Beitraege zur Theorie der Bewegung der Erdatmosphaere und der Wirbelstuerme

von

Dr. Phi. Diro Kitao,

Professor für Physik und Mathematik an der Kaiserlichen Forstlich-landwirthschaftlichen Academie zu Tôkyô.

EINLEITUNG.

Die Bewegung der Erdatmosphäre, welche als Wind in der Meteorologie eine so ausserordentlich wichtige Rolle spielt, bietet unstreitig eins der schwierigsten analytischen Probleme dar. *

Die Schweierigkeit der Lösung liegt nicht so wohl in dem beschränkten Mittel der reinen Analysis, als in der völligen Unkenntniss der exakten mathematischen Ausdrücke für gewisse Ursachen, welche auf die Bewegung der Erdatmosphäre maassgebend einwirken.

Suchen wir nus die Verhältnisse klar zu vergegenwärtigen, welche bei der Aufstellung der Differentialgleichungen für die allgemeine Bewegung der Erdatmosphäre zu berücksichtigen sind! Die Erdoberfläche, auf welcher die Atmosphäre ruht, zeigt zwischen der

---

* Eine mathematische Theorie der Bewegung der Erdatmosphäre ist schon mehrfach mit Erfolg versucht worden. Von den darauf bezüglichen neueren Arbeiten erwähne ich nur.

Etudes sur les mouvements de l'atmosphère par C. M. Guldberg et H. Mohn. Christiana 1876.

Über die Bewegung der Luft an der Erdaberfläche. Oberbeck. Wiedemann Annalen Band XVII 1882.

Zur Mechanik des Windes—Dr Sprung. Archiv der deutschen Seewarte. Jahrgang II 1879.

Leider war mir die Arbeit der beiden norwegischen Forscher unzugänglich, und konnte desshalb in der gegenwärtigen Abhandlung keine Berücksichtigung finden.

Aequatorial—und Polarzone beträchtliche Unterschiede der Temperatur; es ist dadurch in der unteren Schichte der Erdatmosphäre eine fortwährende Strömung von den kälteren Polargegenden zum wärmeren Aequator veranlasst. Indem nun diese Luftströmungen von den beiden Polen her gegen den Aequator fliessen, und dort sich gegen einander stauend, einen Gürtel der verticalen Strömung bilden, so muss gleichzeitig auch in der oberen Schichte der Atmosphäre eine entgegengesetzte polwärts herabfliessende Strömung vorhanden sein. Wenn nun diese Aequatrialströmungen nach der böheren Breite fortschreitet, sinken sie, ihre höhere Temperatur mit der Umgebung in Gleichgewicht setzend, immer mehr vertical abwärts, und gehen schliesslich, eine reine verticalabwärts gerichtete Strömung bildend, zur Polarstromung über, um auf's nene nach dem Aequator zu fliessen.

Wäre die Erde eine rotationslose reine Kugel, welche sich in einer Flüssigkeit ohne Reibung bewegte, so würden sowohl die Aequatrial-als die Polarströmung in der Richtung fortschreiten, in welche sie zu fliessen begann,—die Bewegung der atmosphärischen Luft wäre in so fern eine einfache, als sie einen gewaltigen Wirbel bildend entweder theilweiese, oder ganz die Erdhemisphäre umfasst. Die analytische Aufgabe, die zu lösen wäre, bestünde darin, die Wirbelbewegung einer Flüssigkeit zu finden, welche einerseits durch eine feste Kugeloberfläche-und anderseits durch die Grenzfläche der Atmosphäre begrenzt ist, vorausgesetzt, dass die Gestalt des wirbelerfüllten Raumes bekannt ist. Die Erde dreht sich indessen täglich von West nach Ost um ihre Axe; die Bewegung der atmosphärischen Luft ist desswegen eine aus dem nord-südlichen, thermisch bedingten Antrieb und aus dieser west-östlichen Rotationsbewegung zusammengesetzte. Die Aequatorialströmung sowohl als Polarströmung erleidet daher eine Ablenkung von ihrer Nord Süd; respectiv Nord-Süd-Richtung im eutgegengesetzten Sinne, die erstere nämlich

von ihrer nach Norden gerichteten Bahn nach Osten, und die letztere hingegen von ihrer Südrichtung nach Westen.

Dieser Einfluss der Erdrotation kann unter allen Umständen in Rechnung gezogen werden, weil wir von der rotatorischen Bewegung, welche ein Lufttheilchen in Folge der Erdrotation gegen ein im Raum festes Coordinatensystem hat, ganz absehn dürfen, sobald wir statt eines festen Coordinatensystems ; alle bewegten Theilchen auf ein mit der Erde rotirende Coordinatensystem beziehen. * Die Berücksichtigung der Erdrotation führt also immer nur auf verwickeltere Bewegungungsgleichungen und verursacht demnach weiter keine principielle Schwierigkeit. Was aber das vorgelegte Problem wesentlich erschwert, ja fast unmöglich macht, ist die Berücksichtigung eines anderen Einflusses der rotirenden Erdoberfläche; nämlich der Reibung und des Widerstandes, welchen einen Luftströmung entlang der Erdoberfläche erleidet. Offenbar ist so wohl der Widerstand als die Reibung vom ebenso tief eingreifendem Einfluss auf die Bewegung der Erdatmosphäre, wie die Umdrehung der Erde selbst, und die Vernachlässigung dieser Factoren müsste so wohl in der Richtung der Luftströmung als in ihrem Verlauf auffallendeste Abweichungen von der Wirklichkeit veraulassen, wie die Nichtberücksichtigung der Erdrotation; denn die Erde hat im Vergleiche mit der Höhe ihrer Lufthülle eine verhältnissmässig rauhe unebene Oberfläche. Hohe Gebirgeskette, und tiefe Thaleinsenkungen erregen lokale Stauungen der Luftströme oder Gegenströmungen, und bieten der ungestörten Fortschreitung der Luftströmung Hemmnisse dar, welche als Widerstand die nur thermisch, und durch die Erdrotation bedingte Bewegung auf's mannichfaltigste modificiren müssen. Und wenn selbst der Widerstand, den die Luftströmung entlang einer ausgedehnten Ehene, wie weite Steppen, oder Meere, erleidet, wo also bedentende lokale Störung, wie

* Kirchhoff Vorlesungen über die Mechanik. pag. 90 (Zweite Auflage.)

Stauung oder Gegenströmung von vorn herein ausgeschlossen ist, wo also der Widerstand demnach als nichtbedentend angesehn werden dürfte, kann die Reibung, welche die lewegten Lufttheilchen entlang der Erdoberfläche erleiden, nicht vernachlässigt werden, wenn nicht die gröbste Abweichung der theoretischen Resultate von der Wirklichkeit hervorgerufen werden soll. Den von der Unebenheit der Erdoberfläche herrührenden Widerstand zu berücksichtigen, ist natürlich unmöglich.

Es kann sich daher bei einer analytischen Untersuchung über die Bewegung der Erdatmosphäre nur darum handeln, die Erdoberfläche als eine reine ellipsoidische oder kugelförmige Fläche anzusehen Unter dieser einschränkenden Voraussetzung hat man dann nur die Reibung zu berücksichtigen, welche die Luftströmung entlang der ellipsoidischen, oder kugelförmigen Erdoberfläche erleidet.

Die strenge Berüchsichtigung dieses Einflusses der Erdoberfläche ist indessen schwierig; schon desshalb weil wir uns noch keine Vorstellung bilden können, welche Bewegungsformen eine Flüssigkeit annimmt, wenn sie an der reibenden Oberfläche eines starren Körpers entlangströmt, und weil wir daher kein Gesetz kennen, welches uns gestattet, den Einfluss der Reibung der starren Körperfläche auf ein bereits näher bekanntes Gesetz zurückzuführen und eine einigermassen strenge mathematische Formulirung desselben herzustellen. Um diese principielle Schwierigkeit des vorliegenden Problems, wenn auch nicht zu überwinden, doch zu umgehen, ist daher eine Hypothese nöthig und zwar eine solche, welche geeignet zu sein scheint, den etwaigen aus Bewegungsgleichungen gezogenen Schlüssen die möglichste Allgemeinheit zu sichern.

Man betrachte ein Stücke der Erdoberfläche, längs welcher die Luft strömt. Da die als starr zu denkende Erdoberfläche nicht die Bewegung theilen kann, welche eine unmittelbar darauf gelagerte

Luftschichte besitzt, so muss die Resultante der Geschwindigkeit der Lufttheilchen entlang der Erdoberfläche jedenfalls zur Normale derselben senkrecht stehen.

Wäre die Oberfläche der Erde reibungslos, so würden die Geschwindigkeit der Lufttheilchen parallel zur Erdoberfläche unverändert bleiben, wenn die Geschwindigkeit der Luftschichten parallel zur Oberfläche unverändert bleibt, und die Lufttheilchen, welche ursprünglich in einer Normallinie der Erdoberfläche enthalten waren, werden auch immer in einer solchen sein, alle Lufttheilchen, welche in verschiedenen Luftschichten dieselbe horizontale Geschwindigkeit besassen, sie auch immer besitzen. Allein; eine solche Bewegung macht die auf der Erdoberflache stattfindende Reibung unmöglich. Denn die untere unmittelbar auf der Erdoberfläche hinstreichende Luftschichte erleidet eine gewisse Verzögerung, und zwar in der Richtung ihrer resultirenden Geschwindigkeit. Die Bewegung aller übrigen Schichten, werden auch zugleich mitverzögert; allein; da der Einfluss der Reibung für die unterste Luftschichte am grössten sein muss, so müssen die Lufttheilchen in der oberen Schichte während der Bewegung nach und nach den bewegten Theilchen der unteren Schichte vorauszueilen streben, als ob eine gewisse Kraft, deren Intensität mit der verticalen Erhebung über der Erdoberfläche abnimmt, in allen Luftschichten auf die bewegten Theilchen in der Richtung der resultirenden Geschwindigkeit entgegengewirkt und so jene Verzögerung bewirkt hätte. Wenn wir demnach für die oben geschilderte Art der Luftströmung den Einfluss der an der Erdoberfläche stattfindenden Reibung zu berücksichtigen haben, so ist klar, dass wir den verlangten Zweck erreichen, wenn wir uns auf die bewegten Lufttheilchen gewisse Kräfte als einwirkend denken, welche ihren Sitz in der Erdoberfläche haben und dem Einfluss der Reibung an derselben gleichwerthige Effecte hervorbringen. Durch die Ein-

führung solcher Kraftcomponenten in die Bewegungsgleichungen wird man dann offenbar die ganze Luftströmung betrachten, können als bewegten die Lufttheilchen längs der Erdoberfläche ohne Reibung. Hat eine Luftströmung gegen die Normale der Erdoberfläche eine andere Richtung, als die senkrechte, so kann man die Bewegung eines Lufttheilchens jederzeit zerlegen, einerseits in die der Normale der Erdoberfläche parallele-und andererseits in die zur Normale senkrechte Bewegung. Die zur Erdoberfläche senkrechte Componenten werden nun offenbar durch den Einfluss der auf der Erdoberfläche stattfindenden Reibung nicht modificirt; wohl aber die Componenten der Geschwindigkeit parallel der Erdoberfläche. Die Reibung, welche die Geschwindigkeit der unmittelbar auf der Erdoberfläche gelagerten Luftschichte verlangsamt, wird nämlich die Bewegung der Lufttheilchen in der oberen Schichte auch zu verzögern streben, und zwar wiederum in der Richtung parallel zur Erdoberfläche. Der Einfluss der Reibung auf der Erdoberfläche auf alle übrigen Schichten wird demnach auch hier wieder ersetzbar sein, durch gewisse Kräftecomponenten, welche ihres Sitz in der Erdoberfläche haben, und auf jedes Lufttheilchen in der Richtung wirkt, welche derjenigen der horizontalen d. h. der Erdoberfläche parallelen componenten Geschwindigkeit gerade entgegengesetzt ist.

Ich nenne diese Kräfte, deren Wirkung den Einfluss der auf der Erdoberfläche stattfindenden Reibung ersetzen, einfach Reibungswiderstand, und denke mir sie so gegeben, dass sie eine Resultante haben, deren Richtung in der Atmosphäre überall derjenigen der resultirenden Horizontalgeschwindigkeit des bewegten Lufttheilchens gerade entgegengesetzt ist, und deren Intensität aber mit der verticalen Erhebung über der Erdoberfläche mehr oder weniger rasch abnimmt.

Indem ich durch die Einführung dieser Kräfte in die Bewegungsgleichungen die oben erwähnte principielle Schwierigkeit des vorlie-

genden Problems zu umgehen suche, verhehle ich mir keineswegs, dass es damit im Grund genommen so gut, wie nichts gewonnen ist; da ja der analytische Ausdruck für solche Kräfte, welche, wie es verlangt wird, in einer Flüssigkeit dieselbe Wirkung ausübt wie der Einfluss der reibenden Oberfläche eines starren Körpers, nicht bekannt ist. Es kann ferner nicht in Abrede gestellt werden, dass es viel einfacher und der Sache gemäss wäre, wenn die Reibung der Erdoberfläche erst in den Grenzbedingungen berücksichtigt werden würde. Allein; die unmittelbare Einführung der Reibungskräfte in die Bewegungsgleichungen hat den Vortheil, Folgerungen zu gestatten, welche sonst nur auf Umwegen und obenein nicht so allgemein zu gewinnen wären.

§ I. *Hydrodynamische Differentialgleichungen mit Rücksicht auf die Rotation der Erde.*

Es seien Ξ'' H'' Z'' die rechtwinkligen Componenten der Reibungskräfte bezogen auf ein rechtwinkeliges Coordinatensystem x'' y'' z'', dessen z''—Achse mit der Erdachse zusammenfallen möge. Es sei ferner G' das Potential der Erdanziehung auf ein Flüssigkeitstheilchen von der Masse 1. und p der Druck und μ die Dichtigkeit der Flüssigkeit. Die hydrodynamischen Differentialgleichungen sind dann

$$\begin{aligned} \frac{d^2x''}{dt^2} &= \frac{\partial\,(G'-\Pi)}{\partial x''} - \Xi'' \\ \frac{d^2y''}{dt^2} &= \frac{\partial\,(G'-\Pi)}{\partial y''} - H'' \qquad (1) \\ \frac{d^2z''}{dt^2} &= \frac{\partial\,(G'-\Pi)}{\partial z''} - Z'' \end{aligned}$$

wo

$$\Pi = \int \frac{dp}{\mu}$$

aus der gegebenen Relation zwischen μ und p zubilden ist. Nun

führen wir ein zweites dem ersten congruentes Coordinatensystem (x' y' z') ein, welches sich jedoch mit der rotirenden Erde sich dreht, mit der constanten Winkelgeschwindigkeit λ, die, wenn man die Secunde zur Zeiteinheit und das Meter zur Längeneinheit nimmt

$$= \frac{2\pi}{24^h.60'.60''} = 0{,}00007643\ *$$

ist.

Wir setzen

$$x'' = x' \cos \lambda t - y' \sin \lambda t \qquad z'' = z'$$
$$y'' = x' \sin \lambda t + y' \cos \lambda t$$

woraus folgt.

$$x' = x'' \cos \lambda t + y'' \sin \lambda t \qquad z' = z''$$
$$y' = y'' \cos \lambda t - x'' \sin \lambda t$$

Weil der Stundenwinkel λt in *dem* Sinne wachsend angenommen werden muss, wie die Erde sich dreht, so ist durch diese Gleichungen ausgesprochen, dass das neue Coordinatensystem, seine positive x Achse stets gegen Süden und seine positive y Achse aber gegen Osten kehrt, wie die Fig. I. (Tafel) es veranschaulicht.

Wir differentiren x'' y'' z'' nach t, um die neuen Coordinaten in die Gleichungen (1) einzuführen. Es ist.

$$\frac{dx''}{dt} = \cos \lambda t\left(\frac{dx'}{dt} - \lambda y'\right) - \sin \lambda t\left(\frac{dy'}{dt} + \lambda x'\right)$$
$$\frac{dy''}{dt} = \cos \lambda t\left(\frac{dy'}{dt} + \lambda x'\right) + \sin \lambda t\left(\frac{dx'}{dt} - \lambda y'\right)$$
$$\frac{dz''}{dt} = \frac{dz'}{dt}$$

Eine nochmalige Differentiation ergiebt weiter

$$\frac{dx''^2}{dt^2} = \cos \lambda t\left(\frac{d^2x'}{dt^2} - 2\lambda\frac{dy'}{dt} - \lambda^2 x'\right) - \sin \lambda t\left(\frac{d^2y'}{dt^2} + 2\lambda\frac{dx'}{dt^2} + 2\lambda\frac{dx'}{dt} - \lambda^2 y'\right)$$
$$\frac{d^2y''}{dt^2} = \sin \lambda t\left(\frac{d^2x'}{dt^2} - 2\lambda\frac{dy'}{dt} - \lambda^2 x'\right) + \cos \lambda t\left(\frac{d^2y'}{dt^2} + 2\lambda\frac{dx'}{dt} - \lambda^2 y'\right)$$
$$\frac{d^2z''}{dt^2} = \frac{d^2z'}{dt^2}$$

---

* Genauer 0,00007292 (Meter) da ein Sterntag $23^h\,56'\,4'',09 = 86164''$ beträgs,

Andererseits haben wir

$$\frac{\partial G'}{\partial x''} = \frac{\partial G'}{\partial x'} \cos \lambda t - \frac{\partial G'}{\partial y'} \sin \lambda t$$

$$\frac{\partial G'}{\partial y''} = \frac{\partial G'}{\partial x'} \sin \lambda t + \frac{\partial G'}{\partial y'} \cos \lambda t$$

$$\frac{\partial G}{\partial z''} = \frac{\partial G}{\partial z'}$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x''} = \frac{\partial \Pi}{\partial x'} \cos \lambda t - \frac{\partial \Pi}{\partial y'} \sin \lambda t$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial y''} = \frac{\partial \Pi}{\partial x'} \sin \lambda t + \frac{\partial \Pi}{\partial y'} \cos \lambda t$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial z''} = \frac{\partial \Pi}{\partial z'}$$

Die Geschwindigkeiten des Flüssigkeitstheilchen sind unabhängig von der Lage der Coordinatenaxen, und die Componenten der Reibungskräfte sind es auch, weil sie überall in entgegengesetzter Richtung, wie die Geschwindigkeitscomponenten wirken. Bezeichnet man daher die Componenten der Reibungskräfte bezogen auf die Axen des neuen beweglichen Coordinatensystems mit $\Xi' H' Z'$, so ist

$$\Xi'' = \Xi' \cos \lambda t - H' \sin \lambda t$$

$$H'' = \Xi' \sin \lambda t + H' \cos \lambda t$$

$$Z'' = Z'$$

Die Gleichungen (1) werden dann

$$\cos \lambda t \left(\frac{d^2 x'}{dt^2} - 2 \lambda \frac{dy'}{dt} - \lambda^2 x' \right) - \sin \lambda t \left(\frac{d^2 y'}{dt^2} + 2\lambda \frac{dx'}{dt} - \lambda^2 y' \right)$$

$$= \cos \lambda t \left(\frac{\partial (G' - \Pi)}{\partial x'} - \Xi' \right) - \sin \lambda t \left(\frac{\partial (G' - \Pi)}{\partial y'} - H' \right)$$

$$\sin \lambda t \left(\frac{d^2 x'}{dt^2} - 2\lambda \frac{dy'}{dt} - \lambda^2 x' \right) + \cos \lambda t \left(\frac{a^2 y'}{dt^2} + 2\lambda \frac{dx'}{dt} - \lambda^2 y' \right)$$

$$= \sin \lambda t \left(\frac{\partial (G' - \Pi)}{\partial x'} - \Xi' \right) + \cos \lambda t \left(\frac{\partial (G' - \Pi)}{\partial y'} - H \right)$$

Inden wir die erste von diesen Gleichungen mit $\cos \lambda t$, und die Zweite mit $\sin \lambda t$, multipliziren, so finden wir durch Addition

$$\frac{d^2x'}{dt^2} = \frac{\partial(G'-\Pi)}{\partial x'} - \Xi' + 2\lambda \frac{dy'}{dt} + \lambda^2 x' \qquad (2\,a)$$

Multipliziren wir hingegen die erste mit $\sin \lambda t$ und die Zweite mit $\cos \lambda t$, so finden wir durch Subtraction

$$\frac{d^2y'}{dt^2} = \frac{\partial(G'-\Pi)}{\partial y'} - H' - 2\lambda \frac{dx'}{dt} + \lambda^2 x' \qquad (2\,b)$$

Diese beiden Gleichungen (2 a) und (2 b) und

$$\frac{d^2z'}{dt^2} = \frac{\partial(G'-\Pi)}{\partial z'} - Z' \qquad (3\,c)$$

sind die Differentialgleichungen für die Bewegung der Flüssigkeit unter Berücksichtigung der Erdrotation, und jedes bewegte Flüssigkeitstheilchen, dessen Ort zur Zeit t durch $x'\ y'\ z'$ bestimmt ist, kann nun mehr betrachtet werden als bewegte es sich auf der rotationslosen Erdoberfläche ohne Reibung, da der Einfluss der letzteren durch Einführung der Componenten $\Xi'\ H'\ Z'$ berücksichtigt worden ist.

Wir wollen jetzt wieder ein nenes Coordinatensystem ($x\ y\ z$) einführen, indem wir die $+\ z'$ – Achse so verlegt denken, dass dieselbe gerade den Zenith eines Ortes auf der Erdoherfläche trifft, dessen geographische Breite θ heissen möge, und zwar so, dass die y' – Achse mit sich parallel bleibt und dieselbe Richtung behält. Wir setzen daher.

$$x = x' \sin \theta - z' \cos \theta$$
$$y = y'$$
$$z = z' \sin \theta + z' \cos \theta$$

Es folgt hieraus umgekehrt.

$$x' = x \sin \theta + z \cos \theta$$
$$y' = y$$
$$z' = z \sin \theta - x \cos \theta$$

Es ist dann wieder

$$\frac{\partial(G'-\Pi)}{\partial x'} = \frac{\partial(G'-\Pi)}{\partial x} \sin\theta + \frac{\partial(G-\Pi)}{\partial z} \cos\theta$$

$$\frac{\partial(G'-\Pi)}{\partial y'} = \frac{\partial(G'-\Pi)}{\partial y}$$

$$\frac{\partial(G'-\Pi)}{\partial z'} = \frac{\partial(G'-\Pi)}{\partial z} \sin\theta - \frac{\partial(G-\Pi)}{\partial x} \cos\theta$$

$$\Xi' = \Xi \sin\theta + Z \cos\theta$$

$$H' = H$$

$$Z' = Z \sin\theta - \Xi \cos\theta$$

wo Ξ H Z die Componenten der Reibungskrüfte in Bezug auf das neuen Coordinatensystem bedeuten.

Indem wir diese Grössen in die Gleichungen (2 *a*) (2 *b*) (2 *c*) einführen, erhalten wir

$$\frac{d^2x}{dt^2} \sin\theta + \frac{d^2z}{dt^2} \cos\theta = \left(\frac{\partial(G'-\Pi)}{\partial x} - \Xi + \lambda^2 x\right) \sin\theta$$
$$+ \left(\frac{\partial(G'-\Pi)}{\partial z} - Z + \lambda^2 z\right) \cos\theta + 2\lambda \frac{dy}{dt}.$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{\partial(G'-\Pi)}{\partial y} - H - 2\lambda\left(\frac{dx}{dt} \sin\theta + \frac{dz}{dt} \cos\theta\right) + \lambda^2 y.$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} \cos\theta = -\left(\frac{\partial(G'-\Pi)}{\partial x} - \Xi\right) \cos\theta$$
$$+ \left(\frac{\partial(G'-\Pi)}{\partial x} - Z\right) \sin\theta$$

Hieraus leiten wir auf ganz dieselbe Weise ab, wie die Gleichungen 2*a*, 2*b*, 2*c* abgeleitet wurden,

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\partial(G'-\Pi)}{\partial x} - \Xi + \lambda^2(x \sin\theta + z \cos\theta) \sin\theta + 2\lambda \sin\theta \frac{dy}{dt} \qquad (3)$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{\partial(G'-\Pi)}{\partial y} - H - 2\lambda\left(\frac{dx}{dt} \sin\theta + \frac{dz}{dt} \cos\theta\right) + \lambda^2 y. \qquad (4)$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{\partial(G'-\Pi)}{\partial z} - Z - \lambda^2(x \sin\theta + z \cos\theta) \cos\theta + 2\lambda \cos\theta \frac{dy}{dt}. \qquad (5)$$

Wir hönnen diese Gleichungen wesentlich vereinfachen, durch die Bemerkung, dass die Grössen

$$\lambda^2(x \sin\theta + z\cos\theta)\sin\theta, \qquad \lambda^2 y, \qquad \lambda^2(x\sin\theta + z\cos\theta)\cos\theta$$

nichts auderes bedeuten, als die Componenten der Centrifugalkraft nach den Axeu des neuen Coordinatensystems geschätzt. Da ferner die Componenten der Erdanziehung

$$\frac{\partial G}{\partial x}, \quad \frac{\partial G}{\partial y}, \quad \frac{\partial G}{\partial z},$$

wesentlich negatives Vorzeichen hesitzen müssen, so bedeuten die Grössen

$$-\left[\frac{\partial G'}{\partial x} - \lambda^2(x\sin\theta + z\cos\theta)\sin\theta\right], \quad -\left[\frac{\partial G'}{\partial y} - \lambda^2 y\right]$$
$$-\left[\frac{\partial G'}{\partial z} - \lambda^2(x\sin\theta + z\cos\theta)\cos\theta\right]$$

die Componenten der aus der Centrifugalkraft und der Erdanziehung resultirenden Kraft. Bezeichnet man das Potential dieser Kraft mit G, und setzt

$$G = G' + \frac{\lambda^2}{2}\left[(z\cos\theta + x\sin\theta)^2 + y^2\right]$$

und macht zugleich

$$\psi = G - \Pi$$

sodass man durch Differentiation nach x, y, und z erhält

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{\partial(G-\Pi)}{\partial x} = \frac{\partial(G'-\Pi)}{\partial x} + \lambda^2(z\cos\theta + x\sin\theta)\sin\theta$$
$$\frac{\partial\psi}{\partial y} = \frac{\partial(G-\Pi)}{\partial y} = \frac{\partial(G'-\Pi)}{\partial y} + \lambda^2 y$$
$$\frac{\partial\psi}{\partial z} = \frac{\partial(G-\Pi)}{\partial z} = \frac{\partial(G'-\Pi)}{\partial z} + \lambda^2(z\cos\theta + x\sin\theta)\cos\theta$$

Die Gleichungen (3) (4) (5) lassen sich dann auch so schreiben

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\partial\psi}{\partial x} - \Xi + 2\lambda\sin\theta\frac{dy}{dt}$$
$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{\partial\psi}{\partial y} - H - 2\lambda\left(\frac{dx}{dt}\sin\theta + \frac{dz}{dt}\cos\theta\right)$$
$$\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{\partial\psi}{\partial z} - Z + 2\lambda\cos\theta\frac{dy}{dt}.$$

Nun setzen wir, wie es in der Hydrodynamik gebräuchlich ist, die Componenten der Geschwindigkeit

$$\frac{dx}{dt} = u \qquad \frac{dy}{dt} = v \qquad \frac{dz}{dt} = w$$

und entwickeln wir

$$\frac{d^2x}{dt^2} \quad \frac{d^2y}{dt^2} \quad \frac{d^2z}{dt^2},$$

indem wir uns sowohl u, v, w als x, y, z; als Functionen von der Zeit t vorstellen, dann erhalten wir

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} - 2\lambda \sin\theta\, v = \frac{\partial \psi}{\partial x} - \Xi \\
&\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} + 2\lambda(u \sin\theta + w\cos\theta) = \frac{\partial \psi}{\partial y} - H \\
&\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z} - 2\lambda \cos\theta\, v = \frac{\partial \psi}{\partial z} - Z.
\end{aligned}\right\} \quad (6)$$

als verlangte Differentialgleichungen für die Bewegung der Erdatmosphäre, in denen so wohl der Einfluss des Reibungswiderstandes, als die Rotation der Erde berücksichtigt sind.

Zu den Gleichungen (6) tritt noch eine vierte hinzu, nämlich die Bedingung der Massencontinuität

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} + \frac{\partial \mu u}{\partial x} + \frac{\partial \mu v}{\partial y} + \frac{\partial \mu w}{\partial z} = 0 \qquad (6a)$$

eine Gleichung, welche für jedes rechtwinkelige Coordinatensystem in unveränderter Gestalt giltig bleibt. Es dürfte aber nicht ganz überflüssig sein, nachzuweisen, dass diese Gleichung (6a) auch dann dieselbe Gestalt behält, wenn das Coordinatensystem, worauf u v w bezogen sind, in beliebiger Bewegung begriffen ist.

Man führe ein rechtwinkeliges Coordinatensystem (ξ η ζ) ein, welches im Raum fest sein möge, und setze

$$\begin{aligned}
\xi &= \alpha + \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z \\
\eta &= \beta + \beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3 z \\
\zeta &= \gamma + \gamma_1 x + \gamma_2 y + \gamma_3 z
\end{aligned}$$

wobei die 12. Grössen $\alpha\ \beta\ \gamma$ beliebige Functionen von t sind, von denen die jenigen mit Indices, den Bedingungen genügen müssen

$$\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2=\beta_1^2+\beta_2^2+\beta_3^2=\gamma_1^2+\gamma_2^2+\gamma_3^2=1 \qquad (6b)$$

$$\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\alpha_3\beta_3=\alpha_1\gamma_1+\alpha_2\gamma_2+\alpha_3\gamma_3=\gamma_1\beta_1+\gamma_2\beta_2+\gamma_3\beta_3=0 \quad (6c)$$

weil das System $(x\ y\ z)$ ein rechtwinkeliges bleiben soll.
Es ist nun zunächst.

$$\frac{\partial\mu u}{\partial x}=\frac{\partial\mu u}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial\mu u}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial x}+\frac{\partial\mu u}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial x}$$

$$=\alpha_1\frac{\partial\mu u}{\partial\xi}+\beta_1\frac{\partial\mu u}{\partial\eta}+\gamma_1\frac{\partial\mu u}{\partial\zeta}.$$

Es ist ferner umgekehrt

$$x=\alpha_1(\xi-\alpha)+\beta_1(\eta-\beta)+\gamma_1(\zeta-\gamma)$$
$$\eta=\alpha_2(\xi-\alpha)+\beta_2(\eta-\beta)+\gamma_2(\zeta-\gamma)$$
$$\zeta=\alpha_3(\xi-\alpha)+\beta_3(u-\beta)+\gamma_3(\zeta-\gamma)$$

Wenn wir setzen

$$\frac{d(\xi-\alpha)}{dt}=u^1 \qquad \frac{d(\eta-\beta)}{dt}=v^1 \qquad \frac{d(\zeta-\gamma)}{dt}=w^1$$

so folgt durch Differentiation nach t

$$u=\alpha_1 u^1+\beta_1 v^1+\gamma_1 w^1+(\xi-\alpha)\frac{d\alpha_1}{dt}+(\eta-\beta)\frac{d\beta_1}{dt}+(\zeta-\gamma)\frac{d\gamma_1}{dt}$$

$$v=\alpha_2 u^1+\beta_2 v^1+\gamma_2 w^1+(\xi-\alpha)\frac{d\alpha_2}{dt}+(\eta-\beta)\frac{d\beta_2}{dt}+(\zeta-\gamma)\frac{d\gamma_2}{dt}$$

$$w=\alpha_3 u^1+\beta_3 v^1+\gamma_3 w^1+(\xi-\alpha)\frac{d\alpha_3}{dt}+(\eta-\beta)\frac{d\beta_3}{dt}+(\zeta-\gamma)\frac{d\gamma_3}{dt}.$$

Wir erhalten somit

$$\frac{\partial\mu u}{\partial x}=\alpha_1\frac{\partial\mu(\alpha_1u^1+\beta_1v^1+\gamma_1w^1)}{\partial\xi}+\beta_1\frac{\partial\mu(\alpha_1u^1+\beta_1v^1+\gamma_1w^1)}{\partial\eta}$$
$$+\gamma_1\frac{\partial\mu(\alpha_1u^1+\beta_1v^1+\gamma_1w^1)}{\partial\zeta}+(a.f.\ S.)$$

$$\left.\begin{aligned}
&+ \alpha_1 \frac{d\alpha_1}{dt}\left[\frac{\partial\mu(\xi-\alpha)}{\partial\xi}+\frac{\partial\mu(\xi-\alpha)}{\partial\eta}+\frac{\partial\mu(\xi-\alpha)}{\partial\zeta}\right]\\
&+ \beta_1 \frac{d\beta_1}{dt}\left[\frac{\partial\mu(\eta-\beta)}{\partial\xi}+\frac{\partial\mu(\eta-\beta)}{\partial\eta}+\frac{\partial\mu(\eta-\beta)}{\partial\zeta}\right]\\
&+ \gamma_1 \frac{d\gamma_1}{dt}\left[\frac{\partial\mu(\zeta-\gamma)}{\partial\xi}+\frac{\partial\mu(\zeta-\gamma)}{\partial\eta}+\frac{\partial\mu(\zeta-\gamma)}{\partial\zeta}\right]
\end{aligned}\right\} \quad (6d)$$

Auf ganz dieselbe Weise erhalten wir

$$\frac{\partial\mu v}{\partial y} = \alpha_2 \frac{\partial\mu(\alpha_2 u^1+\beta_2 v^1+\gamma_2 w^1)}{\partial\xi} + \beta_2 \frac{\partial\mu(\alpha_2 u^1+\beta_2 v^1+\gamma_2 w^1)}{\partial\eta}$$
$$+ \gamma_2 \frac{\partial\mu(\alpha_2 u^1+\beta_2 v^1+\gamma_2 w^1)}{\partial\zeta}$$

$$\left.\begin{aligned}
&+ \alpha_2 \frac{d\alpha_2}{dt}\left[\frac{\partial\mu(\xi-\alpha)}{\partial\xi}+\frac{\partial\mu(\xi-\alpha)}{\partial\eta}+\frac{\partial\mu(\xi-\alpha)}{\partial\zeta}\right]\\
&+ \beta_2 \frac{d\beta_2}{dt}\left[\frac{\partial\mu(\eta-\beta)}{\partial\xi}+\frac{\partial\mu(\eta-\beta)}{\partial\eta}+\frac{\partial\mu(\eta-\beta)}{\partial\zeta}\right]\\
&+ \gamma_2 \frac{d\gamma_2}{dt}\left[\frac{\partial\mu(\zeta-\gamma)}{\partial\xi}+\frac{\partial\mu(\zeta-\gamma)}{\partial\eta}+\frac{\partial\mu(\zeta-\gamma)}{\partial\zeta}\right]
\end{aligned}\right\} \quad (6e)$$

$$\frac{\partial\mu w}{\partial z} = \alpha_3 \frac{\partial\mu(\alpha_3 u^1+\beta_3 v^1+\gamma_3 w^1)}{\partial\xi} + \beta_3 \frac{\partial\mu(\alpha_3 u^1+\beta_3 v^1+\gamma_3 w^1)}{\partial\eta}$$
$$+ \gamma_3 \frac{\partial\mu(\alpha_3 u^1+\beta_3 v^1+\gamma_3 w^1)}{\partial\zeta}$$

$$\left.\begin{aligned}
&+ \alpha^3 \frac{d\alpha_3}{dt}\left[\frac{\partial\mu(\xi-\alpha)}{\partial\xi}+\frac{\partial\mu(\xi-\alpha)}{\partial\eta}+\frac{\partial\mu(\xi-\alpha)}{\partial\zeta}\right]\\
&+ \beta_3 \frac{d\beta_3}{dt}\left[\frac{\partial\mu(\eta-\beta)}{\partial\xi}+\frac{\partial\mu(\eta-\beta)}{\partial\eta}+\frac{\partial\mu(\eta-\beta)}{\partial\zeta}\right]\\
&+ \gamma_3 \frac{d\gamma_3}{dt}\left[\frac{\partial\mu(\zeta-\gamma)}{\partial\xi}+\frac{\partial\mu(\zeta-\gamma)}{\partial\eta}+\frac{\partial\mu(\zeta-\gamma)}{\partial\zeta}\right]
\end{aligned}\right\} \quad (6f)$$

Mit Rücksicht auf die Gleichungen (6*b*) (6*c*) und auf die aus (6*b*) fliessenden Gleichungen

$$\alpha_1 \frac{d\alpha_1}{dt} + \alpha_2 \frac{d\alpha_2}{dt} + \alpha_3 \frac{d\alpha_3}{dt} = \beta_1 \frac{d\beta_1}{dt} + \beta_2 \frac{d\beta_2}{dt} + \beta_3 \frac{d\beta_3}{dt}$$
$$= \gamma_1 \frac{d\gamma_1}{dt} + \gamma_2 \frac{d\gamma_2}{dt} + \gamma_3 \frac{d\gamma_3}{dt} = 0$$

findet man durch Addition der Gleichungen (6*d*) (6*e*) (6*f*) in der That

$$\frac{\partial \mu u}{\partial x} + \frac{\partial \mu v}{\partial y} + \frac{\partial \mu w}{\partial z} = \frac{\partial \mu u'}{\partial \xi} + \frac{\partial \mu v'}{\partial \eta} + \frac{\partial \mu w'}{\partial \zeta}$$

Das ist, was wir beweisen wollten.

Es ist hier der geeignete Ort, die Bedingungen festzustellen, denen die Functionen u, v, w an der Begrenzungsfläche der Erdatmosphäre zu genügen haben.

Wenn irgend ein Stück der Erdoberfläche in Folge der stärkeren Erwärmung eine vertical aufsteigende Strömung veranlasst, werden die Lufttheilchen, welche das Gebiet der Verticalströmung ringsum umgeben, von allen Seiten her längs der Erdoberfläche hereinstürzen, und das gestörte Gleichgewicht wieder herzustellen streben. Allein; ehe sie dazu gelangen, werden sie die Folge des verticalen Auftriebs emporsteigen, und dadurch, dass die Theilchen in allen Horizontalschichten einen Zug nach dem Innern des Raumes der verticalen Strömung erhalten, wird eine Horizontalströmung ausserhalb dieses gedachten Gebietes verlasst, *d. h.* eine Strömung, deren Richtung zur Normale der Erdoberflöche senkrecht steht, während die Richtung der Strömung innerhalb des gedachten Raumes, die Normale der Erdoberfläche im Allgemeinen schief schneiden wird.

Die Richtung der Strömung in derjemgen Luftschichte, welche unmittelbar auf der Erdoberfläche liegt, kann aber auch innerhalb des Raumes der verticalen Strömung nur eine zur Normale der Erdoberfläche senkrechte sein; da die vertical aufwärts gerichtete Geschwindigkeit der Lufttheilchen unmittelbar auf der Erdoberfläche verschwinden muss, weil der Autrieb vertical aufwärts zu strömen, nicht unmittelbar auf der Erdoberfläche eine endliche Grösse besitzen kann, sondern erst in endlicher Höhe.

Steigt hingegen irgendwo in der Atmosphäre eine Luftströmung

vertical niederwärts in Folge der stärkern Erkältung der Erdoberfläche, ader eines Theils der Luftschichte, so stürzt die Luftmasse vertical auf die starre Erdoberfläche und da sie dann keinen auderen Ausweg findet, so wird sie aus dem Raum der verticalen Strömung nach allen Seiten herausfahren, und so ausserhalb des Raumes des verticalen Strömung eine Strömung senkrecht zur Normale der Erdoberfläche veranlassen. Auch in diesem Fall werden also unmittelbar auf der Erdoberfläche alle vertical gerichteten Componenten verschwinden.

Man kann hiernach die bewegte Atmosphäre in zwei Arten Raumgebiete getheilt denken; einerseits in Raumgebiete der verticalen Strömung, welche durch thermische Ungleichheit auf der Erdoberfläche bedingt und bestimmt ist, und andererseits in Raumgebiete der Horizontalbewegung, welche erst durch jene verticale Strömung veranlasst wurde. Wir denken uns nun; es sei die Gestalt des Raumgebietes gegeben, und auch die Componenten der verticalen Strömung. Wir bezeichnen dieselben mit A B Γ, und die Componenten der horizontalen Geschwindigkeit so wohl im Raumgebiete der verticalen Strömung, als in demjenigen der horizontalen Strömung mit u', v', w'. Offenbar sind die Componenten der Geschwindigkeit, im inneren Raumgebiete, wenn wir darunter jedesmal das Raumgebiete der verticalen Strömung verstehen

$$u = v' + A \qquad v = v' + B \qquad w = w' + B \qquad (7)$$

während die Componenten der Geschwindigkeit im äusseren Raumgebiete, mit welchem Ausdruck wir fortan das Raumgebiet der Horizontalströmung bezeichnen wollen;

$$u = v' \qquad v = v' \qquad w = w'$$

Die Werthe der Componenten u' v' w' sind im allgemeinen für beide Raumgebiete verschieden; sie werden aber gewisse Bedingung erfüllen müssen, wenn die Bewegung der Lufttheilchen durch die Trennungs-

fläche der beiden Raumgebiete continuirlich vor sich gehen soll. Wenn wir unter dem Raumgebiete der verticalen Strömung den Raum verstehen, welche einerseits durch das Gebiet der verticalen Strömung auf der Erdoberfläche und andererseits durch eine zur Horizontalbewegung aller Luftschichten senkrechte Oberfläche begrenzt ist, dann ist die Bedingung, welcher u' v' w' genügen müssen

$$u' = u' \qquad v' = v' \qquad w' = w' \qquad (8)$$

wo die linker Hand stehenden Grössen die Componenten im inneren Raumgebiete bedeuten mögen. Die Bedingung dass die horizontale Bewegung continuirlich durch die Trennungsfläche der beiden Raumgebiete geschieht, ist sonach,

$$(u' + A) \cos (nx) + (v' + B) \cos (ny) + (w' + \Gamma) \cos (nz)$$
$$= u' \cos (nx) + v' \cos (ny) + w' \cos (nz) \,*$$

woraus mit Rücksicht auf (8) folgt

$$A \cos (nx) + B \cos (ny) + \Gamma \cos (nz) = 0 \qquad (8a)$$

d. h. die Oberfläche des inneren Raumgebietes sind entweder durch Strömungslinien der verticalen Strömung gebildet, oder durch die Curven

$$A = B = \Gamma = 0$$

In dem ersten Fall werden die horizontal bewegten Lufttheilchen plötzlich in die Höhe gerissen, sobald sie in das innere Raumgebiet eintreten. In dem letzteren Fall geht die Horizontalbewegung allmählig in die verticale Bewegung über.

Die Componenten der Geschwindigkeit im inneren Gebiete u' v' w' und A B Γ sind dabei von einander nicht unabhängig ; denn da die Resultanten auf einander senkrecht stehen ; so folgt

$$u'A + v'B + w'\Gamma = 0 \qquad (8b)$$

Was die Bedingung anbelangt, welche auf der Erdoberfläche zu erfüllen ist, so ergiebt sich dieselbe durch die Bemerkung, dass die Erdoberfläche nach der Einführung der Reibungskräfte und eines mit

* n bedeutet die Normale an der Begrenzungsfläche.

der Erde rotirenden Coordinatensystems, als eine reibungslose, reihenden Kugelfläche betrachtet werden darf, und dass daher jede vertical gerichtete Componente der Geschwindigkeit an der Erdoberfläche verschwinden muss; *d. h.*

$$u \cos(nx) + v \cos(ny) + w \cos(nz) = 0 \qquad (8f)$$

Für das äussere Gebiet folgt weiter

$$u' \cos(nx) + v' \cos(ny) + w' \cos(nz) = 0 \qquad (8c)$$

und für das innere Raumgebiet hingegen

$$(u' + A) \cos(nx) + (v' + B) \cos(ny) + (w' + \Gamma) \cos(nz) = 0$$

Da aber auf der Erdoberfläche $A \cos(nx) + B \cos(ny) + \Gamma \cos(nz) = \sqrt{A^2 + B^2 + \Gamma^2}$ gleich der Resultante der verticalen Geschwindigkeit ist, so folgt, weil $u' \cos(nx) + v' \cos(ny) + w' \cos(nz)$ verschwindet, dass auf der Erdoberfläche

$$\sqrt{A^2 + B^2 + \Gamma^2} = 0$$

d. h.

$$A = \mathrm{B} = \Gamma = 0 \qquad (8d)$$

Die Gleichungen (8*c*) und (8*d*) sind Bedingungen, welche an der Erdoberfläche zu erfüllen sind.

Indem wir es unternehmen, aus den allgemeinenen Differentialgleichungen (6) einige wichtige Beziehungen abzuleiten, ist es nothwendig, denselben andere Form zu verleihen.

Zu dem Ende addiren wir zur ersten Gleichung in (6) die identisch erfüllte Gleichung

$$v\frac{\partial v}{\partial x} - v\frac{\partial v}{\partial x} + w\frac{\partial w}{\partial x} - w\frac{\partial w}{\partial x} = 0$$

und zur zweiten Gleichung

$$u\frac{\partial u}{\partial y} - u\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial y} - w\frac{\partial w}{\partial y} = 0$$

und endlich zur dritten Gleichung

$$u\frac{\partial u}{\partial z} - u\frac{\partial u}{\partial z} + v\frac{\partial v}{\partial z} - v\frac{\partial v}{\partial z} = 0$$

so erhalten wir

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{1}{2}\frac{\partial(u^2+v^2+w^2)}{\partial x}+v\left(\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial x}-2\lambda\,sin\,\theta\right)+w\left(\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x}\right)=\frac{\partial\psi}{\partial x}-\Xi$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{1}{2}\frac{\partial(u^2+{}^2v+w^2)}{\partial y}+u\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}+2\lambda\,sin\,\theta\right)+w\left(\frac{\partial v}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial y}+2\lambda\,cos\,\theta\right)=\frac{\partial\psi}{\partial y}-H$$

$$\frac{dw}{\partial t}+\frac{1}{2}\frac{\partial(u^2+v^2+w^2)}{\partial z}+u\left(\frac{\partial w}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial z}\right)+v\left(\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z}-2\lambda\,cos\,\theta\right)=\frac{\partial\psi}{\partial z}-Z$$

Indem wir die neuen Functionen einführen, die durch die Gleichungen

$$\tfrac{1}{2}(u^2+v^2+w^2)-\psi=\tfrac{1}{2}(u^2+v^2+w^2)+\Pi-G=\Phi \qquad (9a)$$

$$\xi=\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z}-2\lambda\,cos\,\theta \qquad \eta=\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x} \qquad \zeta=\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}+2\lambda\,sin\,\theta \qquad (9b)$$

definirt sind, so werden die obenstehenden Gleichungen

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial\Phi}{\partial x}-v\zeta+w\eta+\Xi=0\\ \frac{\partial v}{\partial t}+\frac{\partial\Phi}{\partial y}+u\zeta-w\xi+H=0\\ \frac{\partial w}{\partial t}+\frac{\partial\Phi}{\partial z}-u\eta+v\xi+Z=0\end{aligned}\right\} \qquad (9c)$$

Die Grössen

$$\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z},\quad \frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x},\quad \frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y},$$

bedeuten nun bekanntlich das Doppelte der Componenten der Drehungsgeschwindigkeit eines Flüssigkeitstheilchens in Bezug auf die x—, y—, und z— Achse. Da ferner $2\lambda\,sin\,\theta$ und, $-2\lambda\,cos\,\theta$ die Componenten der Drehungsgeschwindigkeit eines Theilchens, welches mit der Erde um ihre Axe dreht in Bezug auf z—, respect im Bezug auf x— Achse bedeuten, so sind ξ η ζ die Componenten der aus der Rotation der Erde und eigener Rotation resultirenden Drehungsgeschwindigkeit eines Flüssigkeitstheilchens. Es ist sonach, weil die Drehungsgeschwindigkeit der Erde nirgends weiter vorkommt als in Verbindung mit den Componenten der eigenen Rotationsgeschwindigkeit, dass die Erdrotation im Grossen und Ganzen nur auf die

Rotationsgeschwindigkeit des Lufttheilchens Einfluss ausübt, dass dieser unter allen Umständen hinreichend berücksichtigt wird, sobald man zu den Componenten der Rotationsgeschwindigkeit, diejenige der Erdrotation hinzufügt.

Wir wollen nun einige Beziehungen aus den Differentialgleichungen ableiten, auf die wir später noch zurückkommen werden. Man multiplizire die erste Gleichung in (9 *c*) mit u, die zweite mit v, und die dritte mit w, und addire zusammen, so dass

$$\begin{aligned}
&u\left(\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)+v\left(\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)+w\left(\frac{\partial w}{\partial t}+\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)\\
&-uv\zeta+wu\eta+u\Xi\\
&+uv\zeta-wv\xi+vH\\
&-uw\eta+vw\xi+wZ=0
\end{aligned}$$

d. h.

$$u\left(\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)+v\left(\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)+w\left(\frac{\partial w}{\partial t}+\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)=-(u\Xi+vH+wZ) \quad (10)$$

Multiplizirt man ferner die erste Gleichung mit ξ und die zweite mit η und die dritte mit ζ, so entsteht durch Addition

$$\begin{aligned}
&\xi\left(\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)+\eta\left(\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)+\zeta\left(\frac{\partial w}{\partial t}+\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)\\
&-v\zeta\xi+w\xi\eta+\xi\Xi\\
&+u\zeta\eta-w\xi\eta+\eta H\\
&-u\eta\zeta+v\xi\zeta+\zeta Z=0
\end{aligned}$$

d. h.

$$\xi\left(\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)+\eta\left(\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)+\zeta\left(\frac{\partial w}{\partial t}+\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)=-(\Xi\xi+H\eta+Z\zeta) \quad (11)$$

Da es sich in der vorliegenden Aufgabe lediglich um die Strömungen der atmosphärischen Luft handelt, so werden wir dieselbe fortan als incompressibel betrachten.

§ II. *Allgemeine Differentialgleichung für die Bewegung der Atmosphäre.*

Unter "Isodynamische Fläche" verstehe ich eine Fläche deren Gleichung

$$\Phi = const. \tag{13}$$

ist; demnach eine Fläche gleicher Energie der Windbewegung.

Dieselbe fällt immer mit der isobarischen Fläche zusammen, so bald die Geschwindigkeit der Windbewegung so ausserordentlich klein ist, dass ihre Quadrate als unendlich klein vernachlässigt werden dürfen; denn: dann ist

$$\Phi = \Pi - G = const.$$

Es können ferner diese beiden Flächen mit einander zusammenfallen, wenn die Bewegung der Atmosphäre so vor sich geht, dass überall da wo der Druck constant ist, die resultirende Geschwindigkeit constant ist oder auch, wenn die lebendige Kraft der Luftströmung durch dieselbe Funktionsform ausdrückbar ist, wie der Druck.

Die durch die Gleichung (13) definirte Oberfläche kann gefunden werden, wenn die Geschwindigkeits componenten u, v, w und die Componenten der Rotationsgeschwindigkeit eines Lufttheilchens gemäss gewisser partiellen Differentialgeleichungen gefunden worden sind, welche wir jetzt ableiten wollen.

Wir diffirentiren zunächst die erste Gleichung in (9e) nach y, und die zweite nach x; so entstcht durch Subtraction

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\zeta\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)+u\frac{\partial \zeta}{\partial x}+v\frac{\partial \zeta}{\partial y}$$
$$-w\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)-\xi\frac{\partial w}{\partial x}-\eta\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial H}{\partial x}-\frac{\partial \Xi}{\partial x}=0$$

da aber, weil die Luft als incompressibel betrachtet wird,

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{\partial w}{\partial z} \quad \text{und} \quad \frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial \eta}{\partial y}=-\frac{\partial \zeta}{\partial z}$$

so folgt mit Rücksicht auf (9*b*)

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t}+u\frac{\partial\zeta}{\partial x}+v\frac{\partial\zeta}{\partial y}+w\frac{\partial\zeta}{\partial z}-\xi\frac{\partial w}{\partial x}-\eta\frac{\partial w}{\partial y}-\zeta\frac{\partial w}{\partial z}+\frac{\partial H}{\partial x}-\frac{\partial\Xi}{\partial x}=0 \quad (14)$$

Differentirt man die erste Gleichung nach z und die dritte nach x so entsteht durch Subtraction

$$\frac{\partial\eta}{\partial t}+u\frac{\partial\eta}{\partial x}+v\frac{\partial\eta}{\partial y}+w\frac{\partial\eta}{\partial z}-\xi\frac{\partial v}{\partial x}-\eta\frac{\partial v}{\partial y}-\zeta\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial\Xi}{\partial z}-\frac{\partial Z}{\partial x}=0 \quad (15)$$

Auf ganz dieselbe Weise erhält man die dritte Gleichung.

$$\frac{\partial\xi}{\partial t}+u\frac{\partial\xi}{\partial x}+v\frac{\partial\xi}{\partial y}+w\frac{\partial\xi}{\partial z}-\xi\frac{\partial u}{\partial x}-\eta\frac{\partial u}{\partial y}-\zeta\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial Z}{\partial y}-\frac{\partial H}{\partial z}=0. \quad (16)$$

In diesen Gleichungen kommt Φ—Function nicht mehr vor. Hat man die Grössen u v w gemäss dieser Gleichungen bestimmt, so handelt es sich darum Φ selbst zu bestimmen.

Differentirt man zu dem Ende die erste Gleichung in (9*c*) nach x, die zweite nach y, und die dritte nach z, so entsteht, da in Folge der Bedingung der Incompressibilität

$$\frac{\partial\frac{\partial u}{\partial t}}{\partial x}+\frac{\partial\frac{\partial v}{\partial t}}{\partial y}+\frac{\partial\frac{\partial w}{\partial t}}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)=0$$

ist

$$\Delta\Phi+u\left(\frac{\partial\zeta}{\partial y}-\frac{\partial\eta}{\partial z}\right)-v\left(\frac{\partial\zeta}{\partial x}-\frac{\partial\xi}{\partial z}\right)+w\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}-\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)$$

$$+\xi\left(\frac{\partial v}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial y}\right)+\eta\left(\frac{\partial w}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial z}\right)-\zeta\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

$$+\frac{\partial\Xi}{\partial x}+\frac{\partial H}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}=0$$

wo

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}=\Delta\Phi$$

gesetzt worden ist

Weil nun in Folge der Gleichung (9*b*)

$$\frac{\partial\zeta}{\partial y}-\frac{\partial\eta}{\partial z}=\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial z}=-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)=-\Delta u$$

$$\frac{\partial\zeta}{\partial x}-\frac{\partial\xi}{\partial z}=\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}-\frac{\partial^2 w}{\partial z\partial y}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}=\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)=\Delta v$$

$$\frac{\partial\eta}{\partial x}-\frac{\partial\xi}{\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial z\,\partial x}-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z\partial y}=-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial z}\right)=-\Delta w.$$

und ferner weil

$$\frac{\partial v}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial y}=-(\xi+2\lambda\cos\theta)\qquad\qquad \frac{\partial w}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial z}=-\eta$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}=(\zeta-2\lambda\sin\theta).$$

erhalten wir schliesslich

$$\Delta\Phi-u\,\Delta u-v\,\Delta v-w\,\Delta w-\xi(\xi+2\lambda\cos\theta)-\eta^2 \tag{17}$$
$$-\zeta(\zeta-2\lambda\sin\theta)+\frac{\partial\Xi}{\partial x}+\frac{\partial H}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}=0$$

Wie nun eine solche Gleichung integrirt werden kann, wenn u, v, w als Functionen von x, y, z und t gewäss der Gleichungen (14) (15) (16) bekannt sind, wenn ausser dem die Raumgebiete, wo Φ einer solchen partiellen Differentialgleichung genügt, gegeben sind, ist im Allgemeinen schwierige Aufgabe. Offenbar muss die Function aber einer anderen Differentialgleichung Genüge leisten, wenn der Punkt $(x\ y\ z)$ in ein anderes Raumgebiet gelangt, wo die Lufttheilchen keine andere Rotationsgeschwindigkeit hat, als die durch die Erdrotation hervorgerufene, also ein Raumgebiet, wo ein Geschwindigkeitspotential existiren würde, wenn die Erde nicht rotirte. Wir denken uns die Atmosphäre in zwei Arten Raumgebiete getheilte; in Raumgebiete, wo eine Wirbelbewegung existirt, und in Raumgebiete, wo eine solche nicht vorhanden ist; wo also die Lufttheilchen keine andere Rotation hat, als die durch Rotation der Erde veranlasste, und nennen das erstere, das Wirbelgebiet und das letztere das wirbelfreie Gebiet der Atmosphäre. Für das Wirbelgebiet gelten dann die Gleichungen (14)

(15) (16) (17). Für das wirbelfreie Gebiet aber, da in diesem Gebiete überall

$$\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z}=0 \tag{18}$$

so dass

$$\xi=-2\lambda\cos\theta \qquad \eta=0 \qquad \zeta=2\lambda\sin\theta$$

ist, verwandeln sich die Gleichungen (14) (15) (16) in

$$2\lambda\cos\theta\frac{\partial w}{\partial x}-2\lambda\sin\theta\frac{\partial w}{\partial z}+\frac{\partial H}{\partial x}-\frac{\partial \Xi}{\partial y}=0$$

$$2\lambda\cos\theta\frac{\partial v}{\partial x}-2\lambda\sin\theta\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial \Xi}{\partial z}-\frac{\partial Z}{\partial x}=0$$

$$2\lambda\cos\theta\frac{\partial u}{\partial x}-2\lambda\sin\theta\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial Z}{\partial y}-\frac{\partial H}{\partial z}=0$$

oder mit Rücksicht auf (18)

$$\frac{\partial}{\partial z}(2\lambda\cos\theta u-2\lambda\sin\theta w)+\frac{\partial H}{\partial x}-\frac{\partial \Xi}{\partial y}=0$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(2\lambda\cos\theta u-2\lambda\sin\theta w)+\frac{\partial \Xi}{\partial z}-\frac{\partial Z}{\partial x}=0$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(2\lambda\cos\theta u-2\lambda\sin\theta w)+\frac{\partial Z}{\partial y}-\frac{\partial H}{\partial z}=0$$

Die Gleichung (17) verwandelt sich in die einfachere

$$\Delta\Phi=-\left(\frac{\partial \Xi}{\partial x}+\frac{\partial H}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}\right)$$

da in diesem Fall

$$\Delta u=\Delta v=\Delta w=0$$

ist.

§ *III. Allgemeine Beziehungen zwischen Isodynamen, Windbahn und Wirbelaxe.*

Unter "Isodynamen" verstehe ich Linien, in denen die isodynamischen Flächen die Erdoberfläche schneiden, *d. h.* die Schnittcurven

der Oberflächengleichungen

$$\Phi = const.$$

mit der Oberfläche der Erde. Die Normale der isodynamischen Oberfläche schneidet im Allgemeinen die zur Erdoberfläche verticalen Linie, wie die Bahn des Windes, welche unmittelbar auf der Erdoberfläche überall senkrecht zu ihrer Normale stehen muss. Unter "Normale der Isodynamen" soll im Folgenden die Normale verstanden werden, welche senkrecht zu dem Curvenelemente der Isodynamen, und zugleich zu der isodynamischen Fläche steht.

Ich verstehe ferner unter "Deviationswinkel," den Winkel welchen die Bahncurve des Windes mit der Normale der Isodynamen bildet, und bezeichne denselben mit i.

Die Gleichung, durch die dieser Winkel definirt wird, ist

$$\cos i = \frac{\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}u + \frac{\partial \Phi}{\partial y}v + \frac{\partial \Phi}{\partial z}w\right)}{\omega\left(\frac{\partial \Phi}{\partial n}\right)}$$

wo zur Abkürzung

$$\sqrt{u^2 + v^2 + w^2} = \omega, \qquad \sqrt{\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)^2} = \frac{\partial \Phi}{\partial n}.$$

gesetzt worden ist. n bedeutet die Normale der isodynamischen Fläche.

Wenn wir hierbei nur stationäre Bewegung in's Auge fassen wollen, so lässt sich leicht eine allgemeine Beziehung zwischen dem Deviationswinkel und der Windbahn ableiten.

Es folgt nämlich ans (10), indem

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial t} = 0$$

gesetzt wird

$$u\frac{\partial \Phi}{\partial x} + v\frac{\partial \Phi}{\partial y} + w\frac{\partial \Phi}{\partial z} = -(u\Xi + vH + wZ)$$

Man setze

$$R = \sqrt{(\Xi^2 + H^2 + Z^2)} \tag{18a}$$

und

$$\Xi = R \cos (Rx) \qquad u = \omega \cos (\omega x)$$
$$H = R \cos (Ry) \qquad v = \omega \cos (\omega y)$$
$$Z = R \cos (Rz) \qquad w = \omega \cos (\omega z)$$

Mithin erhält man

$$u\frac{\Phi\partial}{\partial x} + v\frac{\partial\Phi}{\partial y} + w\frac{\partial\Phi}{\partial z} = - \omega R \cos (\omega R).$$

Weil nun, wenn der Punkt, $x\ y\ z$, worauf alle hier auf tretenden Grössen sich beziehen, auf der Erdoberfläche liegt, die Richtung von R *d. h.* des resultirenden Reibungswiderstandes, mit derjenige der resultirenden horizontalen Geschwindigkeit zusammenfällt, muss

$$\cos (\omega R) = 1$$

mithin

$$u\frac{\partial\Phi}{\partial x} + v\frac{\partial\Phi}{\partial y} + w\frac{\partial\Phi}{\partial z} = - \omega R.$$

Es folgt hieraus

$$\cos i = - \frac{R}{\left(\frac{\partial\Phi}{\partial n}\right)^2} \tag{18b}$$

und

$$\operatorname{tag} i = \sqrt{\left(\frac{1}{\cos^2 i} - 1\right)} = \frac{\sqrt{\left(\frac{\partial\Phi}{\partial n}\right)^2 - R}}{R}$$

Wir bilden den Zähler mittelst der Gleichungen.

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} = v\zeta - w\eta - \Xi$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial y} = - u\zeta + w\xi - H$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial z} = u\eta - v\xi - Z$$

Es ist

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial n}\right)^2 = R^2 - 2\Xi(w\eta - v\zeta) + v^2\zeta^2 + w^2\eta^2 - 2wv\eta\zeta.$$
$$- 2H(u\zeta - w\xi) + u^2\zeta^2 + w^2\xi^2 - 2uw\xi\zeta. \quad (18d)$$
$$- 2Z(v\xi - u\eta) + v^2\xi^2 + u^2\eta^2 - 2uv\xi\eta.$$

Da nun überall längs der Isodynamen

$$\Xi = R\cos(\omega x)$$
$$H = R\cos(\omega y)$$
$$Z = R\cos(\omega z)$$

gesetzt werden kann, so heben sich die mit Ξ H Z behafteten Glieder auf; es folgt

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial n}\right)^2 = R^2 + v^2\zeta^2 + w^2\eta^2 - 2uv\eta\zeta.$$
$$+ u^2\zeta^2 + w^2\xi^2 - 2uw\xi\zeta.$$
$$+ v^2\xi^2 + u^2\eta^2 - 2uv\xi\eta.$$

Um diesen Ausdruck auf eine andere Form zu bringen, addiren wir hierzu die identisch erfüllte Gleichung

$$u^2\xi^2 - u^2\xi^2 + v^2\eta^2 - v^2\eta^2 + w^2\zeta^2 - w^2\zeta^2 = 0$$

dann verwandelt sich jener Ausdruck in

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial n}\right)^2 = R^2 + (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)(u^2 + v^2 + w^2) - (u\xi + v\eta + w\zeta)^2.$$

Nennt man die Resultante der Drehungsgeschwindigkeit σ, so dass

$$\sigma = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}. \quad (18c)$$

und versteht man unter σ zugleich die Richtung der resultirenden Drehungsaxe, so kann man setzen

$$\xi = \sigma\cos(\sigma x)$$
$$\eta = \sigma\cos(\sigma y)$$
$$\zeta = \sigma\cos(\sigma z)$$

hieraus folgt.

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial n}\right)^2 = R^2 + \sigma^2\omega^2 - \sigma^2\omega^2\cos^2(\sigma\omega) =$$
$$= R^2 + \sigma^2\omega^2\sin^2(\sigma\omega)$$

Mithm erhalten wir für den Deviationswinkel den emfachen Ausdruck.

$$tag\, i = \pm \left(\frac{\omega}{R}\right) \sigma\, sin\, (\sigma\omega). \tag{19}$$

Dieser Ausdruck kann nirgends verschwinden, so lange $\sigma\, sin\, (\sigma\omega)$ nirgends verschwindet, da $\left(\frac{\omega}{R}\right)$ überall auf der Erdoberfläche einen endlichen positiven Werth besitzen muss. Sehen wir zu, ob irgendwo $\sigma\, sin\, (\sigma\omega)$ verschwinden kann. Offenbar muss, falls irgendwo ein solches Gebiet auf der Erdoberfläche existirt, entweder $sin\, (\sigma\omega) = 0$ sein, oder $\sigma = 0$ sein.

Das erstere kann nun nicht stattfinden; weil bei einer Wirbelbewegung die Strömungslinien d. h. die Richtung der resultirenden Geschwindigkeit doch nicht mit derjenigen des Rotationsaxe zusammenfallen können. Ob aber das letztere eintreten kann, bedarf noch einer näheren Untersuchung.

Verschwindet in einem Gebiete σ *d. h.*

$$\xi = \eta = \zeta = 0$$

Dann müssen den Gleichungen (14) (15) (16) zu Folge in diesem Gebiete

$$\frac{\partial \Xi}{\partial y} = \frac{\partial H}{\partial x} \qquad \frac{\partial Z}{\partial x} = \frac{\partial \Xi}{\partial z} \qquad \frac{\partial Z}{\partial y} = \frac{\partial H}{\partial z}.$$

sein, welche Gleichungen nichts anderes aussagen, als dass die Componenten des Reibungswinderstandes als Differentialquotienten von Einer Function dargestell werden können. Dass irgend wo die Drehungsgeschwindigkeit des Lufttheilchens verschwinde, führt demnach zum unmöglichen Postulate, dass in einem solchen Bewegungsgebiete dem Reibungswiderstand, welcher ein Potential nicht haben kann, ein solches zukomme. Hieraus kann man weiter den Schluss ziehen, dass *die Rotationsgeschwindigkeit die Lufttheilchens in keinem Punkt der Erdatmosphäre verschwindet, wo die Componenten des Reibungs-*

widerstandes nicht verschwinden. Als eine Consequenz dieses Schlusses folgt weiter der wichtige Salz dass der *Deviationswinkel in keinem Gebiete der Erdoberfläche verschwindet, und dass daher die Windbahnen überall gegen die Normale der Isodynamen (oder Isobaren) geneigt sein müssen.*

Die Gleichung (19) gestattet uns auf die Bahncurven des Windes zu schliessen, wenn die Isodynamen bekannt sind, und umgekehrt auf die Natur der Isodynamen, wenn die Windbahn bekannt ist.

Wenn wir uns vorstellen, dass nirgends sonst, als in Polargegenden und Aequatorialgegenden Gebiete mit verticalen Strömungen bestehen, so bestehen die Isodynamen bei dem allgemeinen Kreislauf der atmosphärischen Luft von Polargegenden nach dem Aequator, und umgekehrt offenbar aus lauter um den Erdpol in sich zurücklaufenden Raumcurven. Da nun der Deviationswinkel nirgends verschwindet, *so kann die Bahncurve des Windes im allgemeinen nur eine um den Erdpol gewundene Raumspirale sein;* denn nur Spiralen können ein System von in sich zurücklaufenden Curven unter einem spitzen Winkel schneiden.

Wenn aber irgendwo auf der Erdoberfläche in einem beschränkten Gebiete eine solche Gleichgewechtsstörung der Atmosphäre eintritt, dass die Isodynamen um einen gewissen Mittelpunct ein System von geschlossenen Curven bilden, *so ist die Windbahn nothwindig auch eine Raumsirpale, welche die Erdoberfläche umwindet.*

Wir fassen die Bewegung eines Luftheilchens in's Auge, welches entlang der Erdoberfläche um eine Axe rotirt, die senkrecht zur Erdoberfläche steht und denken uns dabei i von der Richtung aus gezählt, in der die Luftströmung stattfindet, sodass i ein spitzer Winkel, ist, dann folgt, aus der Gleichung (19), da in diesem Fall $sin\ (\sigma\omega) = 1$ ist, weil die horizontale (entlang der Erdoberfläche)

Richtung des Windes überall in dem Wirbelgebiete zu der Wirbelaxe senkrecht steht,

$$tag\, i = \left(\frac{\omega}{R}\right)\sigma.$$

d. h. vermöge der Bedentung von σ

$$tag\, i = \left(\frac{\omega}{R}\right)\sqrt{\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} + 2\lambda \sin\theta\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\varrho x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} - 2\lambda \cos\theta\right)^2} \tag{20}$$

wo der Wurzelausdruck absolut zu nehmen ist. In dieser Gleichung ist ein wichtiges Gesetz euthalten; das Dove'sche Gesetz der Wirbelstürme.

Man denke sich auf der südlichen Hemisphäre ein anderes Gebiete der Wirbelbewegung, welche in allen Stücken mit demjemgen auf der nördlichen Hemisphäre übereinstimmt, sodass auch für dieses Gebiet der Wirbelbewegung der Ausdruck (20) gilt, und dem Werthe nach auch mit demjenigen der nördlichen Hemisphäre zusammenfällt. Da nun, wenn wir für die nördliche Hemisphäre, θ positiv in die Rechnung bringen, θ für die südlichen Hemisphäre negativ zu setzen ist, so können die Werthe von σ *d. i* der resultirenden Drehungsgeschwindigkeit für beide Hemisphären nur dann zusammenfallen, wenn die Componente der Drehungsgeschwindigkeit in Bezug auf die verticale Axe $\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$ für die südliche Hemisphäre das Vorzeichen wechselt, weil *tag i* ja vollständig unabhängig von der Lage der Coordinatenaxe und der Quotient $\frac{\omega}{R}$ eine durchaus positive Grösse ist.

Wir gelangen somit zu dem Satze, dass, wenn die Luft durch irgend welche Ursache in wirbelnde Bewegung gerathen ist; die Rotation der Lufttheilchen auf der südlichen Hemisphäre im entgegengesetzten Sinne geschehen muss, wie auf der nördlichen Hemisphäre. Weil der Wirbelsturm, wie es Beobachtungen darthun,

in einer wirbelnden Bewegung der Luftmasse besteht, so folgt aus dem eben abgeleiteten Satze unmittelbar, dass, wenn ein Wirbelsturm auf der nördlichen Hemisphäre auftritt, und der Wind in der Richtung *S O N W* um ein Centrum rotirt und wenn ein Wirbelsturm unter sonst denselben Umständen (gleiche Rotationsgeschwindigkeit, der Lufttheilchen, gleiche Windgeschwindigkeit, und gleiche Reibung auf der Erdoberfläche) auf der südlichen Hemisphäre auftritt, die Drehung des Windes in dem letzteren in der entgegengesetzten Richtung *S W N O* vor sich gehen muss.

Dieses ist das wichtige Dove'sche Gesetz der Wirbelstürme. Wann nun aber die Drehung der Lufttheilchen in einem Wirbelsturm auf der einen Hemisphäre in dem einen, oder in dem andern Sinne geschieht; das lässt sich aus der Gleichung (20) nicht entscheiden. Wir werden jedoch weiter unten sehen, indem wir die Wirbelbewegung der Luft an der Erdoberfläche in einem besonderen Fall verfolgen, dass, wenn die Wirbelbewegung durch eine vertical aufsteigende Luftströmung entsteht, die Rotation der Lufttheilchen auf der nördlichen Hemisphäre immer in Richtung *S O N W* geschieht und dass die Lufttheilchen aber in der entgegengesetzten Richtung rotiren, sobald die Wirbelbewegung einer vertical niedersteigenden Strömung ihre Entstehung verdankt.

Aus den Relationen (18*a*) und (19) lassen noch einige Sätze von ähnlicher Tragweite ableiten.

Wir denken uns; Es haben die Lufttheilchen keine andere Rotationsgeschwindigkeit als die durch Erdrotation veranlasste. Die Horizontalcomponente der Drehung, deren Axe mit einer Verticallinie in dem betreffenden Punkt der Erdoberfläche zusammenfällt, beträgt dem absoluten Werthe nach $\lambda \sin \theta$. Wenn diese Grösse bei der Bewegung des Lufttheilchens positiv zu nehmen ist, so geschieht die Rotationsbewegung offenbar im Sinne der Erdrotation *d. h.* in der

Richtung mit der Sonne. Ist hingegen $\lambda \sin \theta$ negativ zu nehmen so geht die Rotationsbewegung des Lufttheilchen in entgegengesetzter Richtung vor sich *d. h.* gegen die Sonne. Die erstere Art der Windbewegung nennt man bekanntlich in der neneren Meteorologie eine cyklonale, während die zweite Art eine antcyklonale Bewegung genannt wird.

Wenn nun ein Lufttheilchen eigene Rotationsgeschwindigkeit besitzt, so dass die Horizontalcomponent der Rotationsgeschwindigkeit $\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$ durchaus in genan demselben Sinne, wie die Rotation der Erde gerichtet ist, so hat man offenbar auch mit einer cyklonalen Bewegung zu während im entgegengesetzten Falle die Bewegung eine anticyklonale sein wünde und die Horizontalcomponente der Rotationsgeschwindigkeit $\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$ negativ zu nehmen wäre, wenn in den beiden Fällen der Theil der Rotationsgeschwindigkeit, welcher von der Erdrotation selbst herrührt, positiv genommen wird. Bezeichnet man mit c die cyklonale, und mit a die anticyklonale Luftströmung, so ergiebt sich für beide Fälle aus (19) als Deviation der Windbahn

$$tag\, i_c = \frac{\omega}{R}\sqrt{\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} + 2\lambda \sin\theta\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} - 2\lambda \cos\theta\right)^2}$$

$$tag\, i_a = \frac{\omega}{R}\sqrt{\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} - 2\lambda \sin\theta\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} - 2\lambda \cos\theta\right)^2}$$

Wenn wir jetzt die Annahme machen, dass so wohl die cyklonale als die anticyklonale Bewegung des gedachten Lufttheilchens unter demselben Umständen entstehen [*d. h.* gleiche Isodynamen, gleiche Geschwindigkeit und Reibung] so folgt aus den obenstchenden Gleichungen ohne Weiteres

$$tag\, i_c > tag\, i_a$$

d. i

$$i_c > i_a$$

Dass heisst mit Worten: *die cyklonale Windbahn schneidet die Isodynamen, (oder unter Umständen Isobaren) unter kleineren Winkel, als die anticyklonale,* oder was dasselbe ist; *die Cyklonale Windbahn hat stärkere Krünmung, als die anticyklonale.*

Dieser Satz gilt ganz allgemein.*

Zu einem zweiten gleich einfachen Satz von grasser Tragweite gelangte man durch die Einführung des in der neueren Meteorologie gebränchlichen Begriffs "Gradienten," als dessen analytischer Ausdruck man mit Oberbeck † den Differentialquotienten des hydrostatischen Drucks nach der Normale der Isobaren nehmen kann. Dehnt man nun den Begriff des Gradienten dahin aus, dass man unter demselben die Differenz der Totalenergie der Luftströmung in der Richtung der schnellsten Abnahme derselben versteht, so kann $\frac{\partial \Phi}{\partial n}$ gleichfalls als der analytische Ausdruck des Gradienten im erweiterten Sinne gelten. Bezeichnet man den Gradienten in der cyklonalen Luftströmung wieder mit dem Index c, und denjenigen in der anticyklonaten mit a, so folgt aus (18a) für beide Fälle

$$\cos i_c = -\frac{R}{\left(\frac{\partial \Phi}{\partial n}\right)_c} \qquad \cos i_a = -\frac{R}{\left(\frac{\partial \Phi}{\partial n}\right)_a}$$

Weil nun unter denselben herrschenden Verhältnissen i_c immer grösser ist, als i_a; so muss

$$\frac{R}{\left(\frac{\partial \Phi}{\partial n}\right)_c} < \frac{R}{\left(\frac{\partial \Phi}{\partial n}\right)_a}$$

* Herr Dr. Sprung Assistent an der deutschen Seewarte zu Hamburg ist auf dem Weg einer vorwiegend geometrischen Betrachtuug zu demselben Satz gelangt (Archiv der deutschen Seewarte Jahrgang II. 1879. pag. 21) Die Ableitung dieses Satzes aus den hydrodynamischem Differentialgleichungen in solcher Allgemeinheit dürfte aber wohl neu sein.

† Wiedemanns Annalen Band XVII pag. 133.

mithin

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial n}\right)_c > \left(\frac{\partial \Phi}{\partial n}\right)_a$$

*d. h. Die cyklonalen Bewegungsformen in der Atmosphäre sind von grösseren Gradienten begleitet als die anticyklonalen.**

Auch dieser Satz gilt unter sonst gleichen Umständen ohne alle Einschränkung.

Haben die Lufttheilchen im gewisen Gebiet der Atmosphäre keine andere Rotationsgeschwindigkeit, als die durch Erdrotation hervorgerufene, so erhält die Gleichung (19) eine bemerkenswerthe Gestalt. Es ist unter diesem Umstande.

$$\xi = -2\lambda \cos\theta \qquad \eta = 0 \qquad \zeta = 2\lambda \sin\theta$$

sodass

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} \qquad \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial z} \qquad \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial y}$$

Dann ist

$$\sigma = \sqrt{4\lambda^2} \qquad = 2\lambda.$$

und die Axenrichtung der Drehung eines Lufttheilchens fällt selbstredend mit der Axe der Erdrotation zusammen. Bezeichnet man mit λ zugleich die Richtung der Erdaxe; so folgt aus (19) die Gleichung

$$tag\ i = 2\left(\frac{\omega}{R}\right)\lambda \sin(\lambda\omega)$$

Denkt man sich die Erdoberfläche als eine reine Kugelfläche, und bezeichnet den Azimuthwinkel der Windbahn mit χ, so kann man in dem Punkt der Erdoberfläche, dessen Breite θ ist, setzen.

$$\cos(\lambda\omega) = \cos\chi \cos\theta$$

---

* Vergleiche Dr. Sprung (a. o. a. O. pag 22)

Die oben abgeleitete Gleichung verwandelt sich so mit in

$$tag\ i = \frac{2\lambda\omega}{R}\sqrt{1 - cos^2\ \chi\ cos^2\ \theta}\ * \qquad (21)$$

Der Deviationswinkel ist sonach unter sonst gleichen Umständen von der Richtung des Windes abhängig. Bei reinem Ost-oder Westwinde ist

$$tag\ i = \frac{2\lambda\omega}{R} \qquad (19a)$$

also unabhängig von der Breite, während dieses bei reinem Nord oder Südwind nicht der Fall ist; denn es ist für diesen Fall

$$tag\ i = \frac{2\lambda\ \omega\ sin\ \theta}{R} \qquad (19b)$$

Die Windrichtung schliesst demnach mit den Isodynamen (oder Isobaren) im Allgemeinen grösseren Winkel, wenn sie Nord oder Süd ist, als wenn sie Ost oder West ist.

---

* Insofern als nur die unterste Schichte der Atmosphäre in Betracht gezogen wird, und die Annahme gestattet ist, dass der Reibungswiderstand an der Erdoberfläche proportional den Horizontalcomponenten der Windgeschwindigkeit ist, sodan man setzen kann

$$\text{巨} = \kappa u \qquad H = \kappa v \qquad Z = \kappa w$$

mithin

$$R = \kappa w$$

folglich

$$tag.\ i = \frac{2\lambda}{n}\sqrt{1 - cos^2\ \chi\ cos^2\ \theta}$$

so kann man leicht zur ungefähren Kenntniss der Constante κ gelangen, welche den Reibungswinderstand der Erdoberfläche bestimmt. Für höheren Breitengrad ist annährend

$$tag.\ i = \frac{2\lambda}{\kappa}$$

Nun beträgt der Winkel i nach den Beobachtungen von Herrn Capt. Hoffmeyer für Dänemark (Meteorolog. Zeitschrift der österreichischen Gesellschaft. Bd. XIII pag. 338.)

Windrichtung	N W	N E W	E N E	E S	S E S	S S W	W S W	N W W	im Mittel	
i	77.5	74.5	67.5	61	60.5	65.5	71.5	75.5	69.2	

Hieraus ergiebt sich aus der obigen Gleichung mit Zugrundlegung des Werthes $\lambda = 0{,}00007292$

$$\kappa = 0{,}00005395\ (Meter)$$

also eine Grösse von denselben Ordnung wie λ.

Man denke sich die Isodynamen so beschaffen, dass die Windbahn dieslben unter dem constanten Winkel i durchsetzt. Als Azimuthwinkel der Windbahn findet man aus (21)

$$\cos \chi = \frac{1}{\cos \theta} \sqrt{1 - \frac{R^2}{4\lambda^2\omega^2} tag^2 i} \qquad (19d)$$

Das Azimuth ist also mit der geographischen Breite veränderlich. Wenn nun in irgend einem Punkt der Erdoberfläche, dessen Breite θ_0 heissen möge, die Luftströmung als Ost—oder Westwind auftritt, und der Quotient $\frac{\omega}{R}$ überall denselben Werth behielt, so hat man als Azimuth der Windbahn in dieser Luftströmung aus (19d) und (19a) für die Breite θ

$$\cos \chi = \frac{1}{\cos \theta} \sqrt{1 - \frac{R^2}{4\lambda^2\omega^2} \frac{4\lambda^2\omega^2}{R^2}} \; d.\ h. = 0$$

mithin

$$\chi = \frac{\pi}{2} \text{ oder } - \frac{\pi}{2}$$

Wir gelangen somit zu dem Satz, *dass eine Luftströmung welche einmal als reiner Ost oder West auftritt, immer die Richtung Ost und West beihehält*—dass demnach eine dem Parallelkreise parallele Luftströmung nicht durch die Rotation der Erde von ihrer ursprünglichen Bichtung abgelenkt wird. Dieses ist nichts anderes, als das bekannte Hadley'sche Princip. Ganz anderes verhält sich mit einer Luftströmung, die ursprünglich polar oder aequatorial gerichtet war. Für diesen Fall findet man unter derselben Annahme aus (19d) und (16b)

$$\cos \chi = \frac{1}{\cos \theta} \sqrt{\left(1 - \frac{R^2}{4\lambda^2\omega^2} \frac{4\lambda^2\omega^2 \sin^2 \theta_0}{R^2}\right)} = \frac{\cos \theta_0}{\cos \theta}.$$

Der Azimuth der Windbahn ist also mit der geographischen Breite veränderlich; die Luftströmung, welche ursprünglich als reiner Nord aufgetreten ist, wird von dieser Richtung nach und nach in dem Maasse abgelenkt, als sie in immer niedrigere Breite kommt. Wenn die

Luftströmung eine rein südliche ist, so wird die für den Azimuth der Windbahn gefundene Gleichung unbrauchbar—da dann $\cos\theta_0 > \cos^2\theta$ und $\cos\chi$ keine reele Grösse ist. Es geht daraus herbor, dass bei einer rein südlichen Luftströmung $tag\ i$ nicht überall denselben Werth haben kann.

Aus der Gleichung (19*d*) geht übrigens hervor dass eine Luftströmung von der bezeichneten Art so lange möglich ist, als $tag\ i < \frac{2\lambda\omega}{R}$ ist., und ferner sie nicht in jeder Breite auftreten kann; denn der grösste Werk, den $\cos\chi$ überhanpt erhalten kann, ist ja 1. Der Parallelkreis, welcher also senkrecht von Windbahn geschnitten wird und demnach die Grenze der bezeichneten Luftströmung bildet, ist durch die Gleichung

$$\cos\theta' = \sqrt{1 - \frac{R^2}{4\lambda^2\omega^2}\, tag^2\, i}$$

bestimmt, wenn θ' die Breite des betreffenden Parallelkreises bedeutet. Von da ab schneidet die Windbahn den Parallelkreis unter immer kleinerem Winkel, und unter dem Aequator selbst ist der Azimuth der Windbahn durch die Gleichung

$$\cos\chi_0 = \sqrt{1 - \frac{R^2}{4\lambda^2\omega^2}\, tag^2\, i}$$

bestimmt, *d. h.* nahe zu $\chi = \frac{\pi}{2}$ wenn $\frac{R^2\, tag^2\, i}{4\lambda^2\omega^2}$ sich sehr wenig von 1 unterscheidet; die Luftströmung geschieht daher unter dem Aequator nahezu parallel dem Parallelkreis. Es ist überhaupt.

$$\cos\theta' = \cos\chi_0$$

d. h. Bei der in Rede stehenden Luftströmung schneiden die Windbahnen den Aequator unter demjenigen Winkel, welcher das Complement der Breite des Grenzkreises bildet.

Die ausgezogene Curve in Fig. 2 (Tafel XIII) mag den ungefähren Verlauf der Windbahn in diesem Fall darstellen.

Aehnliche Luftströmungen kommen nun in der Natur thatsächlich vor, und sind als Passatwinde wohl bekannt. Die Beobachtung, dass die Region der Passatwinde nicht bis zum Polarkreis hinaufreicht, sonderen nur auf einen Gürtel unter den Tropen beschränkt ist, ist also auch theoretisch begründbar, und zur Erklärung dieser Thatsache scheint das allmählige Niedersinken der oberen Aequatorialströmung nicht das einzig und allein Wesentliche zu sein; da die Grenz, innerhalb deren die Windbahnen unter reelem Winkel die Parallelkreise schneidet auch wesentlich durch den Werth des Bruchs $\frac{R}{2\lambda\omega}$ bestimmt ist.

Ich bemerke hierbei, dass man* das Wachsen des Azimuthwinkels der Windbahn mit abnehmender Breite wirklich im Passatgebiete des atlantischen Oceans beobachtet hat, was man auch aus der Gleichung (19 d) unmittelbar folgern köunte. Dieselbe kann sonach als ein analytischer Ausdruck gelten, für die Luftströmung in Passatregion; insoweit, als die Isodynamen, oder man darf in diesem Fall wohl dafür setzen, die Isobaren so beschaffen sind, dass der Deviationswinkel constant ist, was in der Wirklichkeit auf hoher See, wo der Einfluss der angrenzenden Continente auf den Verlauf der Isobaren verschwindet, annährend richtig sein dürfte.

Am Aequator und an der Grenzzone der Passatwinde selbst wird aber der gedachte Ausdruck wesentliche Modification erleiden müssen, einmal, weil die Regionen der Passatwinde auf den beiden Hemisphären durch einen schmahlen Gürtel der vertical aufstreigenden Luftströmung, die Kalmengürtel, getrennt ist, und die isobarische Fläche eine andere werden muss, als die, deren Normale den Windbahn einen Constanten Winkel schliesst, und das ander Mal, weil in Folge des allmäligen Niedersinkens der Aequatorial-

* Sieh. Coffin. Winds of northern hemisphere. Washington City, published by the Smithonian Institution. November 1853 pag. 172.

strömung *d. i* des oberen Possatwindes, die Greuz der unteren Passatregion früher beginnen muss als bei der durch die Gleichung (19*c*) bestimmten Breit. Das Gesetz, welches den gauzen Verlauf der reinen Polarströmung, der unteren Passatwinde beherrscht, ist nun allerdings in der Gleichung (21*a*) enthalten; die Discussion derselben setzt aber die Kemtniss der Gleichung für die Isobarische Fläche und des Quotientem $\frac{\omega}{R}$ als Function von den Coordinaten voraus, welche einen Punkt der Erdoberfläche bestimmen.

Betrachten wollen wir noch den Fall, wo die Isobaren dem Parallelkreise parallele Kreise bilden, also den Fall, wo der Deviationswinkel *i* gleich ist dem Azimuthwinkel.

Für diesen Fall haben wir die Gleichung

$$tag\,\chi = \frac{2\lambda\omega}{R}\sqrt{(1 - cos^2\chi\, cos^2\theta)}$$

oder in den wir $\frac{2\lambda\omega}{R} = K$ setzen, und nach $cos^2\chi$ aufläsen,

$$cos^2\chi = \frac{1 + K^2 \pm \sqrt{(1+K^2)^2 - 4K^2\, cos^2\theta}}{2\, cos^2\theta \cdot K^2.}$$

Wenn eine solche Bewegung entlang der Erdoberfläche möglich, und χ daher immer einen reelen Werth haben soll, so muss das untere Zeichen genommen werden, da soust. $cos^2\chi$ in Allgemeinen > 1 sein würde. Man hat sonach

$$cos^2\chi = \frac{1 + K^2 - \sqrt{(1+K^2) - 4\, cos^2\theta K^2}}{2\, cos^2\theta K^2}$$

Für die Aequatrialgegenden erhält man

$$cos^2\, \chi_0 = 1$$

und für die Polargegend findet man leicht

$$cos^2\, \chi_{90} = \frac{1}{1 + K^2}$$

und für die Breite. 45°

$$\cos^2 \chi_{45} = \frac{1 + K^2 - \sqrt{1 + K^4}}{K^2}$$

Der Azimuthwinkel der Windbahn nimmt also mit wachsender Breite zu, und hat um so kleineren Werth, je kleiner K, *d. h.* je unbedeutender die Rotationsgeschwindigkeit der Erde gegen den Quotienten $\frac{R}{\omega}$ in Betracht kommt. Nimmt hingegen K zu, *d. h.* wird $\frac{R}{\omega}$ klein gegen die Rotationsgeschwindigkeit der Erde, so wachst der Azimuthwinkel und für verschwindend kleinen Werth von K, wird derselbe $= \frac{\pi}{2}$; die Windbahn schneidet dann die Isobaren gar nicht, und geht parallel dem Parallelkreise.

Die in Fig. 2 (Tafel XIII) gezeichnete punktirte Spirallinie stellt die Windbahn bei solcher Luftströmung dar. Sie erinnert unwillkürlich an die zurückkehrende Aequatrialströmung; an den oberen Passatwind. Die Luft strömt polwärts vom Aequator aus mit bei wachsender Breite immer wachsendem Azimuth und die Bahncurve ist eine Spirale, welche den Meridian unter um so grösserem Winkel schneidet, deren Windungen um so enger wird, je kleiner die Strömungsgeschwindigkeit gegen den Reibungswiderstand ausfällt.

Es lässt sich ferner aus der Gleichung (11) eine bemerkenswerthe Relation zwischen der Axenrichtung der Wirbelbewegung und der Normale der isodynamischen Flächen ableiten, welche auch zu besonderes einfachen Sätzen führen. Im Falle der stationären Luftbewegung wird die gedachte Gleichung.

$$\xi \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \eta \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \zeta \frac{\partial \Phi}{\partial z} = -(\xi \Xi + \eta H + \zeta Z)$$

Dieses lässt sich auch leicht in

$$\cos(n\sigma)\, \sigma \frac{\partial \Phi}{\partial n} = -R\sigma \cos(\sigma R)$$

verwandeln, wo σ und R durch die Gleichungen (18*c*) (18*a*) bestimmt

sind und wo n wieder die Normale der isodynamischen Flächen bedeutet. Wir erhalten somit die Relation

$$\cos(n\sigma) = -\frac{R}{\frac{\partial\Phi}{\partial n}}\cos(\sigma R)$$

oder auch mit Rücksicht auf die Gleichung (18b)

$$\cos(n\sigma) = \cos i, \cos(\sigma R)$$

Nun soll nach der eingeführten Annahme die Richtung der Reibungsresultante R überall der Resultante der zur Erdoberfläche parallelen Geschwindigkeit parallel sein. Der Winkel (σR) welche die Wirbelaxe σ mit der Richtung der Resultante R schliesst, ist identisch mit demjenigen, welche sie mit der Richtung der resultirenden Horizontalgeschwindigkeit bildet. Es sei Θ der Neigungswinkel der Wirbelaxe gegen die Tangentialebene der Erdoberfläche von der Richtung aus gezählt, für welche R positiv ist, welche also der Richtung der resultirenden Horizontalgeschwindigkeit der Strömung entgegengesetzt ist; so ist

$$\cos\Theta = \cos(\sigma R)$$

Mithin folgt die Gleichung

$$\cos(n\sigma) = \cos i \cos\Theta \qquad (21a)$$

Man denke jetzt auf der Erdoberfläche ein Wirbelsystem, welches so beschaffen ist, dass jedes Lufttheilchen in demselben unmittelbar auf der Erdoberfläche um eine zur Verticallinie parallele Axe rotirt. Dann ist $\Theta = \frac{\pi}{2}$ zu setzen; es folgt hieraus, dass auch

$$\measuredangle(n\sigma) = \frac{\pi}{2}$$

ist. Wenn demnach in einem Wirbelsystem jedes Lufttheilchen um eine um die Verticallinie parallele Axe rotirt, so stehen die Isodynamischen Flächen auf der Erdoberfläche überall senkrecht *d. h.* die Isodynamen sind die Durchschnittscurven der zur Erdoberfläche orthonalen Flächenschaar. Es ist hieraus zu schliessen, dass wenn die

Erde als eine Kugel zu betrachten ist, die isodynamischen Flächen gewisse Kegelflächen sind, deren Spitzen sämmtlich im Mittelpunkt der Kugulfläche liegen. Wenn das Gebiet der Wirbelbewegung auf der Erdoberfläche durch Curven geschlossen ist, so sind die Isodynamen auch eine Schaar von geschlossenen Curven. Haben die Lufttheilchen hingegen keine andere Rotation, als die der Erde, so fällt die Wirbelaxe mit der Erdrotation zusammen, steht also senkrecht zur Erdoberfläche und die Isodynamen, müssen daher eine Schaar um den Erdpol geschlossener Curven sein. In der Höhe der Erdatmosphäre ist die Wirbelaxe im allgemeinen gegen die Tangentialebene oder Erdoberfläche geneigt, da $\cos(n\sigma)$ im Allgemeinen nicht verschwindet, überall wo der Einfluss des Reibungswiderstandes nicht verschwindet. Hinsichtlich dieses Neigungswinkels lässt sich nun aus der Gleichung (21*a*) ein charakterischer Unterschied zwischen einem cyklonalen und anticyklonalen Wirbelsystem ableiten. Wie aus der Gleichung (18*d*) unmittelbar ersichtlich, haben die Gradienten auch in der höheren Luftschichte bei einer cyklonalen Bewegungsform grössere Werthe, als bei einer anticyklonalen, da die Resultante der Rotationsgeschwindigkeit σ für jene grösser als für diese sein muss, es folgt auch hieraus, dass der Deviationswinkel in der höheren Luftschichte für Cyklonalen Formen grössere sein muss, als für anticyklonale. Dieses Umstandes halber ergiebt sich die Ungleichung

$$\left(\frac{\cos(n\sigma)}{\cos\Theta}\right)_c < \left(\frac{\cos(n\sigma)}{\cos\Theta}\right)_a$$

Hierin ist ein Satz enthalten, welcher sich also aussprechen lässt: Wenn die Richtung der Wirbelaxe im cyklonalen und anticyklonalen Wirbelsystem unter sonst gleichen Umständen gleiche Neigung gegen die Tangentialchene der Erdoberfläche hat, so schneidet die Wirbelaxe im cyklonalen System die Normale der isodynamischen Fläche unter

grösseren Winkel, als im anticyklonalen System. Bildet die Wirbelaxe in den beiden Systemen unter sonst gleichen Umständen mit der Normale der isodynamischen Fläche gleichen Winkel, so ist der Neigungswinkel der Wirbelaxe im cyklonalen Wirbelsystem alle Mal kleiner als im anticyklonalen Wirbelsystem.

Dieser Satz steht nun im genauesten Zusammenhang mit der von dem scharfsinnigen Meteorologen Redfield * zuerst gemachten Bemerkung, dass, wenn ein wirbeluder Luftcylinder entlang der Erdoberfläche schreitet, derselbe durch den Reibungswiderstand am Boden nothwendig vorneigen und sich schon in der höheren Luftschichte bemerkbar machen muss, ehein der unteren Schichte wahrgenommen wird. Dabei neigt sich der Wirbelcylinder, wenn er cyklonal rotirt, weniger nach vorn, als wenn er im anticyklonalen Sinne rotirte, und die Krümmung der anticyklonalen Wirbelfäden, welche den gedachten Cylinder bilden, muss daher unter sonst denselben Umständen stärker sein, als diejenige der cyklonalen. Auch dieses wird durch die Erfahrung bestätigt, dass, wenn die Druckminima, denen, wie wir weiter in einem Beispiel sehen werden, die cyklonalen Wirbelfäden gehören, fortschreiten, dieselben bei Weitem rapideres Fallen des Barometerstandes hervorruft, als wenn im fortschreitenden Gebiete der Druckmaxima, denen, wie wir ebenfalls weiter unten sehen werden, die anticyklonalen Wirbelfäden gehören, das Barometer steigt. Es beruht also die oben gedachte Verschiedenheit der Gradienten in den beiden Wirbelsystemen einfach auf der Verschiedenheit der Krümmung der Wirbelfäden.

§ *IV. Die Integration nach dem Raum.*

Ich will jetzt einen allgemeinen Ausdruck für die Geschwindigkeitscomponenten u v w herzustellen suchen und zwar für

* O. Marbach. Physik. Lexikon. Art. Winde. pag. 984.

verschiedene Raumgebiete, wo die atmosphärische Luft im verschiedenen Bewegungszustande sich befindet. Ich denke mir den von der Atmosphäre eingenommenen Raum in Raumgebiete getheilt, theils in Raumgebiete der vertical aufsteigenden Strömung, theils in die der dadurch veranlassten horizontalen Strömung. Die Geschwindigkeit der verticalen Strömung nehme ich als gegeben an, eben so das Raumgebiet, wo sie stattfindet. In dem übrigen Raumgebiete soll die Luft nur horizontale Geschwindigkeit haben, *d. h.* nur parallel zur Erdoberfläche strömen.

Bezeichnet man nun die Componenten der gegebenen Geschwindigkeit der verticalen Strömung wieder mit A B Γ und diejenigen der horizontalen Strömung in den beiden Raumgebieten mit u' v' w'; dann sind die Componenten der Geschwindigkeit in Raumgebiete der horizontalen Strömung

$$u = u' \qquad v = v' \qquad w = w'$$

und im Raumgebiete der verticalen Strömung

$$u = u' + A \qquad v = v' + B \qquad w = w' + \Gamma.$$

wo bei es sogleich bemerkt werden möge, dass A B Γ negativ zu rechnen ist, wenn in dem betreffenden Raumgebiete die Strömung vertical niederwärts geschieht.

Die Bedingungen, denen u v w an der Erdoberfläche und an der Grenzfläche der beiden Raumgebiete zu genügen haben, sind bereits aufgestellt. Es handelt sich hier zunächst darum für u v w solchen Ausdruck zu finden, dass die Bedingungsgleichungen (9*b*) und die Bedingung der Massencontinuität

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

erfüllt werden.

Um solche u, v, w, zu finden denke ich mir, eine Function φ so bestimmt, dass sie für das innere Raumgebiete [womit das Raumgebiet der verticalen Strömung bezeichnet wird] die Differential-

gleichung

$$\Delta\varphi = -\left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial \Gamma}{\partial z}\right) \tag{22}$$

und in dem äusseren Raumgebiete aber die Gleichung

$$\Delta\varphi = 0 \tag{22a}$$

befriedigt. Wenn wir nun im äusseren Raumgebiete setzen

$$\begin{aligned} u &= \frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ v &= \frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ w &= \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \end{aligned} \tag{23}$$

und im inneren Raumgebiete

$$\begin{aligned} u &= \frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} + A \\ v &= \frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} + B \\ w &= \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \Gamma \end{aligned} \tag{24}$$

wo U, V, W gewisse Functionen von $x\ y\ z$ und t sind, welche den partiellen Differentialgleichungen genügen

$$\Delta U = \frac{\partial \Gamma}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial z} - \xi - 2\lambda \cos\theta \tag{25}$$

$$\Delta V = \frac{\partial A}{\partial z} - \frac{\partial \Gamma}{\partial x} - \eta \tag{26}$$

$$\Delta W = \frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y} - \zeta + 2\lambda \sin\theta. \tag{27}$$

dann wird die Bedingung der Massencontinuität erfüllt, und es werden die Gleichung (9*b*) *d. i.*

$$\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} = \xi + 2\lambda \cos\theta$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} = \eta$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = \zeta - 2\lambda \sin\theta$$

so wohl im inneren als im äusseren Raumgebiet erfüllt wenn U, V, W über dies die Bedingung

$$\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial y}+\frac{\partial W}{\partial z}=0 \tag{28}$$

erfüllen.

Die Grössen.

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial y}-\frac{\partial B}{\partial z}-\xi-2\lambda\cos\theta=\frac{\partial(\Gamma-w)}{\partial x}-\frac{\partial(B-v)}{\partial z}$$

$$\frac{\partial A}{\partial z}-\frac{\partial \Gamma}{\partial x}-\eta=\frac{\partial(A-u)}{\partial z}-\frac{\partial(\Gamma-w)}{\partial x}$$

$$\frac{\partial B}{\partial x}-\frac{\partial A}{\partial y}-\zeta+2\lambda\cos\theta=\frac{\partial(B-v)}{\partial x}-\frac{\partial(A-u)}{\partial y}$$

bedeuten nun nichts Anderes, als die Componenten der Drehungsgeschwindigkeit parallel der Erdoberfläche in Bezug auf die Coordinatenaxen. Bezeichnet man dieselben mit ξ' η' und ζ', und ihre Resultante mit σ', so dass

$$\frac{\partial w'}{\partial x}-\frac{\partial v'}{\partial z}=\xi' \quad \frac{\partial u'}{\partial z}-\frac{\partial w'}{\partial x}=\eta' \quad \frac{\partial v'}{\partial x}-\frac{\partial u'}{\partial y}=\zeta'$$

$$\sigma'=\sqrt{(\xi'^2+\eta'^2+\zeta'^2)} \tag{28a}$$

dann haben die Functionen U, V, W die Gleichungen zu erfüllen.

$$\begin{aligned} \Delta U&=\xi' \\ \Delta V&=\eta' \\ \Delta W&=\zeta' \\ \frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial y}+\frac{\partial W}{\partial z}&=0 \end{aligned} \tag{32}$$

Haben die Lufttheilchen im äusseren Raumgebiete, keine eigene Rotation, so dass

$$\xi=-2\lambda\cos\theta \quad \eta=0 \quad \zeta=2\lambda\sin\theta$$

so müssen U, V, W derselben Differentialgleichung genügen wie φ. *d. h.*

$$\Delta U=0 \quad \Delta V=0 \quad \Delta W=0 \tag{33}$$

Wie solche Differentialgleichungen, wie von (25) bis (33) zu integriren sind, lehrt uns die Potentialtheorie. Es kann sich nun mehr darum handeln U, V, W, so zu bilden, dass, ihre nach der Normale der Trennungsfläche der verschiedenen Raumgebiete genommenen Differentialquotienten continuirlich in einander übergehen, wenn der Punkt $(x\ y\ z)$ von einem Raumgebiete zum andern übergeht. *d. h.* bezeichnet man das innere Raumgebiet mit dem Buchstaten i, und das äussere mit a, so müssen $U\ V\ W$ und φ so gebildet werden, dass an der Trennungsfläche der verschiedenen Raumgebiete

$$\frac{\partial W_i}{\partial n}=\frac{\partial W_a}{\partial n} \quad \frac{\partial V_i}{\partial n}=\frac{\partial V_a}{\partial n} \quad \frac{\partial U_i}{\partial n}=\frac{\partial U_a}{\partial n} \quad \frac{\partial \varphi_i}{\partial n}=\frac{\partial \varphi_a}{\partial n} \tag{34}$$

ist, damit die Continuität der horizontalen Bewegung bemerkstelligt werde.

Ich muss hierbei bemerken, dass wir je nach der Natur der als gegeben betrachteten Raumgebietes der verticalen Strömung zwei wesentlich verschiedenen Strömungserscheinungen zu unterscheiden haben. Wenn das gedachte Raumgebiete durch Linien

$$A=0 \qquad B=0 \qquad \Gamma=0$$

gebildet ist, so geht die Strömung der Luft auch in verticaler Richtung continuirlich vor sich, indem die Horizontialrichtung der Strömung allmählig in die Verticalströmung übergeht. Ist das innere Raumgebiet hingeben durch Stromlinien der verticalen Strömung selbst gebildet, so werden die Lufttheilchen, welche bis an die Trennungsfläche in reiner Horizontalbewegung begriffen waren, durch Verticalströmung auch ohne jede Vermittelung vertical aufwärts, oder niederwärts gerissen. Welcher von diesen Bewegungsformen eintritt, das hängt lediglich von dem Werthe ab, welchen die gegebenen Geschwindigkeitscomponenten der verticalen Strömung an der Trennungsfläche der Raumgebiete besitzen.

Es ist nicht schwer allgemeine Integrale aufzufinden, welche die

Gleichungen (22) (22*a*) (29) (30) (31) und (33) befriedigen, und zwar unter der Voraussetzung, dass im äusseren Raumgebiete Wirbel nicht existiren, und in dem inneren Raumgebiete die Rotationsgeschwindigkeit der Lufttheilchen gegeben sei, und dass der Luftraum sich im Übrigen in's Unendliche erstrecke, und in der Unendlichkeit ruhe, und in der Endlichkeit durch die Erdoberfläche begrenzt sei. Dann genügt man solchen Differentialgleichungen, wie (22) (22*a*) (29) (30) (31) und (33) durch die Raumintegrale *

$$\varphi = \frac{1}{4\pi}\iiint\left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial \Gamma}{\partial z}\right)\frac{dx'dy'dz'}{r} \tag{35}$$

$$U = -\frac{1}{4\pi}\iiint\frac{\xi' dx'dy'dz'}{r} \tag{36}$$

$$V = -\frac{1}{4\pi}\iiint\frac{\eta' dx'dy'dz'}{r} \tag{37}$$

$$W = -\frac{1}{4\pi}\iiint\frac{\zeta' dx'dy'dz'}{r} \tag{38}$$

wo $dx'dy'dz'$ ein Element des wirbelerfüllten Raumgebietes der verticalen Strömung bezeichnet und r die Entfernung eines Punktes $(x\ y\ z)$ von diesem Raumelemente

$$= \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}$$

zu setzen ist

Dass diese fur U, V, W gesetzten Raumintegrale auch die Gleichung (28) befriedigt, beruht auf dem Umstande, dass auch in unserem Problem die Wirbelfäden nirgends in dem Luftraum endigen, dass sie entweder in sich zurücklaufen, oder an die starre Erdoberfläche stossen, wo sie abbrechen, da ja das Raumintegral

$$\iiint\left(\frac{\partial \xi'}{\partial x'} + \frac{\partial \eta'}{\partial y'} + \frac{\partial \zeta'}{\partial z'}\right) dx'\ dy'\ dz'$$

$$= -\iint \sigma' \cos(\sigma'\ n)\ ds.$$

* Sieh. H. Helmholtz, Über Integrale der hydrodynamischen Gleichungen, welche den Wirbelbewegungen entsprechen. Crelle's Journal. Bd. 55.

in jedem Punkt des Luftraums verschwindet, und an der durch Wirbellinien gebildeten Oberfläche des Wirbelgebietes $\sigma' = 0$ ist, oder wenigstens

$$\xi' \cos(nx) + \eta' \cos(ny) + \zeta' \cos(nz) = 0$$

Die Functionen φ, U, V, W welche durch die Gleichungen (35)(36)(37)(38) definirt sind, bleiben bekanntlich überall stetig und endlich, und verschwinden in der Unendlichkeit. Ihre Differentialquotienten nach der Normale des Raumgebietes, über welches die Integration ausgedehnt wird, haben auch die Eigenschaft, in der Unendlichkeit zu verschwinden, und gehen continuirlich in einander über, wenn der Punkt $(x\ y\ z)$ von einem Raumgebiete in das andere herübergeführt wird *d. h.* die Bedingung der Continuität der horizontalen Strömung in den verschiedenen Raumgebieten ohne Weiteres durch die Form der Functionen φ, U, V, W erfüllt. Was die Grenzbedingung anbetrifft, welche noch an der Erdoberfläche und an der äusseren Grenzfläche der Atmosphäre zu erfüllen ist, so können ξ', y', ζ' so gegeben sein, dass die Bedingungsgleichung $(8f)$ von selbst erfüllt wird, oder sie kann dadurch erfüllt werden, wie Professor Helmholtz es gezeigt hat,* dass man zu den Gleichungen (23) und (24) der Reihe nach

$$\frac{\partial P}{\partial x}, \quad \frac{\partial P}{\partial y}, \quad \frac{\partial P}{\partial z}$$

hinzugefügt, wo P eine Function ist, welche die Gleichung $\Delta P = 0$ befriedigt und in der Unendlichkeit verschwindet, und P passend bestimmt.

Wenn gleich die weitere Behandlung des Problems im Allgemeinen mit grosser Schwierigkeit verknüpft zu sein pflegt, so sieht man doch klar, wie die Theorie der Bewegung der Erdatmosphäre auf diejenige der Wirbelbewegung in einer Flüssigkeit zurückgeführt werden kann, wenn ξ', η', ζ' nur gemäss der Kräfte, welche auf die rotirenden Lufttheilchen einwirken, gegeben sind, und

* H. Helmholtz, a. o. a. O.

ferner, dass diejenigen Fälle der Wirbelbewegung, in denen die Lösung bisher gelungen ist, unmittelbar auf die Bewegungserscheinungen der Atmosphäre anwendbar sind, so wie diejenigen Fundamentalsätze über die Wirbelbewegung, welche von Helmholtz und *A.* aufgestellt worden sind, und nicht auf der Voraussetzung beruhen, dass auf die Flüssigkeitstheilchen nur Kräfte einwirken, welche Potential haben.

§ *V. Bewegungsgleichungen unter specieller Annahme.*

Es ist indessen gerade das Schwierigste in dem vorliegenden Problem, ξ, η und ζ anzugeben; denn die Geschwindigkeit der horizontalen Strömung hängt im Wesentlichen von der Geschwindigkeit der gegebenen verticalen Strömung ab, und die Componenten der Rotationsgeschwindigkeit eines Lufttheilchens, welche aus der Rotationsgeschwindigkeit der Erde einerseits und aus der eigenen Rotationsgeschwindigkeit andererseits resultirt, müssen gemäss der Differentialgleichungen (14) (15) (16) bestimmt werden, welche aber neben ξ, η, ζ auch noch u, v, w enthalten, also Functionen, welche erst dam bestimmt werden können, falls ξ, η, ζ bestimmt worden sind.

Diese Schwierigkeit kann allerdings dadurch umgangen werden, indem man statt der zu bestimmenden ξ, η, ζ ΔU, ΔV, ΔW und statt der noch unbekannten u, v, w die dafür gesetzten Ausdrücke (23) (24) in die Differentialgleichungen (14) (15) (16) einsetzt, und somit zwischen den 3 Functionen U, V, W drei partielle Differentialgleichungen dritter Ordnung herstellt. Weil die Function φ gemäss der Gleichung (22) oder (22*a*) und (34) gegeben ist, so ist die vorliegende Aufgabe gelöst, falls es gelingt, die obengedachte Differentialgleichung dritter Ordnung zwischen U, V, W aufzulösen und man solche particuläre Lösungen nimmt, welche im gegebenen Falle den Grenzbedingungen (24) Genüge leisten.

So bietet die Aufgabe dennoch Schwierigkeiten dar, die allem Lösungsversuche trotzen würden. Indem wir doch eine Lösung desselben versuchen, wollen wir die Bewegungsgleichungen durch die Annahme vereinfachen, dass das Stück der Erdoberfläche, so weit wir es in Betracht ziehen, als eine unendlich ausgedehnte Ebene angesehn werden könne, deren mittlere Breite θ sei, und deren Normale überall mit der $z-$Axe zusammenfalle, und dabei halten wir an der Annahme fest, dass die Verzögerung, welche die bewegten Theilchen in Folge der Reibung längs der Erdoberfläche erleiden, direct der horizontalen Resultante der Strömungsgeschwindigkeit proportional sei, was für die unmittelbar auf der Erde ruhende Luftschichte wohl angenährt richtig ist, so dass jetzt

$$\Xi = \kappa u' \qquad H = \kappa v' \qquad Z = 0$$

gesetzt werden könne, wo κ wieder eine Constante bedeutet. Die Bewegungsgleichungen (14) (15) (16) gehen dann über in:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + u\frac{\partial \zeta}{\partial x} + v\frac{\partial \zeta}{\partial y} + w\frac{\partial \zeta}{\partial z} - \xi\frac{\partial w}{\partial x} - \eta\frac{\partial w}{\partial y} - \zeta\frac{\partial w}{\partial z} + \kappa\left(\frac{\partial v'}{\partial x} - \frac{\partial u'}{\partial y}\right) = 0$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + u\frac{\partial \eta}{\partial x} + v\frac{\partial \eta}{\partial y} + w\frac{\partial \eta}{\partial z} - \xi\frac{\partial v}{\partial x} - \eta\frac{\partial v}{\partial y} - \zeta\frac{\partial v}{\partial z} + \kappa\frac{\partial u'}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + u\frac{\partial \xi}{\partial x} + v\frac{\partial \xi}{\partial y} + w\frac{\partial \xi}{\partial z} - \xi\frac{\partial u}{\partial x} - \eta\frac{\partial u}{\partial y} - \zeta\frac{\partial u}{\partial z} - \kappa\frac{\partial v'}{\partial z} = 0$$

Wir specialisiren unsere Aufgabe noch weiter durch die Annahme, dass die Rotationsgeschwindigkeit in dem Wirbelgebiete überall parallel zur unendlichen Ebene gerichtet sei, und jedes Lufttheilchen um eine Axe rotire, welche mit der $z-$Achse zusammenfällt, so dass

$$\xi = 0 \quad \eta = 0 \quad \zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} + 2\lambda \sin\theta$$

und

$$u = u' \qquad w = w' + \Gamma.$$

Wir erhalten aus den obenstehenden Gleichungen

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + u\frac{\partial \zeta}{\partial x} + v\frac{\partial \zeta}{\partial y} + w\frac{\partial \zeta}{\partial z} - \zeta\frac{\partial w}{\partial z} + \kappa\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0 \qquad (39)$$

$$-\zeta\frac{\partial v}{\partial z} + \kappa\frac{\partial u}{\partial z} = 0 \qquad (40)$$

$$-\zeta\frac{\partial u}{\partial z} - \kappa\frac{\partial v}{\partial z} = 0 \qquad (41)$$

Multiplizirt man nun von diesen Gleichungen die zweite mit ζ, und die dritte mit κ, so entsteht zunächst durch Addition

$$-(\zeta^2 + \kappa^2)\frac{\partial v}{\partial z} = 0 \qquad d.\ h.\ \frac{\partial v}{\partial z} = 0$$

mithin folgt aus (40) oder (41)

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 0$$

folglich

$$\frac{\partial \zeta}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0$$

Da ferner $\eta = 0$ *d. i* $\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial x}$ ist, so folgt

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 0$$

da ferner $\xi = 0$ ist *d. i* $2\lambda \cos\theta = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}$, so folgt

$$\frac{\partial w}{\partial y} = +\ 2\lambda \cos\theta$$

Somit erhalten wir als Bewegungsgleichungen

$$\frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial w}{\partial y} = +\ 2\lambda \cos\theta.$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + u\frac{\partial \zeta}{\partial x} + v\frac{\partial z}{\partial y} - \zeta\frac{\partial w}{\partial z} + \kappa(\zeta - 2\lambda \sin\theta) = 0 \qquad (41a)$$

d. h. die Geschwindigkeitscomponenten u und v sind nur von x und y abhängig, w hingegen nur von y und z. *d. h.* da w in Bezug auf y linear ist.

$$w = f(z) + 2\lambda \cos\theta\, y + const.$$

Die Hülfsfunctionen U, V, W, φ werden in unserem Falle

$$U = 0 \qquad V = 0 \qquad W = -\frac{1}{4\pi}\iiint(\zeta - 2\lambda \sin\theta)\frac{dx'dy'dz'}{r}$$

$$\varphi = \frac{1}{4\pi}\iiint\frac{\partial\Gamma}{\partial z}\;\frac{dx'dy'dz'}{r}$$

und die Ausdrücke für die Geschwindigkeitscomponenten

$$u = \frac{\partial W}{\partial y} + \frac{\partial\varphi}{\partial x}$$

$$v = -\frac{\partial W}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}$$

$$w = \frac{\partial\varphi}{\partial z} + \Gamma.$$

Weil nun w von x unabhängig sein soll, so muss $\frac{\partial\varphi}{\partial z} = 0$ *d. h.* φ von z unabhängig sein, mithin

$$u = \frac{\partial W}{\partial y} + \frac{\partial\varphi}{\partial x}$$

$$v = \frac{\partial W}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}$$

$$w = \Gamma$$

Wie es vorausgesetzt wurde, soll das Raumgebiet der verticalen Strömung einen unendlich langen Cylinder bilden, so dass Γ eine Function von z allein ist, so kann dies nur dann stattfinden wenn $2\lambda \cos\theta . y$ als unendlich klein vernachlässigt werden darf, *d. h.* ein solches aufrechtstehendes cylindrisches Raumgebiet der Verticalströmung kann nur im höheren Breitengrade bestehen; was sich übrigens von selbst versteht, da jede verticale Strömung Folge der Erdrotation eine Ablenkung nach Westen erleidet, wenn sie vertical aufwärts, und nach Osten, wenn sie vertical niederwärts geschieht. Dass die Componenten der Geschwindigkeit u und v von z unabhängig sei, kann es nicht für jeden beliebigen Ausdruck für Γ stattfinden; die Bedingung $\frac{\partial\varphi}{\partial z} = 0$ verlangt, dass auch $\frac{\partial\Gamma}{\partial z}$ von z

unabhängig sei, *d. h.* Γ ist einer linearen Function von z gleich zu setzen, so dass

$$\Gamma = \gamma . z + const.$$

wo γ eine Constante ist, die leicht ermittelt werden kann, wenn die Differenz der Temperaturen in den beiden Raumgebieten gegeben ist. *

Wir erhalten sonach unter der Annahme eines cylindrischen Raumgebietes der verticalen Strömung folgende Lösungsformel des Problems

für das innere Raumgebiet

$$u = \frac{\partial W}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

$$v = -\frac{\partial W}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}$$

$$w = \gamma z + const.$$

wo φ eine Function ist, welche im inneren Raumgebiete die Gleichung

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = -\gamma \qquad (42a)$$

und im äusseren

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0 \qquad (42b)$$

befriedigt und W eine Function, welche im wirbelerfüllten Gebiete die Gleichung

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = -\zeta + 2\lambda \sin\theta \qquad (41c)$$

---

* Man betrachte einen Luftcylinder von der Länge z. Innerhalb desselben soll in Folge der stärkeren Erwärmung die Dichtigkeit μ' sein, und ausserhalb aber μ. Nun steigt ein Lufttheilchen aufwärts wegen des Auftriebes, dessen Grösse

$$g(\mu - \mu')z.$$

ist, wenn g die Beschleunigung der Schwerkraft bedeutet. Die Gleichung

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = g(\mu - \mu')z$$

ergiebt einerseits

$$z = e^{\sqrt{g(\mu-\mu')}t.}$$

und die Gleichung

$$w = \frac{dz}{dt} = \gamma z$$

andererseits

$$z = e^{\gamma t}$$

Es kommt heraus durch Vergleich

$$\gamma = \sqrt{g(\mu - \mu')}$$

und im wirbelfreien Raumgebiete aber

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = 0 \qquad (41d)$$

erfüllt. Die Ausdrucke für die Geschwindigkeitscomponenten im äusseren wirbelfreien Raumgebiete sind dann

$$\begin{aligned} u &= \frac{\partial W}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ v &= -\frac{\partial W}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ w &= 0. \end{aligned} \qquad (41c)$$

Die allgemeine Lösung der Differentialgleichungen (42a) und (42b) ist für jedes Raumgebiet bekannt. Bezeichnet man mit $d\alpha d\beta$ ein Element der xy—Ebene, so genügt man den gedachten Differentialgleichungen, indem man setzt

$$\varphi = -\frac{\gamma}{2}\iint log\,(\rho)\,d\alpha d\beta. + const \qquad (41d)$$

$$\rho = \sqrt{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2}$$

wo die Integration über das ganze Gebiet der Verticalströmung auszudehnen ist.

Diese Function φ stimmt ihrem Wesen nach mit dem Potential eines mit der constanten Masse γ erfüllten Cylinders überein. Die Function hat daher einen unendlich grossen Werth; weil die Const. unendlich gross ist; ihre Differentialquotienten haben aber einen endlichen Werth, und gehen continuirlich in einander über, wenn der Punkt $x\ y$, durch die Grenzfläche des Cylinders hindurchgeht, dessen Querschnitt im Überigen ein beliebiger ist. Was die Function W aubelangt, so muss sie so bestimmt werden, dass sie die partielle Differentialgleichung (41c) und (41d) befriedigt, wobei ζ die Differentialgleichung (41a) erfülle. Indem wir den bereits oben angedeuteten Gedankengang verfolgen, setzen wir in die Gleichung (41a) statt ζ den aequivalenten Ausdruck $2\lambda\, sin\,\theta - \Delta W.$, wobei die Operation $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ wie gebräuchlich durch Δ angedeutet werden möge.

Wir erhalten dann für das Raumgebiet der Verticalströmung als Bestimmungsgleichung von W

$$\frac{\partial \Delta W}{\partial t} + \frac{\partial \Delta W}{\partial x}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial y}\right) + \frac{\partial \Delta W}{\partial y}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial W}{\partial x}\right) + (\kappa - \gamma)\Delta W - 2\lambda \sin\theta \Delta\varphi = 0 \tag{42}$$

und für das äussere Raumgebiete

$$\frac{\partial \Delta W}{\partial t} + \frac{\partial \Delta W}{\partial x}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial y}\right) + \frac{\partial \Delta W}{\partial y}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial W}{\partial x}\right) + \kappa \Delta W = 0 \tag{43}$$

Ich mache hier sogleich auf eine bemerkenswerthe Thatsache aufmerksam, welche unmittelbar aus diesen Differentialgleichungen gefolgert werden kann. Verschwindet nämlich in einem Raumgebiet der verticalen Strömung die Rotationsgeschwindikeit, so ist nothwendig, dass in diesem Raumgebiet auch $\Delta\varphi$ *d. i,* γ verschwindet; *d. h.* eine jede verticale Strömung bringt, indem sie entsteht, eine wirbelnde Bewegung der Luftmasse hervor—; aber nicht umgekehrt braucht überall da, wo die Lufttheilchen in einer wirbelnden Bewegung begriffen sind, eine verticale Strömung vorhanden zu sein, weil auch im äusseren Raumgebiet die Gleichung (43) bestehen kann. Wie man weiter aus dieser Gleichung schliessen kann, können die Lufttheilchen im äusseren Raumgebiete nie mit constanter Rotationsgeschwindigkeit rotiren. Denn; wenn gleich im inneren Raumgebiete die Rotationsgeschwindigkeit der Lufttheilchen

$$\zeta = + \frac{2\lambda \sin\theta . \kappa}{(\kappa - \gamma)}$$

d. h.

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = + \frac{2\lambda \sin\theta . \gamma}{(\kappa - \gamma)}$$

also constant sein kann, kann dieses im äusseren Raumgebiete nie der Fall sein; denn die Annahme $\Delta W = const.$ führt der Gleichung (43) zu Folge unmittelbar zu dem absurden Schluss

$$\kappa = 0$$

Als Bestimmungsgleichung für die isodynamische Fläche erhalten

wie aus (17) für das wirbelerfüllte innere Raumgebiet

$$\Delta\Phi - \frac{\partial \Delta W}{\partial y}\left(\frac{\partial W}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) + \frac{\partial \Delta W}{\partial x}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial W}{\partial x}\right) - (\Delta W - 2\lambda \sin\theta)\Delta W - \kappa\gamma = 0 \tag{44}$$

weil $\quad \frac{\partial \zeta}{\partial y} = -\Delta u \qquad \frac{\partial \zeta}{\partial x} = \Delta v \qquad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = -\gamma.$

ist, und für das äussere Raumgebiet

$$\Delta\Phi - \frac{\partial \Delta W}{\partial y}\left(\frac{\partial W}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) + \frac{\partial \Delta W}{\partial x}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial W}{\partial x}\right) - (\Delta W - 2\lambda \sin\theta)\Delta W = 0. \tag{45}$$

Als Gleichung für Deviationswinkel erhalten wir aus (20) für unserem speciellen Fall.

$$tag\, i = \frac{1}{\kappa}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} + 2\lambda \sin\theta\right) \tag{46}$$

§ VI. *Wirbelfreie Luftströmung im Raumgebiet der horizontalen Bewegung.*

Haben die Lufttheilchen keine andere Rotationsgeschwindigkeit als die durch Erdrotation hervorgerufene, und ist ihre Bewegung überall parallel der unendlichen Ebene, als welche wir die Erdoberfläche betrachtet haben, so lässt sich die Bewegung der atmosphärischen Luft ganz allgemein verfolgen.* Man nehme zunächt γ in der Gleichung (42) als unendlich klein an, so dass $\Delta\varphi$ von Null sich unendlich wenig unterscheidet. Da hierbei ζ sich unendlich wenig von $2\lambda \sin\theta$ unterscheidet, so ist ΔW auch unendlich klein. Wenn wir dabei nur eine stationäre Bewegung in's Auge fassen, was wir fortan thun wollen, so verwandelt sich unsere Differentialgleichung (42) in

$$+ \Delta(\kappa W - 2\lambda \sin\theta\varphi) - \gamma\Delta W = 0$$

oder mit Vernachlässigung unendlich kleiner Grösse zweiter Ordnung

$$\Delta(\kappa W - 2\lambda \sin\theta\varphi) = 0 \tag{47}$$

* Dieser Fall ist auch von Herrn Oberbeck eben so allgemein behandelt worden. Sieh seine bereits citirte Abhandlung.

Dieser Gleichung wird gegenügt, wenn

$$W = \frac{2\lambda \sin \theta}{\kappa} . \varphi. \tag{48}$$

gesetzt wird; eine Auflösung, die in so fern als eine allgemeine zu bezeichnen ist, als die Gleichung (47) die einzige ist, welcher W überhaupt zu genügen hat. Hierdurch erhalten wir als Geschwindigkeitscomponenten im Raumgebiet der wirbelfreien horizontalen Bewegung

$$\begin{aligned} u &= \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{2\lambda \sin \theta}{\kappa} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ v &= \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{2\lambda \sin \theta}{\kappa} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \end{aligned} \tag{49}$$

Gleichungen, welche mit den von Herrn Oberbeck auf einem anderen Wege gefundenen bis auf das Vorzeichen des zweiten Gliedes übereinstimmt.* Ganz ebenso leicht lässt sich ein Ausdruck für Isodynamen finden. Es ist nämlich in dem betrachteten Gebiete, da $\Delta W = 0$ ist

$$\Delta \Phi = 0$$

wie es aus der Gleichung (45) hervorgeht. Die Function Φ genügt also genau derselben partiellen Differentialgleichung, und es kann daher angenommen werden, dass man

$$\Phi = \alpha \varphi + const.$$

setzen kann, wo α eine Constante ist, die noch näher bestimmt werden muss. Die Annahme, dass Φ also auch eine particuläre Lösung der Gleichung $\Delta \varphi = 0$ ist, rechtfertigt sich in der That durch die Möglichkeit, α so zu bestimmen, dass Φ der Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial x} - 2v\lambda \sin \theta + \kappa u = 0 \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y} + 2\lambda \sin \theta . u + \kappa v = 0 \end{aligned} \tag{49a}$$

* Bei Herrn Oberbeck ist das zweite Glied negativ. Dies rührt daher, weil Herr Oberbeck seine Coordinatenaxen in entgegengesetzter Richtung drehen liess, wie die Erdrotation.

genügt, Gleichungen, in die die Fundamentalgleichungen (9*c*) in unserem Falle übergehen.

Man bilde, um das Behauptete nachzuweisen, $\frac{\partial \Phi}{\partial x}$ und $\frac{\partial \Phi}{\partial y}$ und setze für u, v ihre Ausdrücke in (49*a*), so kommt

$$\alpha \frac{\partial \varphi}{\partial x} - 2\lambda \sin\theta \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{2\lambda \sin\theta}{\kappa} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + \kappa \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{2\lambda \sin\theta}{\kappa} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) = 0$$

$$\alpha \frac{\partial \varphi}{\partial y} + 2\lambda \sin\theta \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{2\lambda \sin^2\theta}{\kappa} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) + \kappa \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{2\lambda \sin\theta}{\kappa} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) = 0$$

woraus weiter durch Auflösung der Klammern folgt

$$\left(\alpha + \kappa + \frac{4\lambda^2 \sin^2\theta}{\kappa} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0$$

$$\left(\alpha + \kappa + \frac{4\lambda^2 \sin^2\theta}{\kappa} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0$$

d. h.

$$\alpha = -\left(\kappa + \frac{4\lambda^2 \sin^2\theta}{\kappa} \right)$$

Mithin erhält man

$$\Phi = -\left(\kappa + \frac{4\lambda^2 \sin^2\theta}{\kappa} \right) \varphi + const. \qquad (50)$$

d. h. mit anderen Worten, dass die Isodynamen im wirbelfreien Raumgebiete der Horizontalströmung überall mit der Curve $\varphi = const$ parallel verlaufen. Als Deviationswinkel in einem solchen Gebiete folgt aus (46) ohne Weiteres

$$tag\, i = \frac{2\lambda \sin\theta}{\kappa}$$

also constant. *Im Raumgebiet der wirbelfreien Horizontalströmung, schneidet die Windbahn die Isodynamen überall unter demselben Winkel* Der Druck kann ebenfalls ganz allgemein für jeden Punkt des betrachteten Raums angegeben werden. Wir haben nämlich

$$\Phi = \tfrac{1}{2}(u^2 + v^2) + \frac{p}{\mu} - G$$

und hieraus folgt, da

$$\tfrac{1}{2}(u^2 + v^2) = \left(1 + \frac{4\lambda^2 \sin^2 \theta}{\kappa^2}\right)\left\{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2\right\}$$

ist

$$p = const + \mu G - \mu\left(\kappa + \frac{4\lambda^2 \sin^2 \theta}{\kappa}\right)\varphi - \frac{\mu}{2}\left(1 + \frac{4\lambda^2 \sin^2 \theta}{\kappa^2}\right)\left\{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2\right\}$$

wie Herr Oberbeck* abgeleitet hat.

Ganz eben so leicht kann die Windbahn angegeben werden. Die allgemeine Gleichung für die Windbahn

$$dx : dy : dz = u : v : w$$

wird in unserem Fall

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v}{u} \qquad d.\,h. = \frac{\dfrac{\partial \varphi}{\partial y} - K\dfrac{\partial \varphi}{\partial x}}{\dfrac{\partial \varphi}{\partial x} + K\dfrac{\partial \varphi}{\partial y}} \tag{51}$$

wenn man zur Abkürzung $\frac{2\lambda \sin \theta}{\kappa} = K$ setzt, und kann ganz allgemein integrirt werden. Man setze zu dem Ende

$$(x - \alpha) = \rho \cos \chi$$
$$(y - \beta) = \rho \sin \chi$$

so dass

$$\rho = \sqrt{(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2}$$

ist, und führe dieselben in die Gleichung (51). Es ist zunächst

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial \rho}\cos\chi - \frac{\partial \varphi}{\partial \chi}\frac{\sin\chi}{\rho} \qquad dx = \cos \chi\, d\rho - \rho \sin \chi\, d\chi$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial \rho}\sin\chi + \frac{\partial \varphi}{\partial \chi}\frac{\cos\chi}{\rho} \qquad dy = \sin \chi\, d\rho + \rho \cos \chi\, d\chi.$$

so verwandelt sich die Gleichung (51), in dem wir diese einführen in:

$$d\rho\left(\sin \chi \cos \chi \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} - \frac{\partial \varphi}{\partial \chi}\frac{\sin^2\chi}{\rho} + K\frac{\partial \varphi}{\partial \rho}\sin^2\chi + K\frac{\partial \varphi}{\partial \chi}\frac{\cos \chi \sin \chi}{\rho}\right) + (f.\,S.)$$

* o. a. Ort. pag. 136.

$$+d\chi\left(\rho\frac{\partial\varphi}{\partial\rho}\cos^2\chi-\frac{\partial\varphi}{\partial\chi}\sin\chi\cos\chi+K\frac{\partial\varphi}{\partial\rho}\sin\chi\cos\chi\,\rho+K\frac{\partial\varphi}{\partial\chi}\cos^2\chi\right)$$

$$=d\rho\left(\rho\sin\chi\cos\chi\frac{\partial\varphi}{\partial\rho}+\frac{\partial\varphi}{\partial\chi}\frac{\cos^2\chi}{\rho}-K\frac{\partial\varphi}{\partial\rho}\cos^2\chi+K\frac{\partial\varphi}{\partial\chi}\frac{\cos^2\chi\sin^2\chi}{\rho}\right)$$

$$+d\chi\left(-\rho\frac{\partial\varphi}{\partial\rho}\sin^2\chi-\sin\chi\cos\chi\frac{\partial\varphi}{\partial\chi}+K\frac{\partial\varphi}{\partial\rho}\sin\chi\cos\chi\cdot\rho-K\frac{\partial\varphi}{\partial\chi}\sin^2\chi\right)$$

d. h. $$d\rho\left(-\frac{\partial\varphi}{\partial\chi}\frac{1}{\rho}+K\frac{\partial\varphi}{\partial\rho}\right)+d\chi\left(\rho\frac{\partial\varphi}{\partial\rho}+K\frac{\partial\varphi}{\partial\chi}\right)=0$$

oder $$K\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\rho}d\rho+\frac{\partial\varphi}{\partial\chi}d\chi\right)=\frac{\partial\varphi}{\partial\chi}\frac{d\rho}{\rho}-\rho\frac{\partial\varphi}{\partial\rho}d\chi. \tag{52}$$

Die linke Seite ist ein totales Differential einer Function φ und dass die rechte Seite auch ein solches ist, lässt sich leicht nachweisen. Man bilde $\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}$, indem man diese in Polarcoordinaten ausdrückt. Man findet

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}=\frac{\partial^2\varphi}{\partial\rho^2}\cos^2\chi-2\frac{\partial^2\varphi}{\partial\rho\partial\chi}\frac{\sin\chi\cos\chi}{\rho}+\frac{\partial\varphi}{\partial\rho}\frac{\sin^2\chi}{\rho}$$

$$+\frac{2}{\rho^2}\frac{\partial\varphi}{\partial\chi}\sin\chi\cos\chi+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\chi^2}\sin^2\chi$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=\frac{\partial^2\varphi}{\partial\rho^2}\sin^2\chi+2\frac{\partial^2\varphi}{\partial\rho\partial\chi}\frac{\sin\chi\cos\chi}{\rho}+\frac{\partial\varphi}{\partial\rho}\frac{\cos^2\chi}{\rho}$$

$$-\frac{2}{\rho^2}\frac{\partial\varphi}{\partial\chi}\sin\chi\cos\chi+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\chi^2}\sin^2\chi$$

Mithin entsteht durch Addition

$$\Delta\varphi=\frac{\partial^2\varphi}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial\varphi}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\chi^2}=0$$

Dies lässt sich auch so schreiben.

$$\rho\frac{\partial\rho\frac{\partial\varphi}{\partial\rho}}{\partial\rho}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial\chi^2}=0$$

oder auch

$$\frac{\partial \frac{\partial \varphi}{\partial \log \rho}}{\partial \log \rho} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial X^2} = 0$$

d. h.

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \log \rho^2} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial X^2} \tag{53}$$

Die Gleichung (52) lässt sich nun auch so schreiben.

$$K d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial X} d \log \rho - \frac{\partial \varphi}{\partial \log \rho} d X \tag{54}$$

Wenn nun die rechte Seite ein totales Differential ist, so lässt sich jederzeit eine Function U finden, welche die Bedingung befriedigt

$$\frac{\partial \varphi}{\partial X} d \log \rho - \frac{\partial \varphi}{\partial \log \rho} d X = \frac{\partial U}{\partial \log \rho} d \log \rho + \frac{\partial U}{\partial X} d X$$

d. h.

$$\frac{\partial U}{\partial \log \rho} = \frac{\partial \varphi}{\partial X} \qquad \frac{\partial U}{\partial X} = -\frac{\partial \varphi}{\partial \log \rho}.$$

Eine solche Function U lässt sich aber auch finden, wenn φ die Bedingung erfüllt

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \log \rho \, \partial X} = \frac{\partial^2 U}{\partial X \, \partial \log \rho}.$$

d. h.

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial X^2} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \log \rho^2}$$

welche Bedingung φ in der That der Gleichung (53) zu Folge erfüllt.

Die Integration der Differentialgleichung.

$$K d\varphi = \frac{dU}{\partial \log \rho} d \log \rho + \frac{\partial U}{\partial X} dX = dU.$$

ergiebt unmittelbar als allgemeine Gleichung der Windbahn im Gebiete der wirbelfreien horizontalen Bewegung

$$K \varphi - U = const. \tag{54}$$

wie auch Herr Oberbeck mittelst der complexen Variabeln gefunden hat.

Die Function U lässt sich indessen leicht als eine von φ abhängige Integralfunction angeben.

Man setze

$$U = -\int_c^x \frac{\partial \varphi}{\partial \log \rho} dX.$$

und bestimme die willkürliche Constante c so, dass

$$\frac{\partial \varphi}{\partial X} \qquad \text{für } X = c$$

verschwindet.

Dann genügt dieser Ausdruck für U der gestellten Bedingung, der U genügen muss. Es ist

$$\frac{\partial U}{\partial \log \rho} = -\int_c^x \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \log \rho^2} dX$$

hieraus folgt vermöge der Gleichung (53)

$$\frac{\partial U}{\partial \log \rho} = \int_c^x \frac{\partial^2 \varphi}{\partial X^2} dX = \frac{\partial \varphi}{\partial X}$$

Es ist ferner ohne Weiteres

$$\frac{\partial U}{\partial X} = -\frac{\partial \varphi}{\partial \log \rho}$$

Man sieht, dass der für U angenommene Ausdruck wirklich der gestellten Bedingung Genüge leistet.

Wir erhalten somit als allgemeine Gleichung der Windbahn im wirbelfreien Gebiet der Horizontalströmung

$$\int_c^x \frac{\partial \varphi}{\partial \log \rho} dX + \frac{2\lambda \sin \theta}{\kappa} \cdot \varphi = const \qquad (55)$$

Diese Gleichung beruht indessen auf der Voraussetzung dass die Beschaffenheit der Function φ es gestatte, eine Constante c so zu finden, dass $\frac{\partial \varphi}{\partial X}$ für $X = c$ bei jedem Werthe von ρ verschwindet. Hat aber die Function φ nicht diese Beschaffenheit, so kann man allen gestellten Bedingungen genügen, indem man setzt

$$U = -\int_0^{\chi} \frac{\partial \varphi}{\partial \log \rho} d\chi + \int \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \chi}\right)_{\chi=0} d \log \rho.$$

Es ist nämlich, da $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \chi}\right)_{\chi=0}$ eine Function von ρ allein ist,

$$\frac{\partial U}{\partial \log \rho} = -\int_0^{\chi} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \log \rho^2} + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \chi}\right)_{\chi=0}$$

oder

$$= \frac{\partial \varphi}{\partial \chi} - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \chi}\right)_{\chi=0} + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \chi}\right)_{\chi=0} = \frac{\partial \varphi}{\partial \chi}$$

und

$$\frac{\partial U}{\partial \chi} = -\frac{\partial \varphi}{\partial \log \rho}$$

wie oben. Die Gleichung der Windbahn in diesem Fall ist daher

$$\int_0^{\chi} \frac{\partial \varphi}{\partial \log \rho} d\chi - \int \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \chi}\right)_{\chi=0} d \log \rho + \frac{2\lambda \sin \theta}{\kappa} \varphi = const. \qquad (55a)$$

Mittelst der Formeln (55) oder (55a) sind wir in den Stand gesetzt, für jede particuläre Lösung der Gleichung $\Delta\varphi = 0$ die Windbahn zu berechnen. Eine particuläre Lösung ist z. B.

$$\varphi = a(x^2 - y^2)$$

wo a eine Constante ist. Setzt man wieder Polarcoordinaten ein, so wird

$$\varphi = a\rho^2(\cos^2 \chi - \sin^2 \chi) = a\rho^2 \cos 2\chi.$$

dann ergiebt unsere allgemeine Gleichung.

$$2a\rho^2 \int_c^{\chi} \cos 2\chi d\chi + \frac{2\lambda \sin \theta}{\kappa} a\rho^2 \cos 2\chi = const.$$

c ist hier $=0$ zu setzen. Die Ausführung der Integration ergiebt

$$a\rho^2\left(\sin 2\chi + \frac{2\lambda \sin \theta}{\kappa} \cos 2\chi\right) = const.$$

oder indem man wieder zum rechtwinkligen Coordinatensystem zurückkehrt.

$$2xy + \frac{2\lambda \sin \theta}{\kappa}(x^2 - y^2) = \frac{const}{a}$$

d. h. eine Schaar Hyperbeln.

Wir wollen unsere Gleichung auf einen etwas complizirteren Fall anwenden, als der soeben betrachtete. Eine particuläre Lösung der Gleichung $\Delta \varphi = 0$ ist,

$$\varphi = \gamma_1 \log \rho_1 + \gamma_2 \log \rho_2$$

wo γ eine Constante ist, und

$$\rho_1 = \sqrt{(x-\alpha_1) + (y-\beta_1)^2} \qquad \rho_2 = \sqrt{(x-\alpha_2)^2 + (y-\beta_2)^2}$$

zu setzen ist. Diese Lösung entspricht dem Fall, in dem zwei wirberfüllte cylindrische Raumgebiete vorhanden sind, deren Mittelpuncte durch $\alpha_1\ \beta_1$ resp. $\alpha_2\ \beta_2$ bestimmt sind, und deren Dimension als unendlich klein gegen ihre gegenseitige Entfernung betrachtet werden darf. Um in diesem Fall die Windbahn zu finden, setzen wir

$$x - \alpha_1 = \rho_1 \cos X_1 \qquad x - \alpha_2 = \rho_2 \cos X_2$$
$$y - \beta_1 = \rho_1 \sin X_1 \qquad y - \beta_2 = \rho_2 \sin X_2$$

so dass

$$\varphi = \gamma_1 \log \rho_1 + \gamma_2 \log \rho_2.$$

Die Gleichung der Windbahn wird für diesen Fall

$$\gamma_1 \int d X_1 + \gamma_2 \int d X_2 + \gamma_1 K \log \rho_1 + \gamma_2 K \log \rho_2 = const.$$

d. i

$$\gamma_1 X_1 + \gamma_2 X_2 + K \log (\rho_1^{\gamma_1} \rho_2^{\gamma_2}) = const$$

wo $\frac{2 \lambda \sin \theta}{\kappa}$ wieder $= K$ gesetzt worden ist.

Wesentlich einfach wird diese Gleichung, wenn wir den Coordinatenanfang in die Mitte des Abstandes der beiden Raumgebiete verlegen, so dass.

$$\alpha_1 = -\alpha_2 = \alpha$$
$$\beta_1 = -\beta_2 = 0$$

und die Annahme machen, dass die Geschwindigkeit der verticalen Strömung in den beiden Raumgebieten dieselbe Grösse habe; dann wird die obenstehende Gleichung für die Windbahn

$$X_1 + X_2 + K \log \rho_1 \rho_2 = canst.$$

Wenn wir jetzt zum rechtwinkligen Coordinatensystem zurückkehren, mittelst der Gleichungen

$$arctag \frac{y}{x-\alpha} = X_1 \qquad arctag\left(\frac{y}{x+\alpha}\right) = X_2$$

so erhalten wir

$$arctag\left(\frac{2\,x\,y}{x^2-y^2-\alpha^2}\right) + K\,log\sqrt{[y^2+(x-\alpha)^2]\,[y^2+(x+\alpha)^2]} = const$$

Die vollständige Discussion der in dieser Gleichung enthaltenen Spiralen ist mit grosser Schwierigkeit verbunden. Indessen kann man dieselben unschwer auf dem Weg der Construction erhalten, weil die Isodynamen $\Phi = const$ oder $\varphi = const$ *d. h.* $\rho_1\,\rho_2 = const.$ aus den Cassini'schen Curven bestehen, und die Windbahn vermöge der Gleichung (50*a*) dieselben under dem constanten Winkel *arct.K* schneiden muss. Die Figur 3 (Tafel XIII) veranschaulicht den ungefähren Verlauf der Windbahnen in diesem Fall

Eine andere particuläre Lösung der Gleichung $\Delta\,\varphi = 0$ ist.

$$\varphi = \gamma\,log\,\rho_1 - \gamma\,log\,\rho_2$$

wo ρ_1 und ρ_2 die nämliche Bedeutung haben, wie oben. Dieser Lösung entspricht der Fall, wo zwei gegen ihren gegenseitigen Abstand unendlich kleine cylindrische Raumgebiete vorhanden sind, von denen das eine von vertical aufsteigender und das andere von vertical niedersteigender Strömung gebildet ist. Die Gleichung der Isodynamen ist;

$$\varphi = const \;\; d.\,h.\; \frac{\rho_1}{\rho_2} = const.$$

eine Gleichung, welche einer Schaar Kreislinien entsprechen, die über dem Abstand zweier Punkte als Durchmesser beschrieben sind, welche zu den Punkten $\alpha_1\,\beta_1$ und $\alpha_2\,\beta_2$, *d. i.* zu den Mittelpunkten der beiden Gebieten der verticalen Strömung harmonisch liegen. Die Gleichung der Windbahn ist für diesen Fall.

$$X_1 - X_2 + K\,log\left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right) = const$$

oder indem wir zum rechtwinkeligen Coordinatensysteme zurückkehren

$$arctag\left(\frac{2\alpha y}{x^2 + y^2 - \alpha^2}\right) + K\, log \sqrt{\frac{y^2 + (x - \alpha)^2}{y^2 + (x + \alpha)^2}} = const.$$

Auch diese Spirale kann auf dem Wege der Construktion leicht gewonnen werden und ist in Fig. 4 (Tafel XIII) dargestellt.

Einen besonders in Bezug auf das Nächstzufolgende wichtigen Fall bildet die particuläre Lösung der Gleichung $\Delta\varphi = 0$

$$\varphi = -\frac{\gamma}{2} R^2 \log \rho. \qquad \rho = \sqrt{(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2} \tag{56}$$

ein Fall, wo nur ein Raumgebiet der Verticalströmung vorhanden ist, welche einen Kreiscylinder vom endlichen Radius R bildet, und mit der Geschwindigkeit $w = \gamma z$ je nach dem Varzeichen von γ emporsteigt, oder niederwärts stürzt. Wir wollen für diesen Fall die Rechung vollständig durchführen.

Als Componenten der Geschwindigkeit erhalten wir aus (49) ohnes Weiteres, da

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{d\varphi}{d\rho}\,\frac{(x-\alpha)}{\rho} \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{d\varphi}{d\rho}\,\frac{(y-\beta)}{\rho}$$

ist

$$\begin{aligned} u &= -\frac{\gamma}{2}\frac{R^2}{\rho^2}\left[(x-\alpha) + \frac{2\lambda \sin\theta}{\kappa}(y-\beta)\right] \\ v &= -\frac{\gamma}{2}\frac{R^2}{\rho^2}\left[(y-\beta) - \frac{2\lambda \sin\theta}{\kappa}(x-\alpha)\right] \end{aligned} \tag{57}$$

Die resultirende Geschwindigkeit ist daher

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{\gamma}{2}\frac{R^2}{\rho^2}\sqrt{\rho^2 + \frac{4\lambda^2 \sin^2\theta}{\kappa^2}\cdot\rho^2} \\ &= \frac{\gamma}{2}\frac{R^2}{\rho}\sqrt{\left(1 + \frac{4\lambda^2 \sin^2\theta}{\kappa^2}\right)}\,{}^{*} \end{aligned}$$

* Bei Herrn Oberbeck steht statt des Factors $\frac{R^2}{\rho}$, $\frac{R^2}{\rho^2}$, was offenbar auf einem Druckfehler beruhen kann. Sieh. Oberbeck. a d. b. a Ort pag. 142. Gleichungen (29). Ebenso in seinem Ausdruck der Geschwindigkeitsresultante im inneren wirbelerfüllten Gebiete fehlt der Factor ρ [pag. 143. Gleichungen (30)].

Die durch diese Gleichungen dargestellte Bewegung des Lufttheilchens ist eine rotatorische, und ihre Richtung ist verschieden, je nach dem die Breite die nördliche oder südliche ist. Erinneren wir uns, dass wir bei der Ableitung der Fundamentalgleichungen die Coordinatenaxen so gelegt haben, dass die positive y—Achse gegen Osten und die positive x—Achse gegen Süden gekehrt ist, so werden u und v für $x = \alpha$ negativ *d. h.* die Componenten sind in diesem Ort nach West und N gerichtet. Für $y = \beta$ ist hingegen u negativ und v positiv; die Componenten der Windgeschwindigkeit nach N und O gerichtet und so fort mit der Bewegung in den beiden anderen Quadranten. Die Lufttheilchen kreisen demnach auf der nördlichen Hemisphäre in der Richtung $S\ O\ N\ W$, also cyklonal.

Auf der südlichen Hemisphäre ist $sin\ \theta$ negativ zu setzen, so dass

$$u = -\frac{\gamma}{2}\frac{k^2}{\rho^2}\left((x-\alpha) - \frac{2\lambda\ sin\ \theta}{\kappa}(y-\beta)\right)$$

$$v = -\frac{\gamma}{2}\frac{k^2}{\rho^2}\left((y-\beta) + \frac{2\lambda\ sin\ \theta}{\kappa}(x-\alpha)\right)$$

u ist dann für $x = \alpha$ positiv, also nach S gerichtet und v hingeben negativ, hat desswegen die Richtung W. Für $y = \beta$ ist u negativ und auch v *d. h.* u ist nach N gerichtet, und v nach W und ihre Resultante ist daher $N\ W$ und so fort. Die Lufttheilchen kreisen daher um den Punkt $(\alpha\beta)$ in der Richtung $N\ O\ S\ W$, also in der entgegengesetzten Richtung wie auf der nördlichen Hemisphäre. Ist hingegen die Verticalströmung eine niedersteigende, so dass γ negativ zu nehmen ist, so ist die Bewegung der Lufttheilchen ausserhalb des Gebietes der Verticalströmung gerade eine umgekehrte:—die Lufttheilchen kreisen um den Mittelpunkt $(\alpha\ \beta)$ in der Richtung $N\ O\ S\ W$ auf der nördlichen Hemisphäre und auf der südlichen dagegen in der Richtung $S\ O\ N\ W$ *d. h.* anticylonal.

Als Windbahn erhält man unmittelbar aus der Gleichung (55),

indem man für φ ihren Werth einsetzt

$$\chi + \frac{2\,\lambda \sin\theta}{\kappa} \log \rho = const.$$

oder

$$\rho = const.\ e^{-\frac{\kappa}{2\lambda \sin\theta}\chi} \tag{58}$$

d. h. jedes Lufttheilchen beschreibt dabei eine logarithmische Spirale, und zwar eine, welche nach innen gewunden ist. Die Isodynamen sind in unserem Fall concentrische Kreise; denn ihre Gleichung ist

$$\Phi = \left(\kappa + \frac{4\,\lambda^2 \sin^2\theta}{\kappa}\right)\frac{\gamma R^2}{2} \log \rho = const. \tag{59}$$

Hieraus folgt als Gleichung für den Druck

$$p = const + \mu\left(\kappa + \frac{4\,\lambda^2 \sin^2\theta}{\kappa}\right)\frac{R\gamma^2}{2} \log\rho - \frac{\mu}{2}\left(1 + \frac{4\,\lambda^2 \sin^2\theta}{\kappa^2}\right)\frac{\gamma^2 R^4}{4\rho^2} \tag{60}$$

Die Isobaren $p = const.$ fallen demnach in diesem Fall mit den Isodynamen zusammen und auch sie werden überall von der Windbahn unter einem constanten Winkel geschnitten, dessen trigonometrische Tangente $= \frac{2\,\lambda \sin\theta}{\kappa}$ ist.

Es hat keinerlei Schwierigkeit, die Coordinaten eines Lufttheilchens als Functionen der Zeit darzustellen. Man fasse ein Lufttheilchen in's Auge, dessen Lage zu Zeit $t = 0$ durch die Polarcoordinaten $\rho_0\ \chi_0$ gegeben ist.

Weil nun

$$u = \frac{dx}{dt} \qquad v = \frac{dy}{dt}$$

oder indem man setzt; $(x - \alpha) = \rho \cos \chi \quad (y - \beta) = \rho \sin \chi$

$$u = \frac{d\rho}{dt} \cos X - \rho \sin X \frac{dX}{dt}$$

$$v = \frac{d\rho}{dt} \sin X + \rho \cos X \frac{dX}{dt}$$

so ist

$$u\,(x - \alpha) + v\,(y - \alpha) = \rho \frac{d\rho}{dt}$$

Mithin folgt durch Einsetzung der Werthe für u und v.

$$-\frac{\gamma}{2}R^2=\rho\frac{d\rho}{dt.}$$

d. h.

$$\rho=\sqrt{\rho_0-\gamma R^2 t.} \tag{61}$$

Es ist ferner.

$$v\,(x-\alpha)-(y-\beta)\,u=\rho^2\frac{dX}{dt.}$$

d. i

$$\frac{\gamma\,\lambda\,sin\,\theta}{\kappa}R^2=\rho^2\frac{dX}{dt.}$$

oder wenn man für ρ^2 den oben ermittelten Werth einführt so kommt

$$X+X_0=\frac{\gamma\,\lambda\,sin\,\theta}{\kappa}R^2\int_0^t\frac{dt}{(\rho_0^2-\gamma R^2 t)}$$

d. h.

$$X+X_0=-\frac{\lambda\,sin\,\theta}{\kappa}log\,(\rho_0^2-\gamma R^2 t) \tag{62}$$

womit die Bewegung der Lufttheilchen in dem in Rede stehenden Falle in allen Stücken vollständig bestimmt worden ist.

§ *VII. Kreisförmige Cyklonen und Anticyklonen.*

Eine solche allgemeine Betrachtung, wie sie oben in Bezug auf das wirbelfreie Gebiet der horizontalen Strömung durchgeführt worden ist, lässt sich in Bezug auf das wirbelerfüllte Gebiet der verticalen Strömung nicht anstellen, wegen der Unmöglichkeit, die Differentialgleichung (42) allgemein zu integriren.

Der Fall, wo zunächst eine vollständige Lösung des Problems bemerkstelligt werden kann, ist derjenige, wo das wirbelerfüllte Raumgebiet der verticalen Strömung kreisförmig begrenzt ist, und das äussere Raumgebiet der Horizontalströmung entweder wirbelfrei oder von verticalen Wirbelfäden erfüllt ist.

Ich bemerke hier sogleich, dass ein Theil dieses Problems bereits von Herrn Oberbeck gelöst worden ist und dass die Formeln, zu denen er auf einem anderen Wege überhaupt gelangt ist, mit den von mir aus der Grundgleichung (42) entwickelten übereinstimmen.

Wir nehmen an: das Raumgebiet der verticalen Strömung bilde einen unendlich langen Kreiscylinder vom Radius R, sodass es durch die Gleichungen

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=R^2 \qquad z=\infty$$

bestimmt wird. Die Luft soll in diesem cylindrischen Raum entweder emporsteigen mit der Geschwindigkeit

$$w=\gamma z.$$

oder niederwärts strömen mit der Geschwindigkeit

$$w=-\gamma z.$$

Sie soll aber ausserhalb dieses Raums in der Unendlichkeit ruhen so dass dort

$$u=v=0$$

ist.

Die Function φ ist sowohl für einen Punkt ausserhalb als innerhalb des Gebietes der verticalen Strömung bekannt. Es ist für einen inneren Punkt.

$$\varphi_i=-\frac{\gamma}{4}[R^2(2\log R-1)+\rho^2]$$

wenn die Strömung vertical aufwärts, und

$$\varphi_i=\frac{\gamma}{4}[R^2(2\log R-1)+\rho^2]$$

wenn sie vertical niederwärts geschieht. Für einen äusseren Punkt hat man den beiden Fällen entsprechend, entweder

$$\varphi_a=-\frac{\gamma}{2}R^2\log\rho.$$

oder

$$\varphi_a=\frac{\gamma}{2}R^2\log\rho$$

zu setzen, sodass

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial n} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial \rho} = \pm \frac{\gamma}{2} R$$

$$\text{für} \quad \rho = R$$

$$\frac{\partial \varphi_a}{\partial n} = \frac{\partial \varphi_a}{\partial \rho} = \pm \frac{\gamma}{2} R$$

und folglich die eine Bedingung der Continuität der Bewegung in den beiden Raumgebieten

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial n} = \frac{\partial \varphi_a}{\partial n}$$

erfüllt ist.

Da nun die Luftbewegung rings um die Axe des cylindrischen Raumgebietes vollkommen symmetrisch ist, so kann sowohl W als ΔW offenbar als eine Funktion von ρ allein dargestellt werden, so dass also

$$\frac{\partial W}{\partial x} = \frac{dW}{d\rho} \frac{(x-\alpha)}{\rho} \qquad \frac{\partial W}{\partial y} = \frac{dW}{d\rho} \frac{(y-\beta)}{\rho}$$

wird. Die Differentialgleichungen (42) und (43) werden durch diesen Umstand sehr einfach.

Wir betrachten zunächst den Fall, wo die verticale Strömung vertical aufwärts geschieht, und bilden W zuerst für das äussere Raumgebiet. Die Differentialgleichung (43) nimmt in unserem Fall die Form an

$$\frac{d\Delta W}{d\rho} \frac{(x-\alpha)}{\rho} \left(\frac{dW}{d\rho} \frac{(y-\beta)}{\rho} + \frac{d\varphi}{d\rho} \frac{(x-\alpha)}{\rho} \right) + \frac{d\Delta W}{d\rho} \frac{(y-\beta)}{\rho} \left(\frac{d\varphi}{d\rho} \frac{(y-\beta)}{\rho} - \frac{dW}{d\rho} \frac{(x-\alpha)}{\rho} \right)$$
$$+ \kappa \Delta W = 0$$

oder,

$$\frac{d\Delta W}{d\rho} \left[\frac{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2}{\rho^2} \right] \frac{d\varphi}{d\rho} + \kappa \Delta W = 0$$

d. h.

$$\frac{d\Delta W}{d\rho} \frac{d\varphi}{d\rho} + \kappa \Delta W = 0 \tag{63}$$

Da nun aber $\frac{d\varphi}{d\rho} = -\frac{\gamma}{2}\frac{R^2}{\rho}$ ist, so folgt.

$$-\frac{\gamma}{2}\frac{R^2}{\rho}\frac{d\Delta W}{d\rho} + \kappa\Delta W = 0$$

Die Integration ergiebt hieraus

$$\Delta W = Ce^{+\frac{\kappa\rho^2}{\gamma R^2}}$$

wo C die willkürliche Integrationsconstante ist.

Diese Lösung ist offenbar absurd, wenn C nicht verschwindet; denn; es geht aus dieser Gleichung hervor, dass ΔW, mithin auch W, folglich u und v in der unendlich grossen Entfernung vom Gebiet der verticalen Strömung unendlich gross werden müsste, was der Voraussetzung wiederspricht. Es muss daher $C=0$ gesetzt werden. *d. h.*

$$\Delta W = 0$$

ist die Lösung für einen äusseren Punkt.

Es können hiernach Luftwirbel wohl innerhalb des Gebietes der vertical aufsteigenden Strömung vorhanden sein, nicht aber ausserhalb desselben; denn die Gleichung $\Delta W = 0$ ist ja gleichbedeutend mit $\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y}$. Hier entsteht daher nur eine wirbelfreie reine horizontale Strömung der Luft, und jedes Lufttheilchen würde geradlinig nach dem Gebiet der Verticalsttrömung fliessen, wenn die Erde nicht rotirte. Die Ausdrück (57) (58) (59) (60) (61) (62) gelten daher für die Luftbewegung in diesem äusseren Raumgebiet.

Die Differentialgleichung für das wirbelerfüllte innere Raumgebiet (42) wird in unserem Fall, indem man die Gleichung $\Delta\varphi = -\gamma$ berücksichtigt

$$\frac{d\Delta W}{d\rho}\frac{(x-\alpha)}{\rho}\left(\frac{dW}{d\rho}\frac{(y-\beta)}{\rho} + \frac{d\varphi}{d\rho}\frac{(x-\alpha)}{\rho}\right) + \frac{d\Delta W}{d\rho}\frac{(y-\beta)}{\rho}\left(\frac{d\varphi}{d\rho}\frac{(y-\beta)}{\rho} + \frac{dW}{d\rho}\frac{(x-\alpha)}{\rho}\right)$$
$$+ (\kappa - \gamma)\Delta W + 2\Delta \sin^2\theta\gamma = 0$$

oder

$$\frac{d\Delta W}{d\rho}\frac{d\varphi}{d\rho} + (\kappa - \gamma)\Delta W + 2\lambda \sin\theta.\gamma = 0 \qquad (64)$$

Da nun aber für das in Rede stehende Raumgebiet

$$\frac{d\varphi}{d\rho} = -\frac{\gamma}{2}\rho$$

so folgt die ebenfalls leicht integrirbare Gleichung

$$-\frac{\gamma}{2}\frac{d\Delta W}{d\rho}\rho + (\kappa - \gamma)\Delta W + 2\lambda \sin\theta.\gamma = 0 \qquad (65)$$

Das Integral hiervon ist

$$\Delta W = C\rho^{\frac{2(\kappa-\gamma)}{\gamma}} - \frac{2\lambda \sin\theta.\gamma}{(\kappa - \gamma)}$$

unter der Voraussetzung, dass $\kappa > \gamma$ ist. C ist eine willkürliche Constante, welche dazu verwendet werden kann, die Grenzbedingung, welcher W noch zu genügen hat, zu erfüllen. Um $\frac{dW}{d\rho}$ zu finden, bemerke man, dass

$$\Delta W = \frac{\partial^2 W}{dx^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = \frac{d^2 W}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{dW}{d\rho} = \frac{1}{\rho}\frac{d\rho\frac{dW}{d\rho}}{d\rho}$$

ist. Es folgt hieraus

$$\rho\frac{dW}{d\rho} = \int\left(C\rho^{\frac{2(\kappa-\gamma)}{\gamma}+1} - \frac{2\lambda \sin\theta.\gamma}{(\kappa-\gamma)}\rho\right)d\rho$$

d. h.

$$\frac{dW}{d\rho} = \frac{C\gamma}{2\kappa}\rho^{\frac{2\kappa}{\gamma}-1} - \frac{\lambda \sin\theta.\gamma\,\rho}{(\kappa-\gamma)} + \frac{C_1}{\rho}$$

die zweite Constante C_1 muss offenbar $=0$ gesetzt werden, da sonst u und v für jeden Werth von κ und γ im Mittelpunkt des Wirbels unendlich gross werden müsste. Mithin erhalten wir

$$\frac{dW}{d\rho} = \frac{C\gamma}{2\kappa}\rho^{\frac{2\kappa}{\gamma}-1} - \frac{\lambda \sin\theta.\gamma\,\rho}{(\kappa-\gamma)}$$

Die Integrationsconstante C bestimmt sich aus der Grenzbedingung

$$\frac{dW_i}{\partial n} = \frac{\partial W_a}{\partial n}$$

d. h.

$$\frac{dW_i}{d\rho} = \frac{\partial W_a}{d\rho} \qquad \text{für } \rho = R.$$

Weil, wie wir gesehen haben, ausserhalb dieses inneren Raumgebietes Wirbel nicht existiren können; so ist für das äussere Raumgebiet

$$W_a = \frac{2\,\lambda \sin\theta}{\kappa}\,\varphi_a$$

Mithin ist

$$\frac{dW_a}{d\rho} = \frac{2\,\lambda \sin\theta}{\kappa}\,\frac{d\varphi_a}{d\rho} = -\frac{\lambda \sin\theta.}{\kappa}\,\gamma.\,R. \qquad \text{für } \rho = R.$$

Die obenstehende Grenzbedingung ergiebt

$$\frac{C\gamma}{2\kappa}(R)^{\frac{2\kappa}{\gamma}-1} - \frac{\lambda \sin\theta}{(\kappa-\gamma)}.\,\gamma R = -\frac{\lambda \sin\theta}{\kappa}\,\gamma\,R.$$

voraus dann folgt

$$C = \frac{2\,\lambda \sin\theta.\gamma}{(\kappa-\gamma)}\left(\frac{1}{R}\right)^{2\left(\frac{\kappa}{\gamma}-1\right)}$$

Wir erhalten somit schliesslich

$$\frac{dW_i}{d\rho} = -\frac{\lambda \sin\theta\gamma.\rho}{(\kappa-\gamma)}\left[1 - \frac{\gamma}{\kappa}\left(\frac{\rho}{R}\right)^{2\left(\frac{\kappa}{\gamma}-1\right)}\right]$$

Das vorliegende Problem ist hiermit vollständig gelöst. Als Componenten der Geschwindigkeit in dem inneren Raumgebiet hat man aus (41*b*)

$$\begin{aligned} u &= -\frac{\gamma}{2}\left([x-\alpha] + \frac{2\,\lambda \sin\theta}{(\kappa-\gamma)}\left[1 - \frac{\gamma}{\kappa}\left(\frac{\rho}{R}\right)^{2\left(\frac{\kappa}{\gamma}-1\right)}\right][y-\beta]\right) \\ v &= -\frac{\gamma}{2}\left([y-\beta] - \frac{2\,\lambda \sin\theta}{(\kappa-\gamma)}\left[1 - \frac{\gamma}{\kappa}\left(\frac{\rho}{R}\right)^{2\left(\frac{\kappa}{\gamma}-1\right)}\right][x-\alpha]\right) \\ w &= \gamma\,z. \end{aligned} \tag{66}$$

Die beiden ersten Gleichungen stellen eine rotatorische Bewegung der Luft dar, etwa einen von Piddington als Cyklonen bezeichneten Wirbelsturm: denn wenn wir die Bewegung eines Lufttheilchens näher in Bezug auf die vier Cardinalhimmelsgegenden verfolgen, so finden wir genan dasselbe Gesetz der Winddrehung wieder, welches

man als das den Cyklonen eigenthümlich bezeichnen kann; nämlich, dass die Wirbelbewegung der Luft auf der nördlichen Hemisphäre in dem Sinne $S\ O\ N\ W\ S$ geschieht, und auf der südlichen Hemisphäre aber in dem entgegengesetzten Sinne $S\ W\ N\ O\ S$. Wir schreiben, um dieses einzusehen, die Ausdrücke für die Geschwindigkeitscomponenten im äusseren wirbelfreien Raumgebiet noch einmal hin:

$$\begin{aligned} u &= -\frac{\gamma}{2}\frac{R^2}{\rho^2}\left[(x-\alpha)+\frac{2\lambda \sin\theta}{\kappa}(y-\beta)\right] \\ v &= -\frac{\gamma}{2}\frac{R^2}{\rho^2}\left[(y-\beta)-\frac{2\lambda \sin\theta}{\kappa}(x-\alpha)\right] \end{aligned} \tag{67}$$

und erinneren uns dabei wieder des Umstandes, dass wir bei der Herleitung dieser Gleichungen die Coordinaten so gelegt haben, dass die positive y—Axe gegen Osten, und die positive x Achse parallel dem Mittagskreise gerichtet ist. Wir bezeichnen weiter in dem Ausdrücke für die Geschwindigkeitscomponenten u und v in den beiden Gebieten den Factor von $(x-\alpha)$ mit a und denjenigen von $(y-\beta)$ mit b., so dass wir für beide Gebiete

$$\begin{aligned} u &= -a(x-\alpha)-b(y-\beta) \\ v &= -a(y-\beta)+b(x-\alpha) \end{aligned}$$

schreiben können.

Nun werde $x-\alpha=0$. Die Componenten der Geschwindigkeit in diesem Punkt sind

$$\begin{aligned} u &= -b(y-\beta) \\ v &= -a(y-\beta) \end{aligned}$$

Die Geschwindigkeitscomponenten sind sonach für $y-\beta > 0$ nach W und N gerichtet; ihre Resultante selbst hat daher die Richtung $N\ W$. Für $(y-\beta) < 0$ werden u und v positiv, und ihre Resultante ist nach $S\ O$ gerichtet. In dem Punkt $(y-\beta)=0$ werden die Componenten

$$\begin{aligned} u &= -a(x-\alpha) \\ v &= +b(x-\alpha) \end{aligned}$$

Für die Punkte $(x - \alpha) > 0$ und $(x - \alpha) < 0$ hat die Resultante dieser Geschwindigkeitscomponenten die Richtung $N\ O$, respectiv $S\ W$.

Jedes Lufttheilchen dreht sich sonach auf der nördlichen Hemisphäre um das Centrum des cylindrischen Wirbelraums im Sinne $S\ O\ N\ W\ S$, also von Rechts nach Links, im entgegengesetztem Sinne, wie der Uhrzeiger, ganz so, wie das bekannte Gesetz der Cyklonen es verlangt.

Dass auf der südlichen Hemisphäre die Drehungsgeschwindigkeit eines jeden Lufttheilchens in Bezug eine zur Erdoberfläche senkrechte Axe unter nämlichen Umständen entgegengesetzte Richtung haben muss, wie auf der nördlichen Hemisphäre, glaube ich bereits im Allgemeinen nachgewiesen zu haben. Demgemäss stellen die Gleichungen (66) und (67) in der That eine rotatorische Bewegung der Luft in dem Sinne $S\ W\ N\ O\ S$ dar, wenn man dieselben auf die südliche Hemisphäre anwendet. Hier hat man nämlich θ negativ zu nehmen, wobei so wohl die positive y—Achse, als die positive x—Axe ihre Richtung nach O und S unverändert beibehält. Da b in den oben stehenden Ausdrücken für die Geschwindigkeitscomponenten $\sin\ \theta$ als Factor enthält, so muss b auf der südlichen Hemisphäre negativ gesetzt wenden. Diese Bemerkung ergiebt für die südliche Hemisphäre.

$$u = -a(x - \alpha) + b(y - \beta)$$
$$v = -a(y - \beta) - b(x - \alpha)$$

Die durch diese Ausdrücke bestimmte Drehung erfolgt in der That in der entgegengesetzten Richtung, wie diejenige auf der nördlichen Hemisphäre. Es ist nämlich im Punkt $(x - \alpha) = 0$

$$u = +b(y - \beta)$$
$$v = -a(y - \beta)$$

Die Componente u ist nach Süden, oder Norden und v nach West, oder nach Ost gerichtet, je nachdem $y - \beta > 0$ oder < 0 ist; ihre

Resultante hat die Richtung nach $S\ W$ respect $N\ O$. Für $(y-\beta)=0$ werden

$$u = -\ a(x-\alpha)$$
$$v = -\ b(x-\alpha)$$

Die Resultante dieser Componenten hat die Richtung nach $N\ W$ respect. $S\ O$. je nachdem $(x-\alpha) > 0$ oder < 0 ist.

Jedes Lufttheilchen in der Cyklone kreist demnach auf der südlichen Hemisphäre in der Richtung $S\ W\ N\ O\ S$, in demselben Sinne, wie der Uhrzeiger, ganz so, wie das bekannte Dove'sche Gesetz es verlangt.

Die Gleichung für die Isodynamen für das äussere Gebiet haben wir bereits ermittelt; sie sind concentrische Kreise, wie die Isobaren. Die Gleichung für die Isodynamen für das innere wirbelerfüllte Gebiet lässt sich auch leicht bestimmen. Da

$$\frac{\partial \Delta W}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial x}+\frac{\partial \Delta W}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial y}=\frac{\partial \Delta W}{\partial \rho}\frac{d\varphi}{d\rho}\left(-\frac{(x-\alpha)(y-\beta)}{\rho^2}+\frac{(x-\alpha)(y-\beta)}{\rho^2}\right)=0$$

$$-\frac{\partial \Delta W}{\partial y}\frac{\partial W}{\partial y}-\frac{\partial \Delta W}{\partial x}\frac{\partial W}{\partial x}=-\frac{d\Delta W}{d\rho}\frac{dW}{d\rho}\left(\frac{(y-\beta)^2+(x-\alpha)^2}{\rho^2}\right)=-\frac{d\Delta W}{d\rho}\frac{dW}{d\rho}$$

ist, so verwandelt sich die Gleichung (44) in

$$\Delta\Phi-\frac{d\Delta W}{d\rho}\frac{dW}{d\rho}-(\Delta W-2\lambda\, sin\,\theta)\Delta W-\kappa\gamma=0$$

Weil in unserem Fall die Bewegung der Luft überall symmetrisch ist in Bezug auf das Wirbelcentrum, so darf angenommen werden, dass auch Φ eine Function von ρ allein ist. Diese Bemerkung giebt

$$\Delta\Phi=\frac{1}{\rho}\frac{d\rho\frac{d\Phi}{d\rho}}{d\rho}$$

Mithin erhält man durch zweimalige Integration

$$\Phi = const+\frac{\kappa\gamma\rho^2}{4}+\int\frac{d\rho}{\rho}\int\rho d\rho\left(\frac{d\Delta W}{d\rho}\frac{dW}{d\rho}+\Delta W^2-2\lambda\, sin\,\theta\Delta W\right)$$
$$+\ C\, log\,\rho.$$

Die willkürliche Constante C muss offenbar $=0$ gesetzt werden, weil Φ sonst im Wirbelcentrum unendlich gross werden müsste. Das zweifache Integral lässt sich leicht ausführen. Wir betrachten zu dem Ende das Integral

$$\int \rho d\rho \frac{d\Delta W}{d\rho}\frac{dW}{d\rho} + \int \rho d\rho (\Delta W)^2$$

Indem wir das erste Integral partiell integriren, kommt

$$\int \rho d\rho \frac{d\Delta W}{d\rho}\frac{dW}{d\rho} = \Delta W \rho \frac{dW}{d\rho} - \int d\rho \Delta W \frac{d\rho \frac{dW}{d\rho}}{d\rho}$$

da aber

$$\Delta W = \frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\left(\rho \frac{dW}{d\rho}\right)$$

ist, so folgt

$$\int \rho d\rho \frac{d\Delta W}{d\rho}\frac{dW}{d\rho} = \Delta W \rho \frac{dW}{d\rho} - \int \rho d\rho (\Delta W)^2$$

Hieraus folgt weiter

$$\int \rho d\rho \left(\frac{d\Delta W}{d\rho}\frac{dW}{d\rho} + \Delta W^2\right) = \Delta W \rho \frac{dW}{d\rho}$$

Mithin kommt

$$\Phi = const + \frac{\kappa . \gamma \rho^2}{4} + \int d\rho \Delta W \frac{dW}{d\rho} - 2\lambda \sin\theta \int \frac{d\rho}{\rho} \int \rho \Delta W d\rho.$$

Da ferner erstens.

$$\int \Delta W \rho d\rho = \int \frac{d\rho \frac{dW}{d\rho}}{d\rho} d\rho = \rho \frac{dW}{d\rho}$$

und zweitens

$$\Delta W = \frac{d^2 W}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{dW}{d\rho}$$

mithin

$$\Delta W \frac{dW}{d\rho} = \frac{1}{2} \frac{d\left(\frac{dW}{d\rho}\right)^2}{d\rho} + \frac{1}{\rho}\left(\frac{dW}{d\rho}\right)^2$$

so folgt schliesslich

$$\Phi = const + \frac{\kappa\gamma\rho^2}{4} - 2\lambda \sin\theta . W + \frac{1}{2}\left(\frac{dW}{d\rho}\right)^2 + \int \frac{d\rho}{\rho}\left(\frac{dW}{d\rho}\right)^2 \tag{68}$$

In unserem Fall ist

$$W = const - \frac{\lambda \sin\theta . \gamma}{(\kappa - \gamma)} \int \rho d\rho \left[1 - \frac{\gamma}{\kappa}\left(\frac{\rho}{R}\right)^{2\left(\frac{\kappa}{\gamma}-1\right)}\right]$$

d. i.

$$= const - \frac{\lambda \sin\theta\, \gamma\rho^2}{2(\kappa - \gamma)}\left[1 - \left(\frac{\gamma}{\kappa}\right)^2\left(\frac{\rho}{R}\right)^{2\left(\frac{\kappa}{\gamma}-1\right)}\right]$$

oder indem man $\frac{\kappa}{\gamma} = m$ setzt

$$W = const - \frac{\lambda \sin\theta\rho^2}{2(m-1)}\left[1 - \frac{1}{m^2}\left(\frac{\rho}{R}\right)^{2m-2}\right]$$

und

$$\int \frac{d\rho}{\rho}\left(\frac{dW}{d\rho}\right)^2 = \frac{\lambda^2 \sin^2\theta\rho^2}{(m-1)^2}\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{m^2}\left(\frac{\rho}{R}\right)^{2m-2} + \frac{1}{2m^2(2m-1)}\left(\frac{\rho}{R}\right)^{4m-4}\right]$$

Hieraus berechnet sich als Gleichung der Isodynamen

$$\Phi = const + \frac{\kappa\gamma\rho^2}{4} + \frac{\lambda^2 \sin^2\theta\rho^2}{m(m-1)^2}\left[m^2 - 2\left(\frac{\rho}{R}\right)^{2m-2} + \frac{1}{(2m-1)}\left(\frac{\rho}{R}\right)^{4m-4}\right] \tag{69}$$

auch diese Gleichung stimmt mit der von Herrn Oberbeck gefundenen überein.*

Die Isodynamen sind demnach concentrische Kreise, wie die Isobaren. Nennt man die resultirende Geschwindigkeit wieder ω, so ist in dem inneren Gebiet

$$\omega^2 = u^2 + v^2 + w^2$$

$$= \frac{\gamma^2}{4}\rho^2\left(1 + \frac{4\lambda^2 \sin^2\theta}{(\kappa - \gamma)^2}\left[1 - \frac{\gamma}{\kappa}\left(\frac{\rho}{R}\right)^{2\left(\frac{\kappa}{\gamma}-1\right)^2}\right]\right) + \gamma^2 z^2$$

da nun

$$\Phi = \frac{\omega^2}{2} - G + \frac{p}{\mu}.$$

* Oberbeck. a. o. a. O. pag. 144. Gleichung (31).

ist, folgt als Gleichung für den Luftdruck im inneren Gebiete

$$p = const + G - \frac{\mu\gamma^2}{2} z^2 + \mu\gamma^2 \frac{\rho^2}{8}(2m-1) + \mu \frac{\lambda^2 \sin^2\theta \rho^2}{2m(m-1)^2} \Big[m(2m-1) + \frac{1}{m(2m-1)} \left(\frac{\rho}{R}\right)^{4m-4} - 2\left(\frac{\rho}{R}\right)^{2m-2} \Big] \tag{70}$$

Die Gleichung für den Deviationswinkel findet man leicht aus (46) Man berechne zu dem Ende ζ *d. h.* $2\lambda \sin\theta - \Delta W$

Da

$$\Delta W = -\frac{2\lambda \sin\theta}{(\kappa-\gamma)} \left[1 - \left(\frac{\rho}{R}\right)^{2\left(\frac{\kappa}{\gamma}-1\right)} \right]$$

ist, so folgt

$$\zeta = 2\lambda \sin\theta \left[1 + \frac{\gamma}{\kappa-\gamma} - \frac{\gamma}{\kappa-\gamma} \left(\frac{\rho}{R}\right)^{2\left(\frac{\kappa}{\gamma}-1\right)} \right]$$

$$= \frac{2\lambda \sin\theta . \kappa}{(\kappa-\gamma)} \left[1 - \frac{\gamma}{\kappa} \left(\frac{\rho}{R}\right)^{2\left(\frac{\kappa}{\gamma}-1\right)} \right]$$

Die Substitution dieses Ausdrucks im (46) ergiebt

$$tag\, i = \frac{2\lambda \sin\theta}{(\kappa-\gamma)} \left[1 - \frac{\gamma}{\kappa} \left(\frac{\rho}{R}\right)^{2\left(\frac{\kappa}{\gamma}-1\right)} \right] \tag{66a}$$

Man kann im Übrigen zu derselben Gleichung durch die Überlegung gelangen, dass die Isodynamen in dem in Rede stehenden Fall concentrische Kreise sind. Wegen dieses Umstandes hat man für den Deviationswinkel i die Gleichung

$$u(x-\alpha) + v(y-\beta) = \rho\sqrt{(u^2+v^2)} \cos i$$

da entlang der Erdoberfläche $w = \gamma z$ verschwindet, folglich

$$tag\, i = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 i} - 1} = \sqrt{\frac{\rho^2(u^2+v^2) - [u(x-\alpha)+v(y-\beta)]^2}{u(x-\alpha)+v(y-\beta)}}$$

Hieraus berechnet sich für das wirbelerfüllte innere Gebiet

$$tag\, i = \frac{2\lambda \sin\theta}{(\kappa-\gamma)} \left[1 - \frac{\gamma}{\kappa} \left(\frac{\rho}{R}\right)^{2\left(\frac{\kappa}{\gamma}-1\right)} \right]$$

wie oben, während für das wirbelfreie äussere Gebiet sich ergiebt

$$tag\, i = \frac{2\lambda \sin\theta}{\kappa}.$$

Um die Bewegung der Luft vollständig zu bestimmen, bleibt noch übrig, die Gleichung der Windhahn im Wirbelgebiet abzuleiten, und schliesslich den Ort eines Lufttheilchens, dessen Coordinaten zur Zeit $t = 0$ x_0 y_0 z_0 waren, zur Zeit t zu bestimmen. Auch dieses alles hat nicht die mindeste Schwierigkeit.

Die Gleichung der Horizontalprojection der Windbahn erhält man durch Integration der Gleichung

$$u\,d\,y = v\,d\,x. \qquad (71)$$

Wir führen zu dem Ende die Polarcoordinaten ρ, χ ein, und bemerken sogleich, dass χ, der Azimuthwinkel der Windbewegung, in *dem* Sinne wachsend genommen werden muss, wie die Rotationsgeschwindigkeit des Lufttheilchens gerichtet ist, so dass χ in unserem Falle auf der nördlichen Hemisphäre positiv, aber auf der südlichen Hemisphäre negativ genommen werden muss. Man setze.

$$(x - \alpha) = \rho \cos \chi$$

$$(y - \beta) = \rho \sin \chi$$

Dann erhält man für das Wirbelgebiet aus (71)

$$\frac{2\,\lambda \sin \theta}{(\kappa - \gamma)} \left[1 - \frac{\gamma}{\kappa} \left(\frac{\rho^2}{R} \right)^{\left(\frac{\kappa}{\gamma} - 1\right)} \right] d\,\rho + \rho\, d\,\chi = 0$$

Mithin folgt durch Integration, als Gleichung der Windbahn

$$\frac{2\,\lambda \sin \theta}{(\kappa - \gamma)} \left[\log \rho - \frac{\gamma^2}{2\kappa(\kappa - \gamma)} \left(\frac{\rho^2}{R} \right)^{\left(\frac{\kappa}{\gamma} - 1\right)} \right] + \chi = const.$$

d. h. die Horizontalprojection der Windbahn im Wirbelgebiet ist eine links nach innen gewundene transcendente Spirale. Die Fig. 5 (Tafel XIII) stellt den ungefähren Verlauf der Windbahn in diesem Fall dar.

Der Ort eines Lufttheilchens (x_0 y_0 z_0) zur Zeit t lässt sich ebenfalls leicht finden. Man bilde

$$(x - \alpha)u + (y - \beta)v = (x - \alpha)\frac{dx}{dt} + (y - \beta)\frac{dy}{dt}$$

und führe die Polarcoordinaten ein, so findet man

$$\rho = \rho_0 e^{-\frac{\gamma}{2}t} \tag{72}$$

Führt man ferner die Polarcoordinaten in die Gleichung

$$(x-\alpha)v - (y-\beta)u = (x-\alpha)\frac{dy}{dt} - (y-\beta)\frac{dx}{dt}$$

ein, so kommt.

$$\rho^2 \frac{d\chi}{dt} = \left[(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2\right] \frac{\gamma}{2} \left[1 - \frac{\gamma}{\kappa}\left(\frac{\rho}{R}\right)^{2\left(\frac{k}{\gamma}-1\right)}\right] \frac{2\lambda \sin\theta}{(\kappa-\gamma)}$$

oder, indem man den für ρ bereits aufgefundenen Ausdruck einsetzt und integrirt

$$\chi + \chi_0 = \left[\frac{\gamma t}{2} - \frac{\gamma^2}{2\kappa}\left(\frac{\rho_0}{R}\right)^{2\left(\frac{k}{\gamma}-1\right)} \int_0^t e^{-(k-\gamma)t}\right] \frac{2\lambda \sin\theta}{(\kappa-\gamma)}$$

d. h.

$$= \frac{\gamma\lambda \sin\theta}{(\kappa-\gamma)} \left[t + \frac{\gamma}{\kappa(\kappa-\gamma)}\left(\frac{\rho_0}{R}\right)^{2\left(\frac{k}{\gamma}-1\right)} e^{-(k-\gamma)t}\right] \tag{73}$$

Entsprechende Ausdrücke für das äussere wirbelfreie Gebiet haben wir bereits aufgestellt.

Wenn wir nun noch den aus der Gleichung

$$w = \frac{dz}{dt} = \gamma . z.$$

fliessenden Ausdruck

$$z = z_0 e^{\gamma t}.$$

hinzuschreiben, so ist auch die Bewegung der Luft innerhalb eines kreisförmigen Wirbelgebietes in allen Stücken vollständig bestimmt und die Bewegung selbst lässt sich etwa, wie folgt, charakterisiren: In einem kreisförmig begrenzten Gebiete auf der als eine unendliche Ebene gedachten Erdoberfläche strömt die Luft in Folge der stärkeren Erwärmung mit der Geschwindigkeit $w = \gamma z$ vertical aufwärts. Um dadurch entstandene Druckdifferenz auszugleichen, stürzen die Lufttheilchen der Umgebung von allen Seiten herein und

veranlassen dadurch längs der Erdoberfläche eine Strömung parallel derselben. Die Bahnen, auf denen die Lufttheilchen von Unendlichkeit her mit wachsender Geschwindigkeit gegen das Centrum des Wirbelgebietes fliessen, sind logarithmische Spiralen und schneiden die Isobaren, wie den Kreisrand des Wirbelgebietes unter einem constanten Winkel [Gleich. (50*a*)] wo ihre Geschwindigkeit den im äusseren Raumgebiete grösstmöglichen Werth $\sqrt{u^2 + v^2} = \frac{\gamma R}{2}\sqrt{\left(1 + \frac{4\lambda^2 \sin^2 \theta}{\kappa^2}\right)}$ erreicht.

Unmittelbar da, wo die Lufttheilchen in das Wirbelgebiet eintritt, werden sie in Folge der dort herrschenden Verticalströmung emporgerissen, und wirbeln hinauf Schraubenbahn beschreibend, deren horizontale Projectionen eine transcendende Spiralen sind, welche die Eigenschaft hat, dass ihre Windungen mit abnehmender Entfernung vom Wirbelcentrum im viel stärkeren Verhältniss zunimmt, als bis bei der einfachen logarithmischen Spirale, weil die Windbahn die Concentrischen Kreise unter um so kleineren Winkel schneidet, je kleiner der Abstand vom Centrum wird. Im Centrum selbst wird der Deviationswinkel Maximum zwar

$$tag\, i = \frac{2\lambda \sin \theta}{(\kappa - \gamma)}$$

so dass i sich um so mehr $\frac{\pi}{2}$ nährt, je kleiner $\kappa - \gamma$ wird. Was die Geschwindigkeit anbetrifft, so nimmt ihre Horizontalcomponente immur mehr ab, je näher das Centrum liegt, vorausgesetzt selbstverständlich, dass $\kappa > \gamma$ sei., und im Centrum selbst verschwindet sie ganz, wobei der Druck seinen minimalen Werth $const + G - \frac{\mu \gamma^2 z^2}{2}$ erreicht.

Es war bisher vorausgesetzt, dass $\kappa > \gamma$ sei. Wir finden aber dass γ über einen gewissen Grenzwerth nicht hinaufsteigen darf, *d. h.* soll die durch die Gleichungen (66) u. s. w. dargestellte Bewegung

eintreten, so muss die Geschwindigkeit der aufsteigenden Strömung innerhalb eines gewissen durch den Reibungswiderstand bedingten Grenzwerthes bleiben. Wird nun $\kappa = \gamma$, so werden die Ausdrücke für die Geschwindigkeitscomponenten im Wirbelgebiete unendlich gross. Wird dagegen $\kappa < \gamma$, so wurden sie im Allgemeinen im Wirbelcentrum unendlich gross. Das Verhältniss zwischen der Geschwindigkeit der verticalaufsteigenden Strömung und dem Reibungswiderstand der Erdoberfläche *d. h.* das Verhältniss $\frac{\kappa}{\gamma}$ muss innerhalb eines gewissen Grenzwerthes bleiben, damit die Voraussetzung der Continuität der Bewegung erfüllt bleibe.

Wir fassen zunächst den Fall in's Auge, wo $\kappa = \gamma$ wird und gehen dabei von der Gleichung (61) aus. Diese wird unter dem gedachten Umstande

$$\frac{d\Delta W}{d\rho} \cdot \frac{d\varphi}{d\rho} = -2\lambda \sin\theta . \gamma .$$

oder

$$\frac{\gamma}{2}\frac{d\Delta W}{d\rho} \cdot \rho = 2\lambda \sin\theta . \gamma$$

Das Integral hiervon ist

$$\Delta W = 4\lambda \sin\theta \log\rho + C$$

wo C eine willkürliche Constant ist. Eine nochmalige Integration ergiebt

$$\frac{dW}{d\rho} = 2\lambda \sin\theta\, \rho \log\rho - \lambda \sin\theta\, \rho + \frac{C\rho^2}{2}$$

Diese Function wird im Wirbelcemtrum ($\rho = 0$) nicht unendlich gross; denn $\log\rho$ ist zwar bei verschwindem ρ negativ unendlich gross, aber unendlich klein gegen $\frac{1}{\rho}$, so dass

$$\lim(\rho \log\rho) = \lim\left(\frac{\log\rho}{\frac{1}{\rho}}\right)$$

verschwindet. Der Fall $\kappa = \gamma$ muss daher noch eine mögliche

stationäre Bewegung darstellen.

Die Function W bleibt für das äussere wirbelfreie Gebiet unverändert; sie ist hier wiederun zu setzen

$$W_a = -\frac{2\,\lambda \sin\theta}{\kappa}\frac{\gamma}{2}R^2 \log\rho.$$

Die Bedingung, welche an dem Randkreis des Wirbelgebietes zu erfüllen ist, ergiebt

$$C = -4\,\lambda \sin\theta \log(R).$$

Es folgt hieraus

$$\frac{dW}{d\rho} = -\lambda \sin\theta\,\rho\left[1 - 2\log\left(\frac{\rho}{R}\right)\right]$$

und

$$W = const - \lambda \sin\theta\,\rho^2\left[1 - \log\left(\frac{\rho}{R}\right)\right]$$

Wir erhalten somit als Componenten der Geschwindigkeit

$$u = -\frac{\gamma}{2}(x-\alpha) - \lambda \sin\theta\left[1 - 2\log\left(\frac{\rho}{R}\right)\right](y-\beta)$$

$$v = -\frac{\gamma}{2}(y-\beta) + \lambda \sin\theta\left[1 - 2\log\left(\frac{\rho}{R}\right)\right](x-\alpha)$$

Als Deviationswinkel findet man für diesen Fall, da $\kappa = \gamma$ ist

$$tag\, i = \frac{2\,\lambda \sin\theta}{\kappa}\left[1 - 2\log\left(\frac{\rho}{R}\right)\right]$$

Am Begrenzungskreis des Wirbelgebietes wird dieses

$$tag\, i = \frac{2\,\lambda \sin\theta}{\kappa}$$

und im Wirbelcentrum

$$tag\, i = \infty \text{ d. h. } i = \frac{\pi}{2}$$

d. i. am Wirbelcentrum schneidet die Windbahn die Isodynamen gar nicht; jedes Theilchen muss daher dort in kreisförmiger Rotation begriffen sein. Als Gleichung der Windbahn findet man

$$\chi + const + \frac{2\,\lambda \sin\theta}{\kappa}\int\left(1 - 2\log\frac{\rho}{R}\right)\frac{d\rho}{\rho} = 0$$

d. h.

$$\chi + const + \frac{2\lambda \sin\theta}{\kappa} \log\rho\left(1 - \log\frac{\rho}{R}\right) = 0$$

oder wenn man über die willkürliche Constante passend verfügt.

$$\rho = const.\ e^{\pm\sqrt{\frac{\kappa\chi}{2\lambda \sin\theta}}}$$

also eine Art logarithmische Spirale. Von den beiden Vorzeichen des Radicandus ist das negative zu wählen.

Betrachten wollen wir noch den Fall, wo $\kappa < \gamma$ ist. In diesem Fall erhält man unmittelbar aus (66) und (66*a*)

$$u = -\frac{\gamma}{2}\left[(x-\alpha) + \frac{2\lambda \sin\theta}{(\gamma-\kappa)}\left\{\frac{\gamma}{\kappa}\left(\frac{R}{\rho}\right)^{2\left(1-\frac{\kappa}{\gamma}\right)} - 1\right\}(y-\beta)\right]$$

$$v = -\frac{\gamma}{2}\left[(y-\beta) - \frac{2\lambda \sin\theta}{(\gamma-\kappa)}\left\{\frac{\gamma}{\kappa}\left(\frac{R}{\rho}\right)^{2\left(1-\frac{\kappa}{\gamma}\right)} - 1\right\}(x-\alpha)\right]$$

und als Deviationswinkel

$$tag\ i = \frac{2\lambda \sin\theta}{(\gamma-\kappa)}\left[\frac{\gamma}{\kappa}\left(\frac{R}{\rho}\right)^{2\left(1-\frac{\kappa}{\gamma}\right)} - 1\right]$$

und als Gleichung der Windbahn

$$\chi + \frac{2\lambda \sin\theta}{(\gamma-\kappa)}\left[\frac{\gamma^2}{2\kappa(\gamma-\kappa)}\left(\frac{R}{\rho}\right)^{2\left(1-\frac{\kappa}{\gamma}\right)} - \log\left(\frac{\rho}{R}\right)\right] = const.$$

Die Geschwindigkeit im Wirbelcentrum wird im Allgemeinen unendlich gross, wenn $\gamma > 2\kappa$ ist. Ist dagegen $\gamma < 2\kappa$, und dabei jedoch $\gamma > \kappa$, so ist $2\left(1 - \frac{\kappa}{\gamma}\right)$ ein echter Bruch, und die Grösse wie $\left(\frac{R}{\rho}\right)^{2\left(1-\frac{\kappa}{\gamma}\right)} \cdot \rho$ wird im Wirbelcentrum nicht unendlich gross, sondern unendlich klein wie $\rho^{1-2\left(1-\frac{\kappa}{\gamma}\right)} = \rho^{\frac{2\kappa}{\gamma}-1}$. Eine continuirliche Bewegung der Luftmasse ist daher möglich und die Horizontalprojection der Windbahn ist Spirale, deren Windungen mit abnehmendem Abstand vom Wirbelcentrum zunehmen und zwar um so schneller, je mehr $2\kappa - \gamma$ sich der Null nährt.

Überschreitet γ den oben angegebenen Grenzwerth, so bleibt die Continuität der Strömung an dem Begrenzungskreise der beiden Gebiete ungestört; allein die Geschwindigkeit wird in der Nähe des Wirbelcentrums unendlich gross, und der Druck dabei negativ unendlich gross [vergleiche Formel (70).] Da in den Ponderabilien, wie Luft und Wasser, der Druck bekanntlich unter einen gewissen negativen Grenzwerth nicht hinab sinken kann, ohne dass die Flüssigkeit zerreisst, so wird die Luftmasse, wenn $\gamma > 2\kappa$ ist, praktisch irgendwo in dem inneren Gebiete zerreissen, und um das Wirbelcentrum ein luftleerer oder wenigstens luftverdünnter Raum entstehen, dessen Dimension im Allgemeinen um so grösser sein wird, je grösser $\frac{\gamma}{2\kappa}$ ausfällt.

So entsteht in der Erdatmosphäre jedesmal eine wirbelnde Strömung der Luft im cyklonalen Sinne, wenn irgendwo in Folge der stärkeren Erwärmung eine verticale aufsteigende Strömung entsteht, und so in einer Fläche Druckdifferenz erzeugt.

Wir haben uns bisher mit dem Fall beschäftigt, wo auf der Erdoberfläche ein kreisförmig begrenztes Gebiet der vertical aufsteigenden Strömung vorhanden ist. Es liegt uns nun ob, einen anderen Fall zu untersuchen, wo irgendwo auf der wieder als eine unendliche Ebene gedachten Erdoberfläche ein durch den Kreiscylinder vom Radius R begrenztes Raumgebiet vorhanden ist, in welchem die Luft vertical niederwärts mit der Geschwindigkeit

$$w = -\gamma . z.$$

strömt.

Dieser Fall erfordert eine andere selbstständige Lösung, als der vorhergehende, was daraus hervorgeht, dass jeder für den Fall der

vertical aufsteigenden Strömung aufgestellte Ausdruck im Mittelpunkt des Gebietes der verticalen Strömung bei jedem Verhältniss von $\frac{\kappa}{\gamma}$ unendlich gross, darum unbrauchbar wird, wenn man überall statt γ, $-\gamma$ einführt.

Wir setzen wieder

$$u = \frac{\partial W}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

$$v = -\frac{\partial W}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}$$

wo φ in dem vorliegenden Fall für das innere Raumgebiet

$$\varphi_i = \frac{\gamma}{4}[R^2(1 - 2 \log R) + \rho^2]$$

und für das äussere

$$\varphi_a = \frac{\gamma R^2}{2} \log \rho.$$

zu setzen ist, so dass die Gleichungen

$$\Delta \varphi_i = \gamma$$

$$\Delta \varphi_a = 0$$

befriedigt werden.

Um W_i zu bestimmen, gehen wir von der Gleichung (64) aus indem wir voraussetzen, dass auch in diesem Fall im inneren Raumgebiete Wirbel existirten, und setzen statt γ, $-\gamma$ ein, sodass wir zunächst für das innere Raumgebiet haben

$$\frac{d\Delta W_i}{d\rho}\frac{d\varphi_i}{d\rho} + (\kappa + \gamma)\Delta W_i - 2\lambda \sin \theta \gamma = 0$$

oder, da $\frac{d\varphi_i}{d\rho} = \frac{\gamma}{2}\rho.$ ist so folgt.

$$\frac{\gamma}{2}\frac{d\Delta W_i}{d\rho}\rho + (\kappa + \gamma)\Delta W_i - 2\lambda \sin \theta . \gamma = 0$$

Das Integral hiervon ist

$$\Delta W_i = \frac{C}{\rho^{\frac{2(\kappa+\gamma)}{\gamma}}} + \frac{2\lambda \sin \theta}{(\kappa+\gamma)} \cdot \gamma.$$

Wäre nun die willkürliche Constante nicht $=0$, so müsste $\frac{dW_i}{d\rho}\rho$, mithin u und v für $\rho = 0$ *d. i.* im Wirbelcentrum bei jedem Werthe von γ unendlich gross sein. Es muss daher in dem vorliegenden Fall ganz allgemein $C = 0$ sein. Mithin folgt

$$\Delta W_i = \frac{2\lambda \sin\theta}{(\kappa+\gamma)} = -\zeta + 2\lambda \sin\theta$$

d. h.

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{2\lambda \sin\theta}{(\kappa+\gamma)}$$

Es erhellt hieraus, dass innerhalb des inneren Gebietes vom kreisförmigen Querschnitte nur Wirbel mit constanter Geschwindigkeit vorhanden sein können. Wir schreiben wieder $\Delta W = \frac{1}{\rho} d\rho \frac{dW}{d\rho}$, und erhalten durch eine nochmalige Integration

$$\frac{dW_i}{d\rho} = \frac{\lambda \sin\theta \cdot \gamma}{(\kappa+\gamma)} \cdot \rho.$$

die willkürliche Constante muss $=0$ sein, wenn $\frac{dW_i}{d\rho}$ im Wirbelmittelpunkt verschwinden soll.

Bezeichnet man die Function W für das äussere Gebiete wieder mit W_a, so muss an dem Grenzkreis die Bedingung erfüllt werden, dass

$$\frac{dW_a}{d\rho} = \frac{dW_i}{d\rho} \quad \text{für } \rho = R$$

Die für das äussere wirbelfreie Gebiet giltige Auflösung

$$W_a = \frac{2\lambda \sin\theta}{\kappa} \varphi_a$$

$$\varphi_a = \frac{\gamma}{2} R^2 \log \rho.$$

genügt aber dieser Bedingung nicht. Da ausserhalb des Gebietes der verticalen Strömung Wirbel mit constanter Geschwindigkeit nicht

existiren, so folgt, dass jetzt im Gebiet der Horizontalströmung Wirbel mit variabler Geschwindigkeit vorhanden sein müssen. Diese Bemerkung ergiebt aus (63) für unseren Fall die Differentialgleichung.

$$\kappa \Delta W_a + \frac{d\Delta W_a}{d\rho} \frac{d\varphi_a}{d\rho} = 0$$

oder, da $\frac{d\varphi_a}{d\rho} = \frac{\gamma}{2} \frac{R^2}{\rho}$

ist.

$$\kappa \Delta W_a + \frac{\gamma}{2} \frac{R^2}{\rho} \frac{d\Delta W}{d\rho} = 0$$

Eine Integration ergiebt hieraus

$$\Delta W = C e^{-\frac{\kappa}{\gamma}\left(\frac{\rho}{R}\right)^2} = -\zeta + 2\lambda \sin\theta.$$

d. h.

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = C e^{-\frac{\kappa}{\gamma}\left(\frac{\rho}{R}\right)^2} \tag{74}$$

Die Wirbel, welche im äusseren Raumgebiete existiren, müssen sonach mit wachsender Entfernung vom Grenzkreis sehr rasch verschwinden.

Durch eine nochmalige Integration kommt

$$\frac{dW_a}{d\rho} = \frac{C e^{-\frac{\kappa}{\gamma}\left(\frac{\rho}{R}\right)^2} + C'}{\rho}$$

C und C' sind die willkürlichen Integrationsconstanten, von denen die letztere dadurch bestimmt wird, dass die Wirbel mit wachsendem ρ sehr rasch verschwinden und die Lufttheilchen in unendlicher Entfernung keine andere Rotationsgeschwindigkeit hat, als die durch Erdrotation hervorgerufene, *d. h.* für ein unendlich grosses ρ

$$\Delta W_a = 0 \qquad \frac{dW_a}{d\rho} = \frac{2\lambda \sin\theta}{\kappa} \frac{d\varphi_a}{d\rho}$$

Diese Bemerkung ergiebt

$$C' = \frac{\lambda \sin\theta . \gamma}{\kappa} R^2$$

so dass man erhält

$$\frac{dW_a}{d\rho} = \frac{Ce^{-\frac{\kappa}{\gamma}\left(\frac{\rho}{R}\right)^2}}{\rho} + \frac{\lambda \sin\theta\, \gamma R^2}{\kappa\, \rho}$$

Die zweite Constante C kann dazu benutzt werden, die Bedingung, welche an dem Grenzkreise des inneren Gebietes zu erfüllen ist, zu befriedigen, *d. h.*

$$\frac{dW_a}{d\rho} = \frac{dW_i}{d\rho} \qquad \text{für } \rho = R$$

Hieraus folgt

$$\frac{Ce^{-\frac{\kappa}{\gamma}\left(\frac{\rho}{R}\right)^2}}{R} + \frac{\lambda \sin\theta . \gamma R}{\kappa} = \frac{\lambda \sin\theta . \gamma}{(\kappa+\gamma)} R$$

mithin

$$C = -\frac{\lambda R^2 \sin\theta\, \gamma}{\kappa(\kappa+\gamma)} e^{\frac{\kappa}{\gamma}}$$

Wir erhalten schliesslich

$$\frac{dW_a}{d\rho} = \frac{\lambda \sin\theta\, R^2 \gamma}{\kappa . \rho}\left[1 - \frac{\gamma}{(\kappa+\gamma)} e^{-\frac{\kappa}{\gamma}\left[\left(\frac{\rho}{R}\right)^2 - 1\right]}\right]$$

eine Function, welche allen gestellten Redingungen Genüge leistet.

Als Componenten der Geschwindigkeit finden wir sonach für das innere Raumgebiet

$$\begin{aligned} u &= \frac{\gamma}{2}\left[(x-\alpha) + \frac{2\lambda \sin\theta}{(\kappa+\gamma)}(y-\beta)\right] \\ v &= \frac{\gamma}{2}\left[(y-\beta) - \frac{2\lambda \sin\theta}{(\kappa+\gamma)}(x-\alpha)\right] \end{aligned} \tag{75}$$

und für das äussere

$$\begin{aligned} u &= \frac{\gamma}{2}\frac{R^2}{\rho^2}\left[(x-\alpha) + \frac{2\lambda \sin\theta}{\kappa}\left(1 - \frac{\gamma}{(\kappa+\gamma)} e^{-\frac{\kappa}{\gamma}\left(\frac{\rho^2}{R^2}-1\right)}\right)(y-\beta)\right] \\ v &= \frac{\gamma}{2}\frac{R^2}{\rho^2}\left[(y-\beta) - \frac{2\lambda \sin\theta}{\kappa}\left(1 - \frac{\gamma}{(\kappa+\gamma)} e^{-\frac{\kappa}{\gamma}\left(\frac{\rho^2}{R^2}-1\right)}\right)(x-\alpha)\right] \end{aligned} \tag{76}$$

Die Bewegung, welche durch diese Gleichungen dargestellt ist, entspricht einer anticyklonalen Luftströmung. Die Lufttheilchen sind in Rotation begriffen, und zwar geht dieselbe auf der nördlichen Hemisphäre in der Richtung $W N O S$ vor sich, und auf der südlichen Hemisphäre aber in der Richtung $W S O N$, also genan im umgekehrten Sinne, wie die Luftströmung in der Bewegungserscheinung, welche einer aufsteigenden Strömung ihre Entstehung verdankt.

Als Deviationswinkel findet man leicht für das innere Gebiet

$$tag\ i = \frac{2\lambda \sin\theta}{(\gamma+\kappa)} \tag{77}$$

also constant, und für das äussere Gebiet aber

$$tag\ \ = \frac{2\lambda \sin\theta}{\kappa}\left[1-\frac{\gamma}{\kappa+\gamma}e^{-\frac{\kappa}{\gamma}\left(\frac{\rho^2}{R^2}-1\right)}\right] \tag{78}$$

Die Gleichung der Windbahn findet man gleichfalls leicht. Sie ist für das innere Gebiet

$$\rho = Ce^{\frac{\gamma+\kappa}{2\lambda \sin\theta}\chi} \tag{79}$$

also eine nach Aussen gewundene logarithmische Spirale, deren Windungszahl im inneren Gebiet um so geringer wird, je grösser γ *d. h.* die Geschwindigkeit der niederstürzenden Strömung ist. Die Windbahn in dem äusseren Gebiete hat eine bei Weitem verwickeltere Gestalt; ihre Gleichung ist

$$\chi-\frac{2\lambda \sin\theta}{\kappa}\left(\log\rho-\frac{\gamma}{\kappa+\gamma}\int_R^\rho\frac{e^{-\frac{\kappa}{\gamma}\left(\frac{\rho^2}{R^2}-1\right)}d\rho}{\rho}\right)=const. \tag{80}$$

also jedenfalls eine nach Aussen gewundene Spirale, welche die Eigenschaft hat, dass ihre Windungen mit wachsender Entfernung einem Maximum asymptotisch zustreben, und die Spirale selbst sich in die gewöhnliche nach Aussen gewundene logarithmische Spirale verwandelt. In Fig. 6 (Tafel XIII) ist die Bahncurve in diesem Fall gezeichnet.

Es hat ferner nicht die mindeste Schwierigkeit die Coordinaten eines Lufttheilchens zur Zeit t anzugeben.

Man findet für das innere Gebiet

$$\rho = \rho_0 e^{\frac{\gamma}{2}t} \qquad \chi + \chi_0 = \frac{\lambda \sin\theta . \gamma}{(\kappa+\gamma)} t \tag{81}$$

und für das äussere Gebiet

$$(82) \begin{cases} \rho = \sqrt{\rho_0 + \frac{\gamma R^2 t}{2}} \\ \chi + \chi_0 = \frac{2\lambda \sin\theta}{\kappa} \left\{ \log\left(\rho_0^2 + \frac{\gamma R^2 t}{2}\right) - \frac{\gamma^2 R^2}{2(\kappa+\gamma)} e^{-\frac{\kappa}{\gamma}\left(\frac{\rho_0^2}{R^2}-1\right)} \int \frac{e^{-\frac{\kappa}{2}t}\, dt}{\left(\rho_0^2 + \frac{\gamma R^2 t}{2}\right)} \right\} \end{cases}$$

Die Isodynamen sind sowohl für das innere, als für das äussere Gebiet concentrische Kreise. Ihre Gleichung für das innere Gebiet findet man aus (68)

$$\Phi = const - \frac{\kappa\gamma\rho^2}{4}\left[1 + \frac{4\lambda^2 \sin^2\theta}{(\kappa+\gamma)^2}\right]$$

und für das äussere Gebiet

$$\Phi = const - \frac{2\lambda^2 \sin^2\theta R^2 \gamma}{\kappa}\left[\log\left(\frac{\rho}{R}\right) - \frac{\gamma}{\kappa+y}\int_R^\rho \frac{f(\rho)d\rho}{\rho}\right]$$

$$+ \frac{\lambda^2 \sin^2\theta R^4 \gamma^2}{\kappa^2}\left[\frac{1}{2\rho^2}\left(1 - \frac{\gamma}{\kappa+\gamma} f(\rho)\right)^2 + \int_R^\rho \left(1 - \frac{\gamma}{\kappa+\gamma} f(\rho)\right)^2 \frac{d\rho}{\rho^2}\right]$$

indem man zur Abkürzung

$$e^{-\frac{\kappa}{\gamma}\left(\frac{\rho^2}{R^2}-1\right)} = f(\rho)$$

setzt.

Hieraus fliesst weiter als die Gleichung für den Druck für das innere Gebiet

$$p_i = const + \mu G - \frac{\mu\gamma^2 z^2}{2} - \frac{\mu\gamma\rho^2}{4}\left(\kappa + \frac{\gamma}{2}\right)\left(1 + \frac{4\lambda^2 \sin^2\theta}{(\kappa+\gamma)^2}\right) \tag{83}$$

und für das äussere Gebiet

$$p_a = const + \mu G - 2\,\frac{\mu\,\lambda^2 \sin^2\theta R^2 \gamma}{\kappa}\left[\log\left(\frac{\rho}{R}\right) - \frac{\gamma}{\kappa+\gamma}\int_R^\rho \frac{f(\rho)}{\rho}\,d\rho.\right]$$
$$- \frac{\gamma^2 R^4}{8\rho^2}\left[1 - \frac{8\,\lambda^2 \sin^2\theta\,\rho^2}{\kappa^2}\int_R^\rho \left[1 - \frac{\gamma}{\kappa+\gamma} f(\rho)\right]^2 \frac{d\rho}{\rho^2}\right] \tag{84}$$

p_i ist demnach am grössten, wenn ρ verschwindet und nimmt stetig gegen den Begrenzungskreis ab. Es herrscht also hier im Wirbelcentrum ein Maximaldruck, dessen Grösse jedoch um so kleiner ausfällt, je grösser die Geschwindigkeit der niederstürzenden Strömung ist. Dabei giebt es im ganzen inneren Raumgebiet unmittelbar über der Erdoberfläche, wo $z = 0$ zu setzen ist, nirgends Orte, wo p_i bei endlichem Werth von γ, negativ über alle Grenzen hinans wachsen würde. Die Bewegung, welche durch die Gleichungen (75)—(84) dargestellt ist, steht überhaupt zur Cyklone im bemerkenswerthen Gegensatze, und entspricht derjenigen Erscheinung der Atmosphäre, welche man fast immer, wo hinreichende über weite Strecken der Erdoberfläche ausgedehnte synchronische Beobachtungen vorlagen, als Begleiterin der Cyklone nachgewiesen, und mit dem Namen Anticyklone belegt hat.

In einer solchen Wirbelbewegung gehn die Drehungen der Windrichtung immer im umgekehrten Sinne vor sich, wie in der eigentlichen Cyklone, und der Luftdruck im centralen Theile ist höher als in ihrer Umgehung, als in der eigentlichen Cyklone. Die Windbahn ist nach diesem Punkt des Maximaldrucks spiralig gewunden, und zwar in der umgekehrten Richtung, wie die spiralige Windbahn der Cyklone. Alle diese Charakteristiken der Anticyklone, können aus den Gleichungen (75)—(84) unmittelbar abgelesen werden.

Die Anticyklonen entstehen demnach immer da, wo in Folge der stärkeren Abkühlung oder sonstiger Ursachen eine verticale

Strömung niederstürzt, und so eine Druckdifferenz erzeugt. Ist das Gebiet der verticalen Strömung ein kreisförmiges, wie in dem behandelten Fall, so wirbeln die Lufttheilchen auf Schraubenlien, deren Horizontalprojection eine gewöhnliche logarithmische Spirale ist, niederwärts, und fahren aus dem Grenzkreis heraus auf einer in der Nähe desselben äusserst complicirten Spiralbahn. Vergleicht man den Deviationswinkel in der Anticyklone mit demjenigen in der Cyklone, so stellt sich der bemerkenswerthe Gegensatz heraus, dass die Windbahn innerhalb der Anticyklone mit der Isodynamen, oder was hier auch dasselbe ist, mit den Isobaren unter sonst gleichen Verhältnissen, [dieselbe Geschwindigkeit der verticalen Strömuug, dieselbe geographische Breite, und Reibung] überall grösseren Winkel einschliesst, als diejenige innerhalb der Cyklone, ganz so, wie wir früher allgemein abgeleitet haben.

(Fortsetzung folgt.)

Fig. 1.

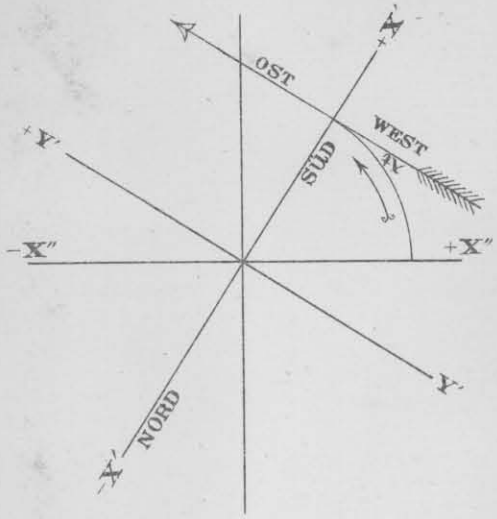

Fig. 2.

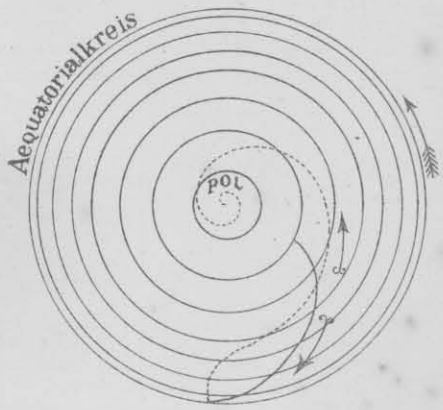

Fig. 3.

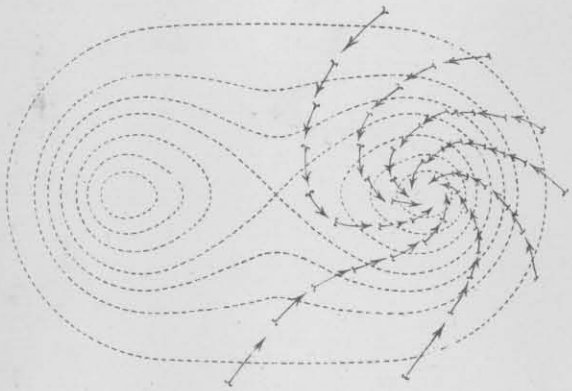

Fig. 4.

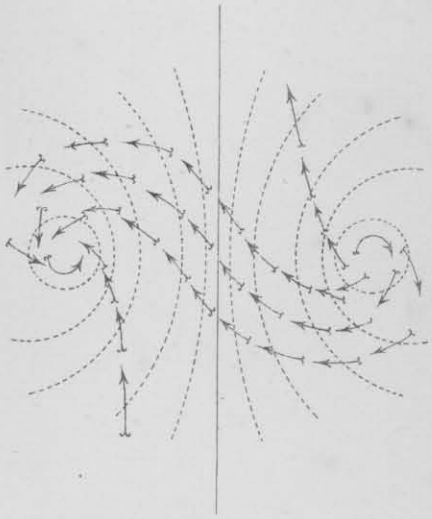

Fig. 5.

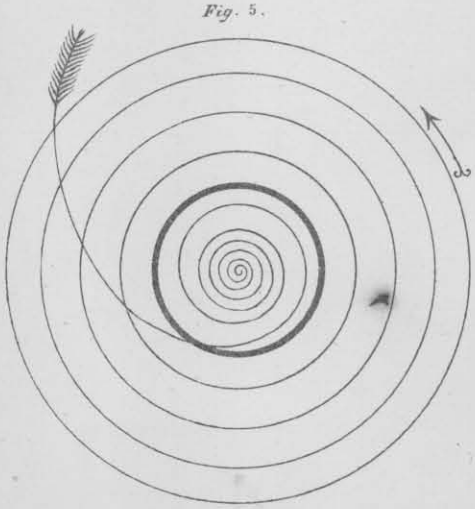
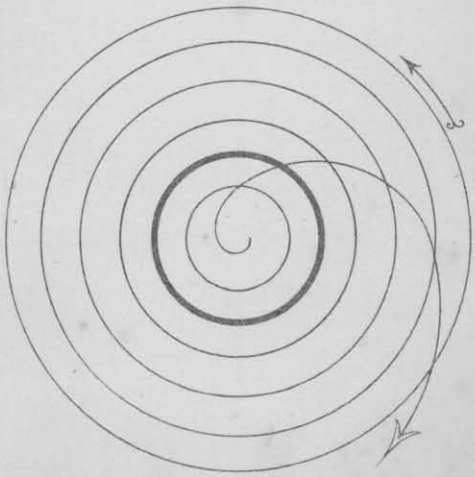
Fig. 6.