JOURNAL OF THE COLLEGE OF SCIENCE, TOKYO IMPERIAL UNIVERSITY,
TOKYO, JAPAN.

VOL. XXXII., ART. 11.

Ueber die charakteristische Mannigfaltigkeit der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung.

Von

T. Yoshiye, *Rigakushi,*

Professor der Mathematik, Tokyo Kaiserl. Universität.

Die vorliegende Arbeit ist eigentlich als eine Fortsetzung meiner Arbeit* in den "Mathematischen Annalen," Bd. 57, anzusehen. Es wird jetzt durch die Variationsmethode die charakteristische Mannigfaltigkeit eines Systems partieller Differentialgleichungen erster Ordnung mit einer einzigen abhängigen Variabeln hergeleitet.

I.

Es sei

$$\begin{array}{c} F_1(z, x_1, \cdots, x_n, p_1, \cdots, p_n)=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ F_m(z, x_1, \cdots, x_n, p_1, \cdots, p_n)=0 \end{array} \tag{1}$$

das vorgelegte System partieller Differentialgleichungen erster Ordnung, wobei z die zu bestimmende Funktion von $x_1, \cdots, x_n$ und p_i ihre Ableitung $\frac{\partial z}{\partial x_i}$ bezeichnet. Man kann offenbar festsetzen, dass die Determinante $\frac{\partial(F_1, \cdots, F_m)}{\partial(p_1, \cdots, p_m)}$ nicht identisch verschwindet, denn mindestens eine Determinante von der Form $\frac{\partial(F_1 \cdots, F_m)}{\partial(p_\alpha \cdots p_\mu)}$ nicht identisch verschwindet, sobald die Gleichungen

* „Anwendungen der Variationsrechnung auf partielle Differentialgleichungen mit zwei unabhängigen Variabeln."

von (1) von einander verschieden sind: wir nehmen sogar an $\frac{\partial(F_1,\cdots F_m)}{\partial(p_1,\cdots p_m)} \neq 0$

Das System (1) definirt eine Schar von ∞^{2n-m+1} Flächenelemente $(z, x_1, \cdots, x_n, p_1, \cdots, p_n)$ im $n+1$ dimensionalen Raume. Wir mögen nun den eindimensionalen Elementverein aus dieser Schar finden, nämlich das Funktionensystem $z, x_1, \cdots, x_n, p_1, \cdots, p_n$ einer einzigen Variabeln t, welches die Beziehung

$$z' - \sum_{i=1}^{n} p_i x_i' = 0 \tag{2}$$

befriedigt. z', x_i' stehen für die Ableitungen von z, x_i nach t.

Zu diesem Zwecke bilden wir das Integral

$$\int_{t_0}^{t_1} [\lambda (z' - \sum_{i=1}^{n} p_i x_i') + \sum_{k=1}^{m} \mu_k F_k] \, dt,$$

wobei λ und $\mu_1, \cdots, \mu_m$ beliebige Funktionen von t, und t_0, t_1 gewisse bestimmte Werte von t bezeichnen.

Dieses Integral verschwindet offenbar, wofern die Gleichungen (1) und (2) erfüllt sind. Daraus folgt unmittelbar die Gleichung

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} [\lambda (z' - \sum_{i=1}^{n} p_i x_i') + \sum_{k=1}^{m} \mu_k F_k] \, dt = 0,$$

sobald die Variationen den Bedingungen

$$\delta z' - \sum_{i=1}^{n} \delta(p_i x_i') = 0,$$
$$\delta F_k = 0 \qquad (k=1, 2. \cdots m)$$

genügen.

Diese Gleichung und die Bedingungsgleichungen können wir folgendermassen umschreiben:

$$[\lambda \delta z]_{t_0}^{t_1} - \sum_{i=1}^{n} [\lambda p_i \, \delta x_i]_{t_0}^{t_1} + \int_{t_0}^{t_1} \left[\sum_{k=1}^{m} \mu_k \frac{\partial F_k}{\partial z} - \lambda' \right] \delta z \, dt \tag{3}$$
$$+ \sum_{i=1}^{n} \int_{t_0}^{t_1} \left[\sum_{k=1}^{m} \mu_k \frac{\partial F_k}{\partial x_i} + (\lambda p_i)' \right] \delta x_i \, dt + \sum_{i=1}^{n} \int_{t_0}^{t_1} \left[\sum_{k=1}^{m} \mu_k \frac{\partial F_k}{\partial p_i} - \lambda x_i' \right] \delta p_i \, dt = 0$$

$$\left.\begin{aligned} &\delta z' - \sum_{i=1}^{n} (p_i \, \delta x_i' + x_i' \, \delta p_i) = 0 \\ &\frac{\partial F_k}{\partial z} \delta z + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F_k}{\partial x_i} \delta x_i + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F_k}{\partial p_i} \delta p_i = 0 \quad (k=1, 2, \cdots m) \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Man erhält ein Funktionensystem z, x, p, welche die Gleichung (3) befriedigt, wenn man z, x, p so bestimmen kann, dass jedes Glied der Gleichung (3) identisch verschwindet.*

Wir unterscheiden nun zwei Fälle, $m<n$ und $m=n$.

Der Fall $m<n$. Könnte man nun jeden Ausdruck unter dem Integralzeichen aus dem letzten Glied von (3) verschwinden lassen, dann müssen die Grössen z, x, p die folgenden $n-m$ Gleichungen befriedigen:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial p_1} & \frac{\partial F_2}{\partial p_1} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial p_1} & x_1' \\ \frac{\partial F_1}{\partial p_2} & \frac{\partial F_2}{\partial p_2} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial p_2} & x_2' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial F_1}{\partial p_m} & \frac{\partial F_2}{\partial p_m} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial p_m} & x_m' \\ \frac{\partial F_1}{\partial p_i} & \frac{\partial F_2}{\partial p_i} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial p_i} & x_i' \end{vmatrix} = 0 \qquad (i=m+1,\cdots n) \tag{5}$$

Wir setzen also diese $n-m$ Gleichungen (5) fest als die Bedingungsgleichungen für die Grössen z, x, p. Dann sind nur m Gleichungen aus den folgenden n Gleichungen

$$\sum_{k=1}^{m} \mu_k \frac{\partial F_k}{\partial p_i} - \lambda x_i' = 0 \qquad (i=1, 2, \cdots n)$$

wesentlich.

Wir betrachten also die $n+1$ Gleichungen

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{m} \mu_k \frac{\partial F_k}{\partial z} - \lambda' = 0, \\ &\sum_{k=1}^{m} \mu_k \frac{\partial F_k}{\partial p_i} - \lambda x_i' = 0 \qquad (i=1, 2, \cdots n) \end{aligned} \tag{6}$$

als die Bestimmungsgleichungen von $m+1$ Grössen $\lambda, \mu_1, \cdots, \mu_m$.

Nach den Beziehungen (5) sind die $m+1$ Ausdrücke

$$x_1' \delta p_1 + \cdots + x_n' \delta p_n, \qquad \frac{\partial F_k}{\partial p_1} \delta p_1 + \cdots + \frac{\partial F_k}{\partial p_n} \delta p_n \qquad (k=1,2,\cdots m)$$

* Da (4) eine Differentialgleichung enthält, kann man nicht ohne weiteres, wie im gewöhnlichen Variationsprobleme, das Verschwinden jedes Gliedes von (3) schliessen.

in den Bedingungen (4) nicht von einander linear unabhängig, und daher folgt die Gleichung:

$$\begin{vmatrix} \delta z' - \sum_{i=1}^{n} p_i \delta x_i' & x_1' & x_2' & \cdots & x_m' \\ \frac{\partial F_1}{\partial z} \delta z + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F_1}{\partial x_i} \delta x_i & \frac{\partial F_1}{\partial p_1} & \frac{\partial F_1}{\partial p_2} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial p_m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial z} \delta z + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F_m}{\partial x_i} \delta x_i & \frac{\partial F_m}{\partial p_1} & \frac{\partial F_m}{\partial p_2} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial p_m} \end{vmatrix} = 0 \qquad (7)$$

Denkt man sich die Variationen $\delta x_1, \cdots, \delta x_n$ gegeben, dann ist (7) die Bestimmungsgleichung von δz, welche die Form der linearen Differentialgleichung

$$\delta z' + X \delta z + X_1 = 0$$

besitzt. Wie man leicht sieht, ist λ gleich $e^{\int X dt}$, und daher kann die Integrationskonstante von δz nicht immer so gewählt werden, dass $[\lambda \delta z]_{t_0}^{t_1}$ gleich Null wird.

Wir nehmen also an, dass $\delta x_1, \cdots, \delta x_n$ an einem Endpunkte t_0 verschwinden. Man kann offenbar die Integrationskonstante von δz so bestimmen, dass $\lambda \delta z$ am Punkte t_0 verschwindet. Am anderen Endpunkte t_1 nehmen wir an: eins aus $\delta x_1, \cdots, \delta x_n$, etwa δx_j, wird immer so eingerichtet, dass der Wert $[\delta z - p_j \delta x_j]_{t_1}$ gleich Null wird, während alle anderen an diesem Punkte verschwinden. Dann verschwinden die von Integralzeichen freien Glieder von (3). Diese Annahme für δx_j ist immer möglich, sobald p_j am Punkte t_1 nicht verschwindet, und da der Parameterwert t_1 beliebig gewählt werden kann, ist diese Annahme immer möglich, wenn p_j nicht identisch Null ist. Die Schwierigkeit tritt also nur dann ein, wenn alle p identisch Null sind. Im letzten Falle wird z, wegen der Beziehung (2), gleich konstant. Diesen Fall schliessen wir aus.

Die Gleichung (3) nimmt nun die Form an:

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{t_0}^{t_1} \left[\sum_{k=1}^{m} \mu_k \frac{\partial F_k}{\partial x_i} + (\lambda p_i)' \right] \delta x_i \, dt = 0.$$

Alle Variationen δx_i, ausser δx_j, verschwinden an den Punk-

ten t_0 und t_1, sonst willkürlich; die Variation δx_j verschwindet am Punkte t_0, aber nicht am Punkte t_1. Wenn man alle δx_i, ausser δx_j, identisch gleich Null denkt, dann erhält man

$$\int_{t_0}^{t_1} \left[\sum_{k=1}^{m} \mu_k \frac{\partial F_k}{\partial x_j} + (\lambda p_j)' \right] \delta x_j \, dt = 0.$$

Obgleich δx_j am Punkte t_1 einen von Null verschiedenen Wert annimmt, doch kann man aus der letzten Gleichung, in ähnlicher Weise wie bei der Herleitung der Eulerschen Gleichung in der Variationsrechnung, schliessen

$$\sum_{k=1}^{m} \mu_k \frac{\partial F_k}{\partial x_j} + (\lambda p_j)' = 0.$$

Das Verschwinden von den anderen Integranden $\sum_{k=1}^{m} \mu_k \frac{\partial F_k}{\partial x_i} + (\lambda p_i)'$ kann gewöhnlicherweise bewiesen werden. Wir haben nämlich

$$\sum_{k=1}^{m} \mu_k \frac{\partial F_k}{\partial x_i} + (\lambda p_j)' = 0 \qquad (i=1, 2, \cdots n)$$

welche sich durch die Gleichung

$$\sum_{k=1}^{m} \mu_k \frac{\partial F_k}{\partial z} - \lambda' = 0$$

in die folgenden

$$\sum_{k=1}^{m} \mu_k \left(\frac{\partial F_k}{\partial x_i} \right) + \lambda p_i' = 0 \qquad (i=1, 2, \cdots n)$$

umschreiben lassen. Das Symbol $\left(\frac{\partial F_k}{\partial x_i} \right)$ steht für den Ausdruck $\frac{\partial F_k}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial F_k}{\partial z}$.

Setzt man die durch (6) bestimmten Werte von $\lambda, \mu_1, \cdots, \mu_m$ in die letzten Gleichungen ein, so erhalten wir n Gleichungen, welche mit (5) zusammen $2n-m$ Bedingungen für die Funktionensystem $z, x_1, \cdots, x_n, p_1, \cdots, p_n$ bilden.

Dieselben Bedingungen erhalten wir offenbar von den Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} \sum_{k=1}^{m} \mu_k \frac{\partial F_k}{\partial p_i} - \lambda x_i' = 0 \\ \sum_{k=1}^{m} \mu_k \frac{\partial F_k}{\partial x_i} + \lambda p_i' = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (i=1, 2, \cdots n)$$

durch Elimination von $\lambda, \mu_1, \cdots, \mu_m$. Wir haben nämlich

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial p_1} & \frac{\partial F_2}{\partial p_1} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial p_1} & x_1' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial F_1}{\partial p_m} & \frac{\partial F_2}{\partial p_m} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial p_m} & x_m' \\ \frac{\partial F_1}{\partial p_i} & \frac{\partial F_2}{\partial p_i} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial p_i} & x_i' \end{vmatrix} = 0 \quad (i=m+1, \cdots n)^*$$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial p_1} & \frac{\partial F_2}{\partial p_1} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial p_1} & x_1' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial F_1}{\partial p_m} & \frac{\partial F_2}{\partial p_m} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial p_m} & x_m' \\ \left(\frac{\partial F_1}{\partial x_i}\right) & \left(\frac{\partial F_2}{\partial x_i}\right) & \cdots & \left(\frac{\partial F_m}{\partial x_i}\right) & -p_i' \end{vmatrix} = 0 \quad (i=1, 2, \cdots n) \tag{8}$$

Die Gleichungen (8) sind hinreichend fürs Bestehen der Gleichung (3), wenn λ und μ geeignet bestimmt sind; die Gleichungen (1) und (2) folgen aber nicht notwendig daraus. Wir dürfen also zu den Gleichungen (9) noch die Gleichung

$$z' - \sum_{i=1}^{m} p_i x_i' = 0 \tag{2}$$

oder was dasselbe heisst:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial p_1} & \frac{\partial F_2}{\partial p_1} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial p_1} & x_1' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial F_1}{\partial p_m} & \frac{\partial F_2}{\partial p_m} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial p_m} & x_m' \\ \sum_{i=1}^{n} p_i \frac{\partial F_1}{\partial p_i} & \sum_{i=1}^{n} p_i \frac{\partial F_2}{\partial p_i} & \cdots & \sum_{i=1}^{n} p_i \frac{\partial F_m}{\partial p_i} & -z' \end{vmatrix} = 0$$

hinzufügen.

Wir gehen nun über in den

Fall $m=n$. Das Gleichungensystem (4) besteht aus $n+1$ Gleichungen. Von den n letzten Bedingungen lassen sich die n Variationen $\delta p_1, \cdots, \delta p_n$ als lineare Funktionen von $\delta z, \delta x_1, \cdots, \delta x_n$

* Die Gleichungen (5) selbst.

ausdrücken, da wir am Anfang die Determinante $\frac{\partial(F_1 \cdots F_n)}{\partial(p_1 \cdots p_n)}$ nicht gleich Null vorausgesetzt haben. Setzt man diese Ausdrücke in die erste ein, dann erhält man für δz eine lineare Differentialgleichung erster Ordnung wie früher. Man kann daher die von Integralzeichen freien Glieder von (3) als verschwunden annehmen.

Die Bestimmungsgleichungen von λ und μ lauten hier

$$\sum_{k=1}^{n} \mu_k \frac{\partial F_k}{\partial z} - \lambda' = 0$$

$$\sum_{k=1}^{n} \mu_k \frac{\partial F_k}{\partial p_i} - \lambda x_i' = 0 \qquad (i=1, 2, \cdots n)$$

Wir brauchen keine Bedingungsgleichung wie (5).

Wegen der Willkür von $\delta x_1, \cdots, \delta x_n$ folgen die Gleichungen

$$\sum_{k=1}^{n} \mu_k \frac{\partial F_k}{\partial x_i} + (\lambda p_i)' = 0 \qquad (i=1, 2, \cdots n)$$

Durch die Elimination von λ und μ ergiebt sich das Gleichungensystem

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial p_1} & \frac{\partial F_2}{\partial p_1} & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial p_1} & x_1' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial F_1}{\partial p_n} & \frac{\partial F_2}{\partial p_n} & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial p_n} & x_n' \\ \left(\frac{\partial F_1}{\partial x_i}\right) & \left(\frac{\partial F_2}{\partial x_i}\right) & \cdots & \left(\frac{\partial F_n}{\partial x_i}\right) & -p_i' \end{vmatrix} = 0 \quad (i=1,2,\cdots n) \quad (8')$$

In diesem Falle haben wir zu bemerken, dass das System (8') die notwendige Folge von (1) und (2) ist, welches für $m<n$ nicht der Fall war.

II.

Bezeichnet man, wie gewöhnlich, den Ausdruck

$$\sum_{\nu=1}^{n} \left\{ \frac{\partial F_i}{\partial p_\nu} \left(\frac{\partial F_k}{\partial x_\nu}\right) - \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_\nu}\right) \frac{\partial F_k}{\partial p_\nu} \right\}$$

mit dem Symbol $[F_i, F_k]$, dann folgt aus (2) und (8) die Beziehung

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial p_1} & \frac{\partial F_2}{\partial p_1} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial p_1} & x_1' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial F_1}{\partial p_m} & \frac{\partial F_2}{\partial p_m} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial p_m} & x_m' \\ [F_1F_i] & [F_2F_i] & \cdots & [F_mF_i] & F_i' \end{vmatrix} = 0$$

Soll nun der Ausdruck F_i für die Lösungen des Systems der Gleichungen (2) und (8) einen konstanten Wert annehmen, so muss die folgende Beziehung identisch bestehen.

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial p_1} & \frac{\partial F_2}{\partial p_1} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial p_1} & x_1' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial F_1}{\partial p_m} & \frac{\partial F_2}{\partial p_m} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial p_m} & x_m' \\ [F_1F_i] & [F_2F_i] & \cdots & [F_mF_i] & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Nach den Gleichungen (8) sind $x_{m+1}', \cdots, x_n', p_1', \cdots, p_n'$ lineare Funktionen von $x_1', \cdots, x_m'$ und die letzteren Grössen sind von einander unabhängig, und daher können sie sich willkürlich verändern. Daher müssen die Koeffizienten von $x_1', \cdots, x_m'$ in der letzten Determinante identisch verschwinden. Wir haben also m Gleichungen

$$\begin{aligned} &\Delta_{11}[F_1F_i] + \Delta_{12}[F_2F_i] + \cdots + \Delta_{1m}[F_mF_i] = 0 \\ &\Delta_{21}[F_1F_i] + \Delta_{22}[F_2F_i] + \cdots + \Delta_{2m}[F_mF_i] = 0 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\Delta_{m1}[F_1F_i] + \Delta_{m2}[F_2F_i] + \cdots + \Delta_{mm}[F_mF_i] = 0, \end{aligned}$$

wobei Δ_{ik} das algebraische Komplement des Elementes $\frac{\partial F_k}{\partial p_i}$ in der Determinante

$$\Delta = \frac{\partial(F_1 \quad F_m)}{\partial(p_1 \cdots p_m)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial p_1} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial p_1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial F_1}{\partial p_m} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial p_m} \end{vmatrix}$$

bezeichnet.

Da nun die Determinante der Koeffizienten der letzteren Gleichungen gerade Δ^{n-1} gleich ist und daher nicht verschwindet, so folgt, dass jeder von den Klammerausdrücken $[F_1 F_i]$, $[F_2, F_i]$ ..., $[F_m, F_i]$ verschwindet.

Umgekehrt, wenn alle Klammerausdrücke $[F_i F_k]$ für ein Lösungssystem von (2) und (8) identisch verschwinden, so ist unmittelbar ersichtlich, dass alle F_i' identisch verschwinden müssen, d.h. dass dann $F_1, \cdots, F_m$ konstante Werte erhalten.

Dieser Fall tritt offenbar ein, wenn alle Ausdrücke $[F_i F_k]$ als Funktionen der Veränderlichen $x_1, \cdots, x_n, p_1, \cdots, p_n$ identisch verschwinden, d.h. wenn die vorgelegten Gleichungen (1) ein Involutionssystem bilden.

Im folgenden setzen wir also fest, dass das System (1) zuerst zu einem Involutionssystem gebracht worden ist.

Wählt man nun, bei der Integration vom System (2) (8), die Anfangswerte so, dass dafür alle Ausdrücke $F_1, \cdots, F_m$ gleich Null werden, dann befriedigen die Lösungen dieses Systems das vorgelegte Involutionssystem (1). Nennen wir ein solches Lösungssystem eine charakteristische Mannigfaltigkeit, so haben wir im Ganzen $2n-2m+1$ fach unendlichviele charakteristische Mannigfaltigkeiten.

Die gesammten ∞^{2n-m+1} Elemente, welche dem Involutionssystem (1) entsprechen, schliessen sich zu $\infty^{2n-2m+1}$ charakteristische Mannigfaltigkeiten zusammen.

Da wir die simultanen Gleichungen (2), (8) nach

$$x_{m'+1}', \cdots, x_n', z', p_1', \cdots, p_n'$$

auflösen können, wobei die rechten Seiten eindeutig bestimmt werden, können wir folgendermassen schliessen:

Jede charakteristische Mannigfaltigkeit wird durch $2n-2m+1$ Anfangswerte von $x_{m+1}, \cdots, x_n, z, p_1, \cdots, p_n$ eindeutig bestimmt.

Wir möchten nun zeigen, dass die so definirte charakteristische Mannigfaltigkeit mit der gebräuchlichen übereinstimmt.

Bezeichnet man die $2n-2m+1$ von einander und von $F_1, \ldots, F_m$ verschiedenen Lösungen des Gleichungensystems

$$[F_1, \Phi]=0, \ [F_2, \Phi]=0, \ \cdots, \ [F_m, \Phi]=0 \tag{9}$$

durch $\Phi_1, \cdots, \Phi_{2n-2m+1}$, so ist die charakteristische Mannigfaltigkeit gewöhnlich durch die Gleichungen

$$F_1=0, \cdots, F_m=0, \ \Phi_1=c_1, \cdots, \Phi_{2n-2m+1}=c_{2n-2m+1}, \tag{10}$$

wobei $c_1, \cdots, c_{2n-2m+1}$ Konstanten bezeichnen, gegeben.*

Es sei $\Phi\ (z, x_1, \cdots, x_n, p_1, \cdots, p_n)$ irgend eine Lösung des Systems (9).

Wenn man irgend ein Lösungssystem z, x, p vom System (2) (8) in die Funktion Φ einsetzt, dann gilt identisch die Gleichung

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial p_1} & \frac{\partial F_2}{\partial p_1} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial p_1} & x_1' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial F_1}{\partial p_m} & \frac{\partial F_2}{\partial p_m} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial p_m} & x_m' \\ [F_1\Phi] & [F_2\Phi] & \cdots & [F_m\Phi] & \Phi' \end{vmatrix} = 0$$

Da aber alle Klammerausdrücke in der Determinante verschwinden, so folgt unmittelbar die Beziehung

$$\Phi = \text{Konst.}$$

Diese letzte Beziehung zeigt uns, dass jede Lösung Φ von (9) für jedes Lösungssystem z, x, p von (2) (8) konstant wird, d.h. $\Phi_i=c_i\ (i=1, 2, \cdots, 2n-2m+1)$ sind Lösungen vom System (2) (8), und daher bildet das System (10), welches im Ganzen $2n-m+1$

* Goursat, Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre. §94.

Gleichungen mit $2n-2m+1$ Integrationskonstanten enthält, dieselbe charakteristischen Mannigfaltigkeiten, welche durch das System (2) (8) definirt sind.

Da die Gleichungen (8) nichts anders als die Gleichungen für Extremalen des Variationsproblems

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} [\lambda(z' - \sum_{i=1}^{n} p_i x_i') + \sum_{k=1}^{m} \mu_k F_k] \, dt = 0$$

sind, bekommen wir den folgenden Satz:

Die charakteristischen Mannigfaltigkeiten eines Involutionssystems der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung

$$F_1(z, x_1, \cdots, x_n, p_1, \cdots, p_n) = 0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$F_m(z, x_1, \cdots, x_n, p_1, \cdots, p_n) = 0$$

sind die Extremalen des Variationsproblems, dass das Integral

$$\int_{t_0}^{t_1} \lambda(z' - \sum_{i=1}^{n} p_i x_i') \, dt$$

zu einem Extremum zu machen, dabei die zulässigen Funktionen den Nebenbedingungen

$$F_1 = 0, \cdots F_m = 0$$

unterworfen sind, und λ eine geeignet zu bestimmende, nicht mitvarierende Funktion von t ist.*

III.

Von den charakteristischen Mannigfaltigkeiten kann man,

---

* Von den Gleichungen (6) und $\Sigma \mu_k \left(\frac{\partial F_k}{\partial x_i}\right) + \lambda p_i' = 0$ erhält man sofort:

$$\sum_{k=1}^{m} \mu_k \left\{ F_k' - \frac{\partial F_k}{\partial z} (z' - \sum_{i=1}^{n} p_i x_i') \right\} = 0$$

daher folgt, wegen der Nebenbedingungen, $z' - \sum_{i=1}^{m} p_i x_i' = 0$.

nach Cauchy und Lie, die allgemeine Lösung des vorgelegten Involutionssystems ableiten.*

Wir nehmen nämlich an, dass ein Integralgebilde des vorgelegten Involutionssystems (1) für die Anfangswerte $x_1^\circ, \cdots, x_m^\circ$ von $x_1, \cdots, x_m$ sich auf das Gebilde

$$\overline{z} = \Phi(\overline{x}_{m+1}, \cdots \overline{x}_n)$$

reduzirt. Das genannte Integralgebilde ist dann umgekehrt durch das letzte Gebilde im Allgemeinen eindeutig bestimmt.**

Für dieses Wertsystem $x_1^\circ, \cdots, x_m^\circ$ erhalten wir

$$\overline{p}_{m+i} = \frac{\partial \Phi}{\partial \overline{x}_{m+i}} \qquad (i=1, \cdots, n-m);$$

die Werte $\overline{p}_1, \cdots, \overline{p}_m$ lassen sich durch die Beziehungen

$$F_1=0, \; F_2=0, \; \cdots, \; F_m=0$$

bestimmen.

Hierdurch sind längs des Gebildes $\overline{z} = \Phi$ alle diese Elemente

$$[x_1^\circ, \cdots, x_m^\circ, \overline{x}_{m+1}, \cdots, \overline{x}_n, \overline{z}, \overline{p}_1, \cdots, \overline{p}_n]$$

an einander gereiht und wir machen jetzt jedes einzelne Element zum Ausgangspunkt für die Konstruktion einer charakteristischen Mannigfaltigkeit.

Alle so konstruirten charakteristischen Mannigfaltigkeiten bilden zusammen wieder das ganannte Integralgebilde.

Wenn man die Funktion Φ als willkürlich betrachtet, so erhält man die allgemeine Lösung des vorgelegten Involutionssystems.

Wir haben nun zu verifizieren, ob die partiellen Ableitungen der eben gewonnenen Lösung wirklich mit p_i der charakteristischen Mannigfaltigkeiten übereinstimmen. Den Beweis dafür kann man ähnlicherweise wie in Goursat's ,,Leçons'' §50 führen.

---

* Goursat, Leçons. § 95.

** Goursat, Leçons. § 71.

Braucht man, nämlich, die dort benutzten Bezeichnungen, dann wird

$$\begin{aligned} U &= \delta z - p_1\,\delta x_1 - \cdots - p_n\,\delta x_n \\ dU &= d(\delta z) - p_{m+1}\,d(\delta x_{m+1}) - \cdots - p_n\,d(\delta x_n) \\ &\qquad - dp_1 \cdot \delta x_1 - \cdots - dp_n \cdot \delta x_n \\ &= \sum_{i=1}^{n} (\delta p_i \cdot dx_i - dp_i \cdot \delta x_i). \end{aligned}$$

Aus den Gleichungen (8) leitet man leicht die Beziehung ab:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial p_1} & \frac{\partial F_2}{\partial p_1} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial p_1} & dx_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial F_1}{\partial p_m} & \frac{\partial F_2}{\partial p_m} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial p_m} & dx_m \\ U\frac{\partial F_1}{\partial z} & U\frac{\partial F_2}{\partial z} & \cdots & U\frac{\partial F_m}{\partial z} & -dU \end{vmatrix} = 0,$$

welche sich in der folgenden Form schreiben lässt:

$$\frac{dU}{U} = Z_1\,dx_1 + Z_2 \cdot dx_2 + \cdots + Z_m\,dx_m.$$

Man erhält daher

$$U = U_0\,e^{\sum_{i=1}^{m} \int_0^{x_i} Z_i\,dx_i}$$

Falls alle Z_i endlich bleiben, kann man, da U_0 für unsere Anfangswerte gleich Null sein muss, daraus schliessen

$$U = 0,$$

was zu beweisen war.

Sollte aber weiterhin durch Verschwinden von $\frac{\partial(F_1 \cdots F_m)}{\partial(p_1 \cdots p_m)}$ sich eine Schwierigkeit ergeben, so bemerke man, dass man bei Integration längs einer charakteristischen Mannigfaltigkeit statt $(x_1, \cdots, x_m)$ irgend m der Variabelen

$$z,\ x_1,\ \cdots,\ x_n,\ p_1,\ \cdots,\ p_n$$

gerade so gut als unabhängig ansehen kann. Eine Schwierigkeit kann also nur dann eintreten, wenn auf dem gerade betrachteten Gebilde eine Stelle erreicht wird, an welcher alle Determinanten m-ter Ordnung aus der Matrix

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial p_1} & \frac{\partial F_2}{\partial p_1} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial p_1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial F_1}{\partial p_n} & \frac{\partial F_2}{\partial p_n} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial p_n} \\ \left(\frac{\partial F_1}{\partial x_1}\right) & \left(\frac{\partial F_2}{\partial x_1}\right) & \cdots & \left(\frac{\partial F_m}{\partial x_1}\right) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \left(\frac{\partial F_1}{\partial x_n}\right) & \left(\frac{\partial F_2}{\partial x_n}\right) & \cdots & \left(\frac{\partial F_m}{\partial x_n}\right) \end{vmatrix}$$

verschwinden.

Die bisherige Methode gibt also kein Integral, für welches alle diese Determinanten gleichzeitig verschwinden. Ein solches bezeichnet man als singuläre Lösung.

Wählt man jetzt für Φ eine bestimmte Funktionsform, so ergibt sich ein bestimmtes Integralgebilde. Eine Schar von ∞^{n-m} charakteristischen Mannigfaltigkeiten bildet ein Integralgebilde. Da es nun im Ganzen $\infty^{2n-2m+1}$ charakteristische Mannigfaltigkeiten gibt, so haben wir Scharen von ∞^{n-m+1} Integralgebilden, welche man die vollständige Lösung nennt.

Um also eine vollständige Lösung zu erhalten, wählen wir für Φ eine bestimmte Funktionsform mit $n-m+1$ wesentlichen Parametern. Die so gewonnene Lösung mit $n-m+1$ Parametern ist eine vollständige Lösung.

Wir wollen nun ein Beispiel geben, welches sich leicht durch diese Methode integrieren lässt.

Beispiel.* Es sei das System

$$p_1 p_4 - x_2 x_3 = 0$$
$$p_2 p_3 - x_1 x_4 = 0$$

* Goursat, Leçons p. 156.

vorgelegt; wir bilden daraus das Involutionssystem

$$p_1 - \frac{x_2 x_3}{p_4} = 0,$$

$$p_2 - \frac{x_4 p_4}{x_2} = 0,$$

$$p_3 - \frac{x_1 x_2}{p_4} = 0.$$

Das Gleichungensystem (2) (8) besitzt, ausser dieser drei die drei folgenden Integrale:

$$z - 2x_4 p_4 = \alpha,$$
$$p_1 p_3 - x_2 x_4 = \beta,$$
$$p_2 p_4 - x_1 x_3 = \gamma,$$

mit den Integrationskonstanten α, β, γ.

Nehmen wir für die Anfangswerte die folgenden:

$$x_1^\circ = -1, \qquad x_2^\circ = 1, \qquad x_4^\circ = 0,$$

dann erhalten wir die Beziehungen zwischen den Konstanten

$$\alpha = \bar{z} - 2\bar{x}_4 \bar{p}_4,$$
$$\beta = -\bar{x}_4,$$
$$\gamma = \bar{x}_4 (\bar{p}_4)^2.$$

Die Gleichungen für charakteristische Mannigfaltigkeiten lassen sich in der folgenden Form schreiben:

$$x_4 = \frac{1}{(\bar{p}_4)^2} \frac{x_1 x_3 + \bar{x}_4 (\bar{p}_4)^2}{x_2}$$

$$z = \bar{z} + \frac{2x_1 x_3}{\bar{p}_4},$$

$$p_1 = \frac{x_3}{\bar{p}_4},$$

$$p_2 = \frac{x_1 x_3 + \bar{x}_4 (\bar{p}_4)^2}{\bar{p}_4 \cdot x_2},$$

$$p_3 = \frac{x_1}{\bar{p}_4},$$

$$p_4 = \bar{p}_4 x_2.$$

Um die allgemeine Lösung zu erhalten haben wir nur zu setzen:

$$\overline{z} = \Phi(\overline{x_4}), \qquad \overline{p_4} = \Phi'(\overline{x_4}),$$

wo Φ eine willkürliche Funktion und Φ' ihre Ableitung nach $\overline{x_4}$ bezeichnet, und dann sind die zwei ersten Gleichungen aus dem letzten Systeme als die allgemeine Lösung zu betrachten, wenn man $\overline{x_4}$ als Parameter denkt.

Setzt man speziell

$$\overline{z} = a\,\overline{x_4} + b,$$

so erhält man gerade diejenige vollständige Lösung wie man im „Goursat's Leçons" p. 157 findet, welche lautet:

$$z = \frac{x_1 x_3}{a} + a\,x_2 x_4 + b.$$

IV.

Ein spezieller Fall ist die Integration eines Involutionssystems linearer partieller Differentialgleichungen erster Ordnung.*

Jede Gleichung ist von der Form

$$P_1 p_1 + P_2 p_2 + \cdots + P_n p_n = R,$$

worin $P_1, P_2, \cdots, P_n, R$ Funktionen von $z, x_1, \cdots, x_n$ sind.

Das Gleichungensystem von (2) und (8) sind offenbar Beziehungen zwischen $z, x_1, \cdots x_n$, und enthält kein p drin.

Schreibt man die Integrale dieses Systems in der Form

$$\overline{x}_{m+1} = \varphi_1(x_1, \cdots, x_n, z)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\overline{x}_n = \varphi_{n-m}(x_1 \cdots, x_n, z)$$
$$\overline{z} = \varphi(x_1, \cdots, x_n, z),$$

und setzt man, wie früher,

$$\overline{z} = \Phi(\overline{x}_{m+1}, \cdots, \overline{x}_n),$$

* Vgl. Goursat, Leçons. § 97. II.

dann erhält man die allgemeine Lösung des vorgelegten Systems in der Form

$$\varphi = \Phi(\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_{n-m}).$$

Wenn man, im Allgemeinen, irgend welche $n-m+1$ von einander unabhängigen Lösungen

$$\psi_1(x_1, \cdots, x_n, z) = c_1,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\psi_{n-m+1}(x_1, \cdots, x_n, z) = c_{n-m+1}$$

mit den Integrationskonstanten $c_1, \cdots, c_{n-m+1}$ findet, dann liefert, wie man leicht sieht, die Gleichung

$$\Phi(\psi_1, \cdots, \psi_{n-m+1}) = 0$$

die allgemeine Lösung, wobei Φ auch eine willkürliche Funktion bezeichnet.

Beispiel. 1. Das vorgelegte System sei

$$p_1 + p_2 = \frac{x_3 + x_4}{z},$$

$$p_3 + p_4 = \frac{x_1 + x_2}{z}.$$

Diese beiden Gleichungen bilden ein Involutionssystem. Da hier $\frac{\partial(F_1 F_2)}{\partial(p_1 p_2)}$ identisch verschwindet, nehmen wir x_2, x_3, anstatt x_1, x_2, für unabhängige Variabeln an.

Man findet leicht die folgenden drei Integrale vom System (2) und (8):

$$x_1 - x_2 = \text{Konst.}$$
$$x_3 - x_4 = \text{Konst.}$$
$$\frac{z^2}{2} - x_1 x_4 - x_2 x_3 = \text{Konst.}$$

Die allgemeine Lösung des vorgelegten Systems lautet also:

$$\frac{z^2}{2} - x_1 x_4 - x_2 x_3 = \Phi(x_1 - x_2, x_3 - x_4).$$

Beispiel 2. Das vorgelegte System sei

$$p_1 + (x_2 + x_4 - 3x_1)\, p_3 + (x_3 + x_1 x_2 + x_1 x_4)\, p_4 = 0,$$
$$p_2 + (x_3 x_4 - x_2)\, p_3 + (x_1 x_3 x_4 + x_2 - x_1 x_2)\, p_4 = 0. \quad *$$

Durch Hinzufügung der Gleichung

$$p_3 + x_1 p_4 = 0$$

erhalten wir ein vollständiges System. Löst man diese Gleichungen nach p_1, p_2, p_3 auf, dann bekommt man das Jacobische System:

$$p_1 + (x_3 + 3x_1^2)\, p_4 = 0,$$
$$p_2 + x_2 p_4 = 0,$$
$$p_3 + x_1 p_4 = 0.$$

Man findet leicht die zwei Integrale

$$z = \text{Konst.}$$
$$x_1^3 + \frac{x_2^2}{2} + x_1 x_3 - x_4 = \text{Konst.}$$

Die allgemeine Lösung unseres Systems lautet daher:

$$z = \Phi\left(x_1^3 + \frac{x_2^2}{2} + x_1 x_3 - x_4\right).$$

Ich fühle mich Herrn Geheimrat Hilbert in Göttingen für die wertvollsten Ratschläge zu grossem Danke verpflichtet.

---

* Goursat, Leçons, p. 62.

Publ. Aug. 25th, 1913.