

Ueber die Deformation der Metallplatten durch Schleifen.

von

H. Muraoka.

§ 1. *Zweck der Untersuchung.*

In meiner früheren Arbeit über japanischen Spiegel* theilte ich die merkwürdige Eigenschaft der festen Körper mit, dass sie nämlich als dünne Platte durch Risse oder Schleifen nach der geritzten oder geschliffenen Seite convex werden. Die Ursache dieser Deformation suchte ich in der molekularen Spannung. Da diese Eigenschaft der festen Körper bis jetzt vollständig unbekannt war und ein etwas eingehenderes Studium derselben wohl zur Kenntniss der molekularen Kräfte beitragen könnte, so unternahm ich einige messende Bestimmungen für Metalle auszuführen. Damals bemerkte ich, dass die Convexität von der Dicke der Platte abhängig sei. *Im Folgenden soll der Versuch gemacht werden, den Krümmungsradius zunächst als Function der Dicke darzustellen und dann Beziehungen zwischen der biegenden Wirkung des Schleifens und der elastischen Constante zu finden.*

* Muraoka, Wied. Ann. Bd. XXII. p. 249. 1884.

§ 2. *Vorbereitung zum Schleifen.*

Zur Bestimmung der Krümmung darf man nicht etwa die zu untersuchende Platte ohne weiteres schleifen und den Krümmungsradius messen, sondern man muss die Deformation während des Schleifens verhindern; denn sonst kann die Platte unmöglich gleichmässig geschliffen werden, was für die messenden Zwecke nothwendig ist. Hiezu ist die Anwendung des Wood'schen Metalles vorzüglich geeignet, wie ich dies in der Notiz* „über japanischen Spiegel“ beschrieben habe. Es wurde nämlich vom Holz ein Kästchen verfertigt, dessen Boden die Form der zu untersuchenden Metallplatte hatte und etwas grösser war als diese. In dasselbe wurde die zu schleifende Platte hineingelegt, so dass diese auf der Mitte des Bodens zu liegen kam. Das Kästchen wurde dann in warmes Wasser hineingesenkt und das Wood'sche Metall auf der Metallplatte geschmolzen und langsam abgekühlt. So erhielt man die Platte mit dicker Belegung von Wood'schem Metalle, welche man schleifen konnte ohne dass die Krümmung während des Schleifens stattfand. Hat man das Schleifen und Poliren in geeigneter Weise vollgeführt, so braucht man die Platte in warmes Wasser einzulegen und vom Wood'schen Metalle zu befreien, um die Deformation erfolgen zu lassen. Es zeigte sich aber, dass das Wood'sche Metall stellenweise nicht gut an die Metallplatte haftete. Um das gleichmässige Haften zu erzielen, wurde die Platte zunächst unter Anwendung des gewöhnlichen Löthwassers mit Wood'schem Metalle überzogen und darauf in obiger Weise behandelt. Im warmen Wasser wurde die Platte von dem Wood'schen Metalle so benetzt, als ob sie amalgamirt werde.

§ 3. *Schleifen und Poliren.*

Zum Schleifen wurde anfänglich harte ebene Thonschiefer benutzt. Da aber für die angewandte Messungsmethode günstiger war die Platte

* Muraoka, Wied., Ann. Bd XXV. p. 138. 1885.

von vornherein etwas rund zu schleifen, so wurde von dickem Glas concave Schleifschale verfertigt und die in beschriebener Weise preparirte Metallplatte mit Granatpulver von verschiedener Feinheit geschliffen, wie man bei der Herstellung der Glaslinsen verfährt. Das letzte Feinschleifen geschah mit japanischer Kirschkohle, wie diese gewöhnlich zur Bearbeitung der Schmucksachen gebraucht wird. Schliesslich wurde die Platte mit einem Gemisch von Schleifsel und Alaun unter Anwendung von Pflaumensäure polirt. Die Fläche war dann blank genug, um für die angewandte Spiegelungsmethode benutzt zu werden. Für weiche Metalle wie Zinn war zum Poliren die Anwendung von Leder und Ochsenhornpulver günstig.

§ 4. *Messungsmethode.*

Zur Bestimmung des Krümmungsradius bediente ich mich der Methode der Spiegelung. Die geschliffene Metallplatte wurde vertical aufgestellt, ihr gegenüber eine Lichtquelle in gleiche Höhe angebracht, welche man mittelst einer Schlittenvorrichtung parallel zur Metallplatte verschieben konnte. Als Maassstab an der Metallplatte dienten zwei an einem Rahmen gespannte feine Seitenfäden, zu welchen noch ein dritter senkrecht stand. Die mit diesem Maassstab versehene Platte wurde auf ein beliebig verstellbares Gestell angebracht und so aufgestellt, dass die parallelen Fäden vertical zu liegen kamen und das Lichtbild auf dem horizontalen Faden sich bewegte, wenn die Lichtquelle auf dem Schlitten verschoben wurde. Die Verschiebung des Lichtes geschah immer so weit bis sein Bild mit einem der verticalen Fäden zusammenfiel. Die Lichtquelle wurde mit einem Zeiger und einem feinen Spalt versehen, deren Breite man beliebig ändern konnte. Die Einstellung des Lichtes konnte man an dem Maassstab des Schlittens ablesen. Das Spiegelbild wurde natürlich mit Fernröhre beobachtet. Bezeichnet :

- L die Verschiebung des Lichtes,
 l diejenige des Bildes,
 A die Distanz zwischen der Metallplatte und dem Schlitten.
 r den Krümmungsradius,

so findet bekanntlich bei convexem Spiegel die Beziehung statt :

$$r = \frac{2Al}{L - 2l} \dots \dots \dots (1)$$

Sollte dieses r der Krümmungsradius sein, welchen man erhalten würde, wenn die Krümmung nur durch die Wirkung des Schleifens erfolgte, so müsste man zu diesem Zwecke die Metallplatte anfänglich vollständig eben geschliffen haben. Es ist aber eine schwere Arbeit, eine Fläche vollkommen eben zu machen und eine solche zu bestätigen. Deshalb schliif ich die Platte von vornherein convex und bestimmte den Krümmungsradius vor und nach der Ablösung des Wood'schen Metalles. Aus diesen beiden Werthen der Krümmungsradien kann man denjenigen Krümmungsradius berechnen, welchen man erhalten würde, wenn die Platte anfänglich eben geschliffen wäre und ich nenne ihn kurz den „*reducirten Radius*.“

§ 5. Berechnung des *reducirten Radius* und die *Curvengleichung*.

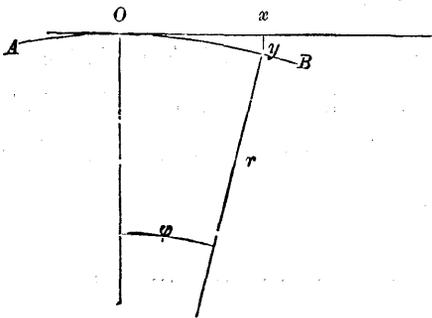
Um den *reducirten Radius* r aus den Radien r_1 und r_2 vor und nach der Deformation zu berechnen, muss man sich zunächst eine Vorstellung verschaffen, von welchen Art eigentlich die Deformation ist. Nehmen wir der Einfachheit wegen einen paralleloepipedischen dünnen Stab und machen auf einer Seitenfläche senkrecht zur Längsrichtung parallele Risse, so findet an jedem Risse die Hebung statt*

* Muraoka, Wied. Ann. Bd. XXII, p. 246. 1884.

und wenn alle Risse und ihre Entfernungen gleich sind, so muss der Stab nach der Deformation die Form eines regelmässigen Poligons annehmen, dessen Grenzwert ein Kreis ist. Wenn wir also anstatt Risse zu machen, senkrecht zur Längsrichtung gleichmässig schleifen — was dasselbe bedeutet, wie unzählig viele feine Risse machen* —, so müssen wir aus dem parallelepipeden Stab einen kreisförmig gebogenen Stab erhalten. Nun wollen wir aber, weil ein parallelepipeder Stab von vollkommen ebenen Seitenflächen schwer herzustellen ist, statt dessen einen von vorherein kreisförmigen Stab herstellen und diesen der deformirenden Wirkung des Schleifens aussetzen. Es fragt sich dann, welche Form bekommt der Stab nach der Deformation? Die Antwort ist leicht. Bezeichnet man das Bogenelement zwischen den beiden Rissen des Schleifens mit ds und den zugehörigen Contingenzwinkel mit $d\varphi$, so ist, wenn das Schleifen gleichförmig geschieht, ds und $d\varphi$ constant, somit auch $\frac{ds}{d\varphi}$. Die Form des Stabes nach der Deformation ist also ein Kreis, denn $\frac{ds}{d\varphi}$ giebt den Krümmungsradius an.

Es handelt sich nun um die Berechnung des reducirten Radius r aus den beobachteten Werthen r_1 und r_2 .

Fig. 1.



Sei AOB (Fig. 1.) ein Kreisbogen, dessen Radius r ist. Wird eine Tangente als Abscissenachse und die Normale dazu als Ordinatenachse angenommen, so gilt für den Kreis die Gleichung:

* l. c. p. 249.

$$x^2 + (r - y)^2 - r^2 = 0.$$

Ist der Winkel φ klein genug, so kann man das Quadrat von y vernachlässigen und dadurch wird aus der Gleichung :

$$y = \frac{x^2}{2r}.$$

Darnach haben wir für den Metallstab vor und nach der Deformation die Gleichungen :

$$y_1 = \frac{x^2}{2r_1}$$

$$y_2 = \frac{x^2}{2r_2}$$

woraus folgt :

$$y_2 - y_1 = \frac{x^2}{2} \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right)$$

Dies ist der Ausdruck für die Senkung der Stelle x durch Deformation. Da wir überhaupt mit kleiner Krümmung zu thun haben, so nehme ich hier an, dass im Falle der Stab anfänglich gerade, auch die nämliche Senkung $y_2 - y_1$ stattfindet. *Es stellt dann die Gleichung :*

$$y = \frac{x^2}{2} \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right) \dots \dots \dots (2)$$

die Curve nach der Deformation des paralleloepipedischen Stabes dar. Weil die Krümmung sehr klein ist, so kann man dieselbe einfach dem zweiten Differentialquotienten gleich setzen und erhält als Werth des reducirten Radius den Ausdruck

$$r = \frac{1}{\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}} \dots \dots \dots (3)$$

Man sieht, dass $r = r_2$ wird für $r_1 = \infty$.

Hiernach kann man die Curvengleichung (2) auch schreiben :

$$y = \frac{x^3}{2r} \dots \dots \dots (2a)$$

§ 6. *Beziehung zwischen Krümmungsradius und Dicke.*

Die Formel (2) und (3) leitete ich *ab* unter der Annahme eines parallelepipedschen Stabes, dessen eine Seitenfläche senkrecht zur Längsrichtung geschliffen wird. Die Behandlung eines solchen Stabes war äusserst schwierig. In erster Linie war das Schleifen senkrecht zur Längsrichtung fast unmöglich. Wenn nämlich das Schleifen so weit war, dass man die Platte poliren konnte, so blieben immer gröbere Risse zurück und wenn man sie mit grosser Mühe wegschaffte, so kamen wieder neue hinzu. Noch schlimmer war die Unregelmässigkeit der Deformation, besonders bei grösserer Länge des Stabes. Diese Schwierigkeiten waren bei kreisförmiger Scheibe, wenn sie ohne Richtungsvorzug geschliffen, viel geringer und ich nahm daher für alle Versuche die letztere und machte die Annahme, dass die Formel (3) annäherungsweise giltig sei. Die Versuche zeigten, dass, wenn das Schleifen und die Politur gleichmässig geschieht, die Grösse der Krümmung unabhängig ist, von der Richtung des Schleifens oder des Polirens.

Anfänglich verfertigte ich vom Kupfer verschiedener Dicke kreisförmige Scheibe von 4^{cm} Durchmesser und machte bei jeder Scheibe die Bestimmung des Krümmungsradius an verschiedenen Stellen derselben und nahm das Mittel. Die erhaltenen Werthe von r für verschiedene Dicke waren aber so unregelmässig, dass man aus den Zahlen keinen Zusammenhang zwischen Dicke und Krümmungsradius finden konnte. Die Ursache dieser Unregelmässigkeit ist sieher das, dass die Elasticität sehr leicht von der Behandlung abhängig ist. Es

ist bekannt, dass eine Metallplatte, die man käuflich bekommt, nicht an allen Theilen gleiche Elasticität besitzt und diese ist ja auch abhängig von der Richtung bei gewalzten Platten. Zur grösseren Sicherheit nahm ich daher eine einzige Kreisscheibe, glühte sie in starkem Kohlenfeuer zwischen zwei ebenen Ziegelsteinen aus und liess sie an. Nach der Abkühlung wurde sie mit Säure gewaschen, um sie von Oxydschicht zu befreien. Darauf wurde sie an einer Seite mit Wood'schem Metalle in beschriebener Weise (§ 2) belegt und an der anderen Fläche geschliffen und polirt. War die Messung des Krümmungsradius vor und nach der Ablösung des Wood'schen Metalles fertig, so wurde dieselbe Scheibe wieder ausglüht und in genau gleicher Weise behandelt und gemessen. Diese Operation wurde wiederholt vorgenommen, so dass die Metallscheibe allmählig dünner wurde. Selbst bei dieser Sorgfalt kamen Unregelmässigkeiten noch vor. Es wurde daher bei wenig differirenden Dicken Mittel genommen.

Die für vier Metalle Kupfer, Messing, Stahl und Gold erhaltenen Zahlen zeigten, dass *die Abhängigkeit des Krümmungsradius von der Dicke am besten durch die Formel:*

$$r = A a^3 \dots \dots \dots (4)$$

sich ausdrücken lässt, worin r den reducirten Krümmungsradius, a die Dicke und A eine von der Substanz abhängige Contante bedeutet. Geometrisch ist A der Krümmungsradius für die Einheit der Dicke. Der Werth von A wurde aus den beobachteten Zahlen berechnet und aus demselben wieder der Krümmungsradius r zurückberechnet. Die Werthe sind in der folgenden Fabelle enthalten :

KUPFER

$$A = 84\,100$$

Dicke <i>a</i> in Centimeter	Krümmungsradius <i>r</i> in Centimeter	
	beobachtet	berechnet
0.158	324	332
0.145	262	256
0.130	193	185
0.117	135	135
0.108	112	106

MESSING

$$A = 49\,100$$

0.157	357	364
0.149	317	312
0.142	278	269
0.131	206	216

STAHL

$$A = 169\,000$$

0.158	594	667
0.137	444	435
0.132	345	389
0.121	313	300
0.110	264	225

GOLD

$$A = 268\,000$$

0.130	688	589
0.121	428	475
0.115	310	408
0.0931	250	216
0.0855	175	168

An diesen Zahlen sieht man, dass die Uebereinstimmung zwischen beobachteten und berechneten Grössen allerdings eine sehr rohe ist, aber gegenüber den Unregelmässigkeiten, die sich für andere Metalle ergaben, muss ich sie eine befriedigende nennen. Uebrigens zeigten die Zahlen für Silber und Zink, wenn auch sie unregelmässig, für die Beziehung zwischen r und a weder eine lineare noch quadratische, sondern eine cubische Gleichung am geeignetesten ist. Ein auffallendes von den andern gänzlich abweichendes Verhalten zeigte das Antimon. Für dieses war mehr eine lineare Gleichung giltig.

§ 7. *Beziehung der Deformation zur elastischen Constante.*

Suchen wir jetzt nach der Beziehung zwischen der Deformation und der elastischen Constante. Die Grösse der Deformation ist offenbar abhängig erstens davon, in welcher Weise die Wirkung des Risses oder des Schleifens rings um die gestörte Stelle ausbreitet und zweitens von der elastischen Constante, solange die Elasticitätsgrenze nicht überschritten wird. Da ich noch nicht im Stande bin, die allgemeine Theorie darüber aufzustellen, so knüpfe ich hier eine provisorische Betrachtung an, welche wenigstens annähernd der Wahrheit entsprechen möge.

Zu dem Zwecke mache ich die Annahme, dass wenn auf ein Flächenelement df der Oberfläche eines elastischen Stabes eine Störung vor sich geht, also wenn df geschliffen wird, so breitet sie sich nach beiden Seiten in gleicher Weise aus, so aber, dass sie in der Entfernung λ verschwindet. λ ist also voraussichtlich eine sehr kleine von der Art der molkularen Beschaffenheit und Umlagerung abhängige Grösse und mag die „*Wirkungsweite*“ genannt werden.

Sei b die Breite eines paralleloepipedischen Stabes, dessen Längsrichtung als Abscissenaxe gewählt werden kann, so verursacht das Schleifen des Flächenelementes $b \cdot d\xi$ eine Biegung des Stabes nach

beiden Seiten desselben. Die Biegung ist offenbar an der Stelle $b \cdot d\xi$ am stärksten und nimmt allmählig ab , bis sie bei λ null wird. Dieser Bedingung entspricht die bekannte Curvengleichung für die Biegeelasticität

$$y = \frac{12P}{Ea^3b} \left(\frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right) \dots \dots \dots (5)$$

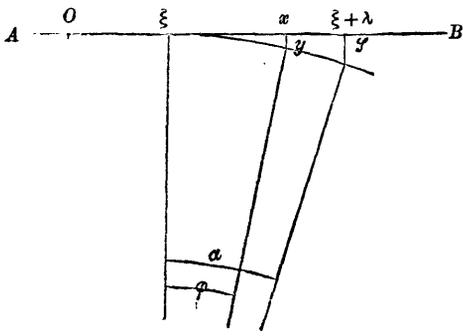
worin l die ganze Länge des an einem Ende befestigten Stabes bedeutet, an welches andere Ende die Kraft P senkrecht zur Stabrichtung wirkt. Denn, wenn man die Krümmung, da sie überhaupt sehr klein, durch den zweiten Differentialquotienten darstellt, so ist sie :

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{12P}{Ea^3b} (l - x),$$

welcher Ausdruck am grössten ist, für $x = 0$ und gleich null für $x = l$. Nimmt man also die Gleichung (1) für den vorliegenden Fall als giltig an und bezeichnet mit P die biegende Kraft, welche durch das Schleifen der Flächeneinheit verursacht wird, so ist $P \cdot b \cdot d\xi$ diejenige für das Flächenelement $b \cdot d\xi$.

Ist AB (Fig. 2) die Längsrichtung des Stabes, welcher in der Mitte O befestigt wird, so wird eine an der Stelle ξ wirkende Elementarkraft $P \cdot b \cdot d\xi$ eine Senkung der Stelle x innerhalb der Wirkungsweite λ hervorbringen, welche gleich ist

Fig. 2.



$$y d\xi = \frac{12P}{E a^2} \left[\frac{\lambda(x - \xi)^2}{2} - \frac{(x - \xi)^3}{6} \right] d\xi$$

oder

$$\left. \begin{aligned} y d\xi &= C \left[\frac{\lambda(x - \xi)^2}{2} - \frac{(x - \xi)^3}{6} \right] d\xi \\ C &= \frac{12P}{E a^2} \end{aligned} \right\} \dots \dots (6)$$

Die Senkung der Stelle $\xi + \lambda$ ist daher

$$s d\xi = \frac{C \lambda^3}{3} d\xi \dots \dots \dots (6a)$$

φ und α sind die Richtungsänderungen der Normale an der Stelle x resp. $\xi + \lambda$. Von der Wirkung der Störung $P. b \, d\xi$ nach der anderen Seite ξO wollen wir vorläufig absehen.

Die Senkung irgend eines Punktes x' ist das Integral aller Elementarsenkungen, welche durch die Elementarkraft $P. b \, d\xi$ von O bis x' hervorgebracht wird. Dieses Integral zerfällt in zwei Theile, da die Senkung theils durch Störungen ausserhalb der Wirkungsweite, theils aber durch solche innerhalb derselben hervorgebracht wird. Um die Integration auszuführen, setze ich

$$\left. \begin{aligned} x' &= n\lambda + x \\ O &\equiv x \equiv \lambda \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (7)$$

so dass der Stab in lauter gleichen Intervallen (Fig. 3) nach λ getheilt wird

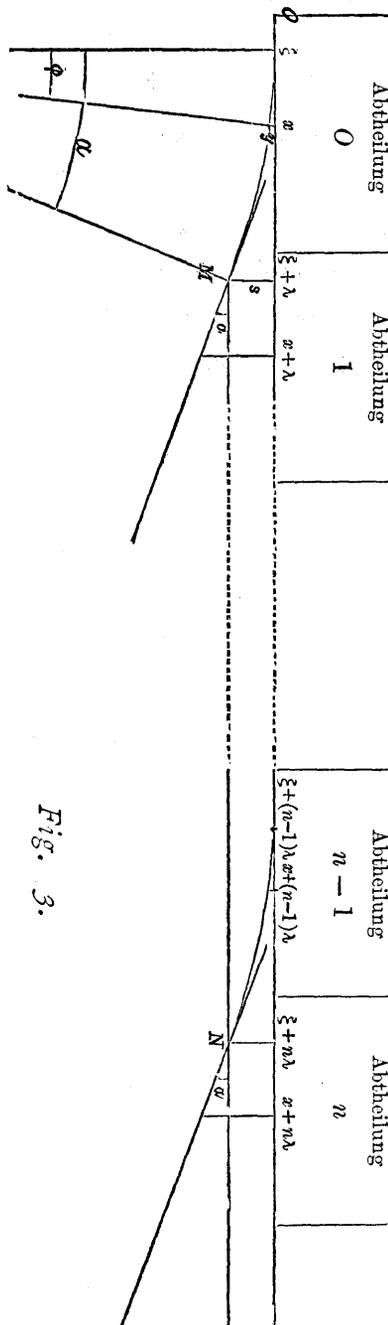


Fig. 3.

Ich numerire die Abtheilungen mit 0, 1, 2, 3....., so dass x' in der n -ten Abtheilungen zu liegen kommt. Dem Punkte x' in der n -ten Abtheilung entsprechen die Punkte $x, x + \lambda, x + 2\lambda$ in den Abtheilungen beziehungsweise 0, 1, 2, wie dies in der Figur ersichtlich.

Die Senkung einer Stelle durch die Störung $P. b \ d\xi$ an der stelle ξ ausserhalb der Wirkungsweite λ besteht augenscheinlich darin, dass zunächst die Stelle $\xi + \lambda$ um $s. d\xi$ gesenkt wird und von hier an der Stab als die geometrische Tangente an dem Punkte M sich fortsetzt. Sei $O \equiv \xi \equiv x$, so verursacht die Störung $P. b \ d\xi$.

im Punkte	die Senkung
x	$y \ d\xi$
$x + \lambda$	$s. d\xi + (x - \xi) \alpha \ d\xi$
$x + 2\lambda$	$s. d\xi + (x + \lambda - \xi) \alpha \ d\xi$
$x + 3\lambda$	$s. d\xi + (x + 2\lambda - \xi) \alpha \ d\xi$
⋮	⋮
$x + (n - 1)\lambda$	$s. d\xi + [x + (n - 2)\lambda - \xi] \alpha \ d\xi$
$x + n\lambda$	$s. d\xi + [x + (n - 1)\lambda - \xi] \alpha \ d\xi$

Da x höchstens gleich λ werden kann, welches letztere selbst eine sehr kleine Grösse ist, so vernachlässige ich x gegen x' und schreibe

$$n = \frac{x'}{\lambda}$$

Dies in das Integral eingeführt, wird:

$$y' = C \int_0^\lambda \left(\frac{1}{2} x'^2 \lambda + \frac{1}{6} x' \lambda^2 - \frac{2}{3} \lambda^3 + \lambda^2 x - \lambda^2 \xi \right) d\xi + C \int_0^{x'} \left(\frac{2}{3} \lambda^3 + x \lambda^3 - \xi \lambda^3 \right) d\xi$$

$$+ C \int_0^\lambda \left[\lambda (x - \xi)^3 - \frac{1}{3} (x - \xi)^3 \right] d\xi.$$

Wir sehen, dass alle Glieder unter dem Integralzeichen sehr kleine Factoren x, ξ, λ enthalten. Das erste Glied aber enthält nur einen derselben, während die anderen zwei oder drei enthalten. Vernach-

lässigen wir demnach die letzteren gegen das erste, so wird aus dem Integral :

$$y' = C \int_0^\lambda \frac{1}{2} x'^2 \lambda d\xi = \frac{C}{2} \cdot x'^2 \lambda^2$$

oder, wenn wir nun mehr den Strich weglassen, so ergibt sich als *Curvengleichung* :

$$y = \frac{C\lambda^2}{2} \cdot x^2 \dots \dots \dots (11)$$

Dies ist eine Parabel, deren Krümmungsradius

$$r = \frac{[1 + C^2 \lambda^4 \lambda^4]^{\frac{3}{2}}}{C\lambda^2}$$

und welcher, solange $C^2 \lambda^4 x^4$ gegen 1 klein genug, gesetzt werden kann :

$$r = \frac{1}{C\lambda^2} \dots \dots \dots (12)$$

Vermöge dieses Werthes r nimmt die obige *Curvengleichung* die Form an :

$$y = \frac{1}{2r} \cdot x^2 \dots \dots \dots (11a)$$

Die eben erhaltene *Curvengleichung* (11a) und diejenige (2a) welche letztere wir durch rein geometrische Betrachtung erhalten haben, sind identisch. Indem wir jetzt die Gleichung für die Biegeelasticität zu Hülfe nahmen, haben wir eine Beziehung des Krümmungsradius zu der elastischen Constante bekommen. Führen wir nämlich den Werth C aus (6) ein, so wird

$$r = \frac{E}{12} \cdot \frac{1}{P\lambda^2} \cdot a^3 \dots \dots \dots (13)$$

und es ist nach (4)

$$A = \frac{E}{12} \cdot \frac{1}{P\lambda^2} \quad ,$$

eine Constante, welche für verschiedene Substanzen charakteristisch ist. Wäre P d. i. die Kraft auf der Flächeneinheit, welche beim Schleifen auftritt und λ d. i. die Wirkungsweite der Elementarkraft P. b. $d\xi$ auf dem Flächenelement $b d\xi$, constant für alle Substanzen, so müsste

man für A dem Elasticitätsmodul E proportionale Zahlen bekommen. P und λ sind aber wahrscheinlich abhängig von der Art der molekularen Lagerung des Körpers, wie dies sich beim Antimon, dem Körper mit deutlichen krystallinischem Gefüge, durch sein merkwürdiges Verhalten sich kund giebt (§ 6). Ferner sind P und λ gewiss bedingt durch die Feinheit des Schleifens und der Politur. Der Grad derselben war, wie man durch die Schärfe des Spiegelbildes urtheilen konnte, für verschiedene Metalle ungleich und selbst bei demselben Metalle und sorgfältiger gleichmässiger Behandlung war es schwierig immer die gleiche Feinheit zu erlangen. Dies gehört wohl mit zu dem Grund, warum die beobachteten Zahlen nicht so regelmässig waren, wie man es nach der angewendeten Methode erwarten konnte.

Der Werth des Produktes $P\lambda^2$ kann man für die 4 Metalle aus dem Werthe A und dem Elasticitätsmodul berechnen. Es ist

$$P\lambda^2 = \frac{E}{12A} \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (14)$$

Nimmt man für Kupfer, Messing, Stahl und Gold annähernd $E =$ bezüglich 12 400, 9 000, 21 000, und 8 100 an und wenn man ferner bedenkt, dass diese Zahlen für E auf Kilogramm und Quadratmillimeter bezogen sind, dass man also A auf Millimeter beziehen muss, so ergibt sich als Werth des Produktes $P\lambda^2$ folgende Zahlen :

Kupfer	Messing	Stahl	Gold
1.23	0.795	1.04	0.253

Zur Kenntniss der molekularen Kräfte wird es nicht von wenigem Interesse sein, wenn es gelingen sollte, die Werthe von P und λ oder wenigstens des Produktes $P\lambda^2$ für verschiedene Substanzen zu bestimmen.

