf der südlichen Hemisphäre ändert $\frac{d\chi_1}{dt}$ ihr Vorzeichen; sie wird positiv, da $K=\frac{2\lambda \sin\theta}{\kappa}$ für $-\theta$ negativ wird, wo es auf der nördlichen Hemisphäre negativ ist, und umgekehrt. Es drehen sich daher auf der südlichen Hemisphäre die beiden Wirbelgebiete um den gemeinsamen Schwerpunkt *gegen* die Sonne, wenn $(\mu_1+\mu_2)$ positiv und wenn aber $(\mu_1+\mu_2)$ negativ ist, *mit* der Sonne. Die Rotationsrichtung der beiden Wirbelgebiete wird also die entgegengesetzte wie auf der nördlichen Hemisphäre, während die Richtung der radialen Bewegung dieselbe bleibt. Da, wenn die beiden Wirbelgebiete von vertical aufsteigender Strömung gebildet, und daher von cyklonalen Bewegungsformen erfüllt sind, $\mu_1+\mu_2$ negativ zu setzen ist, und da ferner diese Summe positiv ist, wenn die beiden Wirbelgebiete von vertical niedersteigender Strömung gebildet sind, und die Luftbewegung in ihnen daher im anticyklonalen Sinne vor sich geht., so gelangen wir zum folgenden Satze. *Bilden sich irgendwo in der Erdatmosphäre zwei Cyklonen, so nähren sie sich gegenseitig, indem sie im cyklonalen Sinne um einen bestimmten ruhenden Punkt rotiren, während zwei Anticyklonen sich hingegen von einander entfernen, indem sie im anticyklonalen Sinne um einen bestimmten Punkt rotiren.*

Die Taf. XXVI mag den Verlauf der Bewegungsbahnen der beiden Wirbelgebiete für nördliche Hemisphäre veranschaulischen und zwar in dem speciellen Fall

$$\pm\mu_1=\pm\mu_2$$

$$arct\, K=85^\circ$$

Die Bahncurven sind logarithmische Spiralen. Denn es ist

$$\mu_1\left(1+\frac{\mu_1}{\mu_2}\right)\int\rho_1^2\, d\chi_1=-\frac{K}{2\pi}\mu_1\,\mu_2\, t$$

Da aus (105) folgt

$$\mu_1\left(1+\frac{\mu_1}{\mu_2}\right)(\rho_1^2-\rho_{01}^2)=\frac{\mu_1\mu_2, t}{\pi}$$

so wird die obenstehende Gleichung

$$\int\rho_1^2\, d\,\chi_1 = -\frac{K}{2}(\rho_1^2-\rho_{01}^2)$$

Die Differentiation dieses ergiebt

$$\rho_1^2 = -K\,\rho_1\frac{d\rho_1}{d\chi_1}$$

Hieraus folgt durch Integration

$$\rho_1 = C_1\, e^{-\frac{1}{K}\chi_1}$$

Auf ganz dieselbe Weise findet man

$$\rho_2 = C_2\, e^{-\frac{1}{K}\chi_1}$$

wobei es noch bemerkt werden mag, dass χ_1 bei anticyklonalen Bewegungsformen negativ gesetzt werden muss.

Wir haben bisher vorausgesetzt, dass μ_1, μ_2 einerlei Vorzeichen besitzen. Haben diese Grössen verschiedene Vorzeichen, so dass das eine Wirbelgebiet cyklonal, und das andere anticyklonal ist, so tritt entweder eine cyklonale, oder anticyklonale Drehung der beiden Wirbelgebiete um den gemeinsamen Schwerpunkt ein, je nach dem Sinne, in welchem die eine von den beiden Grössen μ_1, μ_2 die andere überwiegt. Der Schwerpunkt der beiden Wirbelgebiete liegt dabei auf der Verlängerung der Gerade, welche die Schwerpunkte der beiden Wirbelgebiete mit einander verbindet. Indem die beiden Wirbelgebiete sich allmälig näheren oder entfernen, beschreiben sie um diesen Punkt Spiralbahnen, welche entweder cyklonal oder anticyklonal gewunden ist, je nachdem die Masse des cyklonalen Wirbelgebietes diejenige des anticyklonalen Wirbelgebietes überwiegt, oder das Umgekehrte stattfindet.

Haben die Produkte μ_1 und μ_2 gleichen aber entgegengesetzten Werth, so dass $\mu_1 + \mu_2$ verschwindet, was auch geschehen kann, so rückt der gemeinsame Schwerpunkt der beiden Wirbelgebiete in die Unendlichkeit. So wohl ρ_1 als ρ_2 wird dann unendlich gross, mithin auch ρ_{01}, ρ_{02}.

Um auch diesen besonderen Fall zu erledigen, bemerken wir, dass, wenn wir uns die Grösse $(\mu_1 + \mu_2)$ zunächst unendlich klein denken, ξ, η, mithin auch ρ_1, ρ_2, vermöge der Gleichungen (102) unendlich gross von der Ordnung $\frac{1}{(\mu_1+\mu_2)}$ werden, wenn $(x_1 - x_2)$ und $(y_1 - y_2)$ endlich ist, was der Fall ist, wenn der Abstand der beiden Wirbelgebiete ein endlicher ist. Wir denken uns nun den Anfangspunkt der Coordinaten in die Unendlichkeit verrückt, und bilden die Differenz $\rho_1 - \rho_2$ aus (105) (106). Es ist, da vermöge (104) ρ_1 dasselbe Vorzeichen haben muss wie ρ_2,

$$\rho_1 - \rho_2 = \rho_{01}\sqrt{\frac{\mu_2^2}{\pi(\mu_1+\mu_2)\rho_{01}^2}\cdot t + 1}\Big) - \rho_{02}\sqrt{\frac{\mu_1^2}{\pi(\mu_1+\mu_2)\rho_{01}^2}\cdot t + 1}\Big)$$

Dies ist endlich und zwar gleich dem ursprünglichen Abstand der Schwerpunkte der beiden Wirbelgebiete.— Denn; da $(\mu_1 + \mu_2)\ \rho_{01}^2$ $(\mu_1 + \mu_2)\ \rho_{02}^2$ der obigen Bemerkung zu Folge unendlich gross ist, wie $\frac{1}{(\mu_1+\mu_2)}$, so wird bei verschwindendem $(\mu_1 + \mu_2)$

$$\rho_1 - \rho_2 = \rho_{01} - \rho_{02} \tag{107$_a$}$$

wie es oben behauptet wurde.

Der Abstand der Schwerpunkte der beiden Wirbelgebiete, welchen wir mit r bezeichnen wollen, ändert sich also nicht mit der Zeit. Die Winkelgeschwindigkeit, mit welcher sich die beiden Wirbelgebiete um den unendlich fernen Schwerpunkt dreht, ist dabei unendlich klein; die Geschwindigkeit aber, mit welcher die beiden Wirbelgebiete bei unverändertem gegenseitigem Abstande in der Atmosphäre fortschreiten, ist endlich. Es ist nämlich, wie die Gleichung (107) auch so geschrieben werden kann

$$\frac{dX_1}{dt} = -\frac{K\mu_2^2}{2\pi\rho_{01}^2(\mu_1+\mu_2)}\frac{1}{\left(1+\frac{\mu_2^2}{\pi\rho_{01}^2(\mu_1+\mu^2)}\cdot t\right)}$$

Die Grösse $\frac{\mu_2^2}{\pi\rho_{01}^2(\mu_1+\mu_2)}$ ist nun unendlich klein wie $(\mu_1+\mu_2)$. Es kann daher bei verschwindendem $(\mu_1+\mu_2)$ gesetzt werden

$$\frac{1}{\left(1+\frac{\mu_2^2}{\pi\rho_{01}^2(\mu+\mu_2)}\cdot t\right)} = 1-\frac{\mu_2^2}{\pi\rho_{01}^2(\mu_1+\mu_2)}\cdot t$$

so dass

$$\frac{dX_1}{dt} = -\frac{K\mu_2^2}{2\pi\rho_{01}^2(\mu+\mu_2)}+\frac{K}{2\pi^2}\frac{\mu_2^4}{\rho_{01}^4(\mu_1+\mu_2)^2}\cdot t$$

oder mit Vernachlässigung unendlich kleiner Grösse höherer Ordnung

$$\frac{dX_1}{dt} = -\frac{K\mu_2^2}{2\pi\rho_{01}^2(\mu_1+\mu_2)}$$

woraus dann als Fortschreitungsgeschwindigkeit folgt

$$\rho_{01}\frac{dX_1}{dt} = -\frac{K\mu_2^2}{2\pi\rho_{01}(\mu_1+\mu_2)}$$

Auf ganz dieselbe Weise findet man

$$\rho_{02}\frac{dX_2}{dt} = -\frac{K\mu_1^2}{2\pi\rho_{02}(\mu_1+\mu_2)}$$

Die Drehungsgeschwindigkeit ist also constant, und endlich da $\lim[\rho_{01}(\mu_1+\mu_2)]$, $\lim[\rho_{02}(\mu_1+\mu_2)]$ endlich und constant sind. Wir setzen

$$lim\,[\rho_{01}(\mu_1+\mu_2)] = lim\,[\rho_{02}(\mu_1+\mu_2)] = C.$$

Dass diese beiden Grössen gegen einen und denselben Grenzwerth convergiren, ersieht man daraus, dass die Einführung der Beziehung

$\rho_{01} = r + \rho_{02}$, in $lim\,[\rho_{01}(\mu_1 + \mu_2)]$ sofort $lim\,[\rho_{02}(\mu_1 + \mu_2)]$ zur Folge hat, da $lim\; r\,(\mu_1 + \mu_2) = 0$ ist. Wir erhalten somit, da $\mu_1 = -\mu_2$ ist

$$\rho_{01}\frac{d\chi_1}{dt} = \rho_{02}\frac{d\chi_2}{dt} = -\frac{K\mu_1^2}{2\pi C}.$$

so dass

$$\int(\rho_{02} + \rho_{01})\frac{d\chi_1}{dt}\,dt = -\frac{K\mu_1^2}{\pi C}\cdot t. \tag{108}$$

Die Gleichungen (107_b) können für unseren Fall auch so geschrieben werden

$$\frac{d\rho_1}{dt} = \frac{1}{2\pi}\frac{\mu_2^2}{(\mu_1 + \mu_2)\rho_{01}}\left[1 - \frac{\mu_2^2 t}{2\pi(\mu_1 + \mu_2)\rho_{01}^2}\right]$$

$$\frac{d\rho_2}{dt} = \frac{1}{2\pi}\frac{\mu_1^2}{(\mu_1 + \mu_2)\rho_{02}}\left[1 - \frac{\mu_1^2 t}{2\pi(\mu_1 + \mu_2)\rho_{02}^2}\right]$$

oder mit Vernachlässigung von unendlich kleiner Grösse höherer Ordnung

$$\frac{d\rho_1}{dt} = \frac{d\rho_2}{dt} = \frac{\mu_1^2}{2\pi . C}.$$

Die beiden Wirbelgebiete können sich demnach mit constanter Geschwindigkeit parallel der Gerade bewegen, welche ihre Schwerpunkte mit einander verbindet, ohne ihren Abstand von einander zu ändern.

Es ist leicht C zu bestimmen. Die Gleichung (101) verwandelt sich für unseren besonderen Fall

$$\mu_1\int(\rho_1^2 - \rho_2^2)\frac{d\chi_1}{dt}\,dt = +\frac{K\mu_1^2}{2\pi}\cdot t. \tag{109}$$

Es ist nach (105) (106)

$$\rho_1^2 - \rho_2^2 = \rho_{02}^2 - \rho_{02}^2 = (\rho_{01} - \rho_{02})(\rho_{01} + \rho_{02})$$

oder mit Rücksicht auf (107_a)

$$\rho_1^2 - \rho_2^2 = r\,(\rho_{01} + \rho_{02})$$

so folgt

$$\mu_1 r \int (\rho_{01} + \rho_{02}) \frac{d\chi_1}{dt} dt = \frac{K \mu_1^2}{2\pi} t.$$

Durch Vergleich dieses mit (109) ergiebt sich, μ_1 als positiv vorausgesetzt

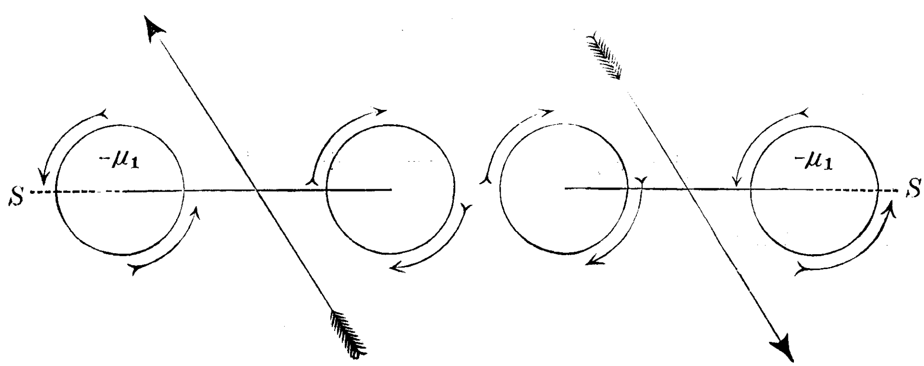
$$C = -2 r \mu_1$$

Wir erhalten somit als Componenten der Geschwindigkeit

$$\rho_{01} \frac{d\chi_1}{dt} = \rho_{02} \frac{d\chi_2}{dt} = + \frac{K \mu_1}{4\pi r}$$

$$\frac{d\rho_1}{dt} = \frac{d\rho_2}{dt} = - \frac{\mu_1}{4\pi r}$$

Die beiden Wirbelgebiete bewegen sich demnach geradlinig und zwar in einer Richtung, welche mit der Verbindungsgerade ihrer Schwerpunkte einen Winkel einschliesst, dessen trigonometrische Tangente $= K$ ist und zwar im cyklonalen Sinne abgelenkt von der zur Verbindungsgerade der beiden Wirbelgebiete senkrechten Richtung, da $\rho_{10} \frac{d\chi_1}{dt}$ für die nördliche Hemisphäre positiv, und für die südliche dagegen negativ ist. Die beigefügte Figur veranschaulicht die Fortschreitungsrichtung der Wirbelgebiete in dem in Rede stehenden Fall für die nördliche Hemisphäre, wo S die Richtung bedeutet, in der der gemeinsame Schwerpunkt in unendlicher Ferne liegt.



Es verdient ferner der Fall eine besondere Betrachtung, wo die eine von den beiden Grössen μ_1, μ_2 gegen die andere unendlich gross wird; sei es nun, weil die Geschwindigkeit der Verticalströmung in dem einen Gebiete gegen diejenige in dem anderen Gebiete unendlich gross ist, oder, weil der Querschnitt des einen gegen denjenigen des anderen Gebietes unendlich gross ist; ein Fall, der uns in den Stand setzt, ungefähr zu beurtheilen, welchen Einfluss ein Wirbelgebiet von sehr grosser Dimension auf ein in seiner Nähe befindliches Wirbelgebiet von geringerer Dimension ausübt.

Wir nehmen an; μ_2 sei unendlich gross gegen μ_1, so dass $\frac{\mu_2}{\mu_1}$ unendlich klein ist. Die Gleichung (102) wird unter diesem Umstande

$$\xi = x_2 \qquad \eta = y_2$$

Das Wirbelgebiet 2 bewegt sich gar nicht. Verlegt man den Coordinatenanfang in diesen ruhenden Punkt in dem Wirbelgebiet 2 so verschwindet ρ_2. Die Gleichungen (100) (101) reduciren sich auf

$$\mu_1 \rho_1^2 = \frac{1}{\pi} \mu_1 \mu_2 t + Const.$$

$$\mu_1 \int \rho_1^2 \, d\chi_1 = -\frac{K}{2\pi} \mu_1 \mu_2 t + Const.$$

Nennt man den Werth von ρ_1 für $t = 0$ wieder ρ_{01}, so folgt aus der ersten Gleichung sofort

$$\rho_1 = \sqrt{\frac{\mu_2 t}{\pi} + \rho_{01}^2}$$

und aus der zweiten mit Rücksicht auf dieses

$$\int \left(\frac{\mu_2 t}{\pi} + \rho_{01}^2\right) d\chi_1 = -\frac{K}{2\pi} \mu_2 t + Const.$$

Differentirt man dieses nach χ_1, so kommt.

$$\frac{d\chi_1}{dt} = -\frac{K \mu_2}{2\pi\left(\frac{\mu_2 t}{\pi} + \rho_{01}^2\right)}$$

Hieraus folgt durch Integration

$$\chi_1 = const - \frac{K}{2} \log\left(\rho_{01}^2 + \frac{\mu_2 t}{\pi}\right)$$

Bei der Bewegung des Wirbelgebietes 1 in dem vorliegenden Fall kommt also gar nichts darauf an, ob dasselbe cyklonalen, oder anticyklonalen Wirbel enthält, sie wird lediglich bestimmt durch den Rotationscharakter des dominirenden Wirbelgebietes. Ist dieses cyklonal, so nährt sich das Wirbelgebiet 1 dem Wirbelgebiet 2 mit stetig wachsender Geschwindigkeit, indem es gleichzeitig dasselbe mit stetig wachsender Geschwindigkeit umkreist. Ist hingegen das Wirbelgebiet 2 anticyklonal, so entfernt sich das Wirbelgebiet 1 von demselben mit stetig abnehmender Geschwindigkeit, es gleichzeitig mit stetig abnehmender Geschwindigkeit umkreisend.

Die Bahncurve, welche das Wirbelgebiet 1 um das Wirbelgebiet 2 beschreibt, findet man leicht. Es ist nämlich

$$\rho_1^2 - \rho_{01}^2 = \frac{\mu_2 t}{\pi}$$

$$\int \rho_1^2 \, d\chi_1 = -\frac{K \mu_2 t}{2\pi}$$

Hieraus folgt durch Elimination von t

$$\int \rho_1^2 \, d\chi_1 = -\frac{K}{2}(\rho_1^2 - \rho_{01}^2)$$

Die Differentiation ergiebt

$$\rho_1 = -K \frac{d\rho_1}{d\chi_1}$$

wobei χ negativ in Rechnung gebracht werden muss, wenn μ_2 positiv ist. Das Integral hiervon ist

$$\rho_1 = C\, e^{-\frac{1}{K}\chi_1}$$

Das Wirbelgebiet 1 beschreibt also eine logarithmische Spirale um das superpondirende Wirbelgebiet, welche entweder nach Innen oder nach Aussen gewunden ist, je nachdem das unbewegliche Wirbelgebiet cyklonale oder anticyklonale Bewegungsformen besitzt.

§ XI. *Veränderung der Windrichtung, der Windstärke und des Luftdrucks, für einen gegebenen äusseren Punkt bei zwiefacher Wirbelbildung.*

Es lässt nun somit im Allgemeinen überschauen, wie die Isodynamen also auch Isobaren mit der Zeit von Ort zu Ort fortrücken, indem sie gleichzeitig ihre Gestalten ändern, wenn zwei Wirbelgebiete in der Atmosphäre sich gebildet haben.

Wenn beide Wirbelgebiete cyklonale Bewegungsformen haben, so dass die Linie, welche den Centraltheil der Wirbelgebiete mit einander verbindet, sich im cyklonalen Sinne um einen unbeweglich zwischen den beiden Wirbelgebieten liegenden Punkt dreht und gleichzeitig sich zusammenzieht, so muss sich das Curvensystem der Isodynamen, [welches in diesem Fall erstens aus einer Schaar jedes Wirbelgebiet umschliessender Curven, zweitens aus einer lemniskatenähnlichen Curve, und drittens wieder aus einer Schaar geschlossener Curven bestehen, welche beide Wirbelgebiete einschliessen] mit der Zeit so ändern, dass die Linie, welche die Punkte der Druckminima mit einander verbindet, sich allmälig um einen festen Punkt im cyklonalen Sinne dreht, während sie sich gleichzeitig zusammen zieht, so lange, bis das Curvensystem sich in ein einziges System concentrischer Kreise verwandelt. Wenn die Bewegungsformen in beiden Wirbelgebieten anticyklonal sind, also dass die Verbindungslinie der Centraltheile der Wirbelgebiete um einem gewissen festen Punkt dreht, indem sie sich fortwährend ausdehnt, so wandern die Isodynamen entlang der Erdoberfläche im anticyklonalen Sinne um einen gewissen festen Punkt, welcher auf der Verbindungslinie zwischen den beiden Wirbelgebieten liegt, und breiten sich immer weiter aus, so lange, bis sie sich in zwei Systeme geschlossener Curven aufgelöst haben.

Haben die beiden Wirbelgebiete gleiche aber entgengesetzte Massen, so wandern die Isodynamen entlang der Erdoberfläche geradelinig mit constanter Geschwindigkeit im Sinne der cyklonalen Bewegung, ohne ihre Gestalten zu ändern, da die Verbindungslinie der Centraltheile der beiden Wirbelgebiete sich mit der Zeit nicht ändert. Wenn die beiden Gebiete hingegen entgegengesetzte, aber ungleiche Massen, haben, so dass die Gerade, welche die Centraltheile der beiden Wirbelgebiete mit einander verbindet, indem sie in *dem* Sinne, wie die eine Masse, die andere überwiegt, um einen auf ihrer Verlängerung liegenden Punkt umkreist, mit der Zeit sich ausdehnt oder zusammenzieht, so breiten sich die Isodynamen in die Unendlichkeit aus, oder ziehen sich allmälig zusammen in ein System geschlossener Curven, indem das Curvensystem um einen auf der Verbindungslinie der Centraltheile der Wirbelgebiete liegenden Punkt rotirt im anticyklonalen oder cyklonalen Sinne, je nachdem die Masse des anticyklonalen Gebiete diejenige des cyklonalen Gebietes überwiegt, oder umgekehrt.

Ist schliesslich die Masse eines Wirbelgebietes unendlich gross gegen diejenige des anderen Wirbelgebietes, so dass das eine Wirbelgebiet sich gar nicht bewegt, so drehen sich die Isodynamen allmälig um das unbewegliche Wirbelgebiete im cyklonalen oder anticyklonalen Sinne, während sie sich nach und nach in ein System geschlossener Curven zusammenziehen, oder sich in die Unendlichkeit ausbreiten, je nachdem das superpondirende Wirbelgebiet cyklonal oder anticyklonal ist.

Dem entsprechend änderen die Windbahnen ihre Lage gegen die Coordinatenaxen, wie ihre Gestalten, unaufhörlich mit der

Zeit; der Wind, welcher über einem Ort weht, wechselt seine Richtung unausgesetzt und zwar auf eine solche Weise, dass, ausgenommen den Ort, über welchen Eins der Wirbelgebiete gerade hinwegschreitet, die Windrichtung immer mit der Normale der Isodyame, welche gerade durch den gegebenen Ort geht, den constanten Winkel *arct.* K einschliesst. Wie die Windrichtung verändert sich so wohl die Windstärke, als der Luftdruck, in einem gegebenen Ort fortwährend mit der Zeit, und zwar so, dass die Vertheilung der Maxima und Minima der Zeit nach durchaus verschieden ausfallen muss, je nach der Lage des gegebenen Ortes in Bezug auf den gemeinsamen Schwerpunkt der beiden Wirbelgebiete.

So verwickelt die Gesetze auch sein mögen, gemäss denen die Veränderung dieser drei anemometrischen Faktoren in einem gegebenen Orte von sich geht, wenn zwei Wirbelgebiete in der Nähe desselben sich entwickelt haben, so lassen sich Ausdrücke dafür ableiten, und ohne jede Schwierigkeit, wenn die Wirbelgebiete entweder kreisförmig begrenzt oder bei beliebig gestaltetem Querschnitte unendlich klein sind gegen ihren Abstand vom gegebenen Ort.

Es sei ω das Azimuth der Windrichtung zur Zeit t, in *der* Richtung gezählt, in der eine Gerade aus einer Lage parallel der positiven x Achse (parallel dem Meridian) um 90° gedreht werden muss, um in *die* Lage parallel der positiven y Achse (parallel dem Parallelkreis) zu gelangen. Es seien x, y ferner die Coordinaten des gegebenen Ortes in Bezug auf ein Axensystem, dessen Anfangspunkt noch passend gewählt werden kann. Die Gleichung der Windbahn, welche zur Zeit t durch diesen Ort geht, ist in unserem speciellen Fall, wenn wir uns die beiden Wirbelgebiete kreisförmig begrenzt oder den Querschnitt der Wirbelgebiete gegen die Entfernung des Ortes von denselben sehr klein denken

$$K\mu_1 \log \rho_1' + K\mu_2 \log \rho_2' + \mu_1 \, arct.\left(\frac{y-y_1}{x-x_1}\right) + \mu_2 \, arct.\left(\frac{y-y_2}{x-x_2}\right) = const.$$

oder, indem wir $\frac{\mu_1}{\mu_2} = m$ setzen, und über die willkürliche Constante passend verfügen

$$K m \log \rho_1' + K \log \rho_2' + m \, arct\left(\frac{y-y_1}{x-x_1}\right) + arct\left(\frac{y-y_2}{x-x_2}\right) = const.$$

wo

$$\rho_1' = \sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2} \qquad \rho_2' = \sqrt{(x-x_2)^2 + (y-y_2)^2}$$

ist

Nun hat die an dieser Curve gelegte Tangente ω zum Azimuth. Wir erhalten somit durch Differentiation der Windbahngleichung

$$tag\, \omega = -\frac{K[(m\rho_2'^2(x-x_1) + \rho_1'^2)] - m(y-y_1)\rho_2'^2 - (y-y_2)\rho_1'^2}{K[(m\rho_2'^2(y-y_1) + \rho_1'^2)] + m(x-x_1)\rho_2'^2 + (x-x_2)\rho_1'^2} \tag{110}$$

Behufs weiterer Entwickelung wollen wir den Anfangspunkt des Coordinatensystems in den gemeinsamen Schwerpunkt der beiden Wirbelgebiete legen und setzen

$$\begin{array}{lll} x = \rho \cos \chi & y = \rho \sin \chi & \rho^2 = x^2 + y^2 \\ x_1 = \rho_1 \cos \chi_1 & y_1 = \rho_1 \sin \chi_1 & \rho_1^2 = x_1^2 + y_1^2 \\ x_2 = \rho_2 \cos \chi_2 & y_2 = \rho_2 \sin \chi_2 & \rho_2^2 = x_2^2 + y_2^2 \end{array}$$

Führt man dies in die Gleichung (110) ein und berücksichtigt dabei die Beziehungen

$$m\rho_1 = -\rho_2 \qquad \chi_1 = \chi_2$$

so findet man

$$tag\, \omega = -\frac{U}{V} \tag{110$_a$}$$

wo zur Abkürzung gesetzt worden ist

$$\begin{aligned}U=&\rho(K\cos\chi-\sin\chi)[(m+1)\rho^2+(1+m^3)\rho_1^2+2(m-1)\rho\rho_1\cos(\chi-\chi_1)]\\&-m\rho_1(K\cos\chi_1-\sin\chi_1)[(m^2-1)\rho_1^2+2(m+1)\rho\rho_1\cos(\chi-\chi_1)]\end{aligned}\qquad(111)$$

$$\begin{aligned}V=&\rho(K\sin\chi+\cos\chi)[(m+1)\rho^2+(1+m^3)\rho_1^2+2(m-1)\rho\rho_1\cos(\chi-\chi_1)]\\&-m\rho_1(K\sin\chi_1+\cos\chi_1)[(m^2-1)\rho_1^2+2(m+1)\rho\rho_1\cos(\chi-\chi_1)]\end{aligned}$$

Die Grössen ρ_1 und χ_1 sind schon als Functionen von der Zeit t bekannt; es ist

$$\rho_1^2=\rho_{01}^2\,(1+\varepsilon t)\qquad\qquad \chi_1=\chi_0+\frac{K}{2}\log(1+\varepsilon t)$$

wo $\dfrac{\mu_2^2}{\pi\rho_{01}^2(\mu_1+\mu_2)}=\varepsilon$ gesetzt worden ist. Die Substitution dieser Ausdrücke in (111) ergiebt

$$\begin{aligned}U=&\rho(K\cos\chi-\sin\chi)\Big[(m+1)\rho^2+(1+\varepsilon t)(1+m^3)\rho_{01}^2\\&+2(m-1)\sqrt{(1+\varepsilon t)}\rho\rho_{01}\cos\Big(\chi-\chi_0-\frac{K}{2}\log(1+\varepsilon t)\Big)\Big]\\&-m\rho_{01}\sqrt{(1+\varepsilon t)}\Big[K\cos\Big(\chi_0+\frac{K}{2}\log(1+\varepsilon t)\Big)-\sin\Big(\chi_0+\frac{K}{2}\log(1+\varepsilon t)\Big)\Big]\\&\Big[(m^2-1)(1+\varepsilon t)\rho_{01}^2+2(m+1)\sqrt{(1+\varepsilon t)}\rho\rho_{01}\cos\Big(\chi-\chi_0-\frac{K}{2}\log(1+\varepsilon t)\Big)\Big]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}V=&\rho(K\sin\chi+\cos\chi)\Big[(m+1)\rho^2+(1+\varepsilon t)(1+m^3)\rho_{01}^2\\&+2(m-1)\sqrt{(1+\varepsilon t)}\rho\rho_{01}\cos\Big(\chi-\chi_0-\frac{K}{2}\log(1+\varepsilon t)\Big)\Big]\\&-m\rho_{01}\sqrt{(1+\varepsilon t)}\Big[K\cos\Big(\chi_0+\frac{K}{2}\log(1+\varepsilon t)\Big)+\cos\Big(\chi_0+\frac{K}{2}\log(1+\varepsilon t)\Big)\Big]\\&\Big[(m^2-1)(1+\varepsilon t)\rho_{01}^2+2(m+1)\sqrt{(1+\varepsilon t)}\rho\rho_{01}\cos\Big(\chi-\chi_1-\frac{K}{2}\log(1+\varepsilon t)\Big)\Big]\end{aligned}$$

wodurch tag ω als Function von t dargestellt worden ist.

Es ist ebenso leicht einen Ausdruck abzuleiten für die Geschwindigkeit, mit welcher der Wind in einem gegebenen Orte zu gegebener Zeit weht. Nennt man die resultirende Geschwindigkeit des Windes F, so ist für einen Ort, der ausserhalb der Wirbelgebiete liegt

$$F^2 = (1+K^2)\left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2\right]$$

Setzt man hierin die für zwei kreisförmige oder unendlich kleine Wirbelgebiete giltige Lösung

$$\varphi = \mu_1 \log \rho_1' + \mu_2 \log \rho_2'$$

so kommt

$$F^2 = \frac{(1+K^2)}{\rho_1'^2\,\rho_2'^2}\Big[\mu_1^2\rho_2'^2+\mu_2^2\rho_1'^2+2\mu_1\mu_2\Big(y^2+x^2-y(y_1+y_2)-x(x_1+x_2)$$
$$+y_1 y_2+x_1 x_2\Big)\Big]$$

Dieses lässt sich nun leicht durch Einführung der Polarcoordinaten mit Rücksicht auf die Beziehungen $\rho_2 = -m\rho_1$ und $\chi_1 = \chi_2$ umformen in

$$F^2 = \frac{\mu_2^2(1+K^2)(1+m)^2[\rho^2+(m-1)^2\rho_1^2+2(m-1)\rho\rho_1\cos(\chi-\chi_1)]}{[\rho^2+\rho_1^2-2\rho\rho_1\cos(\chi-\chi_1)][\rho^2+m^2\rho_1^2+2m\rho\rho_1\cos(\chi-\chi_1)]}$$

Die Substitution der oben angegebenen Ausdrücke für ρ_1 und χ_1 ergiebt den verlangten Ausdruck

$$F^2 = \frac{\mu_2^2(1+m)^2(1+K^2)\Big[\rho^2+(m-1)^2(1+\varepsilon t)\rho_{01}^2}{\Big[\rho^2+\rho_{01}^2(1+\varepsilon t)-2\rho\rho_{01}\sqrt{(1+\varepsilon t)}\cos\Big(\chi-\chi_0-\frac{K}{2}\log(1+\varepsilon t)\Big)\Big]}$$
$$\frac{+2(m-1)\sqrt{(1+\varepsilon t)}\rho\rho_{01}\cos\Big(\chi-\chi_0-\frac{K}{1}\log(1+\varepsilon t)\Big)\Big]}{\Big[\rho^2+m^2\rho_{01}^2(1+\varepsilon t)+2m\rho\rho_{01}\sqrt{(1+\varepsilon t)}\cos\Big(\chi-\chi_0-\frac{K}{2}\log(1+\varepsilon t)\Big)\Big]} \qquad (112)$$

wodurch die resultirende Windgeschwindigkeit in einem gegebenen Punkt der Erdoberfläche als Function von t dargestellt worden ist. Die Gleichungen (110_a) (112) setzen uns in den Stand, sowohl die Windrichtung als die Windgeschwindigkeit für verschiedene Orte, und Zeiten zu ermitteln, so bald die anfängliche Lage der beiden Wirbelgebiete, ihre Massen und ihr gegenseitiger Abstand zu *einer* Zeit gegeben sind. Da sie aber zu complicirt sind, als dass sie ohne Weitschweifigkeit eine allgemeine Discussion gestatteten, so wollen wir uns damit begnügen, den Richtungswechselund die Veränderung der Windgeschwindigkeit für einige besondere Fälle näher zu verfolgen.

Wenn ρ unendlich gross gegen ρ_{01} und ρ_{02} ist, d. h, wenn der Beobachtungsort unendlich weit vom Schwerpunkt der beiden Wirbelgebiete liegt, so dass $\frac{\rho_{01}}{\rho}\sqrt{(1+\varepsilon t)}$ für endliche t unendlich klein ist, so hat man die einfache Gleichung

$$tag\,\omega = -\frac{(K\,cos\,\chi - sin\,\chi)}{(K\,sin\,\chi + cos\,\chi)}$$

oder mit Rücksicht auf die Gleichung $tag\; i = K$, wo i den Deviationswinkel bedeutet

$$\omega = \chi - i$$

Die Windrichtung ist demnach constant. Liegt daher der betreffende Ort *z. B* im ersten Quadrante, und sind die beiden unendlich fernen Wirbelgebiete cyklonal, so weht dort *SW. SSW. S. SSO. SO*, oder je nach dem der Ort in Bezug auf den Schwerpunkt der Wirbelgebiete mehr südlich oder östlich liegt, und zwar nur schwach, da unter diesem Umstande die Windstärke

$$F^2 = \frac{\mu_2^2\,(1+m)^2\,(1+K^2)}{\rho^2}$$

um so kleiner ist, je grösser ρ ist.

Liegt hingegen der Beobachtungsort im Schwerpunkt der beiden Wirbelgebiete, so dass $\rho = 0$ ist, so hat man für diesen Fall,

$$tag\,\omega = -\frac{K\,cos\,[\chi_0 + \frac{K}{2}\,log\,(1+\varepsilon t)] - sin\,[(\chi_0 + \frac{K}{2}\,log\,(1+\varepsilon t)]}{K\,sin\,[\chi_0 + \frac{K}{2}\,log\,(1+\varepsilon t)] + cos\,[\chi_0 + \frac{K}{2}\,log\,(1+\varepsilon t)]}$$

d. h.

$$\omega = \chi_0' + \frac{K}{2} \log (1 + \varepsilon t) - i$$

Der Wind geht demnach allmälig durch alle Himmelsstriche und zwar entweder im cyklonalen Sinne immer langsamer oder anticyklonalen Sinne immer schneller, je nachdem die beiden Wirbelgebiete anticyklonal oder cyklonal sind oder je nachdem das superpondirende Wirbelgebiet anticyklonal oder cyklonal ist. Dabei nimmt die Windgeschwindigkeit im ersteren Fall unaufhörlich ab, und im letzteren Fall dagegen unaufhörlich zu; denn der Ausdruck für die resultirende Geschwindigkeit verwandelt sich in unserem besonderen Fall in

$$F'^2 = \frac{\mu_2^2 (1+m)^2 (1+K^2)(m-1)^2}{m^2 \rho_2^2 (1+\varepsilon t)}$$

F'^2 wächst sonach mit der Zeit oder nimmt ab, je nachdem $\varepsilon < 0$ oder > 0 ist, vorausgesetzt dass $m \gtrless 1$ ist. Ist nun $m = 1$ *d. h.* sind die Massen der beiden Wirbelgebiete gleichsinnig und einander gleich, so verschwindet F'^2; es entsteht um den Schwerpunkt ein Gebiet der Windstillen.

Wir fassen ferner einen Fall in's Auge, wo

$$m = 1 \qquad \chi_0' = 0 \qquad \chi = 0$$

ist, womit gesagt ist, dass die beiden Wirbelgebiete gleiche und gleichsinnige Massen, und zur Zeit $t = 0$ *die* Lage haben, dass die Verbindungslinie ihrer Schwerpunkte parallel dem Meridian gerichtet ist und dass der Beobachtungsort südlich von Schwerpunkt der beiden Wirbelgebiete liegt. Die Gleichungen (110_a) (112) verwandeln sich für diesen Fall nach leichter Umformung in

$$tag\, \omega = -\frac{[K\rho^2 - \rho_{01}^2 (1+\varepsilon t)[K \cos K \log (1+\varepsilon t) - \sin K \log (1+\varepsilon t)]]}{[\rho^2 + \rho_{01}^2 (1+\varepsilon t)[K \sin K \log (1+\varepsilon t) - \cos K \log (1+\varepsilon t)]]}$$

$$F'^2 = \frac{4\, \mu_2^2 (1+K^2)\, \rho^2}{\rho^4 + \rho_{01}^4 (1+\varepsilon t)^2 - 2\rho^2 \rho_{01}^2 (1+\varepsilon t) \cos K \log (1+\varepsilon t)}$$

Wir nehmen zuerst an, dass $\varepsilon > 0$ sei, *d. h.* dass die beiden Wirbelgebiete anticyklonal seien. Dann sind wieder zwei Fälle zu unterscheiden, ob $\rho > \rho_{01}$ oder $\rho > \rho_{01}$ ist. Im ersteren Fall, wo der Beobachtungsort innerhalb der Bewegungsbahn der Wirbelgebiete liegt, kann sowohl der Zähler als der Nenner in dem Ausdruck für tag ω verschwinden. Es weht daher in dem betreffenden Ort jedesmal *S.* oder *N.*, so oft

$$\frac{K\rho^2}{\rho_{01}^2(1+\varepsilon t)} = K \cos K \log(1+\varepsilon t) - \sin K. \log(1+\varepsilon t)$$

wird, und jedesmal *O.* oder *W.*, so oft

$$\frac{\rho^2}{\rho_{01}^2(1+\varepsilon t)} = \cos K \log(1+\varepsilon t) - K \sin K \log(1+\varepsilon t)$$

wird, was immer für reelle Werthe von t stattfinden kann, da auch die linker Hand stehende Grösse ein positiver echter Bruch ist. Der Wind geht daher in diesem Orte durch alle Himmelsstriche und die Windfahne dreht sich dabei immer langsamer im cyklonalen Sinne, während die Windgeschwindigkeit, abgesehen von den Schwankungen, deren Periode immer grösser wird, allmälig abnimmt. Ist dagegen $\rho > \rho_{01}$ *d. h.* liegt der Ort ausserhalb des Bewegungsbahn der Wirbelgebiete, so kann tagω nie $= 0$, noch $= \pm \infty$ werden, so lange $\rho > \rho_{01}(1+\varepsilon t)$ ist und die Windrichtung schwankt nur zwichen *N.* und *O.*, so lange bis das eine Wirbelgebiet über den gegebenen Ort oder südlich davon hinwegschreitet, so dass der Ort dann zwischen dem Schwerpunkt und dem Wirbelgebiet zu liegen kommt, und der Wind dann wieder durch alle Striche weht.

Wenn nun $\varepsilon < 0$ ist, *d. h.* wenn die beiden Wirbelgebiete cyklonal sind, so verhält sich die Sache etwas anderes. Die obenstehenden Gleichungen werden in diesem Fall

$$tag\,\omega = -\frac{[K\rho^2 - \rho_{01}^2(1-\varepsilon t)[K \cos K \log(1-\varepsilon t) - \sin K \log(1-\varepsilon t)]]}{[\rho^2 + \rho_{01}^2(1-\varepsilon t)[K \sin K \log(1-\varepsilon t) - \cos K \log(1-\varepsilon t)]]}$$

$$F^2 = \frac{4\mu_2^2(1+K^2)\rho^2}{\rho^4 + \rho_{01}^4(1-\varepsilon t)^2 - 2\rho\rho_{01}^2(1-\varepsilon t)\cos K \log(1-\varepsilon t)}$$

So lange $\rho^2 < \rho_{01}^2(1-\varepsilon t)$, so verschwindet tag ω, so oft

$$\frac{K\rho^2}{\rho_{01}^2(1-\varepsilon t)} = K\cos K\log(1-\varepsilon t) - \sin K\log(1-\varepsilon t)$$

ist und wird $= \pm\infty$, so oft

$$\frac{\rho^2}{\rho_{01}(1-\varepsilon t)} = \cos K\log(1-\varepsilon t) - K\sin K\log(1-\varepsilon t)$$

wird. So lange weht der Wind demnach von allen Himmelsstrichen und die Richtungsänderung geschieht anticyklonal und zwar immer schneller, wobei Maxima und Minima der Windstärke immer rascher auf einander folgen, während sie selbst immer mehr zunimmt.

Ist ρ endlich $> \rho_{01}$ *d. h.* liegt der Ort jenseits der Bewegungsbahn der Wirbelgebiete, so schwankt die Windrichtung nur zwischen *S.* und *W.* alle zwischenliegende Striche hindurch, während die Schwankungen der Windstärke immer schneller erfolgen, wobei die Windstärke unaufhörlich abnimmt, bis sie für den betreffenden Ort einen constanten Werth erreicht hat.

Es bleibt nur noch der Fall zu untersuchen übrig, wo die Massen der beiden Wirbelgebiete gleich aber entgegengesetzt sind, wo also der Schwerpunkt der beiden Wirbelgebiete in die Unendlichkeit rückt. Wie wir oben gesehen haben, bewegen sich die beiden Wirbelgebiete in diesem Fall geradelinig mit constanter-Geschwindigkeit

$$\sqrt{\left(\frac{d\rho_1}{dt}\right)^2 + \left(\rho_{01}\frac{dX_1}{dt}\right)^2} = \frac{\mu_1}{4\pi r}\sqrt{1+K^2}$$

und zwar in *der* Richtung, in der die Luft zwischen den beiden Wirbelgebieten strömt. Bezeichnen wir diese Geschwindigkeit mit R, und beziehen die Schwerpunkte der Wirbelgebiete auf ein Coordinatensystem, dessen x Achse wieder gegen $S.$ und dessen positive y Achse gegen O. gerichtet, and dessen Anfangspunkt in dem Punkt auf der Erdoberfläche liegen soll, dessen Windverhältniss wir untersuchen wollen, so dass die Gleichungen (110_a) (112) sich in diesem Fall verwandeln in

$$tag\ \omega = -\frac{[(x_2^2+y_2^2)(Kx_1-y_1) + (x_1^2+y_1^2)(y_2-Kx_2)]}{(x_2^2+y_2^2)(Ky_1+x_1) - (x_2^1+y_1^2)(x_2+Ky_2)} \tag{113}$$

$$F^2 = \frac{(1+K^2)\ \mu_1^2 (x_1^2+y_1^2+x_2^2+y_2^2-2\,y_1 y_2-2\,x_1 x_2)}{(x_1^2+y_1^2)(x_2^2+y_2^2)} \tag{114}$$

Es seien $\alpha_1\ \beta_1,\ \alpha_2\ \beta_2$ die Coordinaten der Schwerpunkte der beidem Wirbelgebiete zur Zeit $t=o$, und ψ sei der Winkel, welchen die Fortschreitungsrichtung der beiden Wirbelgebiete mit der positiven x Achse einschliesst. Wenn wir setzen

$$\begin{aligned} x_1 &= Rt.\ cos\ \psi + \alpha_1 \qquad & x_2 &= Rt.\ cos\ \psi + \alpha_2 \\ y_1 &= Rt.\ sin\ \psi + \beta_1 \qquad & y_2 &= Rt.\ sin\ \psi + \beta_2 \end{aligned} \tag{115}$$

so ist die Bedingung von der Unveränderlichkeit des Abstandes der beiden Wirbelgebiete

$$(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2 = (\alpha_1-\alpha_2)^2 + (\beta_1-\beta_2)^2 = r^2$$

erfüllt. Die Substitution der Ausdrüche (115) in (113) (114) ergiebt nach leichter Umformung.

$$tag\ \omega = -\frac{U}{V}$$

wo

$$\begin{aligned} U = &(R^2t^2+2Rt[\alpha_2 cos\,\psi+\beta_2 sin\psi]+\alpha_2^2+\beta_2^2)(K[Rt\,cos\,\psi + \alpha_1]-Rt\,sin\,\psi-\beta_1) \\ &-(R^2t^2+2Rt[\alpha_1 cos\,\psi+\beta_1 sin\psi]+\alpha_1^2+\beta_1^2)(K[Rt\,cos\,\psi + \alpha_2]-Rt\,sin\,\psi-\beta_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V = &(R^2t^2+2Rt[\alpha_2 cos\,\psi+\beta_2 sin\psi]+\alpha_2^2+\beta_2^2)(K[Rt\,sin\,\psi + \beta_1]+Rt\,cos\,\psi+\alpha_1) \\ &-(R^2t^2+2Rt[\alpha_1 cos\,\psi+\beta_1 sin\psi]+\alpha_1^2+\beta_2^2)(K[Rt\,sin\,\psi + \beta_2]+Rt\,cos\,\psi+\alpha_2) \end{aligned}$$

ist.

$$F^2 = \frac{\mu_1^2(1+K^2)\,r^2}{(R^2t^2+2Rt[\alpha_1 cos\psi+\beta_1 sin\psi]+\alpha_1^2+\beta_1^2)(R^2t^2+2Rt[\alpha_2 cos 4+\beta_2 sin\psi]+\alpha_2^2\beta_2^2]}$$

wodurch das Azimuth des Windes und die Windgeschwindigkeit als Function der Zeit dargestellt worden ist.

Der Winkel ψ ist dabei auf gewisse Weise von der Richtung der Verbindungslinie der beiden Wirbelgebiete abhängig. Zieht man zu dieser Gerade eine Senkrechte, so macht, wie wir schon oben gesehen haben, die Richtung der Fortschreitungsgeschwindigkeit mit dieser Senkrechte einen Winkel, dessen trigonometrische Tangente

$$= K$$

ist. Bezeichnet man diesen mit i und den Winkel, welche die zur Verbindungslinie der beiden Wirbelgebiete senkrechte Linie mit der positiven x Achse einschliesst mit ψ, so hat man

$$\psi = \varphi + i \qquad \text{und} \quad cot\varphi = \frac{\beta_1 - \beta_2}{\alpha_1 - \alpha_2}$$

Mithin

$$\psi = arcot.\left(\frac{\beta_1 - \beta_2}{\alpha_1 - \alpha_2}\right) + i$$

wobei der rechter Hand stehende Quotient im absoluten Sinne genommen werden kann, wenn man nur fest setzt, dass φ in *der* Richtung gezählt wird, in der man das cyklonale Wirbelgebiet erblickt, wenn man nach der Richtung der Fortschreitung hinsieht.

Um einen einfachen Fall beispielsweise zu betrachten, nehmen wir an, dass

$$\alpha_1 = \alpha_2 = 0 \qquad \beta_1 = -\beta_2 = \beta.$$

d. h. dass der Beobachtungsort zur Zeit $t = 0$ gerade in der Mitte der Verbindungslinie der beiden Wirbelgebiete liege. Unsere Gleichungen lassen sich in diesem einfachen Fall mit Rücksicht auf die Beziehung $tag\, i = K$ umformen in

$$tag\ \omega = \frac{(R^2 t^2 + \beta^2)}{(\beta^2 - (2K - 1)R^2 t^2)}$$

$$V^2 = \frac{\mu_1^2 (1+K^2) r^2}{[(R^2 t^2 + \beta^2)^2 - 4 R^2 t^2 \beta^2 sin^2 i]}$$

Die Windgeschwindigkeit ist demnach, wie leicht vorauszusehen war, am grössten zur Zeit $t = 0$, und nimmt, indem die beiden Wirbelgebiete fortschreiten, unaufhörlich ab. Wie der Wind seine Richtung mit der Zeit wechselt, das hängt, wie man sieht, davon ab, ob $K > \frac{1}{2}$ oder $< \frac{1}{2}$ ist. Ist das erstere der Fall, so weht in dem betreffenden Orte anfangs ein *NW.* mit dem Azimuth 45°, und die Windrichtung geht dann durch *NWW.* in reinen *W* über, und zwar nach dem Verlaufe der endlichen Zeit $t = \frac{\beta}{R\sqrt{2K-1}}$, von welchem Zeitpunkt ab der Wind rasch *SSW. SW.* wird, und sich dann immer langsamer einer bestimmten südwestlichen Richtung nährt, deren Azimuth durch die Gleichung

$$tag\,\omega = -\frac{1}{(2K-1)}$$

bestimmt ist. Wenn aber $K < \frac{1}{2}$ ist, so findet ein solcher Windwechsel nicht statt; der Wind bleibt fortwährend zwischen *N.* und *W.* und nährt sich einer bestimmten nordwestlichen Richtung, deren Azimuth durch die Gleichung

$$tag\,\omega = \frac{1}{1-2K}$$

bestimmt ist.

Der in einem gegebenen Ort herrschende Druck lässt sich auch eben so leicht als Function von der Zeit darstellen. Aus den Gleichungen

$$\Phi = -\left(\kappa + \frac{4\lambda^2 sin^2 \theta}{\kappa}\right)(\mu_1 log\, \rho_1' + \mu_2 log\, \rho_2')$$

$$\frac{p}{\mu} + \frac{1}{2}(u + v^2) - G = \Phi$$

folgt durch Einführung der Polarcoordinaten

$$p = \mu G - \mu \left(\kappa + \frac{4\lambda^2 \sin^2\theta}{\kappa}\right) \log \Big\{ [\rho^2 + \rho_1^2 - 2\rho\rho_1 \cos(\chi - \chi_1)]^m$$

$$[\rho^2 + m^2\rho_1^2 + 2m\rho\rho_1 \cos(\chi - \chi_1)] \Big\} - \frac{\mu\mu_2^2 (1+m)^2 (1+K^2)}{2} *$$

$$* \frac{[\rho^2 + (m-1)^2 \rho_1^2 + 2(m-1)\rho\rho_1 \cos(\chi - \chi_1)]}{[\rho^2 + \rho_1^2 - 2\rho\rho_1 \cos(\chi - \chi_1)][\rho^2 + m^2\rho_1^2 + 2m\rho\rho_1 \cos(\chi - \chi_1)]}$$

Hieraus folgt weiter durch die Einführung der Ausdrücke für ρ_1 und χ_1

$$p = \mu G - \mu\mu_2\kappa(1+K^2) \log \left\{ \left[\rho^2 + \rho_{01}^2(1+\varepsilon t) - 2\rho\rho_{01}\sqrt{(1+\varepsilon t)} \cos\left(\chi - \chi_0 - \frac{K}{2}\log(1+\varepsilon t)\right)\right]^m\right.$$

$$\left.\left[\rho^2 + m^2\rho_{01}^2(1+\varepsilon t) + 2m\rho\rho_{01}\sqrt{(1+\varepsilon t)} \cos\left(\chi - \chi_0 - \frac{K}{2}\log(1+\varepsilon t)\right)\right]\right\} - \frac{\mu\mu_2^2(1+m)^2(1+K^2)}{2} *$$

$$* \frac{\left[\rho^2 + (m-1)^2\rho_{01}^2(1+\varepsilon t) + 2(m-1)\rho\rho_{01}\sqrt{(1+\varepsilon t)} \cos\left(\chi - \chi_0 - \frac{K}{2}\log(1+\varepsilon t)\right)\right]}{\left[\rho^2 + \rho_{01}^2(1+\varepsilon t) - 2\rho\rho_{01}\sqrt{(1+\varepsilon t)} \cos\left(\chi - \chi_0 - \frac{K}{2}\log(1+\varepsilon t)\right)\right]} *$$

$$* \overline{\left[\rho^2 + m^2\rho_{01}^2(1+\varepsilon t) + 2m\rho\rho_{01} \cos\left(\chi - \chi_0 - \frac{K}{2}\log(1+\varepsilon t)\right)\right]}$$

ein Ausdruck für die Veränderlichkeit des in einem gegebenen Ort herrschenden Drucks mit der Zeit, wenn zwei Wirbelgebiete sich in der Nähe des Ortes gebildet haben.

Da nun eine allgemeine Discussion dieses complizirten Ausdrucks schwierig ist, wegen der grossen Anzahl der Parameter und der dadurch bedingten möglichen Fälle, wollen wir uns damit begnügen, einige besondere Fälle näher zu betrachten.

Es sei zunächst $\rho = 0$, *d. h.* der Ort liege gerade im Schwerpunkte der beiden Wirbelgebiete, so wird in diesem Fall

$$p = \mu G - \mu\mu_2\kappa(1+K^2) \log [m^2(1+\varepsilon t)^{m+1} \rho_{01}^{2m+2}]$$

$$- \frac{\mu\mu_2^2(1+m)^2(1+K^2)}{2m^2} \quad \frac{(m-1)^2}{\rho_{01}^2(1+\varepsilon t)}$$

oder

$$p = \mu G - \mu \mu_2 \kappa (1 + K^2)[(m+1) \log (1 + \varepsilon t) - 2 \log m \rho_{01}^{m+1}]$$
$$- \frac{\mu \mu_2^2 (1+m)^2 (1+K^2)(m-1)^2}{2 m^2 \rho_{01}^2 (1 + \varepsilon t)}$$

Hierbei sind vier Fälle zu unterscheiden, ob die beiden Wirbelgebiete anticyklonal sind oder cyklonal, oder auch, ob das superpondirende Wirbelgebiet anticyklonal oder cyklonal ist. Wenn wir das erste annehmen, und festsetzten, dass $\varepsilon > 0$ ist, so sehen wir, indem wir den ersten Differentialquotienten

$$\frac{dp}{dt} = \frac{\mu \mu_2 (1+m)(1+K^2).\varepsilon.}{(1 + \varepsilon t)} \left(\frac{\mu_2}{\rho_{01}^2} \frac{(m+1)(m-1)^2}{(1 + \varepsilon t)} - \kappa \right)$$

betrachten, dass, falls $\frac{\mu_2}{\rho_{01}^2}(m+1)(m-1)^2 > \kappa$ ist, der Druck zuerst zunimmt, und dann immer langsamer abnimmt. Die Zeit, wo der Maximaldruck eintritt ist

$$= \frac{\pi}{\kappa} \left[\mu_2 (1+m)(m-1)^2 - \kappa \rho_{01}^2 \right]$$

Sind aber die beiden Wirbelgebiete cyklonal, so dass μ_2, wie ε negativ zu setzen ist, so nimmt der Druck unter denselben Umständen nur unaufhörlich ab, und zwar immer rascher, da $(1 - \varepsilon t)$ mit wachsender t abnimmt.

Betrachten wollen wir noch die Druckveränderung in dem besonderen Fall, wo

$$X_0 = 0 \qquad X = 0 \qquad m = 1$$

ist. Der Ausdruck für den Druck vereinfacht sich unter diesen Umständen zu

$$p = \mu G - \mu \mu^2 \kappa (1 + K^2) \log [\rho^4 + \rho_{01}^4 (1 + \varepsilon t)^2 - 2 \rho_{01}^2 \rho^2 (1 + \varepsilon t) \cos K \log (1 + \varepsilon t)]$$
$$- 2 \mu \mu_2 (1 + K^2) \rho^2 \left[\frac{1}{\rho^4 + \rho_{01}^4 (1 + \varepsilon t)^2 - 2 \rho_{01} \rho^2 (1 + \varepsilon t) \cos K \log (1 + \varepsilon t)} \right]$$

Die Veränderungen des Drucks sind demnach theils periodische theils stetige; der Druck schwankt zwischen Minimum und Maximum, bald schneller, bald langsamer, indem Maxima und Minima entweder unaufhörlich abnehmen, oder leise zu einem beistimmten Grenzwerthe wachsen, je nachdem die beiden Wirbelgebiete anticyklonal oder cyklonal sind.

Bildet man den ersten Differentialquotienten, und setzt zur Abkürzung

$$\frac{\rho_{01}}{\rho} = \alpha \qquad \frac{\mu_2}{\rho_{01}^2} = \beta \qquad 2\,\varepsilon\,(1+K^2)\,\mu\,\mu_2\,\alpha^2 = \gamma.$$

so kommt

$$\frac{dp}{dt} = \gamma\,\frac{[\alpha^2\beta - \kappa(1+\alpha)^4(1+\varepsilon t)^2 - 2\,\alpha^2(1+\varepsilon t)\cos K\log(1+\varepsilon t)]}{[1+\alpha^4(1+\varepsilon t)^2 - 2\,\alpha^2(1+\varepsilon t)\cos K\log(1+\varepsilon t)]^2} *$$

$$* \frac{[\alpha^2(1+\varepsilon t) - \cos K\log(1+\varepsilon t) + K\sin\log(1+\varepsilon t)]}{} \qquad (116)$$

Setzt man die beiden Factoren im Zähler $= 0$, und löst nach $\alpha^2\,(1+\varepsilon t)$ auf, so dass

$$\alpha^2\,(1+\varepsilon t) = \cos K\log(1+\varepsilon t) - \sqrt{\frac{\alpha^2\beta}{\kappa} - 1 + \cos^2 K\log(1+\varepsilon t)}$$

$$\alpha^2\,(1+\varepsilon t) = \cos K\log(1+\varepsilon t) - K\sin K\log(1+\varepsilon t)$$

oder indem man setzt, unter der Voransetzung des positiven ε

$$K\log(1+\varepsilon t) = \vartheta$$

$$\alpha^2 e^{\frac{\vartheta}{K}} = \cos\vartheta + \sqrt{\left(\frac{\alpha^2\beta}{\kappa} - 1\right) + \cos^2\vartheta} = \cos\vartheta + \sqrt{\frac{\alpha^2\beta}{\kappa} - \sin^2\vartheta}$$

$$(117)$$

$$\alpha^2 e^{\frac{\vartheta}{K}} = \cos\vartheta - K\sin\vartheta.$$

Ob diese transscendenten Gleichungen reelle Wurzeln haben, das hängt von den Werthen der hierin auftretenden Parameter ab. Wir wollen, um die Discussion zu erleichtern, die Constante $K = 1$ setzen dann sind vier mögliche Fälle denkbar

$$\frac{\alpha^2\beta}{\kappa} > 1 \qquad \alpha^2 > 1$$

$$\frac{\alpha^2\beta}{\kappa} > 1 \qquad \alpha^2 < 1$$

$$\frac{\alpha^2\beta}{\kappa} < 1 \qquad \alpha^2 > 1$$

$$\frac{\alpha^2\beta}{\kappa} < 1 \qquad \alpha^2 < 1$$

Während in den beiden letzteren Fällen die erste Gleichung nicht stattfindet, da der Wurzelausdruck im allgemeinen imaginär wird, kann dieselbe in den beiden letzteren Fällen wohl durch einen reellen Werth von ϑ befriedigt werden, und zwar durch einen einzigen zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ liegenden Werth, wie man sich leicht davon überzeugen kann durch graphische Darstellung der beiden Curven

$$y = \sqrt{\frac{\alpha^2\beta}{\kappa} - \sin^2\vartheta} \qquad y = \alpha^2 e^{\vartheta} - \cos\vartheta$$

Die zweite Gleichung wird auch nur dann durch ein reelles ϑ erfüllbar, wenn $\alpha^2 < 1$ ist, und zwar durch einen einzigen zwischen 0 und $\frac{\pi}{4}$ liegenden Werth. Es folgt hieraus: haben die beiden Wirbelgebiete anticyklonale Bewegungsformen, so kann der Luftdruck für den Ort von der vorausgesetzten Lage in Bezug auf den Schwerpunkt der beiden Wirbelgebiete höchstens einmal Maximum und ein Minimum sein, wenn der betreffende Ort ausserhalb der Fortschreitungsbahn der beiden Wirbelgebiete liegt, und zwar so dass

$$\alpha^2 e^{\vartheta} = \cos\vartheta - \sin\vartheta$$

den Zeitpunkt bestimmt, wo das Druckminimum eintritt, während

$$\alpha^2 e^{\vartheta} = \cos\vartheta + \sqrt{\frac{\alpha^2\beta}{\kappa} - \sin^2\vartheta}.$$

den Zeitpunkt angiebt, wo in dem betreffenden Ort der Druck Maximum wird.

Anderes verhält sich die Sache, wenn ε negativ ist, *d. h*, wenn die beiden Wirbelgebiete cyklonal sind. Die Gleichungen (117) werden in diesem Fall

$$\alpha^2 e^{-\vartheta} = \cos\vartheta + \sqrt{-\frac{\alpha^2\beta}{\kappa} - \sin^2\vartheta}$$

$$\alpha^2 e^{-\vartheta} = \cos\vartheta - \sin\vartheta$$

Die erste Gleichung findet nicht statt, da der Wurzelausdruck imaginär ist, während die linke Seite eine nur reelle Grösse ist, wenn ϑ reell ist. Die zweite Gleichung hat hiergegen unendlich viele reelle Wurzeln, welche alle positiv sind und sich, je grösser ihre Werthe sind, desto mehr dem ungeraden Vielfach von $\frac{\pi}{4}$ nähren, gleichgiltig, ob $\alpha^2 > 1$ oder < 1 ist. Die Reihenfolge, in der Druckmaxima und Druckminima erscheinen, ist jedoch verschieden, je nachdem $\alpha^2 > 1$ oder < 1 ist, *d. h.* je nachdem der Ort innerhalb der Bewegungsbahn der beiden Wirbelgebiete liegt, oder ausserhalb derselben. Setzt man in (116) $t = 0$, so kommt

$$\frac{dp}{dt} = -\gamma\,\frac{[\alpha^2\beta + \kappa(1-\alpha^2)^2]}{(\alpha^2-1)}$$

Ist daher $\alpha^2 > 1$, so nimmt p ab; mithin bestimmt die erste Wurzel jener transscendenten Gleichung den Zeitpunkt des Druckminimums, und die zweite denjenigen des ersten Druckmaximums. *u. s. w.* Ist hingegen $\alpha^2 < 1$, so nimmt p anfangs zu; die erste Wurzel bestimmt den Zeitpunkt des ersten Druckmaximums, und die zweite den des ersten Druckminimums *u. s. w.* Dabei folgen Druckmaxima und Minima immer rascher auf einander, bis nach dem Verlauf der Zeit $t = \frac{1}{\varepsilon}$ der Druck einen für den gegebenen Ort constanten Werth

$$\mu G + 4\,\mu\mu_2\,\kappa\,(1+K^2)\log\rho - \frac{2\,\mu\mu_2^2\,(1+K^2)}{\rho^2}$$

erreicht hat.

Die bisher entwickelten Formeln setzen voraus, dass die beiden Wirbelgebiete entweder kreisförmig begrenzt, oder die Querschnitte derselben unendlich klein seien gegen die Entfernung des Ortes von den Schwerpunkten der beiden Wirbelgebiete. Haben die beiden Wirbelgebiete endliche anderes begrenzte Querschnitte, als durch Kreise, so lassen sich auf dieselbe Wiese die Faktoren, welche das Windverhältniss in einem gegebenen Orte bestimmen, Windrichtung, Windstärke, und Druck, als Functionen von der Zeit t darstellen, wenn es nur gelingt, ein Integral von der Form

$$\iint log \sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}\, dx'dy'$$

für einen ausserhalb des Wirbelgebietes liegenden Punkt zu bilden. Es ist denn auch leicht, dieses Integral als Function von den Coordinaten des Schwerpunktes des Wirbelgebietes und damit als Function von der Zeit darzustellen. Man verlege den Coordinatenanfang für den inneren Punkt $x'\, y'$ in den Schwerpunkt und setze

$$x' = \xi + x_1 \qquad y' = y + y_1$$

wo ξ, η die neuen Coordinaten, $x_1\, y_1$ die Coordinaten des Schwerpunktes sind in Bezug auf den gemeinsamen Schwerpunkt der beiden Wirbelgebiete. Dann hat man die Integration in Bezug auf ξ, η

$$\iint log \sqrt{(x-\xi-x_1)^2+(y-\eta-y_1)^2}\, d\xi\, d\eta$$

über den Querschnitt des Wirbelgebietes auszudehnen, um ein solches Integral als Function von der Zeit t durch die Substitution der schon bestimmten Ausdrücke für x_1 und y_1 zu finden, so dass man in diesem Fall setzen kann als Lösung der Gleichung $\varDelta\, \varphi = 0$

$$\varphi = (\pm\gamma_1)\iint log \sqrt{(x-\xi-x_1)^2+(y-\eta-y_1)^2}\, d\xi\, d\eta$$
$$+ (\pm\gamma_2)\iint log \sqrt{(x-\xi-x_2)^2+(y-\eta-y_2)^2}\, d\xi\, d\eta.$$

Ich brauche hier wohl kaum besonders hervorzuheben, dass alle bisher entwickelte Ausdrücke ungiltig werden zu irgend einer Zeit für einen Ort, sobald derselbe solche Lage in Bezug auf den Schwerkunkt der beiden Wirbelgebiete hat, dass Eins von den beiden Wirbelgebiete oder beide über ihn hinwegwandern können. Da es für die Theorie der Wirbelstürme wichtig ist, zu untersuchen, wann ein Wirbelgebiet über einen gegebenen Ort hinwegschreiten kann, und wenn es hinwegschreiten kann, wie lange derselbe sich in dem Wirbelgebiete befindet, und dann näher zu verfolgen, die Veränderung der Windrichtung, der Windstärke, und des Drucks mit der Zeit in einem solchen Ort, während ein Wirbelgebiete hinwegschreitet, so liegt es uns nun ob, die Bewegung der Luft in einem unter dem Einfluss eines anderen wandernden Wirbelgebietes unter der Voraussetzung eines endlichen, *z. B.* kreisförmig begrenzten Querschnittes zu bestimmen.

Fig. 1

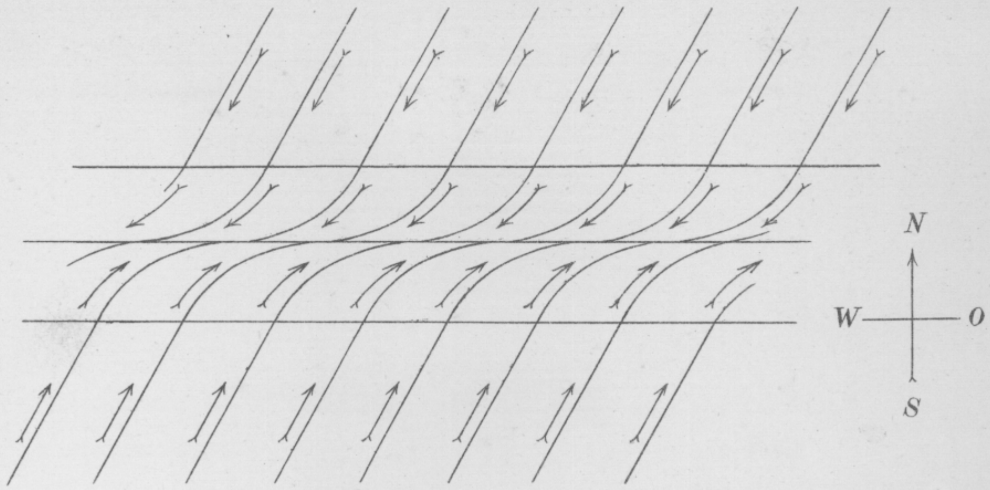


Fig. 2

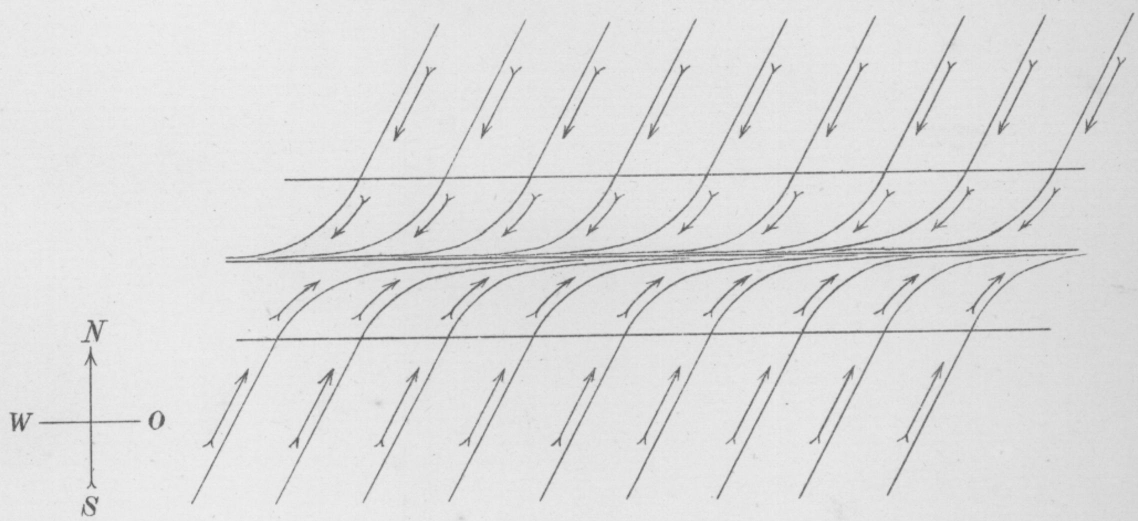
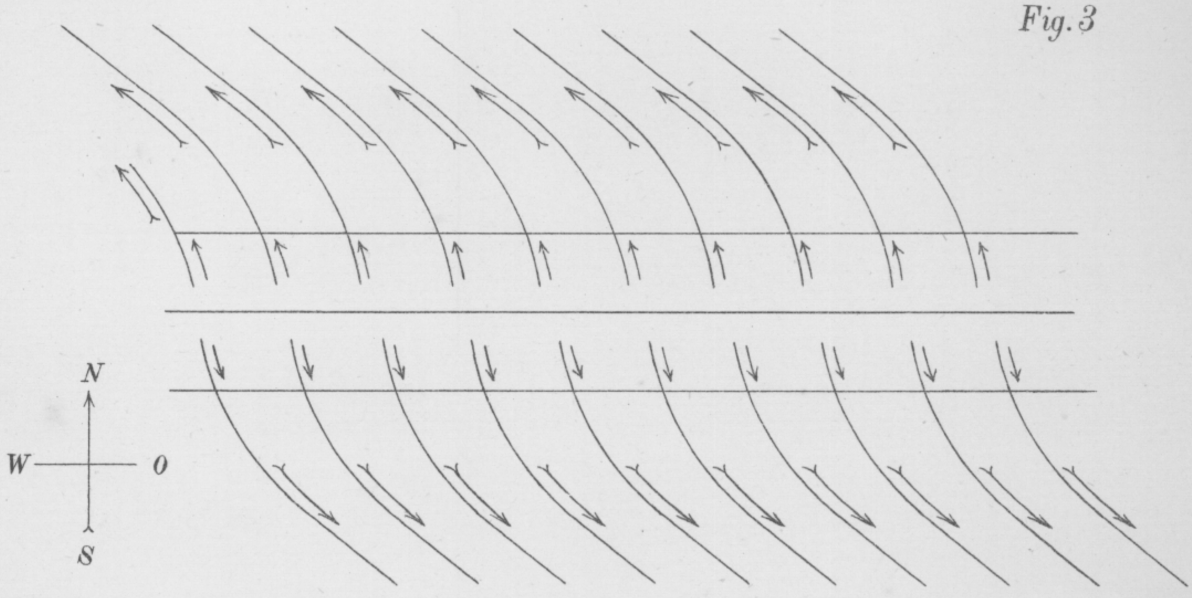
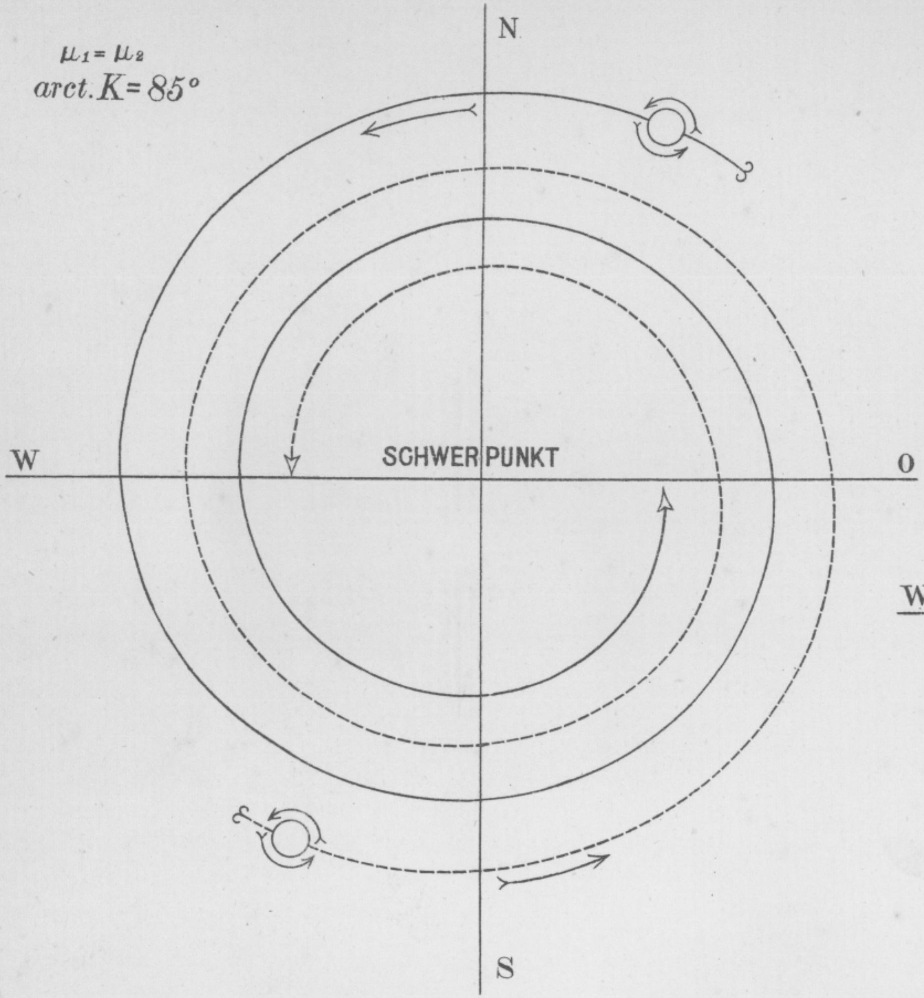
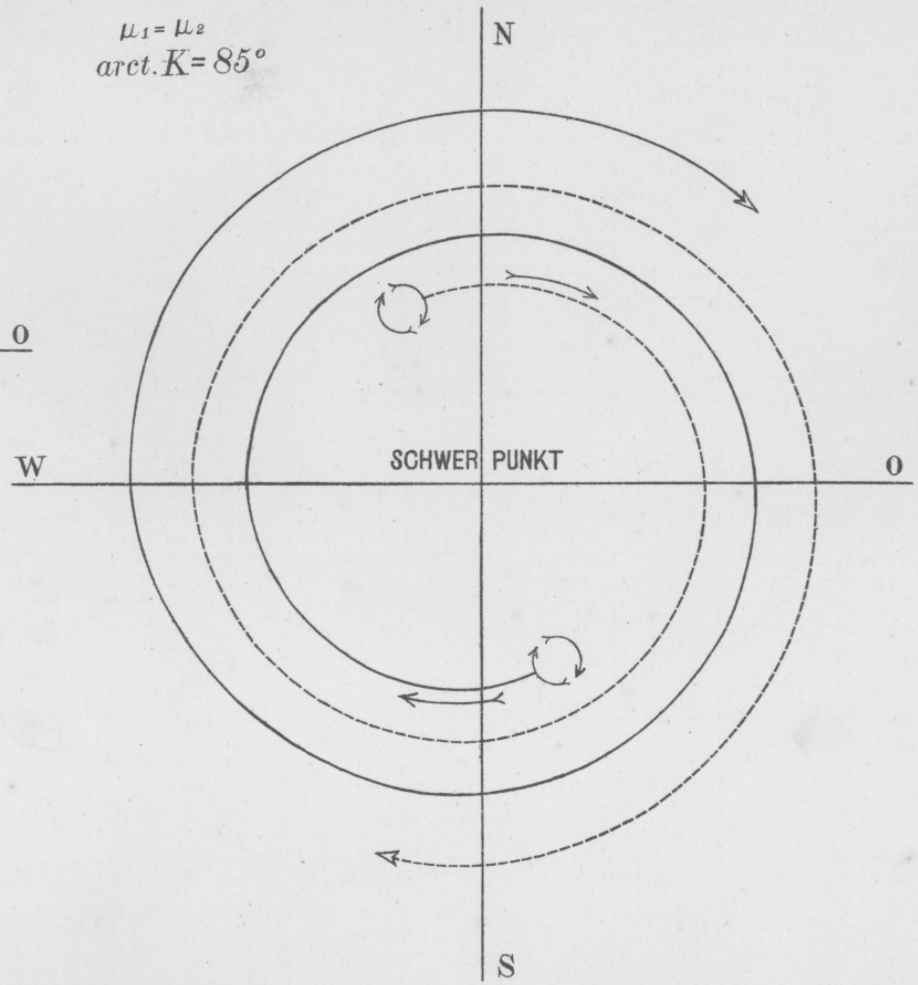


Fig. 3




$\mu_1 = \mu_2$
$arct. K = 85°$
N
W
SCHWER PUNKT
O
S


$\mu_1 = \mu_2$
$arct. K = 85°$
N
W
SCHWER PUNKT
O
S