JOURNAL OF THE COLLEGE OF SCIENCE, TOKYO IMPERIAL UNIVERSITY.
VOL. XLIV., ART. 5.

Ueber das Reciprocitätsgesetz in einem beliebigen algebraischen Zahlkörper.

Von

Teiji TAKAGI, *Rigakuhakushi*,

Professor der Mathematik an der K. Universität zu Tokyo.

Dieser Aufsatz ist als Fortsetzung meiner unten citirten Arbeit gedacht: es wird eine andere Methode befolgt als in den Abhandlungen des Hrn. Furtwänglers. Nachdem nämlich in jener Arbeit ein wesentlicher Teil des Reciprocitätsgesetzes in einer sehr allgemeinen Fassung erledigt worden ist, gestaltet sich der Beweis des allgemeinen Reciprocitätsgesetzes nunmehr verhältnismässig einfach.

Der erste Teil (§§ 3–11) enthält den vollständigen Beweis des Reciprocitätsgesetzes für einen ungeraden Primzahlgrad l. Dieser Beweis geschieht in drei Schritten. Zuerst wird das Reciprocitätsgesetz zwischen einer primären Zahl und einer zu l primen Zahl in § 6. erledigt. Hierbei erwies sich als unentbehrliches Mittel das sogenannte Eisenstein'sche Reciprocitätsgesetz, welches, dank eines allgemeinen Satzes über die Beziehung zwischen den Potenzcharacteren in verschieden Körpern (§ 2) sofort auf einen beliebigen algebraischen Körper zu übertragen ist. Dieser Specialfall des Reciprocitätsgesetzes vertritt bei unserem Beweise gewissermassen die Stelle der Definition des Legendre-Kummer'schen Symbols, an die nachher nicht mehr direct appellirt wird. Ein Ausnahmefall, der bei dem Beweise zunächst auftritt, wird durch einen einfachen Kunstgriff leicht in die allgemeine Regel subsumirt (§ 7), während Hr. Furtwängler zum analogen Zwecke eine complizirte Betrachtung anstellt.

Durch die zweite Schritt wird derjenige Fall bewiesen, wobei eine der beiden in Betracht kommenden Zahlen beliebig, die andere aber sowohl zur ersten als auch zu l prim ist (§§ 9, 10). Hierbei konnte ich mich auf einen allgemeinen Satz über die Normenreste des relativ cyclischen Körpers stützen, der in meiner früheren Arbeit bewiesen worden ist—im Gegensatz zu der Hilbert-Furtwängler'schen Methode, wobei derselbe Satz aus dem Reciprocitätsgesetz erschlossen wird. Zu einer grossen Vereinfachung des Beweises diente auch der Existenzsatz der Primideale in beliebigen Idealclassen im allgemeinen Sinne. Das Hauptergebnis lautet: *Der Wert des Symbols* $\left(\frac{\mu}{\mathfrak{r}}\right)$ *hängt nur von der Classe mod* $\mathfrak{f}$ *ab, welcher das Ideal* $\mathfrak{r}$ *angehört, wo* $\mathfrak{f}$ *der Führer der dem Körper* $K=k(\sqrt[l]{\mu})$ *zugeordneten Classengruppe im Grundkörper* k *bedeutet.* Hierin erblicke ich den wesentlichen Inhalt des allgemeinen Reciprocitätsgesetzes.

Um den Gang des Beweises möglichst übersichtlich darzutun, habe ich es vermieden, das Hilbert'sche Normenrestsymbol an die Spitze zu stellen. Will man aber das Reciprocitätsgesetz in jener von Hilbert aufgestellten allgemeinsten und eleganten Form zu erhalten, wobei zwei ganz beliebige Zahlen des Körpers in Betracht gezogen werden, so hat man die dritte und die letzte Schritt zu tun. Hierbei handelt es sich jedoch um eine Betrachtung mehr formaler Natur, und der Beweis erledigt sich schnell durch Heranziehung des vorher erhaltenen Resultats. In § 11 bin ich nur kurz auf den Gegenstand eingegangen.

Im zweiten Teile (§§ 12–14) wird das quadratische Reciprocitätsgesetz behandelt. Es genügte, kurz die Modification anzugeben, die nötig wird wegen der Vorzeichenbedingungen, den die in Betracht gezogenen Zahlen in den mit dem gegebenen conjugirten reellen Körpern zu genügen haben.

Litteratur.

D. Hilbert. Die Theorie der algebraischen Zahlkörper, Bericht, erstattet der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, (1897).

——— Ueber die Theorie des relativ quadratischen Zahlkörpers, Math. Annalen **51** (1898).

D. Hilbert. Ueber die Theorie der relativ Abel'schen Zahlkörper, Göttinger Nachrichten, (1898).

Ph. Furtwängler. Ueber die Reciprocitätsgesetze zwischen l^{ten} Potenzresten in algebraischen Zahlkörpern, wenn l eine ungerade Zahl bedeutet, Math. Annalen, **58** (1904).

——— Die Reciprocitätsgesetze für Potenzreste mit Primzahlexponenten in algebraischen Zahlkörpern.

I, Math. Annalen, **67** (1909).
II, ,, ,, **72** (1912).
III, ,, ,, **74** (1913).

T. Takagi. Ueber eine Theorie des relativ Abel'schen Zahlkörpers, Journal of the College of Science, Tokyo Imperial University, **41** (9), 1920). [citirt als R. A.]

Einleitung.

Bezeichnungen.

In diesem Aufsatz werden die folgenden Bezeichnungen durchgehends beibehalten :

l, eine rationale Primzahl.

ζ, die primitive l-te Einheitswurzel: $\zeta = e^{\frac{2\pi i}{l}}$.

k, ein algebraischer Zahlkörper, welcher die Zahl ζ enthält.

m, der Grad von k.

r, die Anzahl der Grundeinheiten von k.

In k gelte die Zerlegung in Primfactoren:

$$l = \mathfrak{l}_1^{s_1} \mathfrak{l}_2^{s_2} \cdots \mathfrak{l}_z^{s_z},$$

$$1-\zeta = \mathfrak{l}_1^{\sigma_1} \mathfrak{l}_2^{\sigma_2} \cdots \mathfrak{l}_z^{\sigma_z}, \quad \sigma_i (l-1) = s_i,$$

$$L = (1-\zeta)^l = \mathfrak{l}_1^{\sigma_1 l} \mathfrak{l}_1^{\sigma_2 l} \cdots \mathfrak{l}_z^{\sigma_z l},$$

$$\bar{L} = \mathfrak{l}_1^{\sigma_1 l+1} \mathfrak{l}_2^{\sigma_2 l+1} \cdots \mathfrak{l}_z^{\sigma_z l+1}.$$

§ 1.

Allgemeine Sätze über relativ Abel'sche Zahlkörper.

Wir stellen in diesem Artikel einige der wichtigsten allgemeinen Sätze zusammenfassend dar, um später bequem darauf Bezug nehmen zu können; es sind Sätze, die ich in der Abhandlung R. A. ausführlich dargelegt habe, und die ich in einer dem Zweck dieses Aufsatzes gemäss specialisirten Fassung wiedergebe.

(1) *Rang der Classengruppe.* Der Classeneinteilung im Grundkörper sei das Idealmodul $\mathfrak{m}$ zugrunde gelegt, und die sämtlichen l-ten Potenzen in die Hauptclasse zusammengefasst. Die Hauptclasse besteht also aus der Gesamtheit der ganzen und gebrochenen zu $\mathfrak{m}$ primen Ideale von der Form αj^l, wo α ein l-ter Potenzrest von $\mathfrak{m}$ ist. Die Classengruppe G ist dann von der Ordnung l^h, wo h der Rang von G ist. Um diesen Rang darzustellen, bezeichnen wir mit h_0 den Rang der absoluten Classengruppe, d. h. die Anzahl der von einander unabhängigen Idealclassen im absoluten Sinne, deren Ordnungen Potenzen von l sind. Wir betrachten ausserdem den Rang der entsprechenden Zahlengruppe, d. h. die Anzahl der unabhängigen Nichtreste nach $\mathfrak{m}$. Dieselbe ist offenbar gleich 1, wenn $\mathfrak{m}=\mathfrak{p}^e$ eine zu l prime Primidealpotenz von k ist. Dagegen ist, wenn $\mathfrak{m}=\mathfrak{l}^g$ Potenz eines in l aufgehenden Primideals $\mathfrak{l}$ ist, dieser Rang gleich

$$R(g)=\left[g-\frac{g}{l}\right]f, \qquad \text{wenn} \quad g\leqq\sigma l,$$

oder

$$= sf+1, \qquad \text{wenn} \quad g>\sigma l,$$

wenn $\mathfrak{l}$ genau zur $s=\sigma(l-1)$-ten Potenz in l aufgeht und vom Grade f ist[1]. Gehen daher in

$$\mathfrak{m}=\Pi\mathfrak{p}^e.\Pi\mathfrak{l}^g$$

d von einander verschiedene zu l prime Primideale $\mathfrak{p}$ auf, dann ist der Rang der Zahlengruppe:

$$N=d+\Sigma R(g), \tag{1}$$

wo sich die Summe auf alle in $\mathfrak{m}$ aufgehenden Potenzen $\mathfrak{l}^g$ bezieht.

(1) R.A. S. 64.

Ferner gebe es unter den r Grundeinheiten, den Einheitswurzeln in k, und den h_0 unabhängigen Zahlen, welche l-te Potenzen der Ideale von k sind, insgesamt N' unabhängige Nichtreste nach $\mathfrak{m}$:

$$\eta_1, \quad \eta_2, \cdot \cdot \cdot \cdot \eta_{N'} \qquad (2)$$

sodass $N' \leqq N$, und eine Zahl von der Form

$$\eta_1^{u_1} \eta_2^{u_2} \cdot \cdot \cdot \cdot \eta_{N'}^{u_{N'}} \qquad (0 \leqq u_1, u_2, \cdot \cdot \cdot < l)$$

nie anders ein l-ter Rest nach $\mathfrak{m}$ sein kann, als wenn die sämtlichen Exponenten $u_1, u_2, \cdots$ verschwinden. Alsdann ist der Rang der Classengruppe G durch die Formel gegeben:

$$h = h_0 + N - N'. \qquad (3)$$

Wenn $l=2$ und wenn unter den mit k conjugirten Körpern $r_1 (r_1 > 0)$ reelle vorhanden sind, dann ist notwendig, den Classenbegriff dadurch enger zu fassen, dass zur Definition der Aequivalenz zweier Ideale: $\mathfrak{j}_1 = \alpha \mathfrak{j}_2$ nur der Zahlenfactor α zugelassen wird, welche ausser der Congruenzbedingung mod. $\mathfrak{m}$ noch die Vorzeichenbedingung befriedigt, *total positiv* zu sein. Zufolge dieser Festsetzung, erfährt die Rangzahl h der Classengruppe G die Modification, indem zunächst der Rang N der Zahlengruppe um r_1 vermehrt wird, sodann zu dem System der N' Zahlen (2) noch $N''-N'$ quadratische Reste nach $\mathfrak{m}$ hinzugenommen werden, die sich unter den $r+1+h_0$ unabhängigen Einheiten und Idealpotenzen befinden, und welche von einander unabhängige Vorzeichencombinationen in den r_1 reellen mit k conjugirten Körpern aufweisen mögen, sodass nunmehr an Stelle von (2) ein System von N'' Zahlen $(N'' \geqq N')$:

$$\eta_1, \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \eta_{N'}, \eta_{N'+1}, \cdot \cdot \cdot \cdot \eta_{N''} \qquad (2^*)$$

auftritt, von der Beschaffenheit, dass eine Zahl von der Form:

$$\eta_1^{u_1} \cdot \cdot \cdot \eta_{N''}^{u_{N''}} \qquad (u=0, 1)$$

niemals quadratischer Rest nach $\mathfrak{m}$ und zugleich total positiv sein kann, ausser wenn alle Exponenten $u_1, \cdot \cdot \cdot u_{N''}$ verschwinden. Demnach wird in diesem Falle

$$h = h_0 + N + r_1 - N''. \qquad (3^*)$$

Wir stellen nun die Systeme der Gruppencharactere für G. Seien

$$\mathfrak{r}_1,\ \mathfrak{r}_2,\ \cdots\ \mathfrak{r}_{h_0}$$

ein System von h_0 zu $\mathfrak{m}$ primen Idealen von k, welche die h_0 unabhängigen Basisclassen im absoluten Sinne repräsentiren, sodass für jedes Ideal $\mathfrak{r}$ von k eine Gleichung von der Form gilt:

$$\alpha=\mathfrak{r}\,\mathfrak{r}_1^{e_1}\,\mathfrak{r}_2^{e_2}\cdots\,\mathfrak{r}_{h_0}^{e_{h_0}}\mathfrak{j}^l, \tag{4}$$

wo $e_1, e_2, \cdots e_{h_0}$ für jedes $\mathfrak{r}$ eindeutig bestimmtes Exponentensystem aus der Reihe $0, 1, 2, \cdots l-1$ sind. Dann haben wir zunächst h_0 *absolute Classencharactere* für $\mathfrak{r}$:

$$\chi_i(\mathfrak{r})=\zeta^{e_i}. \qquad (i=1, 2, \cdots h_0)$$

Sodann kommen N *Potenzcharactere*, von denen die d, welche den zu l primen Primfactoren $\mathfrak{p}$ von $\mathfrak{m}$ entsprechen, durch die Legendre'schen Symbole gegeben werden können:

$$\chi'_\delta(\mathfrak{r})=\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{p}}\right), \qquad (\delta=1,\ 2,\ \cdots\ d)$$

wo α die in (4) angegebene Bedeutung hat. Die $R(g)$ Potenzcharactere, welche einer in $\mathfrak{m}$ enthaltenen Potenz $\mathfrak{l}^g$ entsprechen, sind

$$\chi''_\rho(\mathfrak{r})=\zeta^{a_\rho}, \qquad [\rho=1,\ 2,\ \cdots\ R(g)]$$

wenn

$$\alpha\equiv\gamma_1^{a_1}\gamma_2^{a_2}\cdots\gamma_R^{a_R}\xi^l \pmod{\mathfrak{l}^g},$$

wo $\gamma_1, \gamma_2, \cdots \gamma_R$ ein System der $R=R(g)$ unabhängigen Nichtreste nach $\mathfrak{l}^g$ bedeuten.

Endlich kommen, wenn $l=2$, noch r_1 *Vorzeichencharactere*:

$$\chi'''_j(\mathfrak{r})=\mathrm{Sg}_j(\alpha), \qquad (j=1,\ 2,\ \cdots\ r_1)$$

wo $\mathrm{Sg}_j(\alpha)=\pm1$, jenachdem die mit α conjugirte Zahl in dem reellen Körper k_j positiv oder negativ ausfällt.

Aus diesen elementaren Characteren setzen wir nun den allgemeinen Character $X(\mathfrak{r})$ zusammen:

$$X(\mathfrak{r})=\zeta^{\overset{i}{\Sigma} e_i u_i}\ \overset{\mathfrak{p}}{\Pi}\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{p}}\right)^{v}\ \overset{l}{\Pi}\ \zeta^{\overset{\rho}{\Sigma} a_\rho v'_\rho}\ \overset{j}{\Pi}\ \mathrm{Sg}_j(\alpha)^{w_j},$$

indem wir die Exponenten $v, v,' w$ den N' bez. N'' Bedingungen unterwerfen, dass für die Zahlen (2) bez. (2*)

$$X(\eta_i)=1 \qquad (i=1,\ 2,\ \cdots\ N' \text{ bez. } N'')$$

ausfallen soll.

Auf diese Weise entstehen $l^h=l^{h_0}+N-N''$ bez. $2^h=2^{h_0}+N+r_1-N''$ Charactersysteme, die sich aus den h unabhängigen durch Multiplication zusammensetzen lassen. Die Gesamtheit der Ideale $\mathfrak{r}$, für welche

$$X(\mathfrak{r})=1$$

ausfällt, bildet dann eine Classengruppe vom Index l; umgekehrt aber lässt sich jede Classengruppe vom Index l auf diese Weise characterisiren.

(2) *Existenz der Classenkörper*[2]. Zu jeder Untergruppe H der Classengruppe G von k existirt ein und nur ein Classenkörper $K(H)$; derselbe ist relativ Abel'sch in Bezug auf k. Die Galois'sche Gruppe des Relativkörpers K/k ist holoedrisch ismorph mit der complementären Gruppe G/H. Die Relativdiscriminante von K/k enthält nur und alle Primideale von k als Factor, welche in den Führer der Classengruppe H aufgehen.

Wir heben den folgenden speciellen Fall dieses Satzes hervor, welcher den Fall: $\mathfrak{m}=1$, also die *absoluten* Classenkörper betrifft.

Satz 1. (Satz von Furtwängler) *Ist h der Rang der absoluten Classengruppe von k, dann existiren h unabhängige relativ cyclische unverzweigte Körper vom Relativgrade l über k, folglich h unabhängige "singuläre Primärzahlen" in k:*

$$\omega_1,\ \omega_2,\ \cdots\ \omega_h,$$

so nennen wir nach Furtwängler die primären Zahlen, welche entweder Einheiten oder l-te Potenzen der Ideale sind; diese h Zahlen sind von der Art, dass jede Zahl ω von derselben Beschaffenheit auf eine und nur auf eine Weise in der Form

$$\omega=\omega_1^{u_1}\cdots\omega_h^{u_h}\xi^l$$

---

(2) R.A. S. 62.

darstellbar ist, wo die Exponenten $u_1, \cdots u_h$ Zahlen aus der Reihe $0, 1, 2, \cdots l-1$ sind, und ξ eine Zahl in k bedeutet.

Ferner ist, wenn $l=2$ und die Classen im gewöhnlichen Sinne genommen werden, die h singulären Primärzahlen total positiv. Wenn aber die Classen nach total positiven Zahlen definirt werden, und erfährt dabei der Rang der Classengruppe einen Zuwachs um h', dann kommen noch h' unabhängige singuläre Primärzahlen $\omega'_1 \cdots \omega'_{h'}$ hinzu, die aber nicht total positiv sind und unabhängige Vorzeichencombinationen in den mit k conjugirten reellen Körpern aufweisen(3).

Eine wichtige Folgerung aus der Existenz des allgemeinen Classenkörpers ist der folgende

Satz 2. *In jeder Classe von k nach einem beliebigen Modul $\mathfrak{m}$ und mit einer beliebigen Vorzeichenbedingung existiren stets unendlich-viele Primideale ersten Grades.*

(3) *Die Normenreste des relativ cyclischen Oberkörpers*(4). Eine Zahl α in k heisst ein *Normenrest* des Oberkörpers K nach einem Idealmodul $\mathfrak{j}$ von k, wenn es eine Zahl A in K gibt, derart dass

$$N(A) \equiv \alpha \pmod{\mathfrak{j}},$$

wo mit N die Relativnorm in Bezug auf k angedeutet wird.

Satz 3. *Wenn $\mathfrak{p}$ ein zu l primes Primideal von k ist, welches in die Relativdiscriminante des relativ cyclischen Oberkörpers K/k vom Relativgrade l aufgeht, dann ist von den $\varphi(\mathfrak{p})$ reducirten Zahlclassen mod $\mathfrak{p}$ genau der l-te Teil Normenrest des Körpers K nach dem Modul $\mathfrak{p}$, nämlich die Zahlen α, für welche*

$$\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{p}}\right)=1$$

ausfällt.

Wenn $\mathfrak{l}$ ein Primfactor von l ist, welcher zur $(v+1)(l-1)$-ten Potenz in die Relativdiscriminante von K/k aufgeht, dann ist jede zu $\mathfrak{l}$ prime Zahl von k Normenrest nach $\mathfrak{l}^e$, wenn $e \leqq v$. Ist dagegen $e > v$, dann ist genau der l-te Teil eines reducirten Systems der Zahlclassen mod $\mathfrak{l}^e$ Normenrest des Körpers K nach $\mathfrak{l}^e$. Es gibt in k eine Zahl $1+\lambda_v$, wo λ_v eine genau durch $\mathfrak{l}^v$ (nicht mehr durch $\mathfrak{l}^{v+1}$) teilbare Zahl ist,

---

(3) R.A. S. 84. (4) R.A. S. 27—35.

welche Normennichtrest nach $\mathfrak{l}^e$ ist, derart, dass jede zu $\mathfrak{l}$ prime Zahl α von k in der Form dargestellt werden kann:

$$\alpha \equiv \nu(1+\lambda_v)^n \pmod{\mathfrak{l}^e},$$

wo ν ein Normenrest nach $\mathfrak{l}^e$, und n eine Zahl aus der Reihe 0, 1, 2, $\cdots$ $l-1$ bedeutet.

(4) *Der Zerlegungssatz*[5].

Satz 4. *Ist $K=k(\sqrt[l]{\mu})$ Classenkörper zu der Classengruppe von k, welche durch den Character $X(\mathfrak{r})=1$ characterisirt wird, dann ist für ein Primideal $\mathfrak{p}$ von k*

$$\left(\frac{\mu}{\mathfrak{p}}\right)=1,$$

dann und nur dann, wenn

$$\chi(\mathfrak{p})=1$$

ausfällt.

In diesem Satze ist schon ein wesentlicher Teil des Reciprocitätsgesetzes enthalten. Unser weiteres Ziel wird nun das sein, zu jeder gegebenen Zahl μ von k, den zugehörigen Character X genauer zu bestimmen. Von diesem Standpunct aus kann aber X nur bis auf einen zu l primen Exponenten bestimmt werden, denn mit X ist jeder Character X^n ($n \not\equiv 0$, mod l) geeignet, die dem Körper $K=k(\sqrt[l]{\mu})$ zugeordnete Classengruppe zu characterisiren. Wie es sich herausstellen wird, lässt sich dieser Exponent so bestimmen, dass allemal

$$\left(\frac{\mu}{\mathfrak{r}}\right)=\chi(\mathfrak{r})$$

ausfällt, auch für solche Primideale $\mathfrak{r}$, für welche $\left(\frac{\mu}{\mathfrak{r}}\right) \neq 1$, sogar für jedes beliebige zu μ und l prime Ideal von k.

§ 2.

Beziehung zwischen den Potenzcharactern in Oberkörper und Unterkörper.

Satz 5. *Es sei K ein beliebiger Oberkörper von k. Ist dann α*

---

(5) R. A. S. 96.

eine Zahl von k, $\mathfrak{J}$ ein zu a und zu l primes Ideal von K, $\mathfrak{j}=N(\mathfrak{J})$ die Relativnorm von $\mathfrak{J}$ in Bezug auf k, dann ist

$$\left\{\frac{a}{\mathfrak{J}}\right\}=\left(\frac{a}{\mathfrak{j}}\right),$$

wo der Potenzcharacter in K durch gekrümmte Klammer gekennzeichnet wird[6].

Satz 6. *Es sei K ein beliebiger Oberkörper von k. Ist dann A eine Zahl von K, $a=N(A)$ die Relativnorm von A in Bezug auf k, und $\mathfrak{j}$ ein zu a und zu l primes Ideal von k, dann ist*[7]

$$\left\{\frac{A}{\mathfrak{j}}\right\}=\left(\frac{a}{\mathfrak{j}}\right).$$

Beweis. Es genügt, den Satz für ein Primideal $\mathfrak{j}=\mathfrak{p}$ zu beweisen. Sei K^* ein relativ normaler Oberkörper von k, welcher K enthält, G die Galois'sche Gruppe von K^* in Bezug auf den Grundkörper k, H die Untergruppe von G, welche die Zahlen von K unverändert lässt, sodass der Gruppenindex $(G:H)=M$, dem Relativgrade von K/k. Sei G nach der Untergruppe H in die M Complexe zerlegt:

$$G=\sum^{i} HS_i, \qquad (i=1, 2, \cdots M) \tag{1}$$

Dann ist

$$a=\prod^{i} A\,|\,S_i, \qquad (i=1, 2, \cdots M) \tag{2}$$

wenn mit $A|S$ die durch die Substitution S von G aus A hervorgehende Zahl bezeichnet wird.

In K gelte die Zerlegung in Primfactoren:

$$\mathfrak{p}=\mathfrak{P}_1^{g_1}\mathfrak{P}_2^{g_2}\cdots\mathfrak{P}_e^{g_e}, \tag{3}$$

(6) Vgl. Ph. Furtwängler, **Math. Annalen 58,** S. 24.

(7) Herr Furtwängler hat a.a. O. diesen Satz für den **Fall** bewiesen, wo K relativ normal in Bezug auf k ist. Für einen beliebigen Oberkörper habe ich einen Beweis publicirt in den Proceedings of the Tokyo Math. Phys. Soc. 2 Ser., **9.** S. 166–169, den ich im Text in wesentlich unveränderter Form wiedergebe.

und es sei f_i der Relativgrad des Primideals $\mathfrak{P}_i$ in Bezug auf k. Ist dann P die Norm von $\mathfrak{p}$ in k, so ist

$$\left(\frac{a}{\mathfrak{p}}\right) \equiv a^{\frac{P-1}{l}} (\text{mod } \mathfrak{p}), \qquad \left\{\frac{A}{\mathfrak{P}_i}\right\} \equiv A^{\frac{P^{f_i}-1}{l}} (\text{mod } \mathfrak{P}_i). \tag{4}$$

Ferner sei $\mathfrak{P}^*$ ein Primideal von K^*, welches in $\mathfrak{P}_1$ aufgeht, G_z und G_t die Zerlegungs- und die Trägheitsgruppe von $\mathfrak{P}^*$ in Bezug auf k. Zerlegt man die Gruppe G in die Complexe der Form HSG_z:

$$G = \sum^{i} HS_iG_z, \qquad (i=1, 2, \cdots e) \tag{5}$$

dann ist bekanntlich die Anzahl dieser Complexe gleich der Anzahl der von einander verschiedenen in $\mathfrak{p}$ aufgehenden Primideale von K, und diese Complexe und die Primideale sind in der Weise aufeinander bezogen, dass in K^* die Zerlegung gilt:

$$\mathfrak{P}_i = (\Pi \mathfrak{P}^* \,|\, S_i^{-1} H)^{\gamma_i},$$

wo sich das Product auf alle von einander verschiedenen Primideale von K^* bezieht, welche durch die Substitutionen des Complexes $S_i^{-1} H$ aus $\mathfrak{P}^*$ hervorgehen(8).

Setzt man nun

$$\mathfrak{P}' = \mathfrak{P}_i \,|\, S_i,$$

dann ist $\mathfrak{P}'$ das durch $\mathfrak{P}^*$ teilbares Primideal in dem mit K conjugirten Körper $K' = K \,|\, S_i$, und es ist

$$\left\{\frac{A}{\mathfrak{P}_i}\right\} = \left\{\frac{A \,|\, S_i}{\mathfrak{P}'}\right\}',$$

wo mit dem angesetzten Strich der Potenzcharacter in K' angedeutet wird. Demnach ist nach (3)

$$\left\{\frac{A}{\mathfrak{p}}\right\} = \prod^{i} \left(\frac{A}{\mathfrak{P}_i}\right)^{g_i} = \prod^{i} \left\{\frac{A \,|\, S_i}{\mathfrak{P}'}\right\}'^{\,g_i}, \quad (i=1, 2, \cdots e) \tag{6}$$

wo in jedem Factor des letzten, auf die e Complexe (5) bezogenen Productes S_i durch jede Substitution des Complexes HS_iG_z ersetzt werden kann: dadurch wird wohl K' aber nicht $\mathfrak{P}'$ verändert.

(8) H. Weber, Lehrbuch der Algebra, 2. (2. Aufl.) § 179; G. Landsberg, über Reduction von Gleichungen durch Adjunction, Crelles Jour. 132, S. 1. (insbesondere S. 11–20).

Nun sei, indem wir den Index bei S einfachheitshalber weglassen,

$$HSG_z = HS + HS' + \cdots + HS^{(\nu-1)}, \qquad (7)$$

sodass nach (1) $\Sigma\nu = M$ wird, wenn über alle e Complexe (5) summirt wird.

Ist dann wie früher $K' = K|S$, und $H' = S^{-1}HS$ die entsprechende Untergruppe von G, ferner H_z', H_t' die Durchschnitte von H' und G_z bez. G_t, dann sind H_z', H_t' die Zerlegungs- und die Trägheitsgruppe von $\mathfrak{P}^*$ im Relativkörper K'/k. Die Zahl ν in (7) ist aber gleich dem Gruppenindex $(G_z : H'_z)$, also

$$\nu = fg,$$

wenn f der Relativgrad von $\mathfrak{P}'$ in Bezug auf k, und g der Exponent der höchsten in $\mathfrak{p}$ aufgehenden Potenz von $\mathfrak{P}'$ bedeutet. (Daher ist $g = g_i$, wenn wie früher $\mathfrak{P}' = \mathfrak{P}_i | S$ ist).

Sei nun Z eine derjenigen Substitutionen von G_z, für welche jede ganze Zahl Ω von K^* die Congruenz:

$$\Omega | Z \equiv \Omega^P \pmod{\mathfrak{P}^*}$$

befriedigt; und es sei Z^t die niedrigste Potenz von Z, die in H' also in H_z' vorkommt. Da dann

$$\Omega | Z^t \equiv \Omega^{P^t} \pmod{\mathfrak{P}^*},$$

so muss t durch f teilbar sein, weil die Norm von $\mathfrak{P}^*$ in K' gleich P^f und H_z' die Zerlegungsgruppe von $\mathfrak{P}^*$ in Bezug auf K' ist. Umgekehrt muss aber in H'_z eine Substitution Z_0 enthalten sein, von der Art, dass

$$\Omega | Z_0 \equiv \Omega^{P^f} \pmod{\mathfrak{P}^*}.$$

Demnach ist

$$\Omega | Z_0 \equiv \Omega | Z^f \pmod{\mathfrak{P}^*},$$

also $Z^f Z_0^{-1}$ in H'_t, folglich in H'_z enthalten, sodass Z^f in H_z', folglich in H' vorkommt.

Ist also S eine beliebige Substitution des Complexes HSG_z, dann sind die f Complexe

$$HS,\ HSZ,\ \cdots\ HSZ^{f-1} \qquad (8)$$

in dem Complexe (7) enthalten, und diese f Complexe sind von einander verschieden. Ist ferner S' eine Substitution desselben

Complexes (7), die in keinem der Complexe (8) enthalten ist, dann sind die weiteren f Complexe

$$HS', \; HS'Z, \; \cdots \; HS'Z^{f-1}$$

in (7) enthalten, welche sowohl von einander als auch von (8) verschieden sind. So fortfahrend zerlegt man den Complex HSG_z in g Systeme von je f Complexe wie (8).

Nun ist

$$A \mid SZ^n \equiv (A \mid S)^{P^n} \pmod{\mathfrak{P}^*}.$$

Daher

$$\left(\prod_{0,\,f-1}^{n} A \mid SZ^n\right)^{\frac{P-1}{l}} \equiv (A \mid S)^{(1+P+\,\cdot\,\cdot\,+P^{f-1})\frac{P-1}{l}}$$

$$\equiv (A \mid S)^{\frac{P^f-1}{l}}$$

$$\equiv \left\{\frac{A \mid S}{\mathfrak{P}'}\right\}' \pmod{\mathfrak{P}^*}$$

$$= \left\{\frac{A}{\mathfrak{P}_i}\right\},$$

wenn $S = S_i$ dem Complexe HS_iG_z in (5) angehört; folglich ist

$$\left(\prod^{n} A \mid S^{(n)}\right)^{\frac{P-1}{l}} \equiv \left\{\frac{A}{\mathfrak{P}_i}\right\}^{g_i} \pmod{\mathfrak{P}^*},$$

wenn das Product links über die ν Substitutionen $S^{(n)}$ in (7) erstreckt wird. Endlich ist nach (6)

$$\left(\prod_{1,\,M}^{i} A \mid S_i\right)^{\frac{P-1}{l}} \equiv \prod_{1,\,e}^{i} \left\{\frac{A}{\mathfrak{P}_i}\right\}^{g_i}$$

$$\equiv \left\{\frac{A}{\mathfrak{p}}\right\} \pmod{\mathfrak{P}^*},$$

wenn links das Product über alle $\Sigma\nu = M$ Substitutionen S_i in (1) erstreckt wird. Nach (2) ist also

$$a^{\frac{p-1}{l}} \equiv \left\{\frac{A}{\mathfrak{p}}\right\} \pmod{\mathfrak{P}^*}.$$

Daher nach (4)

$$\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{p}}\right) \equiv \left\{\frac{A}{\mathfrak{p}}\right\} \pmod{\mathfrak{P}^*},$$

woraus, da $\mathfrak{P}^*$ prim zu l ist,

$$\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{p}}\right) = \left\{\frac{A}{\mathfrak{p}}\right\},$$

w. z. b. w.

I. Das Reciprocitätsgesetz für die Potenzcharactere eines ungeraden Primzahlgrades.

§ 3.

Kennzeichen für das Repräsentantensystem der Basisclassen.

In diesem I. Teil bedeutet l eine ungerade Primzahl. Ist ferner r die Anzahl der unabhängigen Grundeinheiten, h der Rang der absoluten Classengruppe von k, dann existiren nach Satz 1 h unabhängige singuläre Primärzahlen, sodass jede Zahl von k, welche eine Einheit oder eine l-te Potenz des Ideals von k ist, auf eine und nur eine Weise in der Form

$$\eta_1^{u_1} \cdots \eta_{r+1}^{u_{r+1}} \omega_1^{v_1} \cdots \omega_h^{v_h} \xi^l \qquad (1)$$

darstellbar ist, wenn die Exponenten $u_1, \cdots v_1, \cdots$ Zahlen aus der Reihe $0, 1, \cdots l-1$ sind und ξ eine Zahl von k ist; hierbei bedeuten $\omega_1, \cdots \omega_h$ die singulären Primärzahlen, und $\eta_1, \cdots \eta_{r+1}$ Einheiten oder Idealpotenzen, die nicht primär sind; eine Bezeichnung, die in der Folge durchgehends beibehalten werden soll.

Satz 7. *Die h Primideale $\mathfrak{i}_1, \cdots \mathfrak{i}_h$, für welche*

$$\left(\frac{\omega_a}{\mathfrak{i}_a}\right) \neq 1, \qquad \left(\frac{\omega_a}{\mathfrak{i}_b}\right) = 1, \qquad (a \neq b)$$

ausfällt (9), *repräsentiren die h Basisclassen von k in dem Sinne, dass für jedes Ideal $\mathfrak{r}$ von k eine Gleichung der Form*

---

(9) Bekanntlich existiren stets solche Primideale, vgl. Hilbert, Bericht, Satz 152, auch R. A. S. 16.

$$(\rho)=\mathfrak{r}\,\mathfrak{i}_1^{e_1}\cdots\mathfrak{i}_h^{e_h}\,\mathfrak{j}^l$$

gilt, wo ρ *eine Zahl,* $\mathfrak{j}$ *ein Ideal von* k *ist und* $e_1,\cdots e_h$ *das mit* $\mathfrak{r}$ *eindeutig bestimmte Exponentensystem aus der Reihe* 0, 1, $\cdots l-1$ *sind*(10).

Beweis. Setzt man

$$L=(1-\zeta)^l=\prod^{i}\mathfrak{l}_i^{\sigma_i l}$$

dann ist der Rang der Classengruppe von k nach dem Modul L offenbar gleich $r+1+h$. Ebenso gross beträgt aber der Rang der Classengruppe nach dem Modul $L\,\mathfrak{i}_1\cdots\mathfrak{i}_h$ (11). Dies hat zur Folge, dass für eine Zahl α von k nur dann

$$(\alpha)=\mathfrak{i}_1^{e_1}\cdots\mathfrak{i}_h^{e_h}\,\mathfrak{j}^l, \qquad (0\leqq e<l)$$

wenn die sämtlichen Exponenten $e_1,\cdots e_h$ verschwinden. Hiermit ist aber der Satz bewiesen.

Es sei noch bemerkt, dass wenn μ nicht singülar primär, auch nicht eine l-te Potenz in k ist, die h Ideale $\mathfrak{i}_1,\cdots\mathfrak{i}_h$ des obigen Satzes so gewählt werden kann, dass

$$\left(\frac{\mu}{\mathfrak{i}_a}\right)=1 \qquad (a=1,\ 2,\ \cdots h)$$

ausfällt; $\mathfrak{i}_1,\cdots\mathfrak{i}_h$ heissen dann *gegen* μ *normirt.*

§ 4.

Kennzeichen für das primäre Primideal.

Ein Ideal $\mathfrak{a}$ von k, für welches

$$\left(\frac{\eta_i}{\mathfrak{a}}\right)=1, \qquad (i=1,\ 2,\ \cdots r+1)$$

$$\left(\frac{\omega_i}{\mathfrak{a}}\right)=1 \qquad (i=1,\ 2,\ \cdots h)$$

ausfällt, heisst ein *primäres* Ideal.

---

(10) Tatsächlich brauchen die Ideale $\mathfrak{i}$ nicht prim zu sein, wie in der Folge einleuchten wird.

(11) § 1, (1).

Satz 8. *Ist $\mathfrak{p}$ ein primäres Primideal, dann gibt es eine primäre Zahl ϖ (12) in k von der Art, dass*

$$(\varpi)=\mathfrak{p}\mathfrak{j}^l,$$

wo $\mathfrak{j}$ ein Ideal von k bedeutet.

Beweis. Nach Voraussetzung ist der Rang der Classengruppe nach dem Modul $\mathfrak{p}$ gleich $h+1$. Es gibt folglich eine primäre Zahl ϖ, wie der Satz verlangt.

Dieser Satz kann auch auf der folgenden Weise bewiesen werden. Nach dem Modul $L=(1-\zeta)^l$ ist der Rang der Classengruppe $r+1+h$. Der Classenkörper für die Hauptclasse ist offenbar

$$K=k\left(\sqrt[l]{\eta_1}\cdots\sqrt[l]{\eta_{r+1}},\ \sqrt[l]{\omega_1},\ \cdots\sqrt[l]{\omega_h}\ \right)$$

Da nach Voraussetzung $\mathfrak{p}$ in K in die Primideale ersten Relativgrades zerfällt, so gehört $\mathfrak{p}$ der Hauptclasse an (Satz 4); folglich gibt es eine Zahl ϖ derart, dass

$$(\varpi)=\mathfrak{p}\,\mathfrak{j}^l, \qquad \varpi\equiv\xi^l \pmod{L},$$

w. z. b. w.

Die Zahl ϖ heisst eine *Primärzahl des primären Primideals* $\mathfrak{p}$. Für ein gegebenes $\mathfrak{p}$ wird ϖ nur bis auf einen singulären primären Factor bestimmt. Man kann daher ϖ so wählen, dass sie gegen ein vorgeschriebenes Repräsentantensystem der Basisclassen normirt ist.

§ 5.

Kennzeichen für das hyperprimäre Primideal.

Die h unabhängigen singulären Primärzahlen $\omega_1,\cdots\omega_h$ seien so gewählt, dass sie prim zu l sind, und in dem System der l^h Zahlen:

$$\omega_1^{u_1}\cdots\omega_h^{u_h} \qquad (0\leqq u<l)$$

seien l^n hyperprimäre (13). Der Rang der Classengruppe nach dem Modul

(12) Primär heisst eine zu l prime Zahl von k, welche l-ter Rest nach dem Modul L ist. Die Relativdiscriminante von $K=k(\sqrt[l]{\mu})$ ist dann und nur dann prim zu l, wenn μ primär ist.

(13) Hyperprimär heisst eine zu l prime Zahl von k, wenn sie l-ter Rest mod $\overline{L}$ ist.

$$\bar{L}=\prod^{i}\mathfrak{l}_i^{\sigma_i l+1} \qquad (i=1, 2, \cdots z)$$

beträgt dann $r+1+h+z_0$, wenn

$$z_0=z-(h-n)$$

gesetzt wird. Daher gibt es z_0 Zahlen

$$\lambda_1, \cdots \lambda_{z_0},$$

welche ausser durch die l-ten Potenzen der Ideale nur noch durch die Ideale $\mathfrak{l}_1, \cdots \mathfrak{l}_z$ teilbar sind, und so beschaffen, dass erstens jede Zahl λ von der gesagten Eigenschaft in der Form

$$\lambda=\lambda_1^{u_1} \cdots \lambda_{z_0}^{u_{z_0}} [\eta, \omega, \xi^l] \tag{1}$$

darstellbar ist, wo $u_1, \cdots u_{z_0}$ Zahlen aus der Reihe $0, 1, \cdots l-1$ sind und das Zeichen $[\eta, \omega, \xi^l]$ in allgemeiner Weise eine Zahl von der Form

$$\eta_1^{v_1} \cdots \eta_{r+1}^{v_{r+1}} \omega_1^{w_1} \cdots \omega_h^{w_h} \xi^l$$

bedeutet, und dass zweitens eine Zahl von der Form (1) nur dann gleich 1 sein kann, wenn die sämtlichen Exponenten $u_1, \cdots u_{z_0}$ verschwinden.

Ein Ideal $\mathfrak{a}$ von k heisst *hyperprimär*, wenn für jede Zahl λ in (1)

$$\left(\frac{\lambda}{\mathfrak{a}}\right)=1$$

ausfällt, d.h. wenn $\mathfrak{a}$ primär ist und ausserdem noch

$$\left(\frac{\lambda_i}{\mathfrak{a}}\right)=1. \quad (i=1, 2, \cdots z_0)$$

Satz 9. *Ist $\mathfrak{p}$ ein hyperprimäres Primideal, dann gibt es eine hyperprimäre Zahl ϖ von der Art, dass*

$$(\varpi)=\mathfrak{p}\mathfrak{j}^l.$$

Beweis. Der Classenkörper für die Hauptclasse nach dem Modul $\bar{L}$ ist

$$K=k\left(\sqrt[l]{\eta_1}, \cdots \sqrt[l]{\omega_1}, \cdots \sqrt[l]{\lambda_1}, \cdots\right)$$

vom Relativgrade $r+1+h+z_0$. Da nach Voraussetzung $\mathfrak{p}$ in die Primideale des ersten Relativgrades in K zerfällt, so ist $\mathfrak{p}$ in der Hauptclasse enthalten. Folglich gibt es eine Zahl ϖ von der Art, dass

$$(\varpi)=\mathfrak{p}\mathfrak{j}^l, \qquad \varpi\equiv\xi^l \pmod{\bar{L}},$$

w. z. b. w [14].

§ 6

Das Reciprocitätsgesetz zwischen einer primären Zahl und einer beliebigen zu l primen Zahl.

Hülfssatz 1. *Es sei* ϖ *eine Primärzahl eines primären Primideals* $\mathfrak{p}$; $\mathfrak{i}_1, \cdots \mathfrak{i}_h$ *ein Repräsentantensystem der Basisclassen, welches gegen* ϖ *normirt ist; ferner sei* $\bar{\mathfrak{r}}$ *ein zu* ϖ *und zu* l *primes Primideal und*

$$\rho=\mathfrak{r}\mathfrak{i}_1^{e_1}\cdots\mathfrak{i}_h^{e_h}\mathfrak{j}^l,$$

wo ρ *eine Zahl,* $\mathfrak{j}$ *ein Ideal von* k *bedeutet, beides prim zu* l *angenommen. Dann ist*

$$\left(\frac{\varpi}{\mathfrak{r}}\right)=\left(\frac{\varpi}{\rho}\right)=1,$$

dann und nur dann, wenn

$$\left(\frac{\rho}{\mathfrak{p}}\right)=\left(\frac{\rho}{\varpi}\right)=1$$

ausfällt.

Beweis. Da die Relativdiscriminante von $K=k(\sqrt[l]{\varpi})$ gleich $\mathfrak{p}^{l-1}$ ist, so wird die zugehörige Classengruppe von k durch eine Character-gleichung

$$\chi(\mathfrak{r})=\zeta^{e_1u_1+\cdots e_hu_h}\left(\frac{\rho}{\mathfrak{p}}\right)^v=1$$

definirt sein, wo $v\neq0$, weil K kein unverzweigter Körper ist [15]. Da nach Voraussetzung

$$\left(\frac{\varpi}{\mathfrak{i}_a}\right)=1, \qquad (a=1,\ 2,\ \cdots h)$$

so folgt aus

$$\chi(\mathfrak{i}_a)=1,$$

[14] Satz 8 und Satz 9 gelten auch für nicht primes Ideal, wie in der Folge einleuchten wird.

[15] § 1. (4).

dass $u_1 = \cdots = u_h = 0$ sein muss. Daher folgt nach Satz 4 der zu beweisende Hülfssatz. (Es ist vorausgesetzt, was erlaubt ist, dass $\mathfrak{i}_1, \cdots \mathfrak{i}_z$ Primideale sind).

Hülfssatz 2. *Ist ϖ eine Primärzahl eines primären Primideals $\mathfrak{p}$, und q eine zu ϖ und zu l prime rationale Primzahl, dann ist*

$$\left(\frac{\varpi}{q}\right) = \left(\frac{q}{\varpi}\right).$$

Beweis. Sei

$$\varpi_0 = \mathrm{n}(\varpi),$$

wo n die Relativnorm in Bezug auf den durch ζ definirten Kreiskörper bedeutet. Da dann ϖ_0 primär ist, so folgt aus dem sogenannten Eisenstein'schen Reciprocitätsgesetz ([16])

$$\left[\frac{\varpi_0}{q}\right] = \left[\frac{q}{\varpi_0}\right],$$

wo die eckigen Klammern Potenzcharactere im Kreiskörper bedeuten. Da nach Satz 5 und 6

$$\left(\frac{q}{\varpi}\right) = \left[\frac{q}{\varpi_0}\right], \quad \left(\frac{\varpi}{q}\right) = \left[\frac{\varpi}{q_0}\right],$$

so folgt

$$\left(\frac{\varpi}{q}\right) = \left(\frac{q}{\varpi}\right).$$

Hülfssatz 3. *Seien $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ Primideale,*

$$\alpha = \mathfrak{a}\,[\mathfrak{i}], \qquad \beta = \mathfrak{b}\,[\mathfrak{i}],$$

wo α, β Zahlen von k sind, und das Zeichen $[\mathfrak{i}]$ allgemein ein Idealproduct von der Form

$$\mathfrak{i}_1^{e_1} \cdots \mathfrak{i}_h^{e_h}\,\mathfrak{j}^l$$

bedeutet, unter $\mathfrak{i}_1, \cdots \mathfrak{i}_h$ ein Repräsentantensystem der Basisclassen verstanden. Dann gibt es unendlichviele primäre Primideale $\mathfrak{p}_0$ mit den zugehörigen, gegen $[\mathfrak{i}]$ normirten Primärzahlen ϖ_0 von der Art, dass, wenn ζ_1, ζ_2 beliebige l-te Einheitswurzeln sind,

---

([16]) Vgl. Hilbert, Bericht, Satz 140.

$$\left(\frac{\alpha}{\varpi_0}\right)=\left(\frac{\varpi_0}{\alpha}\right)=\zeta_1^n, \qquad n \not\equiv 0 \pmod{l}$$
$$\left(\frac{\beta}{\varpi_0}\right)=\left(\frac{\varpi_0}{\beta}\right)=\zeta_2^n,$$

ausfällt.

Beweis. Seien a, b bez. die durch $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ teilbaren rationalen Primzahlen, und es sei in Primfactoren zerlegt,

$$a=\mathfrak{a}^u\mathfrak{a}'^{u'}\ldots, \quad b=\mathfrak{b}^v\mathfrak{b}'^{v'}\ldots \tag{1}$$

Wir nehmen an, es sei

$$u \not\equiv 0, \quad v \not\equiv 0 \pmod{l}, \tag{2}$$
$$a \neq b, \tag{3}$$

denn wir benutzen diesen Hülfssatz nur in dem Falle, wo diese Bedingungen erfüllt sind. Ferner sei

$$\alpha'=\mathfrak{a}'[\mathfrak{i}], \cdots; \quad \beta'=\mathfrak{b}'[\mathfrak{i}], \cdots$$

sodass

$$\left.\begin{aligned} \alpha^u\alpha'^{u'}\ldots &= a\,[\eta,\ \omega,\ \xi^l] \\ \beta^v\beta'^{v'}\ldots &= b\,[\eta,\ \omega,\ \xi^l] \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Nun sei $\mathfrak{p}_0$ ein Primideal (ersten Grades), für welches

$$\left\{\begin{aligned} &\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{p}_0}\right)=\zeta_1^n,\ \left(\frac{\alpha'}{\mathfrak{p}_0}\right)=1,\ \cdots && (5) \\ &\left(\frac{\beta}{\mathfrak{p}_0}\right)=\zeta_2^n,\ \left(\frac{\beta'}{\mathfrak{p}_0}\right)=1,\ \cdots && (6) \\ &\left(\frac{\eta}{\mathfrak{p}_0}\right)=1,\ \cdots \left(\frac{\omega}{\mathfrak{p}_0}\right)=1,\ \cdots && (7) \end{aligned}\right.$$

ausfällt. Ist dann ϖ_0 die gegen $[\mathfrak{i}]$ normirte Primärzahl dieses primären Primideals $\mathfrak{p}_0$, so folgt aus (4), (5), (6), (7)

$$\left(\frac{\alpha^u\alpha'^{u'}\ldots}{\mathfrak{p}_0}\right)=\left(\frac{a}{\mathfrak{p}_0}\right)=\zeta_1^{nu},$$
$$\left(\frac{\beta^v\beta'^{v'}\ldots}{\mathfrak{p}_0}\right)=\left(\frac{b}{\mathfrak{p}_0}\right)=\zeta_2^{nv}.$$

Folglich ist nach Hülfssatz 2

$$\left(\frac{\varpi_0}{a}\right)=\zeta_1^{nu}, \qquad \left(\frac{\varpi_0}{b}\right)=\zeta_2^{nv}. \tag{8}$$

Aus (5), (6) folgt anderseits nach Hülfssatz 1

$$\left(\frac{\varpi_0}{\alpha'}\right)=1, \quad \cdots \quad \left(\frac{\varpi_0}{\beta'}\right)=1, \tag{9}$$

Daher ist, nach (4), (8), (9)

$$\left(\frac{\varpi_0}{\alpha}\right)^u=\zeta_1^{nu}, \quad \left(\frac{\varpi_0}{\beta}\right)=\zeta_2^{nv},$$

folglich nach (2)

$$\left(\frac{\varpi_0}{\alpha}\right)=\zeta_1^n, \quad \left(\frac{\varpi_0}{\beta}\right)=\zeta_2^n.$$

Hülfssatz 4. *Es seien α, β gegen das System* [$\mathfrak{i}$] *normirte Primärzahlen der primären Primideale* $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$; $\mathfrak{r}$ *ein zu* α, β *und* l *primes Primideal und* $\rho=\mathfrak{r}[\mathfrak{i}]$, *dann ist für einen ganzzahligen Exponenten e*

$$\left(\frac{\alpha\beta^e}{\mathfrak{r}}\right)=1,$$

dann und nur dann, wenn

$$\left(\frac{\rho}{\alpha\beta^e}\right)=1.$$

Beweis. Wir machen dieselbe Annahme (2), (3) wie bei dem Beweise von Hülfssatz 3. Da $\alpha\beta^e$ primär und gegen [$\mathfrak{i}$] normirt ist, so folgt, wie beim Beweise von Hülfssatz 1, dass die Classengruppe mod $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$, welche dem Körper $K=k(\sqrt[l]{\alpha\beta^e})$ zugeordnet ist, durch eine Character-gleichung

$$\chi(\mathfrak{r})=\left(\frac{\rho}{\mathfrak{a}}\right)^v\left(\frac{\rho}{\mathfrak{b}}\right)^{v'}=1 \tag{10}$$

definirt wird. Es handelt sich darum, zu zeigen, dass

$$v\not\equiv 0, \quad v'\equiv ve \pmod{l}$$

sein muss.

Es seien ζ_1, ζ_2 l-te Einheitswurzeln, welche die Bedingungen

$$\zeta_1\zeta_2^e=1, \quad \zeta_2\not\equiv 1 \tag{11}$$

befriedigen, und $\mathfrak{p}_0$, ϖ_0 das primäre Primideal und die zugehörige Primärzahl wie sie in Hülfssatz 3 erklärt worden sind. Da dann nach (11)

$$\left(\frac{\alpha\beta^e}{\mathfrak{p}_0}\right)=1$$

ausfällt, so folgt nach (10)

$$\left(\frac{\varpi_0}{\mathfrak{a}}\right)^v \left(\frac{\bar{\varpi}_0}{\mathfrak{b}}\right)^{v'} = 1. \tag{12}$$

Anderseits ist nach Hülfssatz 3

$$\left(\frac{\varpi_0}{\mathfrak{a}}\right) = \left(\frac{\varpi_0}{\alpha}\right) = \zeta_1^n,$$

$$\left(\frac{\varpi_0}{\mathfrak{b}}\right) = \left(\frac{\varpi_0}{\beta}\right) = \zeta_2^n, \qquad n \not\equiv 0 \pmod{l}.$$

Daher folgt aus (12)

$$\zeta_1^v \zeta_2^{v'} = 1.$$

Dies in Verbindung mit (11) ergibt

$$v' \equiv ve \pmod{l}.$$

Sodann folgt, dass notwendig $v \not\equiv 0 \pmod{l}$ sein muss, weil sonst für jedes $\mathfrak{r}$, $\chi(\mathfrak{r}) = 1$ ausfiele.

Hülfssatz 5. *Wenn ϖ eine Primärzahl eines primären Primideals $\mathfrak{p}$ ist, und ν eine beliebige zu ϖ und zu l prime Zahl, dann gilt die Reciprocitätsgleichung:*

$$\left(\frac{\varpi}{\nu}\right) = \left(\frac{\nu}{\varpi}\right).$$

Beweis. Wir nehmen das Repräsentantensystem [i] der Basisclassen gegen ϖ normirt an. Es sei dann $\mathfrak{r}$ ein beliebiges zu ϖ und zu l primes Primideal und $\rho = \mathfrak{r}[\mathrm{i}]$. Wir beweisen zunächst den Satz für $\nu = \rho$.

Da nach Hülfssatz 1 der Satz richtig ist, wenn $\left(\frac{\varpi}{\mathfrak{r}}\right) = 1$, so nehmen wir an: es sei

$$\left(\frac{\varpi}{\mathfrak{r}}\right) = \zeta_1 \neq 1. \tag{13}$$

Wir bestimmen dann nach Hülfssatz 3 ein primäres Primideal $\mathfrak{p}_0$ und die gegen [i] normirte Primärzahl ϖ_0 desselben, von der Art, dass

$$\left(\frac{\varpi_0}{\mathfrak{r}}\right) = \left(\frac{\rho}{\varpi_0}\right) = \zeta_2 \neq 1. \tag{14}$$

Ist dann

$$\zeta_1 \zeta_2^e = 1, \tag{15}$$

dann folgt aus (13), (14)

$$\left(\frac{\varpi \varpi_0^e}{\mathfrak{r}}\right) = 1.$$

Daher ist nach Hülfssatz 4

$$\left(\frac{\rho}{\varpi \varpi_0^e}\right) = 1,$$

woraus nach (14) und (15)

$$\left(\frac{\rho}{\varpi}\right) \equiv \zeta_1$$

oder nach (13)

$$\left(\frac{\varpi}{\rho}\right) = \left(\frac{\rho}{\varpi}\right).$$

Nunmehr sei ν eine beliebige zu ϖ und zu l prime Zahl von k, und

$$(\nu) = \mathfrak{r}_1^{a_1} \mathfrak{r}_2^{a_2} \cdots \mathfrak{j}^l,$$

wo $\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, \cdots$ von einander verschiedene Primideale von k und die Exponenten $a_1, a_2, \cdots$ nicht durch l teilbar sind.

Setzt man dann

$$\rho_1 = \mathfrak{r}_1[\mathfrak{i}], \quad \rho_2 = \mathfrak{r}_2[\mathfrak{i}], \cdots$$

so wird

$$\nu = \rho_1^{a_1} \rho_2^{a_1} \cdots [\eta, \omega, \xi^l],$$

wo $[\mathfrak{i}]$ und folglich $[\eta, \omega, \xi^l]$ prim zu ϖ und l angenommen werden können. Es ist dann nach dem vorhin bewiesenen

$$\begin{aligned}\left(\frac{\varpi}{\nu}\right) = \left(\frac{\varpi}{\rho_1}\right)^{a_1}\left(\frac{\varpi}{\rho_2}\right)^{a_2} \cdots &= \left(\frac{\rho_1}{\varpi}\right)^{a_1}\left(\frac{\rho_2}{\varpi}\right)^{a_2} \cdots \\ &= \left(\frac{\rho_1^{a_1} \rho_2^{a_2} \cdots}{\varpi}\right) \\ &= \left(\frac{\nu}{\varpi}\right),\end{aligned}$$

da $\mathfrak{p}$ primär und folglich

$$\left(\frac{[\eta, \omega, \xi^l]}{\varpi}\right) = 1.$$

Satz 10. *Ist μ primär, ν prim zu μ und l, dann besteht die Reciprocitätsgleichung:*

$$\left(\frac{\mu}{\nu}\right)=\left(\frac{\nu}{\mu}\right).$$

Beweis. Es sei

$$(\mu)=\mathfrak{p}_1^{a_1}\mathfrak{p}_2^{a_2}\cdots\mathfrak{p}_t^{a_t}\,\mathfrak{j}^l, \tag{16}$$

wo $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \cdots \mathfrak{p}_t$ von einander verschiedene Primideale und die Exponenten $a_1, a_2, \cdots a_t$ nicht durch l teilbar sind.

Sei $\mathfrak{r}$ ein zu μ und l primes Primideal, und

$$\rho=\mathfrak{r}[\mathfrak{i}],$$

wo $[\mathfrak{i}]$ gegen μ normirt ist. Dann ist, wie beim Beweise von Hülfssatz 4

$$\left(\frac{\mu}{\mathfrak{r}}\right)=1,$$

dann und nur dann, wenn

$$\left(\frac{\rho}{\mathfrak{p}_1}\right)^{v_1}\left(\frac{\rho}{\mathfrak{p}_1}\right)^{v_2}\cdots\left(\frac{\rho}{\mathfrak{p}_t}\right)^{v_t}=1, \tag{17}$$

wo die Exponenten v von $\mathfrak{r}$ unabhängig sind. Es handelt sich darum, zu zeigen, dass

$$v_1 : v_2 : \cdots : v_t \equiv a_1 : a_2 : \cdots : a_t \pmod{l}.$$

Man bestimme zu diesem Behuf ein primäres Primideal $\mathfrak{p}_0$ und die zugehörige Primärzahl ϖ_0 so, dass

$$\left(\frac{\varpi_1}{\mathfrak{p}_0}\right)=\zeta^{na_2}, \quad \left(\frac{\varpi_2}{\mathfrak{p}_0}\right)=\zeta^{-na_1}, \quad \left(\frac{\varpi_3}{\mathfrak{p}_0}\right)=\cdots\left(\frac{\varpi_t}{\mathfrak{p}_0}\right)=1,$$

$$n\not\equiv 0 \pmod{l},$$

wo

$$\varpi_i=\mathfrak{p}_i[\mathfrak{i}] \qquad (i=1, 2, \cdots t)$$

(vgl. Hülfsstaz 3). Dann folgt nach Hülfssatz 5

$$\left(\frac{\varpi_0}{\mathfrak{p}_1}\right)=\zeta^{na_2}, \left(\frac{\varpi_0}{\mathfrak{p}_2}\right)=\zeta^{-na_1}, \left(\frac{\varpi_0}{\mathfrak{p}_3}\right)=\cdots=\left(\frac{\varpi_0}{\mathfrak{p}_t}\right)=1, \tag{18}$$

woraus nach (16)

$$\left(\frac{\varpi_0}{\mu}\right)=1,$$

also nach Hülfssatz 5

$$\left(\frac{\mu}{\varpi_0}\right)=\left(\frac{\mu}{\mathfrak{p}_0}\right)=1.$$

Daher muss nach (17)

$$\left(\frac{\varpi_0}{\mathfrak{p}_1}\right)^{v_1}\left(\frac{\varpi_0}{\mathfrak{p}_2}\right)^{v_2}\cdots\left(\frac{\varpi_0}{\mathfrak{p}_t}\right)^{v_t}=1,$$

oder nach (18)

$$\zeta^{n(a_2v_1-a_1v_2)}=1,$$

und weil $n\not\equiv 0 \pmod{l}$,

$$a_2v_1-a_1v_2\equiv 0 \pmod{l}.$$

Ebenso folgt

$$a_iv_1-a_1v_i\equiv 0 \pmod{l}. \quad (i=1, 2, \cdots t)$$

Da offenbar nicht alle v verschwinden können, so erhält man

$$v_i\equiv a_iw \pmod{l},$$

wo $w\not\equiv 0 \pmod{l}$, w. z. b. w.

Fernerhin verläuft der Beweis genau wie bei Hülfssatz 5.

Oben haben wir angenommen, dass $t>1$. Ist $t=1$, also

$$(\mu)=\mathfrak{p}^a\mathfrak{j}^l, \quad a\not\equiv 0 \pmod{l},$$

dann kann man genau wie bei Hülfssatz 5 verfahren (Tatsächlich ist $\mathfrak{p}$ ein primäres Primideal). Man kann auch ebenso wie im folgenden Falle: $t=0$ verfahren.

Wenn $t=0$, also $\mu=\omega$ singulär primär ist, dann sei μ_0 eine beliebige nicht singuläre zu ν prime primäre Zahl; dann ist

$$\left(\frac{\omega\mu_0}{\nu}\right)=\left(\frac{\nu}{\omega\mu_0}\right).$$

Da aber

$$\left(\frac{\mu_0}{\nu}\right)=\left(\frac{\nu}{\mu_0}\right),$$

so folgt

$$\left(\frac{\omega}{\nu}\right)=\left(\frac{\nu}{\omega}\right)=1.$$

Diesen Specialfall von Satz 10 sprechen wir noch als einen besonderen Satz aus.

Satz 11. *Wenn ω eine singuläre Primärzahl ist, so gilt für jede zu ω und zu l prime Zahl ν die Beziehung:*

$$\left(\frac{\omega}{\nu}\right)=1.$$

Es ist zu bemerken, dass Satz 10 nur unter der Voraussetzung bewiesen worden ist, dass alle in μ und ν aufgehenden Primideale die zu Beginn des Beweises von Hülfssatz 3 gestellte Bedingung (2) erfüllen: es sollen nämlich diese Primideale in eine rationale Primzahl zu einer Potenz aufgehen, deren Exponent nicht durch l teilbar ist. Es werden also eine gewisse endliche Anzahl Primideale, die in die Discriminante von k aufgehen, ausser Betracht gelassen. Diese beschränkende Voraussetzung soll nun im folgenden Artikel beseitigt werden ([17]).

§ 7.

Beseitigung der beschränkenden Annahme.

Alle Primideale von k, für welche die im Hülfssatze 3 des vorhergehenden Artikels gestellte Forderung erfüllt werden können, wollen wir vorübergehend als *regulär* bezeichnen. Ebenso wollen wir eine Zahl oder ein Ideal von k regulär nennen, wenn darin ein nicht reguläres Primideal gar nicht oder nur zu einer Potenz mit einem durch l teilbaren Exponenten als Factor enthalten ist.

Ein nicht reguläres Primideal geht zu einer Potenz mit einem durch l teilbaren Exponenten in eine rationale Primzahl auf. Es kann daher in jedem Körper nur eine endliche Anzahl nicht regulärer Primideale geben. Zweck dieses Artikels ist aber nachzuweisen, dass überhaupt jedes zu l prime Primideal regulär ist.

(I) Sei μ eine reguläre primäre Zahl, $\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, \cdots \mathfrak{r}_h$ ein gegen μ normirtes Repräsentantensystem der Basisclassen von k, $\mathfrak{q}$ ein Primideal, $\varkappa=\mathfrak{q}[\mathfrak{r}, \mathfrak{j}^l]$. Ist dann

$$\left(\frac{\mu}{\mathfrak{q}}\right)=1,$$

([17]) Die zweite Annahme (3): $a \neq b$ bei Hülfssatz 3 ist ohne Belang, weil wir bei dem Beweis von Hülfssatz 5 den Hülfssatz 4 nur in dem Falle zu benutzen haben, wo diese Bedingung erfüllt ist.

dann ist, wie aus dem Beweise von Satz 10. zu entnehmen ist, notwendig

$$\left(\frac{\varkappa}{\mu}\right)=1,$$

auch dann noch, wenn $\mathfrak{q}$ nicht regulär wäre.

Ist aber

$$\left(\frac{\mu}{\mathfrak{q}}\right)\neq 1,$$

dann sei $\mathfrak{p}$ ein reguläres primäres Primideal von der Art, dass

$$\left(\frac{\varkappa}{\mathfrak{p}}\right)\neq 1.$$

Wenn dann ϖ die gegen $\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, \cdots \mathfrak{r}_h$ normirte Primärzahl von $\mathfrak{p}$ ist, so ist notwendig nach Hülfssatz 1

$$\left(\frac{\varpi}{\mathfrak{q}}\right)\neq 1.$$

Wir setzen

$$\left(\frac{\varkappa}{\varpi}\right)=\left(\frac{\varkappa}{\mathfrak{p}}\right)=\left(\frac{\varpi}{\mathfrak{q}}\right)^e, \qquad e\not\equiv 0 \pmod{l}. \qquad (1)$$

Sei nun eine natürliche Zahl n so bestimmt, dass

$$\left(\frac{\mu\varpi^n}{\mathfrak{q}}\right)=1 \qquad (2)$$

ausfällt. Da dann $\mu\varpi^n$ regulär und primär ist, so folgt

$$\left(\frac{\varkappa}{\mu\varpi^n}\right)=1. \qquad (3)$$

Aus (1), (2), (3) erhält man

$$\left(\frac{\varkappa}{\mu}\right)=\left(\frac{\mu}{\mathfrak{q}}\right)^e$$

Der Exponent e ist also dem Primideal $\mathfrak{q}$ eigen; er hängt nicht von μ ab; und $\mathfrak{q}$ ist regulär, wenn der zugehörige Exponent $e=1$ ist.

Ist aber μ regulär primär, ν durch $\mathfrak{q}^a$, sonst durch kein nicht reguläres Primideal teilbar, dann ist

$$\left(\frac{\mu}{\nu}\right)\left(\frac{\mu}{\mathfrak{q}}\right)^{a(e-1)}=\left(\frac{\nu}{\mu}\right).$$

Wenn daher $a\not\equiv 0 \pmod{l}$, $\left(\frac{\mu}{\mathfrak{q}}\right)\neq 1$ und zugleich $\left(\frac{\mu}{\nu}\right)=\left(\frac{\nu}{\mu}\right)$, dann ist notwendig $\mathfrak{q}$ regulär.

(II) Es sei K ein Oberkörper von k, $\mathfrak{Q}$ ein Primideal von K, welches in $\mathfrak{q}$ aufgeht und vom Relativgrade f ist, der nicht durch l teilbar ist:

$$N(\mathfrak{Q})=\mathfrak{q}^f, \qquad f\not\equiv 0 \pmod{l}.$$

Ist dann $\mathfrak{q}$ regulär in k, dann ist $\mathfrak{Q}$ regulär in K, und umgekehrt.

Denn sei A eine Zahl in K von der Art, dass

$$A=\mathfrak{Q}\mathfrak{A},$$
$$\alpha=N(A)=\mathfrak{q}^f\mathfrak{a},$$

wo $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{a}=N(\mathfrak{A})$ prim zu $\mathfrak{q}$ und regulär in K und k angenommen werden können. Ferner sei μ regulär und primär sowohl in k als in K, und

$$\left(\frac{\mu}{\mathfrak{q}}\right)\neq 1. \qquad (4)$$

Nach Satz 5 und 6 ist dann

$$\left\{\frac{\mu}{A}\right\}=\left(\frac{\mu}{\alpha}\right), \qquad \left\{\frac{A}{\mu}\right\}=\left(\frac{\alpha}{\mu}\right).$$

Ist daher $\mathfrak{q}$ regulär in k, sodass

$$\left(\frac{\mu}{\alpha}\right)=\left(\frac{\alpha}{\mu}\right), \qquad (5)$$

dann ist

$$\left\{\frac{\mu}{A}\right\}=\left\{\frac{A}{\mu}\right\}, \qquad (6)$$

und weil nach Annahme A nur durch die erste Potenz von $\mathfrak{q}$ teilbar, und

$$\left\{\frac{\mu}{\mathfrak{Q}}\right\}=\left(\frac{\mu}{\mathfrak{q}}\right)^f\neq 1$$

ist, so folgt nach (I), dass $\mathfrak{Q}$ regulär in K ist.

Ist umgekehrt $\mathfrak{Q}$ regulär in K, dann gilt zunächst (6), demnach auch (5), welches in Verbindung mit (4) zeigt, dass $\mathfrak{q}$ regulär in k sein muss.

(III) Im Oberkörper K von k bleibe $\mathfrak{q}=\mathfrak{Q}$ prim, oder es werde $\mathfrak{q}=\mathfrak{Q}^g$, $g\not\equiv 0 \pmod{l}$, wo $\mathfrak{Q}$ Primideal von K bedeutet. Ist dann $\mathfrak{q}$ regulär in k, dann ist $\mathfrak{Q}$ regulär in K, und umgekehrt.

Denn sei α eine Zahl in k von der Art, dass $\alpha=\mathfrak{q}\mathfrak{a}$, wo $\mathfrak{a}$ prim zu $\mathfrak{q}$ und regulär sowohl in k als auch in K ist. Ferner sei M eine primäre Zahl von K, sodass $\mu=N(M)$ primär ist. Wir nehmen, wie erlaubt, M so gewählt an, dass M und μ regulär in K und k sind, und dass

$$\left\{\frac{M}{\mathfrak{q}}\right\}=\left(\frac{\mu}{\mathfrak{q}}\right)\neq 1 \tag{7}$$

ausfällt.

Ist dann $\mathfrak{q}$ regulär in k, dann ist

$$\left(\frac{\mu}{\alpha}\right)=\left(\frac{\alpha}{\mu}\right), \tag{8}$$

folglich

$$\left\{\frac{M}{\alpha}\right\}=\left\{\frac{\alpha}{M}\right\}. \tag{9}$$

Da $\left\{\frac{M}{\mathfrak{q}}\right\}=\left\{\frac{M}{\mathfrak{Q}}\right\}^{g}\neq 1$, also $\left\{\frac{M}{\mathfrak{Q}}\right\}\neq 1$, so folgt nach (I), dass $\mathfrak{Q}$ regulär in K ist.

Umgekehrt, wenn $\mathfrak{Q}$ regulär in K ist, so gilt zunächst (9), folglich auch (8), woraus mit Hülfe von (7) zu schliessen ist, dass $\mathfrak{q}$ regulär in k ist.

(IV) Es sei nun q die durch das Primideal $\mathfrak{q}$ von k teilbare rationale Primzahl und

$$q=\mathfrak{q}^{a}\mathfrak{n}, \qquad a\equiv 0 \pmod{l},$$

wo $\mathfrak{n}$ prim zu $\mathfrak{q}$ ist. Ferner sei K ein Normalkörper, welcher k enthält, $\mathfrak{Q}$ ein in $\mathfrak{q}$ aufgehendes Primideal von K, und zwar seien $\mathfrak{Q}^{g}$, $\mathfrak{Q}^{\gamma}$ $(g=a\gamma)$ die höchsten in q bez. $\mathfrak{q}$ aufgehenden Potenzen von $\mathfrak{Q}$.

Sei K_t der Trägheitskörper von $\mathfrak{Q}$. Da dann $\mathfrak{Q}_0=\mathfrak{Q}^{g}$ Primideal von K_t ist, welches nur zur ersten Potenz in die rationale Primzahl q aufgeht, so ist $\mathfrak{Q}_0$ regulär in K_t.

Im Relativkörper K/K_t ist aber $\mathfrak{Q}$ vom ersten Relativgrade. Daher ist nach (II) $\mathfrak{Q}$ regulär in K.

Nunmehr seien k_z, k_t der Zerlegungs- und der Trägheitskörper von $\mathfrak{Q}$ in Bezug auf k, sodass $\mathfrak{q}^*=\mathfrak{Q}^{\gamma}$ Primideal in k_z und k_t ist.

Da $\mathfrak{Q}$ regulär in K, und vom ersten Relativgrade im Relativkörper K/k_t, so ist nach (II) $\mathfrak{q}^*$ regülar in k_t

Da ferner $\mathfrak{q}^*$ nicht im Relativkörper k_t/k_z zerfällt, so ist nach (III) $\mathfrak{q}^*$ regulär in k_z.

Endlich ist $\mathfrak{q}^*$ vom ersten Relativgrade im Relativkörper k_z/k, sodass nach (II) $\mathfrak{q}$ regulär in k sein muss.

Hiermit ist nachgewiesen, dass jedes zu l primes Primideal von k regulär, und somit Satz 10 ausnahmslos gültig ist.

§ 8

Das erste und das zweite Ergänzungssatz.

Satz 12. (*Das erste Ergänzungssatz*). *Wenn ε eine Einheit oder l-te Potenz eines Ideals von k ist, und wenn α eine zu ε prime primäre Zahl ist, dann gilt die Relation:*

$$\left(\frac{\varepsilon}{\alpha}\right)=1.$$

Satz 13. (*Das zweite Ergänzungssatz*). *Wenn λ eine Zahl ist, die ausser durch die l-ten Potenzen der Ideale nur noch durch die in l aufgehenden Primideale von k teilbar ist, und wenn α eine zu λ prime hyperprimäre Zahl ist, dann gilt die Relation:*

$$\left(\frac{\lambda}{\alpha}\right)=1.$$

Satz 12 ist ein Specialfall von Satz 10, und Satz 13 von den folgenden

Satz 14. *Wenn μ eine Zahl von k ist, und*

$$(\mu)=\mathfrak{m}\prod_i^i \mathfrak{l}_i^{a_i}, \qquad (a_i \geqq 0,\ i=1,\ 2,\ \cdots\ z) \tag{1}$$

wo $\mathfrak{m}$ zu l prim ist, und wenn ν eine zu μ prime primäre Zahl ist, für welche überdies, wenn a_i nicht durch l teilbar, die Congruenz

$$\nu \equiv \xi^l \pmod{\mathfrak{l}_i^{\sigma_i l+1}} \tag{2}$$

in k besteht, wo σ_i die in S. 3. angegebene Bedeutung hat, dann gilt die Relation:

$$\left(\frac{\mu}{\nu}\right)=\left(\frac{\nu}{\mathfrak{m}}\right).$$

Beweis. Wir legen ein gegen ν normirtes Repräsentantensystem der Basisclassen zu Grunde. Ist dann $\mathfrak{r}$ ein beliebiges zu ν primes Ideal von k, und

$$\rho=\mathfrak{r}[\mathrm{i}],$$

dann ist die dem Körper $K=k(\sqrt[l]{\nu})$ zugeordnete Classengruppe von k nach Satz 10 durch

$$\chi(\mathfrak{r})=\left(\frac{\rho}{\nu}\right)=1$$

characterisirt. Wenn nun a_i nicht durch l teilbar ist, dann zerfällt nach (2) das Primideal $\mathfrak{l}_i$ in K. Folglich ist nach Satz 4

$$\left(\frac{\lambda_i}{\nu}\right)=1, \tag{3}$$

wo

$$\lambda_i=\mathfrak{l}_i[\mathrm{i}]. \qquad (i=1,\ 2,\ \cdots z)$$

Wenn ferner

$$\mu_0=\mathfrak{m}[\mathrm{i}]$$

gesetzt wird, dann folgt nach (1)

$$\mu_0\overset{i}{\Pi}\lambda_i^{a_i}\overset{l}{=}\mu[\eta,\ \omega,\ \xi^l].$$

Daher ist nach (3)

$$\left(\frac{\mu}{\nu}\right)=\left(\frac{\mu_0}{\nu}\right)\overset{i}{\Pi}\left(\frac{\lambda_i}{\nu}\right)^{a_i}=\left(\frac{\mu_0}{\nu}\right).$$

Da anderseits nach Satz 10

$$\left(\frac{\mu_0}{\nu}\right)=\left(\frac{\nu}{\mu_0}\right)=\left(\frac{\nu}{\mathfrak{m}}\right),$$

so folgt die zu beweisende Gleichheit.

§ 9

Das allgemeine Reciprocitätsgesetz.

Es sei μ eine beliebige Zahl von k, und

$$(\mu)=\mathfrak{m}\overset{i}{\Pi}\mathfrak{l}_i^{a_i}, \tag{1}$$

wo $\mathfrak{m}$ zu l prim ist. Um das allgemeine Reciprocitätsgesetz bequem ausdrücken zu können, führen wir das Symbol (μ, ν) durch die folgende Definition ein:

$$(\mu, \nu)=\left(\frac{\mu}{\nu}\right)\left(\frac{\nu}{\mathfrak{m}}\right)^{-1}, \qquad (2)$$

wo unter ν, wie immer, eine zu μ und zu l prime Zahl von k zu verstehen ist.

Aus dieser Definition folgt

$$(\mu\mu', \nu)=(\mu, \nu)(\mu', \nu), \qquad (3)$$

$$(\mu, \nu\nu')=(\mu, \nu)(\mu, \nu'). \qquad (4)$$

Ferner ist nach Satz 10, wenn μ primär ist,

$$(\mu, \nu)=1. \qquad (5)$$

Wenn allgemeiner $\frac{\mu'}{\mu}$ primär ist, d.h. wenn $\frac{\mu'}{\mu}$ gleich einem Bruch $\frac{\mu_0'}{\mu_0}$ ist, wo μ_0, μ_0' prim zu l sind und eine Congruenz

$$\mu_0' \equiv \mu_0 \xi^l \pmod{L}$$

in k befriedigen, dann ist

$$(\mu, \nu)=(\mu', \nu). \qquad (6)$$

Denn setzt man

$$\frac{\mu'}{\mu}=\frac{\mu_0'}{\mu_0}=\frac{\mathfrak{m}'}{\mathfrak{m}},$$

wo $\mathfrak{m}$ für μ die in (1) angegebene, und $\mathfrak{m}'$ für μ' die entsprechende Bedeutung haben soll, so folgt

$$\left(\frac{\mu'}{\nu}\right)\left(\frac{\mu_0}{\nu}\right)=\left(\frac{\mu}{\nu}\right)\left(\frac{\mu_0'}{\nu}\right),$$

$$\left(\frac{\nu}{\mu_0}\right)\left(\frac{\nu}{\mathfrak{m}'}\right)=\left(\frac{\nu}{\mu_0'}\right)\left(\frac{\nu}{\mathfrak{m}}\right)$$

und durch Division

$$(\mu', \nu)(\mu_0, \nu)=(\mu, \nu)(\mu_0', \nu).$$

Sei nun $\mu_0\mu^*$ primär und prim zu ν, dann ist es auch $\mu'_0\mu^*$, sodass nach (5)

$$(\mu_0\mu^*, \nu)=(\mu_0'\mu^*, \nu)=1,$$

folglich

$$(\mu_0, \nu)=(\mu_0', \nu)$$

und somit

$$(\mu, \nu)=(\mu', \nu).$$

Nach dieser Vorbemerkung führen wir das zweite Symbol $Z_l(\mu, \nu)$ durch die folgende Festsetzung ein.

Es sei μ eine beliebige Zahl von k und wie in (1)

$$(\mu)=\mathfrak{m}\overset{i}{\Pi}\mathfrak{l}_i^{a_i},$$

Wir bestimmen dann ein System von z Zahlen

$$\mu_1, \mu_2, \cdots \mu_z$$

gemäss den Congruenzen:

$$\left.\begin{aligned}\mu_i&\equiv\mu\left(\operatorname{mod} \mathfrak{l}_i^{\sigma_i l+a_i}\right),\\ &\equiv 1\left(\operatorname{mod} \frac{L}{\mathfrak{l}_i^{\sigma_i l}}\right),\end{aligned}\right\}(i=1,\ 2,\ \cdots z) \qquad (7)$$

und wir setzen, wenn ν eine zu μ, l und zu $\mu_1, \mu_2, \cdots \mu_z$ prime Zahl von k ist,

$$Z_i(\mu, \nu)=(\mu_i, \nu). \quad (i=1,\ 2,\ \cdots z) \qquad (8)$$

In der Tat wird das Symbol $Z_i(\mu, \nu)$ durch diese Festsetzung unzweideutig bestimmt, denn wenn μ_i' eine andere Zahl ist, die den Congruenzen (7) genügt, dann ist offenbar $\frac{\mu_i'}{\mu_i}$ primär, also wie vorhin bemerkt

$$(\mu_i, \nu)=(\mu_i', \nu),$$

wenn nur μ_i' prim zu ν ist (18).

Das allgemine Reciprocitätsgesetz lässt sich nun in der folgenden Form ausdrücken:

Satz 15. **(Das allgemeine Reciprocitätsgesetz)** *Wenn ν zu μ und zu l prim ist, dann gilt die Relation:*

$$(\mu, \nu)=Z_1(\mu, \nu)Z_2(\mu, \nu) \cdots Z_z(\mu, \nu). \qquad (9)$$

Beweis. Formel ist dieser Satz eine unmittelbare Folge der Definition des Symbols $Z(\mu, \nu)$. Denn setzt man

$$\frac{\mu_1\mu_2 \cdots \mu_z}{\mu}=\frac{\alpha}{\beta},$$

wo α, β zu l prime Zahlen von k sind, dann folgt aus der Gleichung

$$\mu\alpha=\mu_1\mu_2 \cdots \mu_z\beta,$$

(18) Diese Beschränkung, sowie die, welche oben der Zahl ν auferlegt worden ist, prim zu $\mu_1, \mu_2, \cdots$ zu sein, ist nicht wesentlich, weil wir eben durch eine andere Wahl des Systems $\mu_1, \mu_2, \cdots$ entkommen.

indem man sie als eine Congruenz nach dem Modul $\mathfrak{l}_i^{\sigma l+a_i}$ auffasst, nach (7)

$$\alpha\equiv\beta \pmod{\mathfrak{l}_i^{\sigma_i l}}. \qquad (i=1,\ 2,\ \cdots z)$$

Daher ist $\frac{\alpha}{\beta}$ primär, folglich nach (6)

$$(\mu,\ \nu)=(\mu_1\mu_2\cdots\mu_z,\ \nu)$$
$$=(\mu_1,\ \nu)\,(\mu_2,\ \nu)\cdots(\mu_z,\ \nu),$$

woraus nach (8) die zu beweisende Gleichung (9) folgt.

Der sachliche Inhalt des Satzes 15 wird aber erst durch die Ausführungen im folgenden Artikel aufgeklärt werden.

§ 10

Das Normenrestsymbol $Z(\mu,\ \nu)$.

Das im vorhergehenden Artikel definirte Symbol $Z_i(\mu,\ \nu)$ ist das *Normenrestsymbol* in Bezug auf dem Oberkörper $K=k(\sqrt[l]{\mu})$ und das Primideal $\mathfrak{l}_i$ von k; es ist nämlich das Bestehen der Beziehung $Z_i(\mu,\ \nu)=1$ das Criterium dafür, dass ν ein Normenrest des Körpers K nach dem Modul $\mathfrak{l}_i^{v_i+1}$ ist, wo v_i in Bezug auf $\mathfrak{l}_i$ die in Satz 3 erklärte Bedeutung hat. Einfachheitshalber wollen wir zuvörderst einen Teil dieser Behauptung als einen besonderen Satz formuliren, der wie folgt lautet.

Satz. 16. *Wenn die Relativdiscriminante des Körpers $K=k(\sqrt[l]{\mu})$ prim zu $\mathfrak{l}$ ist, dann ist für jede zu μ und zu l prime Zahl ν von k*

$$Z(\mu,\ \nu)=1\,;$$

wenn dagegen $\mathfrak{l}$ in die Relativdiscriminante von K aufgeht, und wenn

$$\nu\equiv\xi^l \pmod{\mathfrak{l}^{v+1}}$$

in k, dann ist

$$Z(\mu,\ \nu)=1,$$

oder allgemeiner, wenn

$$\nu'\equiv\nu\xi^l \pmod{\mathfrak{l}^{v+1}},$$

dann ist

$$Z(\mu,\ \nu)=Z(\mu,\ \nu').$$

Hierbei haben $\mathfrak{l}$, Z, v *die bisherige Bedeutung von* $\mathfrak{l}_i$, Z_i, v_i; *die Indices sind einfachheitshalber weggelassen worden.*

Beweis. Die dem Primideal $\mathfrak{l}=\mathfrak{l}_i$ entsprechende Zahl μ_i wollen wir einfach mit μ, und demgemäss $Z(\mu, \nu)=(\mu_i, \nu)$ mit (μ, ν) bezeichnen. Der erste Teil des Satzes ist evident, weil für denselben μ primär ausfällt. Wir nehmen daher an, dass $\mathfrak{l}$ in die Relativdiscriminante von $K=k(\sqrt[l]{\mu})$ aufgeht, und zwar zunächst dass $\mu=\mathfrak{l}^a\mathfrak{m}$, wo $\mathfrak{m}$ zu $\mathfrak{l}$ prim und $a\not\equiv 0 \pmod{l}$, sodass $v=\sigma l$ ausfällt [19]. Ferner sei, wie vorausgesetzt

$$\nu' \equiv \nu\xi^l \pmod{\mathfrak{l}^{\sigma l+1}}, \tag{1}$$

Wir appelliren an den Satz der Existenz unendlichvieler Primideale in jeder Classe von k nach einem beliebigen Modul (Satz 2). Es sei demnach (ρ) ein Primideal von k von der Art, dass

$$\rho \equiv 1 \pmod{\mathfrak{l}^{\sigma l+1}\mathfrak{m}}, \tag{2}$$

$$\nu\rho \equiv \nu' \left(\mathrm{mod}\ \frac{L}{\mathfrak{l}^{\sigma l}}\right). \tag{3}$$

Da die Relativdiscriminante von K ausser der in $\mathfrak{m}$ aufgehenden nur noch das Primideal $\mathfrak{l}$ als Factor enthält, so folgt aus (2), dass (ρ) in K zerfallen muss (Satz 4), sodass

$$\left(\frac{\mu}{\rho}\right)=1.$$

Anderseits folgt aus eben derselben Congruenz (2)

$$\left(\frac{\rho}{\mathfrak{m}}\right)=1,$$

folglich ist

$$(\mu, \rho)=1 \tag{4}$$

Es sei nun eine zu μ prime Zahl von k aus der Congruenz

$$\nu\rho\beta \equiv 1 \pmod{\mathfrak{l}L} \tag{5}$$

bestimmt. Dann ist nach (3), (5)

$$\nu'\beta \equiv 1 \left(\mathrm{mod}\ \frac{L}{\mathfrak{l}^{\sigma l}}\right),$$

und nach (1), (2), (5)

$$\nu'\beta \equiv \xi^l \pmod{\mathfrak{l}^{\sigma l+1}}.$$

---

(19) Vgl. R.A. S. 26–27.

Daher ist

$$\nu'\beta \equiv \xi^n \pmod{\mathfrak{l}L} \qquad (6)$$

in k. Aus (5), (6) erhält man nach Satz 14

$$(\mu, \nu\rho\beta)=1,$$
$$(\mu, \nu'\beta)=1,$$

woraus mit Rücksicht auf (4) folgt

$$(\mu, \nu)=(\mu, \nu').$$

Wenn μ zu l prim, oder wenn $\mu=\mathfrak{l}^a\mathfrak{m}$, aber a durch l teilbar ist dann ist $v<\sigma l$ (19). Dann ist in (1) der Modul $\mathfrak{l}^{v+1}\,\mathfrak{m}$, und in (5) der Modul L zu setzen, und zuletzt Satz 10 statt Satz 14 heranzuziehen.

Satz 17. *Geht* $\mathfrak{l}_i$ *zur* $(v_i+1)(l-1)$ *ten Potenz in die Relativdiscriminante des Körpers* $K=k(\sqrt[l]{\mu})$ *auf, so ist* $Z_i(\mu, \nu)$ *dann und nur dann gleich* 1, *wenn* ν *Normenrest des Körpers* K *nach dem Modul* $\mathfrak{l}_i^{v_i+1}$ *ist.*

Beweis. Wir setzen

$$(\mu)=\mathfrak{m}\prod^{i}\mathfrak{l}_i^{a_i},$$

wo $\mathfrak{m}$ zu l prim ist, und führen den Beweis für $\mathfrak{l}_i=\mathfrak{l}_1$. Es sei zunächst ν Normenrest des Körpers K nach $\mathfrak{l}_1^{v_1+1}$ Wir bestimmen dann ein Primideal (ρ) von k von der Art, dass

$$\left.\begin{aligned} \rho &\equiv \nu\left(\operatorname{mod} \mathfrak{l}_1^{v_1+1}\right), \qquad &(7)\\ &\equiv 1\left(\operatorname{mod} \mathfrak{m}\,\mathfrak{l}_2^{v_2+1}\cdots\mathfrak{l}_z^{v_z+1}\right). \qquad &(8)\end{aligned}\right\}$$

Ist $\mathfrak{f}^{l-1}$ die Relativdiscriminante des Körpers K, dann ist nach (7), (8) ρ Normenrest des Körpers K nach $\mathfrak{f}$, infolgedessen (ρ) in K zerfällt (Satz 4), sodass

$$\left(\frac{\mu}{\rho}\right)=1.$$

Da anderseits nach (8)

$$\left(\frac{\rho}{\mathfrak{m}}\right)=1,$$

so folgt

$$(\mu, \rho)=1. \qquad (9)$$

Nach Satz 16 ist aber in Rücksicht auf (8)

$$Z_2(\mu, \rho) = \cdots = Z_z(\mu, \rho) = 1,$$

sodass nach (9)

$$Z_1(\mu, \rho) = 1,$$

(vgl. Satz 15). Aus (7) folgt daher nach Satz 16

$$Z_1(\mu, \nu) = 1.$$

Es bleibt übrig, nachzuweisen, dass wenn ν Normennichtrest nach $\mathfrak{l}_1^{v_1+1}$ ist, notwendig $Z_1(\mu, \nu) \neq 1$ ausfallen muss. Wenn $\mathfrak{l}_1$ nicht in die Relativdiscriminante von K aufgeht, dann ist nach Satz 16 $Z_1(\mu, \nu) = 1$ für jedes zu μ primes ν; in diesem Falle ist aber auch jede zu $\mathfrak{l}_1$ prime Zahl von k Normenrest nach $\mathfrak{l}_1$ (R. A., S. 28). Wenn dagegen $\mathfrak{l}_1$ in die Relativdiscriminante von K aufgeht, dann ist genau der l-te Teil von den zu $\mathfrak{l}_1$ primen Zahlclassen mod $\mathfrak{l}_1^{v_1+1}$ Normenrest von K nach $\mathfrak{l}_1^{v_1+1}$. Nach dem oben bewiesenen, genügt es daher nachzuweisen, dass $Z_1(\mu, \nu)$ nicht für jedes zu $\mathfrak{l}_1$ primes ν gleich 1 ausfallen kann. Dies folgt aber schon daraus, dass $\mathfrak{l}_1$ ein Factor des *Führers* $\mathfrak{f}$ der Classengruppe ist, welche dem Körper K zugeordnet ist, wenn man beachtet, dass nach Satz 16 der Wert des Symbols $Z_i(\mu, \nu)$ nur von der Zahlclassen mod $\mathfrak{l}_i^{v_i+1}$ abhängt, welcher die Zahl ν angehört. Wäre nämlich $Z_1(\mu, \nu) = 1$ für jedes ν so folgte

$$\left(\frac{\mu}{\nu}\right) = \left(\frac{\nu}{\mathfrak{m}}\right) Z_2(\mu, \nu) \cdots Z_z(\mu, \nu),$$

das heisse aber dass die gesagte Classengruppe nach dem Modul $\mathfrak{m}\,\mathfrak{l}_2^{v_2+1} \cdots \mathfrak{l}_z^{v_z+1}$ definirt werden könnte, was ausgeschlossen ist.

Als eine Anwendung des vorhergehenden Satzes wollen wir noch einen Satz beweisen, welcher eine Verallgemeinerung des Eisenstein'schen Reciprocitätsgesetzes ist.

Satz 18. *Ist a eine nicht durch l teilbare rationale Zahl, ν eine zu a und zu l prime Zahl von k, für welche*

$$\nu \equiv r \left(\mathrm{mod}\ \prod^{i} \mathfrak{l}_i^{n_i}\right), \quad n_i > \sigma_i, \ (i = 1, 2, \cdots z)$$

wo r eine rationale Zahl bedeutet, dann ist $(a, \nu) = 1$.

Beweis. Für den Oberkörper $K=k(\sqrt[l]{a})$ fällt $v_i \leqq \sigma_i$ aus, oder es ist a primär in Bezug auf $\mathfrak{l}_i$ (19). Da anderseits nach Voraussetzung

$$\nu \equiv r^l \left(\bmod\ \mathfrak{l}_i^{\sigma_i+1}\right),$$

weil $r^l \equiv r \,(\bmod\ \mathfrak{l}_i^{s_i})$ und $s_i > \sigma_i$, so ist nach Satz 16

$$Z_i(a, \nu)=1, \quad (i=1, 2, \cdot \cdot \cdot z)$$

woraus nach Satz 15 die zu beweisende Gleichung folgt.

Dieser Satz ist ein Specialfall eines allgemeineren Satzes, der auf genau derselben Weise zu beweisen ist:

Satz 19. *Wenn μ, ν zu einander und zu l prim sind, und wenn in k*

$$\mu \equiv \alpha^l \left(\bmod\ \prod^i \mathfrak{l}_i^{m_i}\right),$$

$$\nu \equiv \beta^l \left(\bmod\ \prod^i \mathfrak{l}_i^{n_i}\right),$$

wo

$$m_i + n_i > \sigma_i l, \quad (i=1, 2, \cdot \cdot \cdot z)$$

dann gilt die Relation:

$$(\mu, \nu)=1.$$

Das Ergebnis der bisherigen Betrachtungen fassen wir kurz wie folgt zusammen:

Es sei μ eine beliebige Zahl von k,

$$(\mu)=\mathfrak{m}\prod^i \mathfrak{l}_i^{a_i} \quad (a_i \geqq 0, i=1, 2, \cdot \cdot \cdot z)$$

wo $\mathfrak{l}_i$ die Primfactoren von l, und $\mathfrak{m}$ ein zu l primes Ideal von k ist; ferner seien $\mathfrak{i}_1, \mathfrak{i}_2, \cdots \mathfrak{i}_h$ als ein System der Repräsentanten der Basisclassen von k prim zu μ und zu l angenommen. Wenn dann $\mathfrak{r}$ ein beliebiges zu μ und zu l primes Ideal von k ist, und

$$(\rho)=\mathfrak{r}\mathfrak{i}_1^{e_1}\mathfrak{i}_2^{e_2} \cdot \cdot \cdot \mathfrak{i}_h^{e_h}\mathfrak{j}^l, \quad (0 \leqq e < l)$$

wo $\mathfrak{j}$ ein Ideal, ρ eine Zahl von k ist, beides prim zu μ und l angenommen, dann ist

$$\left(\frac{\mu}{\mathfrak{r}}\right)=\left(\frac{\mu}{\mathfrak{i}_1}\right)^{-e_1} \cdot \cdot \cdot \left(\frac{\mu}{\mathfrak{i}_h}\right)^{-e_h}\left(\frac{\rho}{\mathfrak{m}}\right)Z_1(\mu, \rho) \cdot \cdot \cdot Z_z(\mu, \rho).$$

Das heisst: der Wert des Symbols $\left(\frac{\mu}{\mathfrak{r}}\right)$ *hängt nur von der Idealclasse nach dem Modul* $\mathfrak{f}$ *ab, welcher das Ideal* $\mathfrak{r}$ *angehört, wo* $\mathfrak{f}^{l-1}$ *die Relativdiscriminante des Körpers* $K=k\sqrt[l]{\mu}$ *ist.* Hierin erblicken wir den wesentlichen Inhalt des Reciprocitätsgesetzes.

§ 11.

Das Hilbert sche Normenrestsymbol.

Wir erinnern an die Definition des *Hilbert'schen Symols*

$$\left(\frac{\nu,\mu}{\mathfrak{w}}\right),$$

wo μ, ν zwei beliebige von 0 verschiedene ganze Zahlen und $\mathfrak{w}$ ein beliebiges Primideal des Körpers k ist.

Es sei zunächst $\mathfrak{w}$ ein zu l primes Primideal. Wenn dann μ genau durch $\mathfrak{w}^a$, ν genau durch $\mathfrak{w}^b$ teilbar (a, $b \geqq 0$), dann kann man die Zahl

$$\varkappa=\frac{\nu^a}{\mu^b}=\frac{\rho}{\sigma}$$

in einer zu $\mathfrak{w}$ teilerfremden Bruchform darstellen. Alsdann soll

$$\left(\frac{\nu,\mu}{\mathfrak{w}}\right)=\left(\frac{\varkappa}{\mathfrak{w}}\right)=\left(\frac{\rho}{\mathfrak{w}}\right)\left(\frac{\sigma}{\mathfrak{w}}\right)^{-1}$$

gesetzt werden [20].

Sodann sei $\mathfrak{w}=\mathfrak{l}_i$ ein Primfactor von l. Wenn dann

$$\left.\begin{aligned}\mu&=\mathfrak{m}\prod^{i}\mathfrak{l}_i^{a_i}, \quad a_i\geqq 0,\\ \nu&=\mathfrak{n}\prod^{i}\mathfrak{l}_i^{b_i}, \quad b_i\geqq 0,\end{aligned}\right\} \quad (i=1,\ 2,\ \cdot\ \cdot\ z)$$

wo $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{n}$ zu l prim sind, so sei die Zahl μ_i durch die folgenden Congruenzen definirt:

$$\mu_i\equiv\mu\ \left(\bmod\ \mathfrak{l}_i^{\sigma_i l+1+a_i}\right),$$

$$\equiv 1\ \left(\bmod\ \frac{\overline{L}}{\mathfrak{l}_i^{\sigma_i l+1}}\right).$$

([20]) Hilbert, *Bericht*, S. 411.

Es ist alsdann

$$\left(\frac{\nu,\mu}{\mathfrak{l}_i}\right)=\Pi'\left(\frac{\nu,\mu_i}{\mathfrak{w}}\right),$$

wo das Product Π' über alle (in μ_i oder in ν aufgehenden) zu l primen Primideale von k zu erstrecken ist (21).

Mit Hülfe dieser Symbole kann man das Reciprocitätsgestz in der folgenden sehr eleganten Form darstellen:

$$\Pi\left(\frac{\nu,\mu}{\mathfrak{w}}\right)=1,$$

wo das Product über die sämtlichen (in μ, in ν oder in l aufgehenden) Primideale von k zu erstrecken ist.

Wenn ν zu μ und zu l prim ist, dann reducirt sich diese Formel auf unsere Gleichung (9) in § 9.

Die characteristische Eigenschaft des Symbols $\left(\frac{\nu,\mu}{\mathfrak{w}}\right)$ *besteht darin, dass das Symbol dann und nur dann den Wert 1 hat, wenn* ν *Normenrest des Körpers* $K=k(\sqrt[l]{\mu})$ *nach jeder beliebigen Potenz von* $\mathfrak{w}$ *ist.*

Hiefür wollen wir noch kurz den Beweis führen für den Fall, wo $\mathfrak{w}=\mathfrak{l}_1$. Hierbei genügt es, den ersten Teil der Behauptung zu beweisen; der zweite Teil, die Umkehrung der ersten, folgt dann wie bei Satz 17.

Es sei also ν Normenrest des Körpers $K=k(\sqrt[l]{\mu})$ nach Potenzen von $\mathfrak{l}_1$, und zwar zunächst

$$\nu=\mathfrak{l}_1^{b_1}\mathfrak{n}, \tag{1}$$

wo $\mathfrak{n}$ prim zu l ist. Wenn $\mathfrak{l}_1$ in K zerfällt, dann gibt es in k eine Zahl λ, welche Relativnorm einer ganzen Zahl von K, und genau durch die erste Potenz von $\mathfrak{l}_1$ teilbar ist, doch so, dass, wenn

$$\lambda=\mathfrak{l}_1\mathfrak{a} \tag{2}$$

gesetzt wird, $\mathfrak{a}$ prim zu μ und μ_i $(i=1, 2, \cdots z)$ ausfällt. Wenn aber $\mathfrak{l}_1$ in K prim bleibt, dann soll

$$\lambda=\mathfrak{l}_1^{l}\mathfrak{a} \tag{2*}$$

(21) Hilbert, Math. Annalen, **51**. S. 108.

genau durch die l-te Potenz von $\mathfrak{l}_1$ teilbar, im übrigen aber genau ebenso beschaffen sein, wie im ersten Falle. In desem zweiten Falle ist nun der Exponent b_1 der höchsten in ν aufgehenden Potenz von $\mathfrak{l}_1$ in (1) notwendig durch l teilbar, sodass wir denselben durch $b_1 l$ ersetzen wollen.

In beiden Fällen kann man daher eine zu μ_1 und zu l prime Zahl ρ aus der Congruenz bestimmen:

$$\lambda^{b_1}\rho \equiv \nu \left(\mathrm{mod}\ \mathfrak{l}_1^{\sigma_1 l+1+b_1}\right), \qquad (3)$$

sodass ρ Normenrest von K nach $\mathfrak{l}_1$ wird. Infolgedessen ist nach Satz 17

$$Z_1(\mu,\rho) = \left(\frac{\rho,\ \mu}{\mathfrak{l}_1}\right) = 1.$$

Anderseits folgt aus dieser Congruenz, wie leicht mit Hülfe von Satz 16 nachzuweisen ist,

$$\left(\frac{\nu,\ \mu}{\mathfrak{l}_1}\right) = \left(\frac{\lambda^{b_1}\rho,\ \mu}{\mathfrak{l}_1}\right) \qquad (4)$$
$$= \left(\frac{\lambda,\ \mu}{\mathfrak{l}_1}\right)^{b_1} \left(\frac{\rho,\ \mu}{\mathfrak{l}_1}\right) = \left(\frac{\lambda,\ \mu}{\mathfrak{l}_1}\right)^{b_1}.$$

Daher bleibt nur übrig nachzuweisen, dass

$$\left(\frac{\lambda,\ \mu}{\mathfrak{l}_1}\right) = 1.$$

Nun folgt nach Annahme

$$\left(\frac{\mu}{\mathfrak{a}}\right) = 1, \quad \left(\frac{\lambda}{\mathfrak{m}}\right) = 1,$$

also

$$1 = \left(\frac{\mu}{\mathfrak{a}}\right)\left(\frac{\lambda}{\mathfrak{m}}\right)^{-1} = \overset{i}{\Pi}\left(\frac{\lambda,\ \mu}{\mathfrak{l}_i}\right), \quad (i=1,\ 2,\ \ldots z) \qquad (5)$$

wo

$$\left(\frac{\lambda,\ \mu}{\mathfrak{l}_i}\right) = \left(\frac{\mu_i}{\mathfrak{a}}\right)\left(\frac{\lambda}{\mathfrak{m}_i}\right)^{-1},$$

$$\mu_i = \mathfrak{l}_i^{a_i}\,\mathfrak{m}_i,$$

und, wie oben festgesetzt, $\mathfrak{m}_i$ prim zu λ ist. Wir bestimmen nun, indem wir $i \neq 1$ annehmen, eine zu l prime Zahl α in k gemäss den Congruenzen:

$$\left.\begin{aligned} \alpha &\equiv 0 \pmod{\mathfrak{a}}, \\ &\equiv \lambda \pmod{\mathfrak{l}_i^{\sigma_i l+1}\mathfrak{m}_i}, \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

sodass, wenn

$$\alpha = \mathfrak{a}\,\mathfrak{b} \tag{7}$$

gesetzt wird, nach (2) bez. (2*)

$$\mathfrak{b} \sim \mathfrak{l}_1 \text{ bez. } \mathfrak{l}_1^l \pmod{\mathfrak{l}_i^{\sigma_i l+1}\mathfrak{m}_i} \tag{8}$$

ausfällt. Da μ_i hyperprimär in Bezug auf $\mathfrak{l}_1$ ist, so zerfällt $\mathfrak{l}_1$ im Körper $k(\sqrt[l]{\mu_i})$, folglich ist nach (8)

$$\left(\frac{\mu_i}{\mathfrak{b}}\right)=1,$$

daher nach (7)

$$\left(\frac{\mu_i}{\mathfrak{a}}\right)=\left(\frac{\mu_i}{\alpha}\right).$$

Anderseits folgt aus (6):

$$\left(\frac{\lambda}{\mathfrak{m}_i}\right)=\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{m}_i}\right).$$

Folglich

$$\begin{aligned} \left(\frac{\lambda,\mu}{\mathfrak{l}_i}\right) &= \left(\frac{\mu_i}{\mathfrak{a}}\right)\left(\frac{\lambda}{\mathfrak{m}_i}\right)^{-1} = \left(\frac{\mu_i}{\alpha}\right)\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{m}_i}\right)^{-1} = Z_i(\mu,\alpha) \\ &= 1, \quad (i \neq 1) \end{aligned} \tag{9}$$

weil nach (6) α Normenrest des Körpers K nach $\mathfrak{l}^{\sigma_i l+1}$ ist (Satz 17). Aus (5) folgt daher, wie nachzuweisen war,

$$\left(\frac{\lambda,\mu}{\mathfrak{l}_1}\right)=1.$$

Wenn zweitens

$$\nu = \mathfrak{n}\prod^{i}\mathfrak{l}_i^{b_i}$$

durch $\mathfrak{l}_i (i \neq 1)$ teilbar ist, dann bestimme man eine genau durch die erste Potenz von $\mathfrak{l}_i$ teilbare, sonst zu μ und zu μ_1 prime Zahl λ_i von k, die der Congruenz:

$$\lambda_i \equiv 1 \left(\text{mod } \mathfrak{l}_1^{\sigma_1 l+1}\right)$$

genügt, sodann eine zu μ_1 und zu l prime Zahl ρ aus der Congruenz

$$\lambda^{b_1} \dots \lambda_i^{b_i} \dots \rho \equiv \nu \left(\text{mod } \mathfrak{l}_1^{\sigma_1 l+1+b_1} \dots \mathfrak{l}_i^{b_i} \dots\right),$$

die an Stelle von (3) tritt, dann erhält man analog zu (4)

$$\left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{l}_1}\right) = \left(\frac{\lambda, \mu}{\mathfrak{l}_1}\right)^{b_1} \dots \left(\frac{\lambda_i, \mu}{\mathfrak{l}_1}\right)^{b_i} \dots$$

und es ist nunmehr zu zeigen, dass

$$\left(\frac{\lambda_i, \mu}{\mathfrak{l}_1}\right) = 1.$$

Dies ist aber genau die Relation (9), nur haben die beiden Indices 1 und i ihre Rolle miteinander getauscht. Bemerkt sei noch, dass zum Nachweis von (9) nur die Voraussetzung, dass λ Normenrest von K nach $\mathfrak{l}_i^{\sigma_i l+1}$ ist, aber nicht die, dass λ wirkliche Relativnorm einer Zahl von K ist, erforderlich war. Hiermit ist unsere Aufgabe erledigt.

II. Das quadratische Reciprocitätsgesetz.

§ 12.

Das primäre und das hyperprimäre Primideal.

Es sei k ein beliebiger algebraischer Körper vom Grade m. Unter den mit k conjugirten Körpern gebe es r_1 reelle, die wir mit $k_1, k_2 \cdots k_{r_1}$ bezeichnen. Ist also r wie bisher die Anzahl der Grundeinheiten von k, dann ist

$$m + r_1 = 2(r+1).$$

Ferner sei h bez. $h+h'$ der Rang der absoluten Classengruppe im weiteren oder engeren Sinne, wenn alle Idealquadrate zur Hauptclasse gerechnet werden. Es gibt alsdann in k nach Satz 1. $h+h'$ unabhängige singuläre Primärzahlen, darunter h total positive, sodass jede Zahl ε von k, welche eine Einheit oder ein Idealquadrat ist, auf eine und nur auf eine Weise in der Gestalt:

$$\varepsilon = \eta_1^{u_1} \dots \eta_n^{u_n}\, \omega_1^{v_1} \dots \omega_h^{v_h}\, \omega_1'^{v_1'} \dots \omega_{h'}'^{v'_{h'}}\, \xi^2 \tag{1}$$

darstellbar ist, wo die Exponenten u, v, v' die Zahlen 0 oder 1 sind, und ξ eine Zahl von k bedeutet. Hierbei bezeichnen wir mit $\omega_1 \cdots \omega_h$ die total positiven, mit $\omega_1' \cdots \omega'_{h'}$ die nicht total positiven singulären Primärzahlen, und mit $\eta_1, \cdots \eta_n$ die $n=r+1-h'$ nicht primären Einheiten und Idealquadrate, worunter die n_0 ersten total positiv sein mögen, sodass $\eta_1, \eta_2, \cdots \eta_n$ unabhängige quadratische Nichtreste mod 4 sind, und $\eta_{n_0+1}, \cdots \eta_n, \omega_1' \cdots \omega_{h'}'$ unabhängige Vorzeichencombinationen aufweisen. Es ist dann nach § 1, (**1**)

$$h' = \frac{r_1-(n-n_0)}{2} = n_0 - \frac{m-r_1}{2}.$$

Satz 20. *Die h Primideale* ([10]) $\mathfrak{i}_1, \cdots \mathfrak{i}$, *für welche*

$$\left(\frac{\omega_a}{\mathfrak{i}_a}\right)=-1, \quad \left(\frac{\omega_a}{\mathfrak{i}_b}\right)=1, \quad (a \neq b)$$

bilden ein System von Repräsentanten der Basisclassen von k im weiteren Sinne.

Wenn ausserdem für die h' Primideale $\mathfrak{i}'_1, \cdots \mathfrak{i}'_{h'}$

$$\left(\frac{\omega_a}{\mathfrak{i}'_a}\right)=1, \quad \left(\frac{\omega'_a}{\mathfrak{i}'_a}\right)=-1, \quad \left(\frac{\omega'_a}{\mathfrak{i}'_b}\right)=1, \quad (a \neq b)$$

dann bilden die $h+h'$ Ideale $\mathfrak{i}, \mathfrak{i}'$ *zusammen ein Repräsentantensystem der Basisclassen von k im engeren Sinne.*

Beweis. Genau wie bei Satz 7. Man überzeugt sich leicht von der Übereinstimmung der Rangzahlen der Classengruppen im engeren Sinne nach den Moduln $L=(4)$ und $L\mathfrak{i}_1 \cdots \mathfrak{i}_h$, bez. der Rangzahlen im weiteren Sinne nach L und $L\mathfrak{i}_1 \cdots \mathfrak{i}_h \mathfrak{i}'_1 \cdots \mathfrak{i}'_{h'}$. (nach §1, (**1**)); sodann hat man Satz 27 von R. A. zu Hülfe zu nehmen.

Die Bedingungen $\left(\frac{\omega}{\mathfrak{i}'}\right)=1$ haben, nach dem ersten Teile, zur Folge, dass die Ideale $\mathfrak{i}_a'$ von der Form $\iota_a \mathfrak{j}_\iota^2$ $(a=1, 2 \cdots h')$ sind, wo ι_a Zahlen von k sind, sodass man als Repräsentanten der Classen $\mathfrak{i}_a'$ durch ι_a ersetzen kann.

Satz 21. *Wenn $\mathfrak{p}$ ein Primideal von der Art ist, dass für die $n+h+h'$ Zahlen in* (1)

$$\left(\frac{\eta}{\mathfrak{p}}\right)=1, \quad \left(\frac{\omega}{\mathfrak{p}}\right)=1, \quad \left(\frac{\omega'}{\mathfrak{p}}\right)=1 \tag{2}$$

ausfällt, dann gibt es eine total positive primäre Zahl ϖ in k, sodass

$$(\varpi)=\mathfrak{p}\,\mathfrak{j}^2,$$

wo $\mathfrak{j}$ *ein Ideal in k bedeutet.*

Wenn die Gleichungen (2) *nur für die* n_0+h *total positiven Zahlen* $\eta_1 \cdots \eta_{n_0}$, $\omega_1 \cdots \omega_h$ *gelten, dann wird* ϖ *noch primär sein, aber nicht mehr total positiv* ([14]).

Beweis. Genau wie bei Satz 8.

Ferner sei wie früher

$$\bar{L}=\overset{i}{\Pi}\mathfrak{l}_i^{2s_i+1} \quad (i=1,\ 2,\ \cdots z)$$

gesetzt, wobei $(2)=\overset{i}{\Pi}\mathfrak{l}_i^{s_i}$ die Primfactorzerlegung von der Zahl 2 in k ist. Unter den Zahlensystemen:

$$\omega_1^{u_1} \cdots \omega_h^{u_h},$$

bez.

$$\omega_1^{u_1} \cdots \omega_h^{u_h}\, \omega'^{u'_1}_1 \cdots \omega'^{u'_{h'}}_{h'},$$

wo die Exponenten u, u' die Werte 0, 1 haben, gebe es $2^{h-\nu}$ bez. $2^{h-\nu+h'-\nu'}$ hyperprimäre Zahlen, sodass die Zahlensysteme bez. ν und $\nu+\nu'$ unabhängige quadratische Nichtreste nach dem Modul $\bar{L}$ aufweisen.

Der Rang der Classengruppe von k nach dem Modul $\bar{L}$ ist dann im weiteren Sinne

$$[\bar{L}]=h+n_0+z_0=[L]+z_0,$$

im engeren Sinne:

$$[\bar{L}^+]=h+r+1+z_0+\nu'=[L^+]+z_0+\nu',$$

wo

$$z_0=z-(\nu+\nu')$$

und $[L]$, $[L^+]$ die entsprechenden Rangzahlen für den Modul $L=(4)$ bedeuten. Daher gibt es $z_0+\nu'$ Zahlen

$$\lambda_1,\ \lambda_2,\ \cdots\ \lambda_{z_0+\nu'}, \qquad (3)$$

worunter die z_0 ersten total positiv sind, welche ausser durch die Idealquadrate nur durch die in 2 aufgehenden Primideale teilbar, und von der in § 5 erklärten Beschaffenheit sind.

Nunmehr stellen wir einen Satz 9 analogen Satz auf, welcher in ähnlicher Weise wie jener zu beweisen ist.

Satz 22. *Wenn* $\mathfrak{p}$ *ein Primideal von der Art ist, dass für die* $n+h+h'$ *Zahlen in* (1) *und die* $z_0+\nu'$ *Zahlen in* (3)

$$\left(\frac{\eta}{\mathfrak{p}}\right)=1,\ \left(\frac{\omega}{\mathfrak{p}}\right)=1,\ \left(\frac{\omega'}{\mathfrak{p}}\right)=1,\ \left(\frac{\lambda}{\mathfrak{p}}\right)=1 \qquad (4)$$

ausfällt, dann gibt es eine total positive hyperprimäre Zahl ϖ von der Art, dass

$$(\varpi)=\mathfrak{p}\,\mathfrak{j}^2.$$

Wenn die Gleichungen (4) *nur für die n_0+h+z_0 total positiven Zahlen in* (1) *und* (3) *gelten, dann wird ϖ wohl hyperprimär, aber nicht mehr total positiv sein* ([14]).

§. 13.

Das quadratische Reciprocitätsgesetz zwischen einer primären und einer beliebigen ungeraden Zahl.

Das quadratische Reciprocitätsgesetz ist im Wesentlichen in Satz 4 enthalten. Wir wollen uns daher kurz fassen und beginnen mit einem Satz 10 analogen Satz, der sich ohne Umstände erledigen lässt.

Satz 23. *Wenn μ primär und ν prim zu μ und zu 2 ist, dann besteht die Gleichung:*

$$\left(\frac{\mu}{\nu}\right)\left(\frac{\nu}{\mu}\right)=\prod^{i}\mathrm{Sg}_i(\mu,\nu),\quad (i=1,\ 2,\cdots r_1)$$

wo $\mathrm{Sg}_i(\mu,\nu)=1$, *wenn wenigstens eine der beiden mit μ und ν conjugirten Zahlen in dem reellen Körper k_i positiv ist, dagegen* $\mathrm{Sg}_i(\mu,\nu)=-1$, *wenn jene Zahlen beide negativ sind.*

Beweis. Es sei

$$(\mu)=\mathfrak{p}_1\cdots\mathfrak{p}_e\mathfrak{j}^2,$$

wo $\mathfrak{p}_1,\cdots\mathfrak{p}_e$ die von einander verschiedenen in μ aufgehenden Primideale und $\mathfrak{j}$ ein gewisses Ideal von k ist. Ferner seien $\mathfrak{i}_1,\cdots\mathfrak{i}_h$ ein System der Repräsentanten der Basisclassen von k, welches gegen μ normirt ist, $\mathfrak{r}$ ein zu μ und zu 2 primes Primideal und

$$(\rho)=\mathfrak{r}\,[\mathfrak{i}],$$

wo ρ eine Zahl von k, die ebenfalls prim zu μ und zu 2 angenommen wird.

Da μ primär ist, so ist die Relativdiscriminante von $K=k(\sqrt{\mu})$ gleich $\mathfrak{f}=\mathfrak{p}_1\cdots\mathfrak{p}_e$. Wir führen nun den Beweis in drei Schritten.

1. Es sei zunächst μ total positiv. Dann ist die dem Körper K zugeordnete Classengruppe von k eine solche, welche ohne Vorzeichenbedingung nach dem Modul $\mathfrak{f}$ definirt werden kann [22]. Nach Satz 4 gibt es daher einen Character $\chi(\mathfrak{r})$ von der Form

$$\chi(\mathfrak{r})=\left(\frac{\rho}{\mathfrak{p}_1}\right)^{v_1}\cdots\left(\frac{\rho}{\mathfrak{p}_e}\right)^{v_e}, \qquad (v=0,\ 1)$$

derart, dass für das Primideal $\mathfrak{r}$

$$\left(\frac{\mu}{\mathfrak{r}}\right)=\chi(\mathfrak{r}).$$

Da aber $\mathfrak{f}$ der Führer der Classengruppe ist, so folgt, dass keiner der Exponenten $v_1, \cdots v_e$ verschwinden kann, so-dass

$$\left(\frac{\mu}{\mathfrak{r}}\right)=\left(\frac{\mu}{\rho}\right)=\left(\frac{\rho}{\mu}\right).$$

Dass nunmehr für jede zu μ und zu 2 prime Zahl ν die Gleichheit gilt:

$$\left(\frac{\mu}{\nu}\right)=\left(\frac{\nu}{\mu}\right),$$

beweist man genau wie bei Hülfssatz 5 von § 6.

2. Es sei nun μ nicht total positiv und zwar fürs erste möge μ nur eine einzige negative conjugirte in k_1 besitzen. Dann ist zur Characterisirung der entsprechenden Classengruppe die Vorzeichenbedingung unentbehrlich [22]. Aus dieser Tatsache folgert man wie oben die Richtigkeit der Gleichung

$$\left(\frac{\mu}{\nu}\right)\left(\frac{\nu}{\mu}\right)=\mathrm{Sg}_1(\mu,\nu),$$

da hier $\mathrm{Sg}_i(\mu,\nu)=1 (i=2, 3, \cdots r_1)$.

3. Wenn allgemein die Conjugirten von μ in den t reellen Körpern $k_1, \cdots k_t$ negativ sind, dann bestimmen wir entsprechend t primäre Zahlen $\mu_1, \cdots \mu_t$ in k die bez. nur in einem jener t Körpern negative Conjugirten aufweisen, und die sämtlich zu ν prim sind. Da dann $\mu\,\mu_1 \cdots \mu_t$ primär und total positiv sind, so ist nach 1

$$\left(\frac{\mu\,\mu_1\cdots\mu_t}{\nu}\right)=\left(\frac{\nu}{\mu\,\mu_1\cdots\mu_t}\right),$$

---

(22) R.A., S. 84.

woraus mit Rücksicht auf 2.

$$\left(\frac{\mu}{\nu}\right)\left(\frac{\nu}{\mu}\right)=\prod^{i}\mathrm{Sg}_i(\mu_i,\nu).\quad (i=1,2,\cdots t)$$

Also, da $\mathrm{Sg}_i(\mu_i\,\nu)=\mathrm{Sg}_i(\mu,\nu)$ für $i=1,2,\cdots t$, und $\mathrm{Sg}_i(\mu,\nu)=1$, für $i=t+1,\cdots r_1$,

$$\left(\frac{\mu}{\nu}\right)\left(\frac{\nu}{\mu}\right)=\prod^{i}\mathrm{Sg}_i(\mu,\nu),\quad (i=1,2,\cdots r_1)$$

w. z. b. w.

Dieser Beweis gilt offenbar auch dann, wenn $\mu=\omega$ singulär primär ist. Für diese erhält man speciell

$$\left(\frac{\omega}{\nu}\right)=\prod^{i}\mathrm{Sg}_i(\omega,\nu).\quad (i=1,2,\cdots r_1)$$

§ 14

Das allgemeine Reciprocitätsgesetz für die quadratische Reste.

Wenn μ nicht primär oder auch nicht prim zu 2 ist, und

$$(\mu)=\mathfrak{m}\prod^{i}\mathfrak{l}_i^{a_i}\quad (a_i\geqq 0\,;\ i=1,2,\cdots z)$$

wo $\mathfrak{l}_i$ die Primfactoren von 2, und $\mathfrak{m}$ ein zu 2 primes Ideal von k ist, dann setzen wir wie in § 9

$$(\mu,\nu)=\left(\frac{\mu}{\nu}\right)\left(\frac{\nu}{\mathfrak{m}}\right)$$

worin, wenn μ zu 2 prim ist, $\mathfrak{m}=\mu$ zu setzen ist.

Anderseits bestimmen wir ein System von z *total positiven* Zahlen $\mu_1\cdots\mu_z$ aus den Congruenzen:

$$\left.\begin{aligned}\mu_i&\equiv\mu\ \left(\mathrm{mod}\ \mathfrak{l}_i^{2s_i+a_i}\right),\\ &\equiv 1\ \left(\mathrm{mod}\ \frac{4}{\mathfrak{l}_i^{2s_i}}\right),\end{aligned}\right\}\quad (i=1,2,\cdots z)$$

wo s_i den Exponenten der höchsten in 2 aufgehenden Potenz von $\mathfrak{l}_i$ bedeutet. Wir definiren dann, wenn ν eine zu 2, μ(und $\mu_1\cdots\mu_z$) prime Zahl von k ist [18], die z Symbole $Z(\mu,\nu)$ durch die Gleichungen

$$Z_i(\mu, \nu) = (\mu_i, \nu). \quad (i=1, 2, \cdots z)$$

Wir können dann das **allgemeine quadratische Reciprocitätsgesetz** wie folgt aussprechen.

Satz 24. *Wenn ν zu μ und zu 2 prim ist, dann besteht die Reciprocitätsgleichung:*

$$(\mu, \nu) = \prod^{i} \mathrm{Sg}_i(\mu, \nu) \prod^{j} Z_j(\mu, \nu). \quad \begin{pmatrix} i=1, 2, \cdots r_1 \\ j=1, 2, \cdots z \end{pmatrix}$$

Beweis. Genau wie bei Satz 15, indem Satz 23 zu Hilfe herangezogen wird.

Satz 25. *Es ist $Z_i(\mu, \nu)$ das Normenrestsymbol in Bezug auf den relativ quadratischen Körper $K=k(\sqrt{\mu})$ und das Primideal $\mathfrak{l}_i$: es ist stets $Z_i(\mu, \nu)=1$, wenn $\mathfrak{l}_i$ nicht in die Relativdiscriminante von K aufgeht; wenn aber $\mathfrak{l}_i$ zur v_i+1 ten Potenz in die Relativdiscriminante aufgeht, dann ist $Z_i(\mu, \nu)=1$ oder -1, jenachdem ν Normenrest des Körpers K nach dem Modul $\mathfrak{l}_i^{v_i+1}$ ist oder nicht.*

Beweis. Genau wie bei Satz 17, indem die dort mit ρ bezeichnete Zahl hier total positiv angenommen wird, was ja erlaubt ist (Satz 2).

Unter Beibehaltung der am Ende von § 10 benutzten Bezeichnungen erhält man das Resultat:

$$\left(\frac{\mu}{\mathfrak{r}}\right) = \left(\frac{\rho}{\mathfrak{m}}\right) \left(\frac{\mu}{\mathfrak{i}_a}\right)^{e_a} \prod^{\beta} Z_\beta(\mu, \rho) \prod^{\gamma} \mathrm{Sg}_\gamma(\mu, \rho),$$

$$(a=1, 2, \cdots h; \quad \beta=1, 2, \cdots z; \quad \gamma=1, 2, \cdots r_1)$$

d.h. *der Wert des Symbols $\left(\frac{\mu}{\mathfrak{r}}\right)$ hängt nur von der Classe ab, welcher das Ideal $\mathfrak{r}$ angehört, wenn die Classen von k nach der Relativdiscriminante des Körpers $K=k(\sqrt{\mu})$ als Modul und im engeren Sinne (nach total positiven Zahlen) definirt werden.*

(Abgeschlossen im Juni, 1920.)

Inhaltsübersicht.

Einleitung.

I. Das Reciprocitätsgesetz für die Potenzcharactere eines ungeraden Primzahlgrades.

II. Das quadratische Reciprocitätsgesetz.