J. Fac. Sci. Univ. Tokyo
Sect. IA, Math.
39 (1992), 43-59.

Existence globale pour les modèles discrets de l'équation de Boltzmann dans un tube mince infini en dimension 1 *d'espace*

Par Mitsuru YAMAZAKI

Résumé. Ici, on donne une démonstration de l'existence d'une unique solution globale en temps pour les modèles discrets de l'équation de Boltzmann dans un tube mince infini en dimension 1 d'espace, et en particulier, pour le modèle droite-gauche, on donne en outre une estimation explicite des solutions, dès que les données de Cauchy sont positives, sommables et bornées.

Chapitre I.

Introduction.

En théorie cinétique des gaz, la discrétisation des vitesses, qui consiste à considérer que les vitesses des particules appartiennent à un ensemble fini I de vecteurs, est une idée déjà ancienne. Maxwell [15] conçoit un modèle pour un fluide par un système d'axes orthogonaux avec vitesses constantes en module, et prédit l'équation d'état et les propriétés de transport pour un tel gaz. Dans son travail [6], Carleman, en 1957, établit un théorème H qui décrit la croissance de l'entropie en temps. En 1960, Gross [10] souligne l'intérêt de la discrétisation des vitesses qui permet de remplacer l'équation intégro-différentielle de Boltzmann par un système d'équations aux dérivées partielles non linéaires et couplées. Des modèles simples de gaz à répartition discrète de vitesses sont alors décrits par Broadwell [4] en 1964, et utilisés pour résoudre des problèmes de dynamique des gaz raréfiés dans lequel on doit faire appel à l'équation de Boltzmann ; pour les écoulements de Couette et de Rayleigh [3] et pour la structure d'une onde de choc à Mach infini [4], ces modèles donnent une image physique simple des phénomènes et les résultats quantitatifs sont remarquablement proches de ceux trouvés par d'autres méthodes. En 1975, Gatignol [9] démontre l'existence et l'unicité de la solution du problème de Cauchy pour des équations cinétiques modifiées obtenues en introduisant un paramètre auxiliaire et elle réunit dans son livre les résultats déjà connus. Crandall et

Tartar [16] obtient un critère qui permet de supprimer la condition relative à la masse initiale pour un système hyperbolique semi-linéaire de la théorie cinétique des gaz. Les travaux récents sont trop abondants pour tout mentionner en détail. On rappelle très brièvement l'évolution de ces études.

Le modèle discret le plus général de l'équation de Boltzmann dans l'espace entier s'écrit comme suit :

$$\frac{\partial u_i}{\partial t}+C_i\cdot\nabla u_i=\sum_{jkl}(A_{ij}^{kl}u_k u_l-A_{kl}^{ij}u_i u_j)$$

où on se donne une famille finie $(C_i)_{i\in I}$ de vecteurs-vitesse de $\boldsymbol{R}^d$ ($d=1,2$ ou 3), les fonctions inconnues $u_i(X,t)$ représentant la densité de molécules animées de la vitesse C_i au point $X\in\boldsymbol{R}^d$ et à l'instant $t\in\boldsymbol{R}_+$, et les A_{kl}^{ij} sont les constantes données. C'est-à-dire qu'on admet que seules les interactions binaires entre molécules jouent un rôle, et que le nombre de couples de molécules de vitesses C_i et C_j transformées après interaction en molécules de vitesses C_k et C_l dans un petit volume autour de (X,t) est égal à $A_{kl}^{ij}u_i u_j dXdt$. Les probabilités constantes de transition A_{kl}^{ij} sont positives ou nulles et symétriques par rapport aux deux indices inférieurs et aussi aux deux supérieurs :

$$A_{kl}^{ij}\geqq 0$$

$$A_{kl}^{ij}=A_{lk}^{ij}=A_{kl}^{ji}\,.$$

Beaucoup d'auteurs admettent par hypothèses que la microréversibilité [i. e. $A_{kl}^{ij}=A_{ij}^{kl}$] qui correspond en mécanique statistique au "principe de microréversibilité" ou "principe du bilan détaillé" ou encore "principe d'Onsager" (Voir R. Jancel [12]). Cette hypothèse de la microréversibilité, admise dans le modèle de Broadwell, nous entraîne facilement au théorème H i. e. croissance de l'entropie. En 1986, J. T. Beale [1] démontre que, dans le modèle unidimensionnel sous des hypothèses supplémentaires avec les données initiales de masse finie, toutes les solutions tendent vers l'état où les comportements sont flots avançant sans interactions. Les problèmes aux limites sont étudiés par C. Cercignani, R. Illner, M. Shinbrot [7] [8] et S. Kawashima [13] [14]. En 1987, J. M. Bony [2] obtient un résultat satisfaisant sur l'existence globale sans l'hypothèse de microréversibilité ; il montre que, pour le problème unidimensionnel, il existe une unique solution bornée en temps global avec une estimation explicite dès que les données de Cauchy sont bornées et sommables. Il obtient aussi une estimation plus stricte pour le modèle droite-gauche dans le cadre duquel rentrent de nombreux modèles, notamment les projections unidimensionnelles du modèle de Broadwell.

Ici, on se donne le système d'équations aux dérivées partielles semilinéaires qui diffère de celui de [2], [5], [9], par l'intervention du terme linéaire. L'existence globale d'une solution pour ce système est démontrée dans le cas général, sous l'hypothèse plus faible que celle de [1], [5], [7], [8], [9], [12], [14], [15], [17]; dans le cas du modèle droite-gauche, sans aucune hypothèse supplémentaire sur les coefficients A_{kl}^{ij} par le même argument [2]. L'auteur a récemment obtenu d'autres résultats pour les modèles discrets dans un tube mince infini [18]: une majoration linéaire en temps de solutions sous l'hypothèse (H4) qui est raisonnable pour certains modèles simples, notammemt le modèle de Maxwell-Broadwell.

Dans cet article, on étudie le modèle unidimensionnel des molécules animées dans un tube mince infini, en admettant que seules les réflexions linéaires des molécules contre la paroi du tube, non nécessairement spéculaire, jouent un rôle et que le nombre de molécules de vitesse C_i transformées après réflexion en molécules de vitesse C_k dans un petit volume autour de (X, t) est égal à $\alpha_k^i u_i dXdt$, où les constantes α_k^i sont données.

En supposant que c_i sont les composants de vitesses C_i selon la variable $x\in \boldsymbol{R}$ de l'axe du tube, on est donc amené à résoudre le problème de Cauchy :

$$\text{(B)}\qquad \begin{cases} \left(\dfrac{\partial}{\partial t}+c_i\dfrac{\partial}{\partial x}\right)u_i(x, t)=\sum_{jkl}(A_{ij}^{kl}u_k u_l-A_{kl}^{ij}u_i u_j)+\sum_k(\alpha_i^k u_k-\alpha_k^i u_i) \\ u_i(x, 0)=u_i^0(x). \end{cases}$$

La signification physique impose les hypothèses naturelles comme suit :

$$\text{(H1)}\qquad A_{kl}^{ij}=A_{kl}^{ji}=A_{lk}^{ij}\geqq 0$$

$$\text{(H2)}\qquad \alpha_k^i\geqq 0\,.$$

REMARQUE. Dans le cas du "mur parfaitement lisse" et de la "réflexion totale", on sait que

$$\alpha_i^k=\delta_{ik}\,.$$

REMARQUE. On ne fait aucune hypothèse de microréversibilité [i. e. $A_{kl}^{ij}=A_{ij}^{kl}$].

PROPOSITION I.1 (loi de conservation). *Soit* $u_i=u_i(x, t)\in C^1(\boldsymbol{R}_+, \mathcal{S}(\boldsymbol{R}))$ $(i\in I)$ *une solution de* (B). *Alors, pour tout* $t\in \boldsymbol{R}_+$, *on a*

$$\text{(1.1)}\qquad \sum_i\left(\frac{\partial}{\partial t}+c_i\frac{\partial}{\partial x}\right)u_i(x, t)=0$$

$$\text{(1.2)}\qquad \int_{\boldsymbol{R}}\sum_i u_i(x, t)dx=\int_{\boldsymbol{R}}\sum_i u_i^0(x)dx$$

(conservation de la masse).

En plus, si on suppose que

(H3) $$A_{ij}^{kl} \neq 0 \Longrightarrow c_i + c_j = c_k + c_l$$

(H4) $$\Sigma_i \alpha_i^k (c_k - c_i) = 0$$

alors on a

(1.3) $$\sum_i \left(\frac{\partial}{\partial t} + c_i \frac{\partial}{\partial x} \right) c_i u_i(x, t) = 0$$

(1.4) $$\int_{\boldsymbol{R}} \Sigma_i c_i u_i(x, t) dx = \int_{\boldsymbol{R}} \Sigma_i c_i u_i^0(x) dx$$

(conservation de la quantité de mouvement).

PREUVE. Tout d'abord, on a

$$\Sigma_i \left(\frac{\partial}{\partial t} + c_i \frac{\partial}{\partial x} \right) u_i(x, t) = \left\{ \sum_{ijkl} (A_{ij}^{kl} u_k u_l - A_{kl}^{ij} u_i u_j)(x, t) + \Sigma_{ik} (\alpha_i^k u_k - \alpha_k^i u_i)(x, t) \right\}$$
$$= 0,$$

puisque les sommations sont opérées d'une manière symétrique par rapport aux indices. Du fait que $u_i(\cdot, t) \in \mathcal{S}(\boldsymbol{R})$ $(i \in I)$ et $\int_{\boldsymbol{R}} \frac{\partial u_i}{\partial x} dx = 0$ pour chaque $t \in \boldsymbol{R}_+$, on a

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\boldsymbol{R}} \Sigma_i u_i(x, t) dx &= \int_{\boldsymbol{R}} \Sigma_i \frac{\partial u_i}{\partial t}(x, t) dx \\ &= \int_{\boldsymbol{R}} \Sigma_i \left(\frac{\partial}{\partial t} + c_i \frac{\partial}{\partial x} \right) u_i(x, t) dx \\ &= 0, \end{aligned}$$

De même, sous les hypothèses (H3) et (H4), on a

$$\begin{aligned} &\Sigma_i \left(\frac{\partial}{\partial t} + c_i \frac{\partial}{\partial x} \right) c_i u_i(x, t) \\ &= \left\{ \sum_{ijkl} c_i (A_{ij}^{kl} u_k u_l - A_{kl}^{ij} u_i u_j)(x, t) + \Sigma_{ik} c_i (\alpha_i^k u_k - \alpha_k^i u_i)(x, t) \right\} \\ &= \left\{ \Sigma_{ijkl} - \frac{1}{4} (c_k + c_l - c_i - c_j)(A_{ij}^{kl} u_k u_l - A_{kl}^{ij} u_i u_j)(x, t) + \Sigma_{ik} - \alpha_i^k (c_k - c_i) u_k(x, t) \right\} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Donc on a

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int_R \sum_i c_i u_i(x, t)dx &= \int_R \sum_i c_i \frac{\partial u_i}{\partial t}(x, t)dx \\ &= \int_R \sum_i c_i \Big(\frac{\partial}{\partial t} + c_i \frac{\partial}{\partial x}\Big) u_i(x, t)dx \\ &= 0 .\end{aligned}$$

Chapitre II.

Enoncé du résultat.

On peut maintenant énoncer le résultat suivant :

THÉORÈME II.1. *Supposons que les u_i^0 $(i \in I)$ sont positives, sommables et bornées. Sous les hypothèses suivantes :*

$$(\mathrm{H1}), \quad (\mathrm{H2}), \quad (\mathrm{H3}), \quad (\mathrm{H4})$$

(H5) $$\sum_{kl} A_{kl}^{ij} = \sum_{kl} A_{ij}^{kl}$$

(H6) $$\sum_k \alpha_k^i = \sum_k \alpha_i^k ,$$

alors il existe une et une seule solution $u=(u_i)_{i\in I}$ appartenant à $L^\infty(\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R}_+)$, du problème de Cauchy (B).

REMARQUE. L'hypothèse (H5) correspond, en mécanique statistique, au "principe du bilan semi-détaillé" ou au "condition de Stueckelberg" (Voir W. Heitler [11]). Elle signifie que, avant et après la collision, la somme de proportions de transitions d'un état des couples de molécules de vitesses C_i et C_j à tous les autres états, est égale à celle de tous les états à l'état des couples de molécules de vitesses C_i et C_j. Cette hypothèse est moins forte que celle de microréversibilité ; en fait, celle-là est tout de suite déduite de celle-ci.

REMARQUE. Dans la réflexion contre la paroi du tube, l'hypothèse (H6) est remplacée par l'hypothèse (H5). Elle signifie que, avant et après la réflexion, la somme de proportions de transitions d'un état de molécules de vitesse C_i à tous les autres états, est égale à celle de tous les états à l'état de molécules de vitesse C_i.

Un cas particulier intéressant est celui du modèle droite-gauche introduit par J. M. Bony [2]. On suppose que les vitesses sont différentes d'entre elles et que I est une réunion disjointe de deux sous-ensembles D et G tels que

$$i \in D \text{ (resp. } G) \Rightarrow \text{les composants selon l'axe du tube } c_i \geqq 0 \text{ (resp. } \leqq 0), \tag{2.1}$$

et que les interactions de collision ne se produisent qu'entre particules se déplaçant dans des directions opposantes et que les transitions de réflexion ne changent pas la direction des particules :

$$A_{kl}^{ij} \neq 0 \Longrightarrow (i, j) \quad \text{et} \quad (k, l) \in (D \times G) \cup (G \times D) \tag{2.2}$$

$$\alpha_k^i \neq 0 \Longrightarrow (i, k) \in (D \times D) \cup (G \times G)\,. \tag{2.3}$$

De nombreux modèles, notamment les projections unidimensionnelles du modèle de Broadwell, rentrent dans ce cadre.

THÉORÈME II.2. *Pour un modèle droite-gauche, si on suppose les hypothèses* (H1), (H2), (H3) *et l'hypothèse de microréversibilité de réflexion* :

$$\alpha_i^k = \alpha_k^i\,, \tag{H7}$$

alors il existe une et une seule solution $u=(u_i)_{i \in I}$ *appartenant à* $L^\infty(\boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R}_+)$, *du problème de Cauchy* (B), *et on a en outre une estimation de la solution* :

$$\sup_i \sup_{\substack{x \in \boldsymbol{R} \\ t \in \boldsymbol{R}_+}} u_i(x, t) \leqq \left[\sup_i \sup_{x \in \boldsymbol{R}} u_i^0(x)\right] e^{M\mu} \tag{2.4}$$

où M *ne dépend que de l'équation, et que* μ *désigne la masse totale* :

$$\mu = \Sigma_i \int_{\boldsymbol{R}} u_i^0(x) dx\,. \tag{2.5}$$

Bien entendu, compte tenu de la propagation à vitesse finie, on a une existence globale pour des données de Cauchy localement bornées. Si celles-ci sont bornées, la solution au point $(x, t) \in \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R}_+$ ne dépend que des données de Cauchy sur l'intervalle $[x-ct, x+ct]$, dont la masse est bornée par $C^{te}t$. On a donc le corollaire suivant :

COROLLAIRE II.3. *On suppose que les* u^0 $(i \in I)$ *sont positives et bornées.*

(i) *Sous les hypothèses* (H1), (H2), (H3), (H4), (H5), (H6), *alors il existe une unique solution* $u=(u_i)_{i \in I}$ *appartenant à* $L^\infty_{\mathrm{loc}}(\boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R}_+)$ *du problème de Cauchy* (B).

(ii) *En outre pour le modèle droite-gauche, sous les hypothèses* (H1), (H2), (H3), (H7), *alors il existe une unique solution* $u=(u_i)_{i \in I}$ *appartenant à* $L^\infty_{\mathrm{loc}}(\boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R}_+)$ *du problème de Cauchy* (B) *avec une estimation* :

$$\sup_{i}\sup_{\substack{x\in\boldsymbol{R}\\ t\in\boldsymbol{R}_+}} u_i(x,t)\leqq e^{A+Bt} \tag{2.6}$$

où A et B ne dépendent que de l'équation et de la masse totale.

Chapitre III.

Démonstration du Théorème II.1.

On peut facilement démontrer que le problème de Cauchy (B) admet localement en temps une unique solution positive et bornée, et que l'on a propagation à vitesse finie (Voir, par exemple, L. Tartar [16]). Si T^* est le temps d'existence de la solution, il suffit donc de montrer que les u_i sont bornées sur $\boldsymbol{R}\times[0, T^*[$ pour prouver du même coup que $T^*=+\infty$. Les théorèmes d'existence locale étant valables dans C^∞, on pourra même supposer, pour prouver l'existence globale et l'estimation, que les $u_i(x,t)$ sont C^∞ et à support borné pour chaque $t\in\boldsymbol{R}_+$.

§ 3.1. Pour une "petite" masse totale

On pose $I_a=\{i\in I\,;\ c_i=c_a\}$ et

$$\tilde{u}_a(x,t)=\sum_{i\in I_a} u_i(x,t)\,. \tag{3.1}$$

Alors, par addition membre à membre des équations (B) pour les $i\in I_a$, on obtient

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+c_a\frac{\partial}{\partial x}\right)\tilde{u}_a=\sum_{i\in I_a}\sum_{k\notin I_a}\left\{\sum_{jl}(A_{ij}^{kl}u_ku_l-A_{kl}^{ij}u_iu_j)+(\alpha_i^k u_k-\alpha_k^i u_i)\right\}. \tag{$\tilde{\mathrm{B}}$}$$

Et puis, en posant

$$E_0=\sup_i\sup_{x\in\boldsymbol{R}} u_i^0(x) \tag{3.2}$$

$$E(t)=\sup_i\sup_{\substack{\tau\in[0,t]\\ x\in\boldsymbol{R}}} u_i(x,\tau)\,, \tag{3.3}$$

on trouve que

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+c_a\frac{\partial}{\partial x}\right)\tilde{u}_a\leqq C_1(1+E(t))\sum_{k\notin I_a} u_k \tag{3.4}$$

où C_1 ne dépend que de l'équation.

L'intégration du premier membre sur $\{(\xi,\tau)\,;\ \xi=x-c_a(t-\tau), 0\leqq\tau\leqq t\}$ nous donne

$$(3.5)\qquad \int_0^t\left\{\left(\frac{\partial}{\partial t}+c_a\frac{\partial}{\partial x}\right)\tilde{u}_a\right\}(x-c_a(t-\tau),\tau)d\tau=\int_0^t\frac{\partial}{\partial\tau}\{\tilde{u}_a(x-c_a(t-\tau),\tau)\}d\tau$$
$$=\tilde{u}_a(x,t)-\tilde{u}_a(x-c_at,0)\,.$$

On a donc

$$(3.6)\qquad u_a(x,t)\leqq\tilde{u}_a(x,t)\leqq PE_0+C_1(1+E(t))\sum_{k\in I_a}\int_0^t u_k(x-c_a(t-\tau),\tau)d\tau$$

où P est le nombre des vitesses : $P=\sharp I$.

Or, par le calcul (1.3)-(1.1)$\times c_a$ opéré sur les lois de conservation de la proposition I.1, on a

$$(3.7)\qquad \frac{\partial}{\partial t}\sum_i(c_i-c_a)u_i+\frac{\partial}{\partial x}\sum_i(c_i-c_a)c_iu_i=0\,.$$

Ensuite on intègre cette équation sur $D=\{(\xi,\tau)\,;\ X_N\leqq\xi\leqq x+c_a\tau,\,0\leqq\tau\leqq t\}$ en utilisant le théorème de Stokes :

$$(3.8)\qquad \begin{aligned}0&=\iint_D\left\{\frac{\partial}{\partial t}\sum_i(c_i-c_a)u_i+\frac{\partial}{\partial x}\sum_i(c_i-c_a)c_iu_i\right\}d\xi d\tau\\&=\oint_{\partial D}\left\{-\sum_i(c_i-c_a)u_id\xi+\sum_i(c_i-c_a)c_iu_id\tau\right\}\\&=\sum_i(c_i-c_a)\int_{X_N}^{x+c_at}u_i(\xi,t)d\xi+\sum_i(c_i-c_a)^2\int_0^t u_i(x+c_a\tau,\tau)d\tau\\&\quad-\sum_i(c_i-c_a)\int_{X_N}^{x}u_i^0(\xi)d\xi-\sum_i(c_i-c_a)c_i\int_0^t u_i(x_N,\tau)d\tau\,.\end{aligned}$$

D'autre part, on a

$$\int_R\sum_i u_i(\xi,t)d\xi=\int_R\sum_i u_i^0(\xi)d\xi=\mu\qquad\text{(masse totale)}$$

et

$$\int_{|\xi|<R}\left(\int_0^t u_i(\xi,\tau)d\tau\right)d\xi=\int_0^t\left(\int_{|\xi|<R}u_i(\xi,\tau)d\xi\right)d\tau\leqq\mu t\,.$$

En posant

$$(3.9)\qquad \varphi(\xi,t)=\int_0^t u_i(\xi,\tau)d\tau,\qquad \xi\in\boldsymbol{R},\,t\in\boldsymbol{R}_+\,,$$

on a $\varphi_i(\cdot, t) \in L^1(\boldsymbol{R})$ pour chaque $t \in \boldsymbol{R}_+$. Il existe donc une suite (X_N) de $\boldsymbol{R}$ telle que $\varphi_i(X_N, t)$ tend vers 0 quand N tend vers l'infini pour tout $t \in [0, T]$ $(0 < T < \infty)$ et pour tout $i \in I$. D'après (3.8), on a

$$\begin{aligned}
&\sum_{i \notin I_a} (c_i - c_a)^2 \int_0^t u_i(x + c_a \tau, \tau) d\tau \\
&= \sum_{i \notin I_a} (c_i - c_a) \left\{ \int_{X_N}^x u_i^0(\xi) d\xi + c_i \int_0^t u_i(X_N, \tau) d\tau - \int_{X_N}^{x + c_a t} u_i(\xi, t) d\xi \right\} \\
&= \sum_{i \notin I_a} (c_i - c_a) \left\{ \int_{X_N}^x u_i^0(\xi) d\xi + c_i \varphi_i(X_N, t) - \int_{X_N}^{x + c_a t} u_i(\xi, t) d\xi \right\} \\
&\leqq C^{te} \mu
\end{aligned}$$

où cette constante ne dépend que de l'équation.

On obtient donc

$$\sum_{i \notin I_a} \int_0^t u_i(x + c_a \tau, \tau) d\tau \leqq C_2 \mu$$

c'est-à-dire

$$\sum_{i \notin I_a} \int_0^t u_i(x - c_a(t - \tau), \tau) d\tau \leqq C_2 \mu \tag{3.10}$$

où C_2 ne dépend que de l'équation.

Les inégalités (3.6) et (3.10) nous permettent d'écrire

$$u_a(x, t) \leqq PE_0 + C_1 C_2 \mu (1 + E(t)).$$

Par conséquent, on a

$$E(t) \leqq PE_0 + C_1 C_2 \mu (1 + E(t)). \tag{3.11}$$

Pour une "petite" masse totale telle que

$$\mu \leqq \frac{1 - \delta}{C_1 C_2} \quad \text{avec un certain} \quad \delta > 0, \tag{3.12}$$

on a une solution globale en temps, et, en plus,

$$E(t) \leqq \frac{PE_0 + C_1 C_2 \mu}{1 - C_1 C_2 \mu} \leqq \frac{P}{\delta} E_0 + \left(\frac{1}{\delta} - 1 \right). \tag{3.13}$$

§ 3.2. Pour une "grande" masse totale

PROPOSITION III.1 (H-théorème). *Soit* $u_i = u_i(x, t) \in C^1(\boldsymbol{R}_+, \mathcal{S}(\boldsymbol{R}))$ $(i \in I)$ *une solution de* (B). *Alors, sous les hypothèses* (H1), (H2), (H5), (H6), *on* *a, pour tout* $t \in \boldsymbol{R}_+$,

$$\int_{\boldsymbol{R}} \sum_i u_i \log u_i(x, t) dx \leqq \int_{\boldsymbol{R}} \sum_i u_i^0 \log u_i^0(x) dx \tag{3.14}$$

(*inégalité de l'entropie*)

PREUVE. L'équation (B) nous donne que

$$\begin{aligned} &\sum_i \left(\frac{\partial}{\partial t} + c_i \frac{\partial}{\partial x} \right) (u_i \log u_i) \\ &= \sum_i (1+\log u_i) \left(\frac{\partial}{\partial t} + c_i \frac{\partial}{\partial x} \right) u_i \\ &= \sum_i (1+\log u_i) \left\{ \sum_{jkl} (A_{ij}^{kl} u_k u_l - A_{kl}^{ij} u_i u_j) + \sum_k (\alpha_i^k u_k - \alpha_k^i u_i) \right\} \\ &= -\frac{1}{4} \sum_{ijkl} \log \frac{u_k u_l}{u_i u_j} (A_{ij}^{kl} u_k u_l - A_{kl}^{ij} u_i u_j) \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{ik} \log \frac{u_k}{u_i} (\alpha_i^k u_k - \alpha_k^i u_i) \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{ijkl} \log \frac{u_k u_l}{u_i u_j} A_{ij}^{kl} u_k u_l - \sum_{ik} \log \frac{u_k}{u_i} \alpha_i^k u_k . \end{aligned} \tag{3.15}$$

D'après l'hypothèse (H5), on a

$$\begin{aligned} \sum_{ijkl} A_{ij}^{kl} u_k u_l &= \sum_{kl} \left(\sum_{ij} A_{ij}^{kl} \right) u_k u_l \\ &= \sum_{kl} \left(\sum_{ij} A_{kl}^{ij} \right) u_k u_l \\ &= \sum_{ijkl} A_{kl}^{ij} u_k u_l \\ &= \sum_{ijkl} A_{ij}^{kl} u_i u_j . \end{aligned} \tag{3.16}$$

De même, d'après l'hypothèse (H6), on a

$$\begin{aligned} \sum_{ik} \alpha_i^k u_k &= \sum_k \left(\sum_i \alpha_i^k \right) u_k \\ &= \sum_k \left(\sum_i \alpha_k^i \right) u_k \\ &= \sum_{ik} \alpha_k^i u_k \\ &= \sum_{ik} \alpha_i^k u_i . \end{aligned} \tag{3.17}$$

Il déduit de (3.15), (3.16), (3.17) que

$$\sum_i \left(\frac{\partial}{\partial t}+c_i\frac{\partial}{\partial x}\right)(u_i \log u_i)$$

$$=-\frac{1}{2}\sum_{ijkl}A_{ij}^{kl}\left(u_ku_l\log\frac{u_ku_l}{u_iu_j}-u_ku_l+u_iu_j\right)$$

$$-\sum_{ik}\alpha_i^k\left(u_k\log\frac{u_k}{u_i}-u_k+u_i\right).$$

En utilisant l'inégalité

$$y\log\frac{y}{x}-y+x=\int_x^y\log\frac{t}{x}\,dt\geqq 0 \tag{3.18}$$

pour $x>0, y>0$, on obtient

$$\sum_i\left(\frac{\partial}{\partial t}+c_i\frac{\partial}{\partial x}\right)(u_i\log u_i)(x,t)\leqq 0\,. \tag{3.19}$$

D'ailleurs, du fait que $\int_R\frac{\partial}{\partial x}(u_i\log u_i)(x,t)dx=0$, on a

$$\frac{d}{dt}\int_R\sum_i u_i\log u_i(x,t)dx=\int_R\sum_i\frac{\partial}{\partial t}(u_i\log u_i)(x,t)dx$$

$$=\int_R\sum_i\left(\frac{\partial}{\partial t}+c_i\frac{\partial}{\partial x}\right)(u_i\log u_i)(x,t)dx$$

$$\leqq 0\,.$$

D'abord on suppose que les u_i^0 sont périodiques de période π et que les u_i^0 sont bornées, positives et sommables en $]0,\pi[$. L'intégration (3.19) sur $D=]0,\pi[\times[0,T[$ nous donne que

$$0\geqq\iint_D\sum_i\left(\frac{\partial}{\partial t}+c_i\frac{\partial}{\partial x}\right)(u_i\log u_i)(x,t)dx\,dt$$

$$=\oint_{\partial D}\sum_i(-u_i\log u_i(x,t)dx+c_iu_i\log u_i(x,t)dt)$$

$$=\int_0^\pi\sum_i(u_i\log u_i(x,T)-u_i^0\log u_i^0(x))dx$$

$$=\int_0^\pi\sum_i u_i(x,T)\log\frac{u_i(x,T)}{E_0}dx$$

$$+\int_0^\pi\sum_i\{u_i(x,T)\log E_0-u_i^0\log u_i^0(x)\}dx\,.$$

Du coup, on a

$$
(3.20)\quad \begin{aligned}
&\int_0^\pi \sum_i u_i(x, T)\log\frac{u_i(x, T)}{E_0}dx \\
&\leqq \int_0^\pi \sum_i \{u_i^0 \log u_i^0(x) - u_i(x, T)\log E_0\}dx \\
&\leqq \log E_0 \int_0^\pi \sum_i (u_i^0(x) - u_i(x, T))dx \\
&= 0\,.
\end{aligned}
$$

En utilisant l'inégalité $x\log x > x|\log x| - 1$ pour $x>0$, on a

$$
\begin{aligned}
0 &\geqq E_0 \sum_i \int_0^\pi \frac{u_i(x, t)}{E_0}\log\frac{u_i(x, t)}{E_0}dx \\
&> E_0 \sum_i \int_0^\pi \left(\frac{u_i(x, t)}{E_0}\left|\log\frac{u_i(x, t)}{E_0}\right| - 1\right)dx \\
&= \sum_i \int_0^\pi u_i(x, t)\left|\log\frac{u_i(x, t)}{E_0}\right|dx - \pi P E_0\,,
\end{aligned}
$$

c'est-à-dire

$$
(3.21)\quad \sum_i \int_0^\pi u_i(x, t)\left|\log\frac{u_i(x, t)}{E_0}\right|dx < \pi P E_0\,.
$$

Soient $L \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ et $m \in \boldsymbol{R}_+$, on partage l'intégral $\int_{|y-x|\leqq L} \sum_i u_i(y, t)dy$ en deux morceaux comme suit :

$$
(3.22)\quad \int_{|y-x|\leqq L} \sum_i u_i(y, t)dy = J_1 + J_2
$$

où J_1 (resp. J_2) est l'intégrale sur le domaine $\{y \in \boldsymbol{R}\,;\ |y-x| \leqq L,\ 0 \leqq u_i(y, t) \leqq E_0 e^m\}$ (resp. $\{y \in \boldsymbol{R}\,;\ |y-x| \leqq L,\ u_i(y, t) \geqq E_0 e^m\}$). Alors, pour J_1, on a immédiatement une estimation :

$$
(3.23)\quad J_1 \leqq 2LPE_0 e^m\,.
$$

D'autre part, pour J_2, le fait que

$$
1 \leqq \frac{1}{m}\left|\log\frac{u_i(y, t)}{E_0}\right|
$$

nous amène à l'estimation :

(3.24)
$$J_2 \leqq \frac{1}{m}\int_0^\pi \sum_i u_i(y, t) \left|\log \frac{u_i(y, t)}{E_0}\right| dy$$
$$< \frac{\pi}{m} PE_0,$$

car on a l'inégalité (3.21).

Quand on utilise les estimations (3.23) et (3.24) dans l'identité (3.22), on obtient

(3.25)
$$\int_{|y-x| \leq L} \sum_i u_i(y, t) dy < \left(2Le^m + \frac{\pi}{m}\right) PE_0 .$$

Maintenant, en supposant que $m > \frac{2\pi PE_0}{\varepsilon}$ et $L < \frac{\varepsilon}{4e^m PE_0}$ où $\varepsilon \in \left]0, \frac{1-\delta}{C_1 C_2}\right]$ avec un certain nombre $\delta > 0$, on s'aperçoit que le second membre de l'inégalité (3.25) est inférieure à $\varepsilon \leqq \frac{1-\delta}{C_1 C_2}$. Compte tenu de la propagation à vitesse finie, on pose $U_i(x, t)$ comme suit :

(3.26)
$$U_i(x, t_1) = \begin{cases} u_i(x, t_1) & \text{si} \quad |x - X| \leqq L \\ 0 & \text{si} \quad |x - X| > L \end{cases}$$

avec $t_1 > 0$ et $X \in \boldsymbol{R}$ fixes.

Alors on a
$$\sum_i \int_0^\pi U_i(x, t_1) dx < \varepsilon \leqq \frac{1-\delta}{C_1 C_2}.$$

Comme on a montré, dans § 3.1, l'existence d'une solution globale en temps pour une "petite" masse totale, les $U_i(x, t)$ existent pour $x \in \boldsymbol{R}$ et $t > t_1$ avec X fixe. En plus, chaque $U_i(x, t)$ coïncide avec $u_i(x, t)$ pour $(x, t) \in \{(x, t) \in \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R}_+ ; |x - X| \leqq L - c(t - t_1), t_1 \leqq t \leqq t_1 + (L/c)\}$, où c est la vitesse finie.

Par suite, les solutions définies pour $t \leqq t_1$ sont prolongeables jusqu'à $t \leqq t_1 + (L/c)$.

Par conséquent, il existe une solution globale en temps pour une "grande" masse totale avec des données périodiques.

Pour les données "non-périodiques", il suffit de passer la période vers l'infini. (Voir [5], [16]).

Chapitre IV.

Démonstration du Théorème II.2.

J. M. Bony [2] introduit la quantité suivante :

$$d(x,t)=\int_{-\infty}^{x}\sum_{i\in D}u_i(\xi,t)d\xi\,. \tag{4.1}$$

Alors on a

$$0\leqq d(x,t)\leqq\mu \tag{4.2}$$

$$\frac{\partial d}{\partial x}=\sum_{i\in D}u_i\,. \tag{4.3}$$

Ensuite on a

$$\begin{aligned}\frac{\partial d}{\partial t}&=\int_{-\infty}^{x}\sum_{i\in D}\frac{\partial u_i}{\partial t}d\xi\\&=\int_{-\infty}^{x}\sum_{i\in D}\Big\{-c_i\frac{\partial u_i}{\partial x}+\sum_{jkl}(A_{ij}^{kl}u_ku_l-A_{kl}^{ij}u_iu_j)\\&\quad+\sum_k(\alpha_i^ku_k-\alpha_k^iu_i)\Big\}d\xi\,.\end{aligned}$$

En utilisant la symétrie des sommes par rapport aux indices, on a la somme pour les A_{ij}^{kl}

$$\begin{aligned}&=\sum_{\substack{i\in D\\ j\in G}}\Big(\sum_{\substack{k\in D\\ l\in G}}+\sum_{\substack{k\in G\\ l\in D}}\Big)(A_{ij}^{kl}u_ku_l-A_{kl}^{ij}u_iu_j)\\&=0\,,\end{aligned}$$

la somme pour les α_i^k

$$\begin{aligned}&=\sum_{\substack{i\in D\\ k\in D}}(\alpha_i^ku_k-\alpha_k^iu_i)\\&=0.\end{aligned}$$

Donc on a

$$\frac{\partial d}{\partial t}=-\sum_{i\in D}c_iu_i\,. \tag{4.4}$$

Pour $K>0$ convenable, posons

$$S(t)=\sup_{\substack{x\in \boldsymbol{R}\\ p\in G}}e^{Kd(x,t)}u_p(x,t)\,. \tag{4.5}$$

On va montrer que $S(t)$ décroit en $t\in\boldsymbol{R}_+$. L'exponentielle dans (4.5) étant comprise entre 1 et $K\mu$ il en résultera que

$$\sup_{\substack{x\in \boldsymbol{R}\\ p\in G}}u_p(x,t)\leqq S(t)\leqq S(0)\leqq e^{K\mu}\sup_{\substack{x\in \boldsymbol{R}\\ p\in G}}u_p(x,0)\,.$$

De même argument pour les $p\in D$, on obtiendra enfin

$$\sup_{x\in R} u_p(x,t)\leqq e^{K\mu}\sup_{x\in R} u_p(x,0) \tag{4.6}$$

et donc le théorème II.2.

D'après un argument classique, pour prouver la décroissance de $S(t)$, il suffit de montrer que l'on a $(\partial/\partial t)(e^{Kd(x,t)}u_p(x,t))\leqq 0$ pour tout (x,p) tel que la valeur $S(t)$ soit atteinte. On se placera désormais en un tel point et on posera $E=\{p\}$. On a alors

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}(e^{Kd(x,t)}u_p(x,t))\\
&=\left(\frac{\partial}{\partial t}+c_p\frac{\partial}{\partial x}\right)(e^{Kd}u_p)\\
&=e^{Kd}\left\{K\left(\frac{\partial d}{\partial t}+c_p\frac{\partial d}{\partial x}\right)u_p+\left(\frac{\partial}{\partial t}+c_p\frac{\partial}{\partial x}\right)u_p\right\}\\
&=e^{Kd}\left\{K\sum_{i\in D}(c_p-c_i)u_i\right\}\sum_{p\in E}u_p\\
&\quad+\sum_{p\in E}\left\{\sum_{qrs}(A_{pq}^{rs}u_ru_s-A_{rs}^{pq}u_pu_q)+\sum_r(\alpha_p^ru_r-\alpha_r^pu_p)\right\}.
\end{aligned}$$

Alors la sommation du second terme est étendue à

$$E\times D\times D\times G\cup E\times D\times G\times D\,,$$

car $p\in G$ donc $E\subset G$. Elle est donc égale à $2\sum_{E\times D\times G\times D}(A_{pq}^{rs}u_ru_s-A_{rs}^{pq}u_pu_q)$. De même, celle-là du troisième est étendue à $E\times G$ et donc égale à $\sum_{E\times G}(\alpha_p^ru_r-\alpha_r^pu_p)$. En posant

$$\begin{aligned}
\phi(x,t)=&-K\sum_{\substack{p\in E\\ i\in D}}(c_i-c_p)u_pu_i+2\sum_{E\times D\times G\times D}(A_{pq}^{rs}u_ru_s-A_{rs}^{pq}u_pu_q)\\
&+\sum_{E\times G}(\alpha_p^ru_r-\alpha_r^pu_p)\,,
\end{aligned} \tag{4.7}$$

on a alors

$$\frac{\partial}{\partial t}(e^{Kd(x,t)}u_p(x,t))=e^{Kd(x,t)}\phi(x,t)\,. \tag{4.8}$$

La valeur $S(t)$ étant atteinte pour l'indice $p\in E$, on a, pour tout $(r,s)\in G\times D$,

$$u_r(x,t)\leqq u_p(x,t) \tag{4.9}$$

donc

(4.10) $$u_r u_s(x, t) \leqq \sum_{\substack{p \in E \\ i \in D}} u_p u_i(x, t).$$

(i) Dans le cas $c_p < 0$, on a

$$c_i - c_p > 0 \qquad \text{pour} \quad i \in D$$

$$\sum_{E \times D \times G \times D} A_{pq}^{rs} u_r u_s \leqq C^{te} \sum_{\substack{r \in G \\ s \in D}} u_r u_s \leqq C^{te} \sum_{\substack{p \in E \\ i \in D}} u_p u_i$$

$$\sum_{E \times G} (\alpha_p^r u_r - \alpha_r^p u_p) = \sum_{E \times G} \alpha_p^r (u_r - u_p) \leqq 0$$

où les constantes ne dépendent que de l'équation, car on suppose l'hypothèse (H7). Alors $\phi(x, t)$ est strictement négative pour K assez grand.

(ii) Dans le cas $c_p = 0$, on notera alors D_0 (resp. G_0) l'ensemble des i appartenant à D (resp. G) vérifiant $c_i = 0$. On a $E = G_0$ et

(4.7′) $$\phi(x, t) = -K \sum_{\substack{p \in G_0 \\ i \in D}} c_i u_p u_i + 2 \sum_{G_0 \times D \times G \times D} (A_{pq}^{rs} u_r u_s - A_{rs}^{pq} u_p u_q)$$
$$+ \sum_{G_0 \times G} (\alpha_p^r u_r - \alpha_r^p u_p).$$

De même, la troisième sommation est égale à $\sum_{G_0 \times G} \alpha_p^r (u_r - u_p) \leqq 0$ en vertu de (4.9).

On va estimer la seconde sommation.

- Pour $c_s = 0$, la seconde ne porte que sur des quadruplets $(p, q, r, s) \in G_0 \times D_0 \times G_0 \times D_0$ à cause de l'hypothèse (H3).

Par symétrie, cette somme est nulle.

- Pour $c_s > 0$, on a alors $D \backslash D_0 \neq \emptyset$. De même, on a

$$\sum_{G_0 \times D \times G \times (D \backslash D_0)} A_{pq}^{rs} u_r u_s \leqq C^{te} \sum_{\substack{r \in G \\ s \in D \backslash D_0}} u_r u_s$$
$$\leqq C^{te} \sum_{\substack{p \in G_0 \\ i \in D \backslash D_0}} u_p u_i$$

$$c_i > 0 \qquad \text{pour} \quad i \in D \backslash D_0$$

où les constantes ne dépendent que de l'équation. Par conséquent, $\phi(x, t)$ est strictement négative pour K assez grand.

Ce qui achève la démonstration du théorème II.2.

Références Bibliographiques

[1] Beale, J.T., Large-time behavior of discrete velocity Boltzmann equations, Comm. Math. Phys. **106** (1986), 659-678.

[2] Bony, J.M., Solutions globales bornées pour les modèles discrets de l'équation de

Boltzmann, en dimension 1 d'espace, Actes des journées E. D. P. de Saint-Jean-de-Monts, n°16, (1987).
[3] Broadwell, J. E., Study of rarefied shear flow by the discrete velocity method, J. Fluid Mech. **19** (1964), 401.
[4] Broadwell, J. E., Shock structure in a simple discrete velocity gas, Phys. Fluids **7** (1964), 1243.
[5] Cabannes, H. and S. Kawashima, Le problème aux valeurs initiales en théorie cinétique discrète, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **307** (1988), 507-511.
[6] Carleman, T., Problèmes mathématiques dans la théorie cinétique des gaz, Uppsala, Publications Scientifiques de l'Institut Mittag-Leffler (1957).
[7] Cercignani, C., Illner, R. and M. Shinbrot, A boundary value problem for discrete velocity models, Duke Math. J. **55** (1987), 889-900.
[8] Cercignani, C., Illner, R. and M. Shinbrot, A boundary value problem for the two dimensional Broadwell model, Comm. Math. Phys. **114** (1988), 687-698.
[9] Gatignol, R., Théorie cinétique des gaz à répartition discrète de vitesses, Lecture Notes in Phys. vol. 36, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1975.
[10] Gross, E. P., Recent investigations of the Boltzmann equation, Rarefied Gas Dynamics, (edited by F. M. Devienne), Pergamon Press, New York, 1960.
[11] Heitler, W., Le principe du bilan détaillé, Ann. Inst. H. Poincaré, Paris **15** (1956), 67-80.
[12] Illner, R., Global existence results for discrete velocity models of the Boltzmann equation in several dimensions, J. Méc. Théor. Appl. **1** (1982), 611-622.
[13] Jancel, R., Les Fondements de la Mécanique Statistique Classique et Quantique, Gauthier-Villars, Paris, 1963.
[14] Kawashima, S., Initial-boundary value problem for the discrete Boltzmann equation, Séminaire E. D. P. de l'Ecole Polytechnique, n°3 (1988-1989).
[15] Kawashima, S., Global solutions to the initial-boundary value problems for the discrete Boltzmann equation, à paraître.
[16] Maxwell, J. C., On the dynamical theory of gases, Phil. Trans. Roy. Soc. **157** (1866), réimprimé dans "Scientific Papers" 2 Londres (1890) et par Dover, New York (1965).
[17] Tartar, L., Existence globale pour un système hyperbolique semi-linéaire de la théorie cinétique des gaz, Séminaire Goulaouic-Schwartz, n°1 (1975-1976).
[18] Yamazaki, M., Existence globale pour les modèles discrets de l'équation de Boltzmann dans un tube mince infini, C. R. Acad. Sci. Paris. **313**, Sér. I Math. (1991), 29-32.

(Reçu le 11 avril 1991)

Department of Mathematics
Faculty of Science
University of Tokyo
7-3-1, Hongô, Bunkyô-ku, Tokyo
113 Japan