JOURNAL OF THE COLLEGE OF SCIENCE, TOKYO IMPERIAL UNIVERSITY.

VOL. XXXVI, ARTICLE 2.

SEINEM HOCHVEREHRTEN LEHRER HERRN
PROFESSOR DR. RIKITARO FUJISAWA BEI GELEGENHEIT DER
FÜNFUNDZWANZIGJÄHRIGEN LEHRTÄTIGKEITS-FEIER IN HERZLICHSTER DANKBARKEIT
GEWIDMET VOM VERFASSER.

Über die charakteristischen Streifen eines Systems der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung mit mehreren abhängigen Variablen.

Von

T. Yoshiye.

Im Bande 32 dieses Journals habe ich die Gleichungen der charakteristischen Streifen eines Involutionssystems der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung mit einer einzigen abhängigen Variablen durch die Variationsmethode hergeleitet. Gerade dieselbe Methode lässt sich auf partiellen Differentialgleichungen mit mehreren abhängigen Variablen anwenden. Es wird vielleicht zu bemerken sein, dass die Hamburgerschen Gleichungen der charakteristischen Streifen eines Systems von n partiellen Differentialgleichungen mit n abhängigen Variablen und die v. Weberschen eines noch allgemeineren Systems gerade so, wie im Falle einer einzigen abhängigen Variablen, durch dieselbe Methode abgeleitet werden können. In den folgenden Zeilen werde ich dies Verfahren kurz skizziren.

Es sei

$$F_k(x_1, \cdots, x_n, z_1, \cdots, z_s, p_1^{(1)}, \cdots, p_n^{(1)}, \cdots, p_1^{(s)}, \cdots, p_n^{(s)})=0,$$
$$(k=1, 2, \cdots, \mu)$$

wobei $p_i^{(\sigma)}$ für $\frac{\partial z_\sigma}{\partial x_i}$ steht, das vorgelegte Involutionssystem der partiellen Differentialgleichungen mit s abhängigen Variablen. Wir nehmen noch an: $ns>\mu$.

Um nun die charakteristischen Streifen des Systems zu finden, suchen wir nach den Funktionen $x_1, \cdots, x_n, z_1, \cdots, z_s, p_1^{(1)}, \cdots, p_n^{(s)}$ eines Parameters t, welche μ Gleichungen

$$F_k=0 \qquad (k=1, \cdots, \mu)$$

und s Bedingungen

$$z_\sigma'-\sum_{i=1}^{n} p_i^{(\sigma)} x_i'=0 \qquad (\sigma=1, \cdots, s)$$

identisch genügen (Accent bezeichnet Ableitung nach t).

Zu diesem Zwecke betrachten wir das Integral

$$\int_{t_0}^{t_1}\left[\sum_{\sigma=1}^{s}\lambda_\sigma\left(z_\sigma'-\sum_{i=1}^{n}p_i^{(\sigma)}x_i'\right)+\sum_{k=1}^{\mu}\mu_k F_k\right]dt, \qquad (t_0,\ t_1 \text{ konstant})$$

welches für die den Bedingungen $F_1=0, \cdots, F_\mu=0$ genügenden Elementvereine den konstanten Wert Null besitzt. Für dieses Integral gilt offenbar die Gleichung

$$\delta\int_{t_0}^{t_1}\left[\sum_{\sigma=1}^{s}\lambda_\sigma\left(z_\sigma'-\sum_{i=1}^{n}p_i^{(\sigma)}x_i'\right)+\sum_{k=1}^{\mu}\mu_k F_k\right]dt=0,$$

sobald die Nebenbedingungen

$$\left.\begin{array}{ll} F_k=0 & (k=1, \cdots, \mu) \\ z_\sigma'-\sum_{i=1}^{n}p_i^{(\sigma)}x_i'=0 & (\sigma=1, \cdots, s) \end{array}\right\} \qquad (1)$$

bestehen bleiben.

Diese Gleichung lässt sich folgendermassen umschreiben:

$$\left[\sum_{\sigma=1}^{s}\left\{\lambda_\sigma\left(\delta z_\sigma-\sum_{i=1}^{n}p_i^{(\sigma)}\delta x_i\right)\right\}\right]_{t_0}^{t_1}$$

$$-\int_{t_0}^{t_1}\left[\begin{array}{l}\sum\limits_{\sigma=1}^{s}\left(\lambda_\sigma'-\sum\limits_{k=1}^{\mu}\mu_k\frac{\partial F_k}{\partial z_\sigma}\right)\delta z_\sigma\\ +\sum\limits_{\sigma=1}^{s}\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\lambda_\sigma x_i'-\sum\limits_{k=1}^{\mu}\mu_k\frac{\partial F_k}{\partial p_i^{(\sigma)}}\right)\delta p_i^{(\sigma)}\\ -\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\sum\limits_{\sigma=1}^{s}(\lambda_\sigma p_i^{(\sigma)})'+\sum\limits_{k=1}^{\mu}\mu_k\frac{\partial F_k}{\partial x_i'}\right)\delta x_i\end{array}\right]dt=0 \qquad (2)$$

Andererseits determiniren $\mu+1$ Gleichungen

$$F_1=0,\cdots,F_\mu=0,\ z_\sigma'-\sum_{i=1}^{n}p_i^{(\sigma)}x_i'=0,$$

von (1), eindeutigerweise im Allgemeinen, $\mu+1$ von ns Grössen $p_i^{(\sigma)}$.

Jetzt unterscheiden wir zwei Fälle, nämlich $n>\mu$ und $n\leqq\mu$.

Um nun, im ersten Falle, einen eindimensionalen Elementverein zu erhalten, längs welcher solche eindeutige Bestimmung von $p_i^{(\sigma)}$ nicht möglich ist, setzen wir für diesen Elementverein ausser den vorgelegten Bedingungen die Bedingungen voraus, dass für $\sigma=1,2,\cdots,s$

$$\text{Alle Determinanten } (\mu+1)\text{ ter Ordnung aus der Matrix}\left\{\begin{array}{cccc}\frac{\partial F_1}{\partial p_1^{(\sigma)}} & \frac{\partial F_1}{\partial p_2^{(\sigma)}} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial p_n^{(\sigma)}}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \frac{\partial F_\mu}{\partial p_1^{(\sigma)}} & \frac{\partial F_\mu}{\partial p_2^{(\sigma)}} & \cdots & \frac{\partial F_\mu}{\partial p_n^{(\sigma)}}\\ x_1' & x_2' & \cdots & x_n'\end{array}\right\}=0 \qquad (3)$$

Dann sind, unter n Ausdrücken

$$\lambda_\sigma x_i'-\sum_{k=1}^{\mu}\mu_k\frac{\partial F_k}{\partial p_i^{(\sigma)}} \qquad (i=1,\cdots,n)$$

$n-\mu$ davon lineare homogene Verbindungen der übrigen μ Grössen. Wenn also geeignet gewählte μ dieser Ausdrücke verschwinden, dann verschwinden auch alle anderen.

Wir bestimmen nun die Grössen $\lambda_1,\cdots,\lambda_s,\mu_1,\cdots,\mu_\mu$ so, dass n Gleichungen (darunter nur μ wesentlich)

$$\lambda_s x_i'-\sum_{k=1}^{\mu}\mu_k\frac{\partial F_k}{\partial p_i^{(s)}}=0 \qquad (i=1,\cdots,n) \qquad (4)$$

und geeignete s aus $n(s-1)$ Gleichungen:

$$\lambda_\sigma x_i' - \sum_{k=1}^{\mu} \mu_k \frac{\partial F_k}{\partial p_i^{(\sigma)}} = 0 \qquad \begin{pmatrix} i=1, \cdots, n \\ \sigma=1, \cdots, s-1 \end{pmatrix} \tag{5}$$

identisch bestehen, damit $n+s$ Glieder unter dem Integralzeichen von (2) verschwinden.

Die Funktionen $x_1, \cdots, x_n, z_1, \cdots, z_s, p_1^{(1)}, \cdots, p_n^{(s)}$ sind $\mu+s$ Bedingungen (1) und $(n-\mu)s$ Bedingungen (3) unterworfen. Daher kann man, unter $ns+n+s$ Grössen $\delta x, \delta z, \delta p$, nur $(ns+n+s)-(\mu+s+(n-\mu)s)=\mu s+n-\mu$, *z. B.* etwa $\delta x_1, \cdots, \delta x_n, \delta z_1, \cdots, \delta z_s$ und $\mu s-\mu-s$ von $\delta p_i^{(\sigma)}$ $(\sigma=1, \cdots, s-1)$, als unabhängig betrachten.

Aus der Willkürlichkeit dieser Variationen $\delta x, \delta z, \delta p$ folgen dann die folgenden $n+s$ Gleichungen

$$\lambda_\sigma' - \sum_{k=1}^{\mu} \mu_k \frac{\partial F_k}{\partial z_\sigma} = 0 \qquad (\sigma=1, \cdots, s) \tag{6}$$

$$\sum_{\sigma=1}^{s} (\lambda_\sigma p_i^{(\sigma)})' + \sum_{k=1}^{\mu} \mu_k \frac{\partial F_k}{\partial x_i} = 0 \qquad (i=1, \cdots, n) \tag{7}$$

und geeignet gewählte (verschieden von (5)) $\mu s-\mu-s$ von

$$\lambda_\sigma x_i' - \sum_{k=1}^{\mu} \mu_k \frac{\partial F_k}{\partial p_i^{(\sigma)}} = 0 \qquad \begin{pmatrix} \sigma=1, \cdots, s-1 \\ i=1, \cdots, n \end{pmatrix} \tag{8}$$

Daher verschwinden $\mu s-\mu$ geeignet gewählte Ausdrücke von

$$\lambda_\sigma x_i' - \sum_{k=1}^{\mu} \mu_k \frac{\partial F_k}{\partial p_i^{(\sigma)}} , \qquad \begin{pmatrix} \sigma=1, \cdots, s-1 \\ i=1, \cdots, n \end{pmatrix},$$

und daraus folgt unmittelbar das Verschwinden aller übrigen.

Da die Variationen $\delta x_1, \cdots, \delta x_n, \delta z_1, \cdots, \delta z_s$ so angenommen werden können, dass sie für die Werte t_0 und t_1 von t verschwinden werden, wird die Gleichung (2) durch die durch

$$\left.\begin{aligned} &\lambda_\sigma' - \sum_{k=1}^{\mu} \mu_k \frac{\partial F_k}{\partial z_\sigma} = 0 && (\sigma=1, \cdots, s) \\ &\lambda_\sigma x_i' - \sum_{k=1}^{\mu} \mu_k \frac{\partial F_k}{\partial p_i^{(\sigma)}} = 0 && \begin{pmatrix} \sigma=1, \cdots, s \\ i=1, \cdots, n \end{pmatrix} \\ &\sum_{\sigma=1}^{s} (\lambda_\sigma p_i^{(\sigma)})' + \sum_{k=1}^{\mu} \mu_k \frac{\partial F_k}{\partial x_i} = 0 && (i=1, \cdots, n) \end{aligned}\right\} \quad (C)$$

bestimmten Funktionen λ, μ, x, z, p von t identisch erfüllt.

Die Gleichungen

$$\sum_{\sigma=1}^{s} (\lambda_\sigma p_i^{(\sigma)})' + \sum_{k=1}^{\mu} \mu_k \frac{\partial F_k}{\partial x_i} = 0 \qquad (i=1, \cdots, n)$$

von (C) können offenbar, wegen der Gleichungen

$$\lambda_\sigma' - \sum_{k=1}^{\mu} \mu_k \frac{\partial F_k}{\partial z_\sigma} = 0 \qquad (\sigma=1, \cdots, s),$$

durch die folgenden ersetzt werden:

$$\sum_{\sigma=1}^{s} \lambda_\sigma p_i^{(\sigma)\prime} + \sum_{k=1}^{\mu} \mu_k \left(\frac{\partial F_k}{\partial x_i}\right) = 0 \qquad (i=1, \cdots, n),$$

wobei $\left(\frac{\partial F_k}{\partial x_i}\right)$ den Ausdruck $\frac{\partial F_k}{\partial x_i} + \sum_{\sigma=1}^{s} p_i^{(\sigma)} \frac{\partial F_k}{\partial z_\sigma}$ bezeichnet.

Nächstens betrachten wir den Fall $n \leqq \mu$. Man kann, in diesem Falle, die Gleichungen (1) nach $\mu+s$ Grössen von $p_i^{(\sigma)}$ auflösen.* Man kann also $\delta x_1, \cdots, \delta x_n, \delta z_1, \cdots, \delta z_s$ und $ns-\mu-s$ von $\delta p_i^{(\sigma)}$ unabhängig denken. Wir nehmen, wie früher, $\delta x_1, \cdots, \delta x_n$, $\delta z_1, \cdots, \delta z_s$ so an, dass sie für $t=t_0$ und $t=t_1$ verschwinden werden.

Zunächst bestimmen wir $\lambda_1, \cdots, \lambda_s, \mu_1, \cdots, \mu_\mu$ so, dass $\mu+s$ Grössen

$$\lambda_\sigma x_i' - \sum_{k=1}^{\mu} \mu_k \frac{\partial F_k}{\partial p_i^{(\sigma)}}$$

verschwinden. Dann folgen, von der Willkürlichkeit der Variationen $\delta x_1, \cdots, \delta x_n, \delta z_1, \cdots, \delta z_s$ und $ns-\mu-s$ von $\delta p_i^{(\sigma)}$, das Verschwinden der übrig bleibenden Glieder unter dem Integralzeichen in der Gleichung (2). Wir haben also hier gerade dieselben Gleichungen (C) als notwendige Ergebnisse erhalten, während sie, im Falle $n>\mu$, nur unter den Bedingungen (3) gewonnen wurden.

Die Gleichungen (C) mit den Gleichungen

$$z_\sigma' - \sum_{i=1}^{n} p_i^{(\sigma)} x_i' = 0 \qquad (\sigma=1, \cdots, s)$$

---

* Wenn $n>\mu$, ist dies nicht der Fall wegen den Bedingungen (3), welche fürs Bestehen von (5) notwendig sind.

zusammen bilden ein äquivalentes System mit dem Gleichungensystem der charakteristischen Streifen, welche E. v. Weber gegeben hat (Math. Ann. Bd. 49. S. 567 [II_u]).* Für die dort vorkommende Grösse $A_j^{(\sigma)}$ steht, in unseren Formeln, der Ausdruck

$$\frac{\sum_{k=1}^{\mu} \mu_k \frac{\partial F_k}{\partial p_j^{(\sigma)}}}{\sum_{k=1}^{\mu} \mu_k \frac{\partial F_k}{\partial p_1^{(\sigma)}}}.$$

Nimmt man ins besondere

$$s=\mu \qquad n=2$$

an, dann stimmen die Formeln (C) mit den Gleichungen überein, welche Hamburger aufgestellt hat (Crelles Journal Bd. 93, S. 193 (15)). Den Grössen μ und l_k von Hamburger entsprechen bei uns

$$\frac{\sum_{k=1}^{\mu} \mu_k \frac{\partial F_k}{\partial p_2^{(\sigma)}}}{\sum_{k=1}^{\mu} \mu_k \frac{\partial F_k}{\partial p_1^{(\sigma)}}} \qquad \text{bezw.} \quad \mu_k$$

Wenn das vorgelegte System das der linearen partiellen Differentialgleichungen sind, so erhalten wir gerade die Formeln von Hamburger in Crelles Journal Bd. 81.

Wir sehen übrigens, dass die charakteristischen Streifen für jedes Involutionssystem ($ns > \mu$) der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung mit einer oder mehreren abhängigen Variablen immer als Extremalen gewisses Variationsproblems betrachtet werden können.

Published Nov. 7th, 1913.

* Die ersten s Gleichungen von (C) dienen s Funktionen λ_σ zu bestimmen, daher haben sie keine entsprechenden Gleichungen bei v. Weber.